

УДК 539.32

О. В. Коновалов, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов

Волгоградский государственный технический университет

ВЕКТОРИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КОНСТАНТ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ И КОНСТАНТ УПРУГОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРУГИХ СВОЙСТВ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

Рассматривается методика построения пространственно ориентированных моделей констант упругой податливости и упругой жесткости на микроуровне. Исследуются поликристаллические материалы с кубической объемноцентрированной, гранецентрированной и гексагональной решеткой. На основании построенных объемных моделей модулей упругости и сдвига исследуется анизотропия упругих свойств поликристаллов различных металлов. Результаты работы можно использовать при изучении свойств материалов на микроуровне.

Ключевые слова: анизотропия, модуль упругости, упругие свойства, поликристалл, модуль Юнга.

Особенности кристаллической решетки определяют неоднородность упругих свойств поликристаллических материалов, что связано с анизотропией характеристик составляющих поликристаллы зерен.

Пространственная решетка поликристалла характеризуется внутренним неконтиуальным строением с расположением материальных частиц в определенном порядке [1, 2].

При приложении нагрузки вследствие возникающего напряжения происходит деформация твердого тела. Известно, что при достаточно малых напряжениях деформация пропорциональна величине приложенного напряжения. Предположим, например, что изотропный твердый стержень испытывает чистое растяжение. Согласно закону Гука,

$$\varepsilon = s\sigma, \quad (1)$$

где s — константа, называемая константой упругой податливости или податливостью для данной конкретной системы напряжений и данного направления деформаций. Вместе с тем мы можем записать

$$\sigma = c\varepsilon, \quad c = \frac{1}{s}, \quad (2)$$

где c — константа упругой жесткости или просто жесткость; c называется также модулем Юнга.

В табл. 1 представлено количество независимых констант упругой податливости и упругой жесткости для различных систем.

Таблица 1

Количество независимых констант упругой податливости и упругой жесткости для различных систем

Триклинная	Моноклинная	Тетрагональная	Кубическая	Ромбическая	Гексагональная	Тригональная
21	13	6,7	3	9	5	6,7

Константа упругой жесткости определяется в направлении растяжения при единичном продольном напряжении [2]:

$$E = \frac{1}{s'_{11}}, \quad (3)$$

где s_{11} — продольная деформация.

После преобразования получаем [3, 4]:

$$s'_{1111} = a_{1m}a_{1n}a_{1p}a_{1q}s_{mnpq}. \quad (4)$$

Для кубических кристаллов с использованием формулы преобразования тензора $4R$ [5, 6]:

$$\begin{aligned} s'_{1111} = & (a_{11}a_{11}a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13}a_{13}a_{13})s_{11} + \\ & + (a_{11}a_{11}a_{12}a_{12} + a_{11}a_{11}a_{13}a_{13} + a_{12}a_{12}a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12}a_{13}a_{13} + a_{13}a_{13}a_{11}a_{11} + \\ & + a_{13}a_{13}a_{12}a_{12})s_{12} + (a_{11}a_{12}a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}a_{12}a_{11} + a_{11}a_{13}a_{11}a_{13} + a_{11}a_{13}a_{13}a_{11} + \\ & + a_{12}a_{11}a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}a_{12}a_{11} + a_{12}a_{13}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{13}a_{12} + a_{13}a_{11}a_{11}a_{13} + \\ & + a_{13}a_{11}a_{13}a_{11} + a_{13}a_{12}a_{12}a_{13} + a_{13}a_{12}a_{13}a_{12})\frac{1}{4}s_{44}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для гексагональных кристаллов с использованием формулы преобразования тензора $4R$ [5, 7]:

$$\begin{aligned} s'_{1111} = & \left(a_{11}a_{11}a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12} + \frac{1}{2}a_{11}a_{12}a_{11}a_{12} + \frac{1}{2}a_{11}a_{12}a_{12}a_{11} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}a_{12}a_{11}a_{11}a_{12} + \frac{1}{2}a_{12}a_{11}a_{12}a_{11} \right) s_{11} + (a_{11}a_{11}a_{12}a_{12} + a_{12}a_{12}a_{11}a_{11} - \\ & - \frac{1}{2}a_{11}a_{12}a_{11}a_{12} - \frac{1}{2}a_{11}a_{12}a_{12}a_{11} - \frac{1}{2}a_{12}a_{11}a_{11}a_{12} - \frac{1}{2}a_{12}a_{11}a_{12}a_{11}) s_{12} + \\ & + (a_{11}a_{11}a_{13}a_{13} + a_{12}a_{12}a_{13}a_{13} + a_{13}a_{13}a_{11}a_{11} + a_{13}a_{13}a_{12}a_{12}) s_{13} + \\ & + a_{13}a_{13}a_{13}a_{13}s_{33} + (a_{11}a_{13}a_{11}a_{13} + a_{11}a_{13}a_{13}a_{11} + a_{12}a_{13}a_{12}a_{13} + \\ & + a_{12}a_{13}a_{13}a_{12} + a_{13}a_{11}a_{11}a_{13} + a_{13}a_{11}a_{13}a_{11} + a_{13}a_{12}a_{12}a_{13} + a_{13}a_{12}a_{13}a_{12})\frac{1}{4}s_{44}. \end{aligned} \quad (6)$$

Зависимость модуля упругости и модуля сдвига от направления можно получить с использованием матриц податливостей [3, 8, 9] относительно кристаллографических осей.

Теория упругости кристаллов [9, 10] дает два уравнения для $1/E$ и $1/G$ как функций углов оси бруска с кристаллографическими осями; коэффициентами этих уравнений являются упругие параметры s_{ik} .

Для кристаллов с кубической решеткой [11] зависимость величин модуля упругости и модуля сдвига от ориентировки оси стержня [12, 13] определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E} &= s_{11} - 2 \left[(s_{11} - s_{12}) - \frac{1}{2} s_{44} \right] (a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{13}^2 a_{11}^2), \\ \frac{1}{G} &= s_{44} + 4 \left[(s_{11} - s_{12}) - \frac{1}{2} s_{44} \right] (a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{12}^2 a_{13}^2 + a_{13}^2 a_{11}^2).\end{aligned}\quad (7)$$

В данном случае a_{11} , a_{12} , a_{13} представляют собой косинусы углов, образуемых осью стержня с тремя ребрами куба ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$) [14].

Для кристаллов с гексагональной решеткой [13, 15, 16] упругие свойства определяются в зависимости от ориентировки оси стержня:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E} &= s_{11} (1 - a_{13}^2)^2 + s_{33} a_{13}^4 + (2s_{13} + s_{44}) a_{13}^2 (1 - a_{13}^2), \\ \frac{1}{G} &= s_{44} + \left[(s_{11} - s_{12}) - \frac{1}{2} s_{44} \right] (1 - a_{13}^2) + 2(s_{11} + s_{33} - 2s_{13} - s_{44}) a_{13}^2 (1 - a_{13}^2).\end{aligned}\quad (8)$$

В связи с тем, что упругие свойства обладают симметрией вращения по отношению к шестерной оси [13, 17] в уравнения (8) входит только косинус a_{13} угла с гексагональной осью.

Пространственную сферическую систему координат (рис. 1) используем для вычисления модулей упругости в направлениях x , y , z [18], где

$$\begin{aligned}x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi); \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi); \\ z &= r \cos(\theta),\end{aligned}\quad (9)$$

а косинусы соответствующих углов [2] равны

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{x}{r} = \sin(\theta) \cos(\varphi); \\ a_{12} &= \frac{y}{r} = \sin(\theta) \sin(\varphi); \\ a_{13} &= \frac{z}{r} = \cos(\theta).\end{aligned}\quad (10)$$

Для получения пространственного представления о неоднородности модулей упругости и податливости поликристаллов строятся объемные (векториальные) модели модулей [2].

Полученные векториальные модели для кубических гранецентрированных кристаллов представлены на рис. 2.

На рис. 3 представлены пространственные модели для кристаллов с гексагональной решеткой.

На рис. 4 представлена пространственная модель для кристаллов с тригональной решеткой.

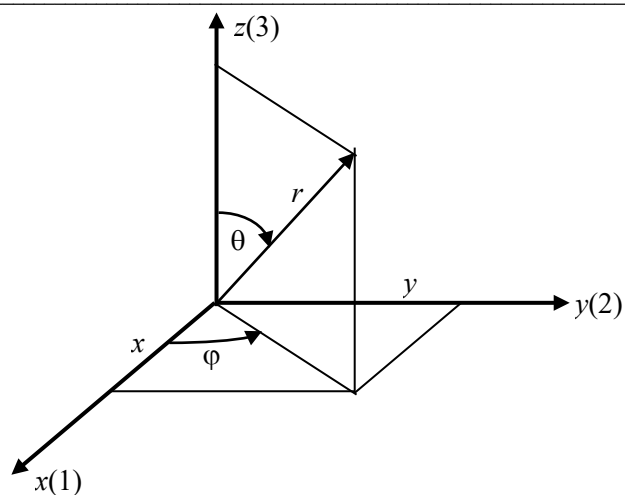


Рис. 1. Пространственная сферическая система координат

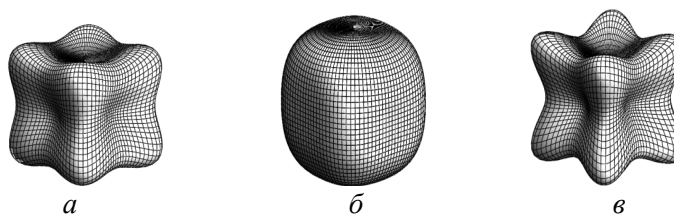


Рис. 2. Пространственные модели, характеризующие упругую жесткость: *a* — железа; *b* — алюминия; *v* — меди

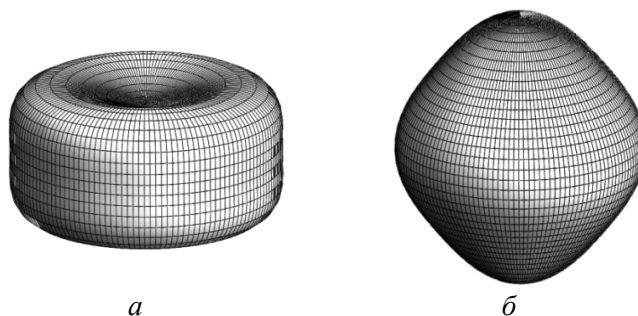


Рис. 3. Пространственные модели, характеризующие упругую жесткость: *a* — цинка; *b* — магния

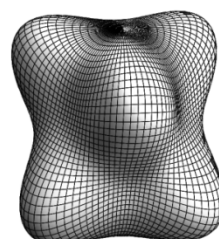


Рис. 4. Пространственная модель, характеризующая упругую жесткость кварца

Вследствие того, что в преобразование (9) входит только косинус угла, пространственная модель, характеризующая упругую жесткость кристаллов с гексагональной решеткой, представляет собой поверхность вращения.

Для кристаллов с кубической решеткой пространственная модель, характеризующая упругую жесткость, имеет форму скругленного куба с углублениями в центре осевых поверхностей.

В случае, когда составляющая $\left[(s_{11} - s_{12}) - \frac{1}{2}s_{44} \right]$ уравнения (7) принимает нулевые значения, наблюдается упругая изотропия.

Модуль упругой жесткости на микроуровне при условии, что выражение $\left[(s_{11} - s_{12}) - \frac{1}{2}s_{44} \right]$ принимает отрицательное значение, имеет максимум в направлении $\langle 100 \rangle$ и минимум в направлении $\langle 111 \rangle$.

Анизотропию упругих свойств исследованных кристаллов можно также оценить, помимо известного параметра анизотропии, определяемого как $A = (c_{11} - c_{12}) / 2c_{44}$, по отношениям наибольших к наименьшим значениям модулей упругости кристаллов. Отношения наибольших к наименьшим значениям модулей, полученные по данным работ и вычисленные нами, представлены в табл. 2, из рассмотрения которой можно оценить степень анизотропии упругих свойств.

Исходя из формы векториальных моделей, показанных на рис. 2 и 3, видно, что неоднородность упругих свойств имеет значительный разброс.

Аналогичные выводы можно сделать, анализируя векториальные модели модуля сдвига G .

Т а б л и ц а 2

Отношения максимальных значений модуля Юнга к минимальным значениям для сильноанизотропных поликристаллов

$\frac{E_{\max}}{E_{\min}}$	Железо	Медь	Цинк
	2,14	2,86	3,55

Наибольший разброс величин податливости характерен для β -латуни: отношение $\frac{E_{\max}}{E_{\min}}$ может достигать значений 8...9.

В табл. 3 приведены отношения максимальных значений модуля Юнга к минимальным значениям для слабоанизотропных поликристаллов.

Т а б л и ц а 3

Отношения максимальных значений модуля Юнга к минимальным значениям для слабоанизотропных поликристаллов

$\frac{E_{\max}}{E_{\min}}$	Магний	Алюминий
	1,16	1,22

Пространственные модели, описывающие упругие свойства изотропных тел, представляют собой сферическую поверхность, что характеризует равенство упругих свойств во всех направлениях.

Пространственные модели, характеризующие упругую жесткость поликристаллов железа, алюминия, меди, цинка и магния, наглядно показывают зависимость модуля Юнга от пространственного положения по отношению к осям. Данное обстоятельство дает наглядное представление о неоднородности упругих свойств поликристаллов с гексагональной, гранцентрированной и тригональной решеткой.

При исследовании констант упругой податливости для данной конкретной системы напряжений и данного направления деформации можно сделать аналогичные выводы, анализируя пространственные модели модуля сдвига G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Най Дж. Физические свойства кристаллов / Пер. с англ. М. : Мир, 1967. 386 с.
2. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеднородных сред. М. : Наука, 1977. 399 с.
3. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М. : Наука, 1979. 639 с.
4. Kelly A., Growes G. *Krystallography and crystal defects*. London : Longman, 1970. 496 p.
5. Hill R. Elastic behaviour of a crystalline aggregate // *Proc. Phys. Soc.* 1952. A 65. Pp. 349—354.
6. Кукса Л. В., Арзамасова Л. М. Метод оценки масштабного эффекта упругих свойств однофазных и двухфазных поликристаллических материалов на микро-, мезо- и макроуровнях // *Заводская лаборатория*. 1999. № 5. С. 29—35.
7. Bunge H. J., Schwarzer R. Orientierungsstereologie — ein neuer Zweig der Texturforschung // *Contact. Zeitschrift des Vereins von Freunden der Technischen Universität Clausthal*. 1998. № 2. S. 67—73.
8. Евдокимов Е. Е., Арзамасова Л. М., Клименко В. И., Коновалов О. В. Исследование концентрации напряжений в элементах конструкций из поликристаллических материалов // *Инженер. вестн. Дона*. 2018. № 4.
9. Кукса Л. В., Арзамасова Л. М. Упругие свойства поликристаллов различных металлов их определение на основе построения векториальных моделей модуля Юнга и модуля сдвига для монокристаллов // *Вестн. ВолГАСУ*. 2013. Вып. 32(51). С. 101—109.
10. Kuksa L. W., Arzamaskova L. M. Der Massstabeffekt der mechanischen Eigenschaften auf der Mikro-, Meso-, Makroebene einphasiger und zweiphasiger polykristalliner Werkstoffe // *Technische Mechanik. Deutschland*. 2001. Band 21. Heft 1. S. 21—30.
11. Способ определения упругих свойств однофазных металлов : пат. RU 2410759 С2 Рос. Федерация : МПК G09B 23/26 / Л. В. Кукса, Л. М. Арзамасова, А. В. Сергеев : опубл. 27.01.2011, Бюл. № 3.
12. Кукса Л. В. *Механика структурно-неоднородных материалов на микро- и макроуровнях* : моногр. Волгоград : ВолГАСА, 2002.
13. Huntington G. *Elastische beständige Kristalle* // *Erfolge der physischen Wissenschaften*. 1967. B. 74. Ausgabe 2. S. 302. Ausgabe 3. S. 464.
14. Schmid E., Boas W. *Kristallplastizität*. Berlin, 1935. 386 s.
15. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Berlin : Teubner, 1928. 962 s.
16. Kelly A., Growes G. *Krystallography and crystal defects*. London : Longman, 1970. 496 s.
17. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals*. Oxford : Clarendon press, 1964. 386 s.
18. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // *Z. angew. Math. und Mech.* 1929. 9. Nr1. S. 49—58.

© Коновалов О. В., Арзамасова Л. М., Евдокимов Е. Е., 2022

Поступила в редакцию
в сентябре 2022 г.

Ссылка для цитирования:

Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е. Векториальные модели констант упругой податливости и констант упругой жесткости при исследовании неоднородности упругих свойств поликристаллов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 4(89). С. 99—105.

Об авторах:

Коновалов Олег Владимирович — канд. тех. наук, доц., доц. каф. математических и естественно-научных дисциплин, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; miit.vgasu@mail.ru

Арзамаскова Лариса Михайловна — канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

Евдокимов Евгений Евгеньевич — канд. тех. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

Oleg V. Konovalov, Larisa M. Arzamaskova, Evgenii E. Evdokimov

Volgograd State Technical University

**VECTORIAL MODELS OF ELASTIC COMPLIANCE CONSTANTS
AND ELASTIC STIFFNESS CONSTANTS IN THE STUDY OF HETEROGENEITY
OF ELASTIC PROPERTIES OF POLYCRYSTALS**

The construction of vectorial models of Young's modulus and shear modulus for cubic face-centered, cubic volume-centered and hexagonal crystals is considered. The anisotropy of elastic properties of polycrystals of various metals is investigated on the basis of the constructed volumetric models of elastic and shear modulus. The results of the work can be used to study the properties of materials at the micro level.

Key words: anisotropy, modulus of elasticity, elastic properties, polycrystal, Young's modulus.

For citation:

Konovalov O. V., Arzamaskova L. M., Evdokimov E. E. [Vectorial models of elastic compliance constants and elastic stiffness constants in the study of heterogeneity of elastic properties of polycrystals]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2022, iss. 4, pp. 99—105.

About authors:

Oleg V. Konovalov — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; miit.vgasu@mail.ru

Larisa M. Arzamaskova — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru

Evgenii E. Evdokimov — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru