

УДК 624.04: 519.6

С. А. Калиновский, М. И. Бочков

Волгоградский государственный технический университет

РАСЧЕТ НИТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА С УЧЕТОМ РЕАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Рассмотрен случай расчета нерастяжимой нити, нагруженной распределенной нагрузкой, которая приводится к узловым. С учетом реальной геометрии нити как параболической, на каждый междуузловой участок действует различная нагрузка, в связи с чем в узлах действуют различные по величине усилия. Дополнительно рассмотрен случай нагружения нити неравномерной нагрузкой. Сделаны выводы о зависимости возникающего в нити усилия от припуска нити.

Ключевые слова: нагруженная распределенной нагрузкой нить, стрела провисания, величина припуска, распор, растягивающие усилия, зависимость внутренних усилий от припуска, дискретное приложение распределенной нагрузки.

Задача о расчете нити на действие распределенной нагрузки является актуальной [1, 2]. Примерами применения могут быть линии электропередач, тросы вантовых покрытий зданий и сооружений [3, 4].

Нить, закрепленная на двух опорах (рис. 1), будет иметь стрелу провисания, поскольку ее установка в горизонтальном положении является затруднительной, а усилия в ней будут принимать очень большие значения [5, 6]. Следствием провисания является то, что при расстановке узлов дискретного приложения даже равномерно распределенной нагрузки (например, собственного веса) с фиксированным шагом d по оси X на каждый узел будет действовать различная нагрузка. Это связано с тем, что деформированное состояние нити, как показано выше, таково, что длины участков между точками, находящимися на одинаковом горизонтальном расстоянии друг от друга, различны.

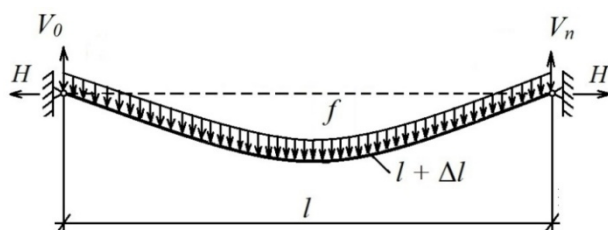


Рис. 1. Расчетная схема нити, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Определим усилия в нити, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, при различных величинах максимальной стрелы провисания. В свою очередь, стрела провисания зависит от того, какой длины принимается нить. Поскольку длина перекрываемого пролета является фиксированной величиной, то удлинение нити — припуск, и будет той переменной величиной, посредством изменения которой и достигается изменение стрелы провисания.

В качестве нагрузки, равномерно распределенной по нити, может рассматриваться собственный вес нити, вес вышележащих ограждающих конструкций или некоторые варианты распределения снеговой нагрузки по покрытию. Подобный подход к решению задачи используется и иностранными исследователями [7—9]. Ниже рассматривается приведение собственного веса к системе сосредоточенных сил, приложенных в узлах, расположенных с некоторым интервалом d . В этом случае расчетная схема нити примет вид, указанный на рис. 2.

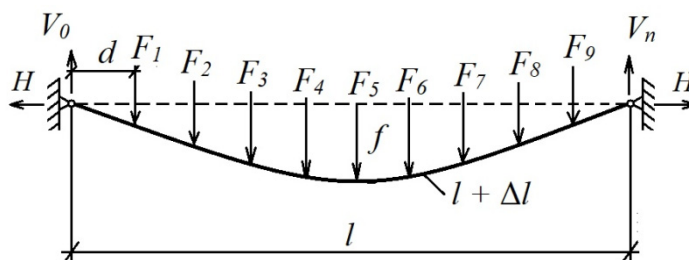


Рис. 2. Схема загрузки нити после замены распределенной нагрузки системой сосредоточенных сил

Величину сосредоточенной нагрузки F_i , приходящейся в каждый дискретный узел системы, определим по формуле:

$$F_i = q \left(\frac{\sqrt{(f_{i-1} - f_i)^2 + d^2} + \sqrt{(f_i - f_{i+1})^2 + d^2}}{2} \right), \quad (1)$$

где q — погонный вес нити; f_{i-1} , f_i , f_{i+1} — стрела провисания нити соответственно $i - 1$, i , $i + 1$ узла.

На следующем этапе расчет нити можно выполнить по алгоритму, основанному на методе конечных элементов в форме классического смешанного метода [10—13], активно развиваемого исследователями научной школы профессора В. А. Игнатъева [14, 15]. Представим угловую нагрузку в виде дискретного тригонометрического ряда:

$$F_i = \sum_{k=1}^{n-1} F_k \sin \frac{k\pi i}{n}, \quad (2)$$

где коэффициенты разложения F_k определяются посредством разложения в дискретный тригонометрический ряд по синусам:

$$F_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} F_i \sin \frac{k\pi i}{n}. \quad (3)$$

Вертикальные смещения узлов f_i можно представить также в виде разложения в дискретный тригонометрический ряд по синусам. Связь между коэффициентами разложения функции нагрузок и функции узловых смещений

может быть установлена при рассмотрении зависимости между изгибающим моментом в статически определимой балке аналогичного пролета (фиктивной балке), провисанием нити и распором, определяемой выражением:

$$f_i = \frac{M_i^b}{H}, \quad (4)$$

где M_i^b — так называемый «балочный момент», H — распор, который в данном случае ввиду симметричного нагружения нити только вертикальными нагрузками, является постоянным.

Значение балочного изгибающего момента можно выразить также в виде дискретного тригонометрического ряда:

$$M_i = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \frac{d \sin \frac{k\pi i}{2n}}{4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}}. \quad (5)$$

Таким образом, провисание нити можно представить в виде:

$$f_i = \frac{1}{H} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \frac{d \sin \frac{k\pi i}{2n}}{4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}}. \quad (6)$$

Длина каждого участка нити может быть геометрически определена по формуле:

$$l_{i;i-1} = d + \Delta l_{i;i-1}, \quad (8)$$

где $\Delta l_{i;i-1}$ — часть длины нити, приходящаяся на каждый из участков вследствие ее провисания. Сумма этих частей равна припуску нити.

$$\Delta l = \sum_{i=0}^n \Delta l_{i;i-1}. \quad (9)$$

Учитывая что $l_{i;i-1}^2 = d^2 + (f_i - f_{i-1})^2$, где $f_i - f_{i-1}$ — разница вертикальных смещений соседних узлов, получим:

$$(d + \Delta l_{i;i-1})^2 - d^2 = (f_i - f_{i-1})^2$$

или

$$\Delta l_{i;i-1}^2 + 2d\Delta l_{i;i-1} = (f_i - f_{i-1})^2. \quad (10)$$

Выражение (10) можно привести к квадратному уравнению вида:

$$\Delta l_{i;i-1}^2 + 2d\Delta l_{i;i-1} - (f_i - f_{i-1})^2 = 0, \quad (11)$$

из которого

$$\Delta l_{i;i-1} = \sqrt{d^2 + (f_i - f_{i-1})^2} - d. \quad (12)$$

Подставив выражение (12) в (9) можно получить:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \sqrt{d^2 + (f_i - f_{i-1})^2} - l. \quad (13)$$

С учетом (3) выражение (13) преобразуется к виду:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \sqrt{d^2 + \frac{(M_i^b - M_{i-1}^b)^2}{H^2}} - l. \quad (14)$$

Выражение (14) может быть преобразовано, исходя из (4) и (5):

$$\Delta l = d \left(\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k^2 \left(\sin \frac{k\pi i}{n} - \sin \frac{k\pi(i-1)}{n} \right)^2}{16H^2 \sin^4 \frac{k\pi}{2n}} + 1} \right) - n \right). \quad (15)$$

Величина распора H при задаваемом припуске определяется итерационно. В свою очередь, при известной величине провисания хотя бы в одной точке, исходя из (6) можно получить:

$$H = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_k d \sin \frac{k\pi i}{n}}{4f_i \sin^2 \frac{k\pi}{2n}}. \quad (16)$$

Данный расчет может быть формализован в компьютерной программе, блок-схема которой представлена на рис. 3.

Далее приведены результаты расчетов конкретной конструкции со следующими упругими и геометрическими параметрами: перекрываемый пролет — 100 м, нить выполнена из стального каната диаметром 76 мм, вес 1 погон. м которого составляет 0,198 кН. Нить разбивается узлами на $n = 10$ равных участков, длиной $d = 10$ м. В таблице 1 представлены результаты расчета распора нити при величине припуска $\Delta l = 15$ м без учета разницы длин межузловых участков.

С учетом того, что нить имеет всегда большую длину, чем перекрываемый пролет, за счет припуска собственный вес принимался согласно выражению:

$$q = \frac{q_0(l + \Delta l)}{l}, \quad (18)$$

где q_0 — собственный вес 1 м каната по ГОСТ. Затем собственный вес перераспределен в узлы согласно выражению:

$$F_i = qd, \quad (19)$$

где F_i — эквивалентная сосредоточенная сила для участка нити длиной d . Силы F_i , таким образом, увеличиваются по модулю с увеличением припуска.

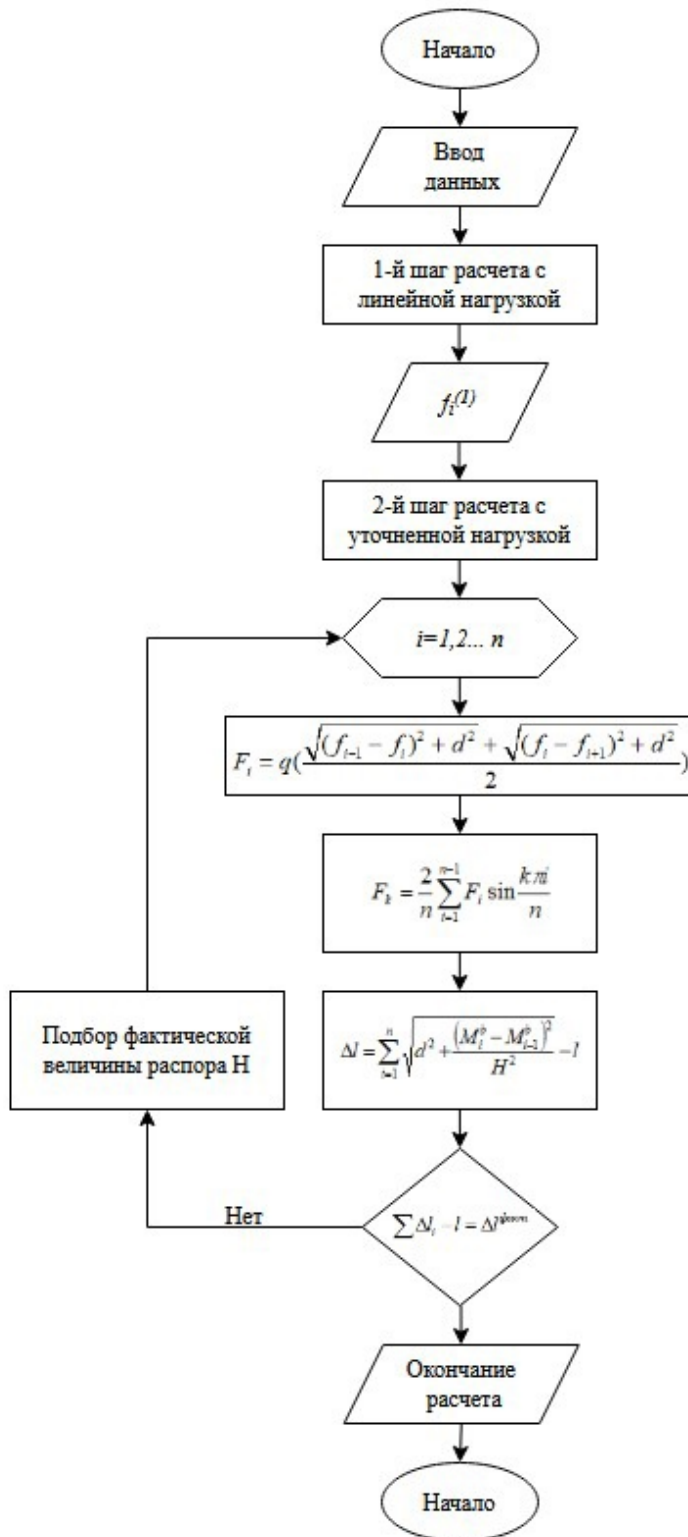


Рис. 3. Блок-схема алгоритма расчета нити с итерационным уточнением нагрузки

Таблица 1

F_i , кН	k	i	n	d	F_k , кН	Δl_i	f_i	H
							0	11,338
2,277	1	1	10	10	2,87528244	1,283	9,0375	
2,277	2	2	10	10	$8,8818 \cdot 10^{-17}$	1,234	16,0666	
2,277	3	3	10	10	0,893772824	1,154	21,0874	
2,277	4	4	10	10	$8,8818 \cdot 10^{-17}$	1,069	24,0999	
2,277	5	5	10	10	0,4554	1,009	25,1041	
2,277	6	6	10	10	$8,8818 \cdot 10^{-17}$	1,009	24,0999	
2,277	7	7	10	10	0,23203789	1,069	21,0874	
2,277	8	8	10	10	$2,2205 \cdot 10^{-16}$	1,154	16,0666	
2,277	9	9	10	10	0,072128274	1,234	9,0375	
		10		10		1,283	0	
						15	24,7552	

Учет разницы длин межузловых участков нити можно осуществить введением промежуточной итерации расчета. В таблице 2 представлены результаты первой итерации уточнения для приведенного выше примера расчета, подробно для случая, когда припуск нити составляет 15 м.

Таблица 2

F_i , кН	k	i	n	d	F_k , кН	Δl_i	f_i	H
							0	10,784
2,5445	1	1	10	10	2,7224	1,283	9,299	
2,3179	2	2	10	10	$-1,7764 \cdot 10^{-16}$	1,232	16,2384	
2,1417	3	3	10	10	1,0949	1,154	21,0285	
2,0289	4	4	10	10	$8,8818 \cdot 10^{-17}$	1,071	23,83255	
1,99	5	5	10	10	0,5591	1,010	24,7552	
2,0289	6	6	10	10	$8,8818 \cdot 10^{-17}$	1,010	23,8325	
2,1417	7	7	10	10	0,2854	1,071	21,0285	
2,3179	8	8	10	10	$3,1086 \cdot 10^{-16}$	1,154	16,2384	
2,5445	9	9	10	10	0,0888	1,232	9,298	
		10		10		1,283	0	
						15	24,7552	

По результатам первой итерации уточнения видно, что при предлагаемом подходе величина F_i является переменной по длине нити, однако свойство симметрии относительно центра сохраняется. Величина распора H по сравнению с линейным расчетом изменилась на 1,13 %.

По результатам второй итерации уточнения величина распора H изменилась менее чем на 0,1 %, следовательно, последующие итерации расчета не требуются.

Аналогичные действия выполнены для других величин припуска от 1 до 40 м при тех же прочих параметрах нити. Результат расчета приведен в табл. 3.

Таблица 3

Δl , м	3	5	10	15	20	25	30	35	40
H , кН	23,653	18,545	13,503	11,338	10,085	9,255	8,66	8,209	7,856
H' , кН	23,388	18,206	13,038	10,784	9,463	8,577	7,935	7,445	7,057
δ , %	1,13	1,86	3,57	5,14	6,57	7,9	9,14	10,27	11,32

Видно, что с увеличением припуска возрастает и влияние, которое оказывает введенный алгоритм уточнения нагрузки от собственного веса на расчет конструкции. Для максимального рассматриваемого в данной работе припуска величиной 40 м он достигает 11,32 %.

График зависимости величины распора от припуска, приведен на рис. 4, а график зависимости растягивающих усилий от припуска — на рис. 5.

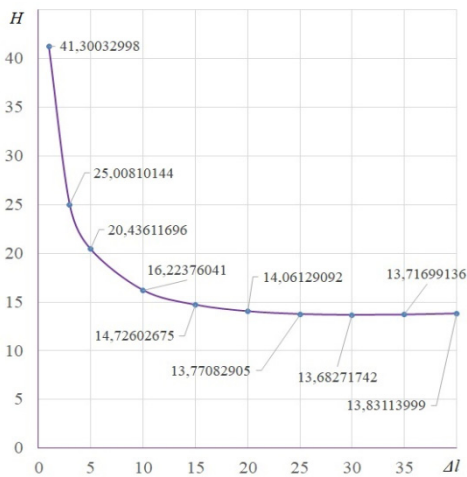


Рис. 4. Зависимость величины распора от припуска для случая равномерно распределенной нагрузки

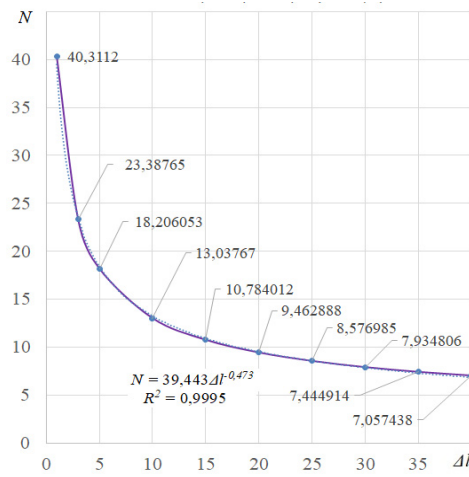


Рис. 5. График зависимости растягивающих усилий N от припуска Δl для случая равномерно распределенной нагрузки

По графикам (см. рис. 5, 6) можно отметить, что при увеличении припуска от 1 до 10 % длины пролета усилия значительно уменьшаются. При увеличении припуска от 10 до 20 % они также уменьшаются, но не столь значительно. При увеличении припуска от 20 до 30 % усилия практически сохраняются, но большая длина нити ведет к удорожанию конструкции, а при увеличении припуска от 30 % происходит одновременно увеличение внутренних усилий. Таким образом, припуск осуществлять выгодно в пределах от 10 до 20 % длины пролета, тогда изменение распоров и усилий при уточнении составляет от 3,57 до 6,57 %.

Заменяв постоянную q в формуле (1) на функцию вида $q(x)$ можно произвести расчет предлагаемой системы на действие не только равномерно распределенной нагрузки, но и нагрузки, прикладываемой на горизонтальной проекции на систему неравномерно. В частности, по схожим законам в узлы будет собираться климатическая нагрузка, например, снеговая. По схожим

законам, вследствие изменения грузовой площади, будет собираться нагрузка на вантовые системы, круглые в плане, с радиальным расположением вант.

Дополним расчет блоком, учитывающим эти изменения. Предположим, что нагрузка, действующая на отдельную ванту, имеет трапециевидную форму в горизонтальной проекции:

$$q_{\text{гор}} = \begin{cases} 30 - 0,3x, & 0 \leq x \leq 50 \\ 15 + 0,3x, & 50 \leq x \leq 100 \end{cases} \quad (20)$$

При описании внешней нагрузки по этой функции величину сосредоточенной нагрузки F_i , приходящейся в каждый дискретный узел системы, определим по формуле:

$$F_i = \frac{q_{(i-1)}^{\text{гор}} + q_{(i)}^{\text{гор}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(f_{i-1} - f_i)^2 + d^2}}{2} + \frac{q_{(i)}^{\text{гор}} + q_{(i+1)}^{\text{гор}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{(f_i - f_{i+1})^2 + d^2}}{2},$$

где $q_{i-1}^{\text{гор}}$, $q_i^{\text{гор}}$, $q_{i+1}^{\text{гор}}$ — горизонтальная проекция внешней нагрузки на канат в $i-1$, i , $i+1$ узлах; f_{i-1} , f_i , f_{i+1} — параметр провисания нити соответственно в $i-1$, i , $i+1$ узлах.

Для демонстрации результатов на конкретном примере воспользуемся геометрическими параметрами нити, полученными в расчете выше.

Приведем результаты первой итерации уточнения подробно в табл. 4.

Таблица 4

q , кН/м	q_i , кН/м	F_i , кН	k	i	n	d	F_k , кН	Δ_i	f_i	H
30									0	1141,6
27	35,188	351,877	1	1	10	10	284,281	1,28107	9,8144	
24	27,851	278,51	2	2	10	10	$-1,705 \cdot 10^{-14}$	1,22697	16,547	
21	22,409	224,094	3	3	10	10	171,356	1,15414	20,839	
18	18,321	183,213	4	4	10	10	$1,137 \cdot 10^{-14}$	1,07640	23,169	
15	16,544	165,444	5	5	10	10	84,202	1,01140	23,893	
18	18,321	183,213	6	6	10	10	$3,411 \cdot 10^{-14}$	1,01140	23,169	
21	22,41	224,094	7	7	10	10	45,605	1,07640	20,839	
24	27,851	278,509	8	8	10	10	$3,411 \cdot 10^{-14}$	1,15414	16,547	
27	35,188	351,877	9	9	10	10	13,9217	1,22697	9,8144	
30				10		10		1,28107	0	
								15,000	23,893	

По результатам первой итерации уточнения видно, что при предлагаемом подходе величина F_i является переменной по длине нити, однако свойство симметрии относительно центра сохраняется. Величина распора H по сравнению с линейным расчетом увеличилась на 0,2 %.

По результатам второй итерации уточнения величина распора H изменилась менее чем на 0,1 %, следовательно, последующие итерации расчета не требуются. Аналогично проведем процедуру для других величин стрелы провисания нити. Результат расчета приведены в табл. 5.

Таблица 5

Δl , м	3	5	10	15	20	25	30	35	40
H , кН	2450	1921	1399	1175	1045,4	959,5	897,9	851,35	814,83
H' , кН	2454,5	1913,7	1375,6	1141,6	1004,8	913,25	847,04	796,6	756,78
δ , %	-0,2	0,4	1,67	2,93	3,88	4,82	5,64	6,43	7,12

На рисунках 6, 7 приведены графики зависимости величины распора от припуска и растягивающих усилий от припуска.

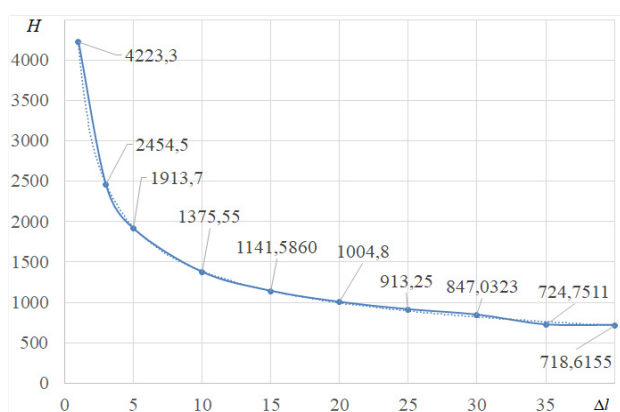


Рис. 6. Зависимость величины распора от припуска для случая равнопеременной нагрузки

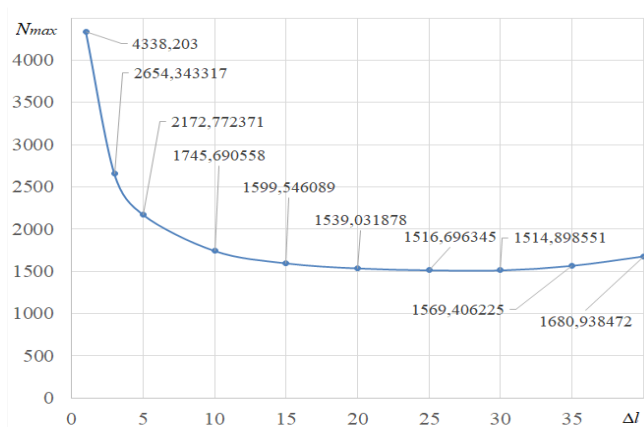


Рис. 7. График зависимости растягивающих усилий N от припуска Δl для случая равнопеременной нагрузки

Анализируя рис. 6, 7, можно отметить, что, как и в предыдущем случае, актуальным является припуск нити не менее 10 % длины перекрываемого пролета. При этом наблюдается увеличение растягивающих усилий при увеличении припуска более 30 % длины пролета. Таким образом, для систем с радиальными вантами актуальная величина припуска нитей варьируется значительно больше, чем для конструктивных систем с параллельными вантами.

Выводы

1. Учет реальной геометрии вантовых систем при различной величине припуска и различной внешней нагрузке приводит к увеличению возникающих в вантах внутренних усилий до 11,32 %.

2. Рост внутренних усилий значительно зависит от вида внешней нагрузки. Это может быть связано с тем, что реальная геометрия вантовых систем характеризуется неравномерным углом наклона к горизонту на разных участках. Таким образом, при приложении равнопеременной нагрузки для одинаковых величин припуска, рост внутренних усилий составляет до 7,12 %.

3. По результатам расчетов можно сказать, что с увеличением припуска возрастает и влияние, которое оказывает введенный алгоритм уточнения нагрузки от собственного веса на расчет конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тарасов Д. А., Семенов Д. Ю.* Математическое моделирование напряженно-деформируемого состояния гибких нитей с учетом физической нелинейности // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2017. № 3(23). С. 175—185.
2. *Корнев В. А.* Аналитический расчет напорных рукавов методом гибкой нити // *Проблемы современной науки и образования*. 2016. № 30(72). С. 22—26.
3. *Кривошапко С. Н.* Вантовые структуры // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 1. С. 9—22.
4. *Ахмедов А. Д.* Методы определения напряженно-деформированного состояния радиально-вантовой системы на стадии предварительного натяжения // *Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Строительство и строительные технологии: сборник статей 78-ой всероссийской науч.-техн. конф.* Самара, 2021. С. 945—956.
5. *Махонько А. А., Мальков А. В., Белый А. А., Антонюк А. А.* Опыт эксплуатации системы мониторинга вантового моста через Петровский канал в створе автомобильной дороги «Западный скоростной диаметр» в Санкт-Петербурге // *Инновационные транспортные системы и технологии*. 2023. № 2. С. 83—96.
6. *Pakrastinsh L., Rocens K.* Cable material consumption depending the geometrical parameters of hierarchic roof // *Final Conference of COST Action C12 "Improvement of Buildings' Structural Quality by New Technologies"*. USA : CRC Press, 2005. Pp. 185—193.
7. *Flyvbjerg B., Bruzelius N., Rothengatter W.* Megaprojects and Risk An Anatomy of Ambition. Cambridge University Press, 2003. 201 p.
8. *Wai-Fah C., Lian D.* Handbook of International Bridge Engineering. CRC Press, 2013. 1394 p.
9. *Wai-Fah C., Lian D.* Bridge Engineering Handbook, Second Edition: Fundamentals. CRC Press, 2014. 574 p.
10. *Wriggers P., Nackenhorst U.* Analysis and Simulation of Contact Problems. Berlin — Heidelberg : Springer, 2006. 394 p.
11. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Berlin — Heidelberg : Springer, 2006. 521 p.
12. *Laursen T. A., Kim T. Y., Dolbow J. E.* A Mortared Finite Element Method for Frictional Contact on Arbitrary Surfaces // *Computational Mechanics*. 2007. Vol. 39. Pp. 223—235.
13. *Laursen T. A., Yang B.* A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations // *Computational Mechanics*. 2008. Vol. 41 Pp. 189—205.
14. *Игнатьев А. В., Игнатьев В. А., Онищенко Е. В.* Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем // *Вестник МГСУ*. 2015. № 12. С. 47—58.
15. *Игнатьев В. А., Игнатьев А. В., Галишикова В. В., Онищенко Е. В.* Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета. Волгоград : Изд-во ВолгГАСУ, 2014. 94 с.

© Калиновский С. А., Бочков М. И., 2024

Поступила в редакцию
в январе 2024 г.

Ссылка для цитирования:

Калиновский С. А., Бочков М. И. Расчет нити методом конечных элементов в форме классического смешанного метода с учетом реальной геометрической конфигурации // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 1(94). С. 127—137. DOI: 10.35211/18154360_2024_1_127.

Об авторах:

Калиновский Сергей Андреевич — канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, Волгоград, ул. Академическая, 1; sk0522@yandex.com; ORCID: 0000-0001-6780-5215

Бочков Максим Иванович — канд. техн. наук, ассистент каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, Волгоград, ул. Академическая, 1; maxim.bochkov@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-0818-6933

Sergey A. Kalinovsky, Maxim I. Bochkov

Volgograd State Technical University

**THE CALCULATION OF THE THREAD BY THE FINITE ELEMENT METHOD
IN THE FORM OF A CLASSICAL MIXED METHOD, TAKING
INTO ACCOUNT THE REAL GEOMETRIC CONFIGURATION**

The case of calculating an inextensible thread under load is considered, with the load being converted to a nodal one. Taking into account the actual geometry of the thread, which is parabolic, different loads act on each inter-node section, therefore, different amounts of force act at the nodes. Additionally, the case of loading the thread with uneven load is considered. Conclusions were made about the dependence of the arising force in the thread on the thread allowance.

Key words: thread loaded with distributed load, sag arrow, amount of margin, brace, tensile forces, dependence of internal forces on the allowance, discrete application of the distributed load.

For citation:

Kalinovsky S. A., Bochkov M. I. [The calculation of the thread by the finite element method in the form of a classical mixed method, taking into account the real geometric configuration]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2024, iss. 1, pp. 127—137. DOI: 10.35211/18154360_2024_1_127.

About authors:

Sergey A. Kalinovsky — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation. sk0522@yandex.com; ORCID: 0000-0001-6780-5215

Maxim I. Bochkov — Candidate of Engineering Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; maxim.bochkov@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-0818-6933