УДК 624.072.2

***О. В. Коновалов, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов***

***Волгоградский государственный технический университет***

# ДИНАМИКА ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА УПРУГИХ ОПОРАХ С ЭКВИДИСТАНТНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ МАССАМИ

Рассматривается циклическая система в виде многопролетной балки на упругих опорах, загруженной регулярно расположенными точечными массами. Предлагается методика расчета частот свободных колебаний конструкции на основании метода обобщенных неизвестных в форме метода перемещений. Результаты работы и методику расчета можно использовать в расчетах регулярных и бирегулярных систем в виде пластин и оболочек.

Ключевые слова: циклическая система, обобщенные перемещения, обобщенные неизвестные, инерционные перемещения, свободные колебания.

Использование метода МКЭ в форме метода обобщенных перемещений [1—3] в расчетах периодических систем базируется на идеях группировки неизвестных [4, 5], на возможности расчленения сложного статически неопределимого сооружения на более простые элементы [6—8] и составления для них уравнений связи с небольшим числом неизвестных [9—11]. Также используется возможность упрощения канонических уравнений путем ортогонализации основных эпюр [12, 13] и использования свойств циклически симметричных (обладающих многими слоями симметрии [14, 15]) систем для упрощения их расчета.

Для выполнения условий периодического продолжения за расчетную схему принимается система с бесконечно большим числом пролетов или так называемая циклически симметричная система [16, 17]. Система с конечным числом пролетов, вырезанная из бесконечной системы, будет удовлетворять условиям периодического продолжения. При этом жесткости элементов системы и значения сосредоточенных нагрузок, находящихся на линии разреза, делятся пополам. Опорные закрепления конечной системы должны позволять ей деформироваться по бесконечной схеме [18].

Рассмотрим циклическую систему в виде многопролетной балки на упругих опорах, загруженной эквидистантно расположенными точечными массами $m_i = m$ и шарнирно опертой по концам (рис. 1, *а*). Шаг регулярности для масс $d$, шаг регулярности для опор $l = vd$.

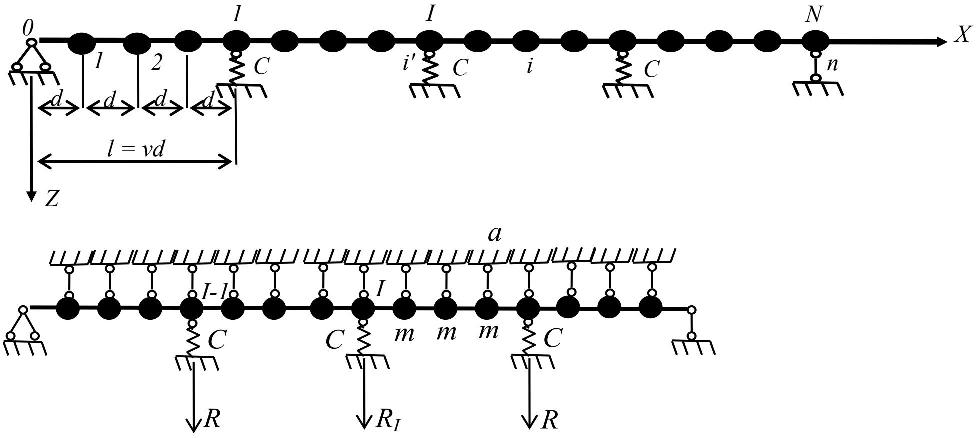
Основная система для рассматриваемой задачи показана на рис. 2, *б*.

Для случая свободных колебаний уравнение равновесия $i$-го узла имеет следующий вид:

$$R_i = r_{i1}z_1 + r_{i2}z_2 + \ldots + r_{in}z_n + R_{iF} = 0,$$

где

$$R_{i(\max),F} = -F_{i(\max)} = -m_i\Omega_S^2 Z_{i(\max)}. \qquad (1)$$




а

б

Рис. 1. Циклически симметричная система: *а* — заданная; *б* — основная

Как и в случае статического расчета, максимальное перемещение *i*-й массы при ее гармонических колебаниях с частотой $\Omega_S$ представляется в виде ряда [15]:

$$Z_{i,s(\max)} = A_{i,s} = \sum_{k=1}^{n-1} A_{k,s} \sin\frac{k\pi i}{n}, \tag{2}$$

где $A_{k,s}$ — обобщенные перемещения.

Максимальным перемещениям соответствуют максимальные инерционные силы:

$$F_{i,s(\max)} = \sum_{k=1}^{n-1} F_k \sin\frac{k\pi i}{n} = m\Omega_S^2 \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin\frac{k\pi i}{n}. \tag{3}$$

Отсюда получаем зависимость между обобщенными инерционными силами $F_k$ и обобщенными перемещениями $A_k$:

$$F_k = m\Omega_S^2 A_k. \tag{4}$$

Обобщенные реакции для *i*-й точки выражаются через обобщенные перемещения. Групповому перемещению $Z_{i,k} = A_k \sin\frac{k\pi i}{n}$ связей основной системы соответствуют групповые реакции во введенных в узлы связях [5, 17]:

$$R_{i,k} = A_k C_k \sin\frac{k\pi i}{n} \tag{5}$$

и дополнительные реакции в узлах *I* с упругими промежуточными опорами:

$$R_{i,k} = A_k C \sin\frac{k\pi i'}{n}. \tag{6}$$

Приняв за обобщенные неизвестные амплитудные значения групповых перемещений $A_k$, найдем значения коэффициентов при неизвестных канонических уравнений метода обобщенных перемещений [16]:

$$R_{kt}^{(F)} = \sum_{i=1}^{n-1}(-A_k)\cdot\sin\frac{k\pi i}{n} m\Omega_S^2 \sin\frac{t\pi i}{n} = r_{kt}^{(F)}\cdot A_k,$$

где

$$r_{kt}^{(F)} = -\frac{n}{2} m\Omega_S^2 \begin{cases} 1, \text{если } t = k, \\ 0, \text{если } t \neq k, \end{cases} \tag{7}$$

$$r_{kt} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi i}{n} C_k\right)\sin\frac{t\pi i}{n} + \sum_{i'=1}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi i}{n} C\right)\sin\frac{t\pi i'}{n} =$$

$$= C_k \frac{n}{2}\begin{cases} 1, \text{если } t = k \\ 0, \text{если } t \neq k \end{cases} + C\frac{N}{2}\begin{cases} 1, \text{если } k - t = \pm 2Na, \text{где } a\Big|_0^{v/2}, \\ -1, \text{если } k + t = 2Na, \text{где } a\Big|_0^{v}, \\ 0, \text{если } k \pm t \neq \pm 2Na, \end{cases} \tag{8}$$

где $a$ — целые числа в указанных пределах.

Тогда

$$r_{kk} = C_k\frac{n}{2} + C\frac{N}{2}. \tag{9}$$

При $k = Na$

$$r_{kk} = C_k\frac{n}{2}.$$

При фиксированных значениях $k$ коэффициенты $r_{kt}$ имеют ненулевые значения [13] только при следующих значениях $t$:

а) $t = k + 2Na$,

$a\Big|_0^{v/2}$ — для верхнего треугольника матрицы коэффициентов, когда $t > k$, $\left(r_{kt} = C\frac{N}{2} = r\right)$;

б) $t = k - 2Na$,

$a\Big|_0^{v/2}$ — для нижнего треугольника матрицы коэффициентов, когда $t < k$, $\left(r_{kt} = C\frac{N}{2} = r\right)$;

в) $t = 2Na - k$,

$a\Big|_0^v$ — для верхнего треугольника матрицы коэффициентов, когда $t > k$, $\left(r_{kt} = -C\dfrac{N}{2} = -r\right)$;

г) $k = 2Na - t$,

$a\Big|_0^v$ — для нижнего треугольника матрицы коэффициентов, когда $t > k$, $\left(r_{kt} = -C\dfrac{N}{2} = -r\right)$.

На рис. 2 приведен шаблон для матрицы коэффициентов системы канонических уравнений метода обобщенных сил, соответствующий выражениям (7)—(9).

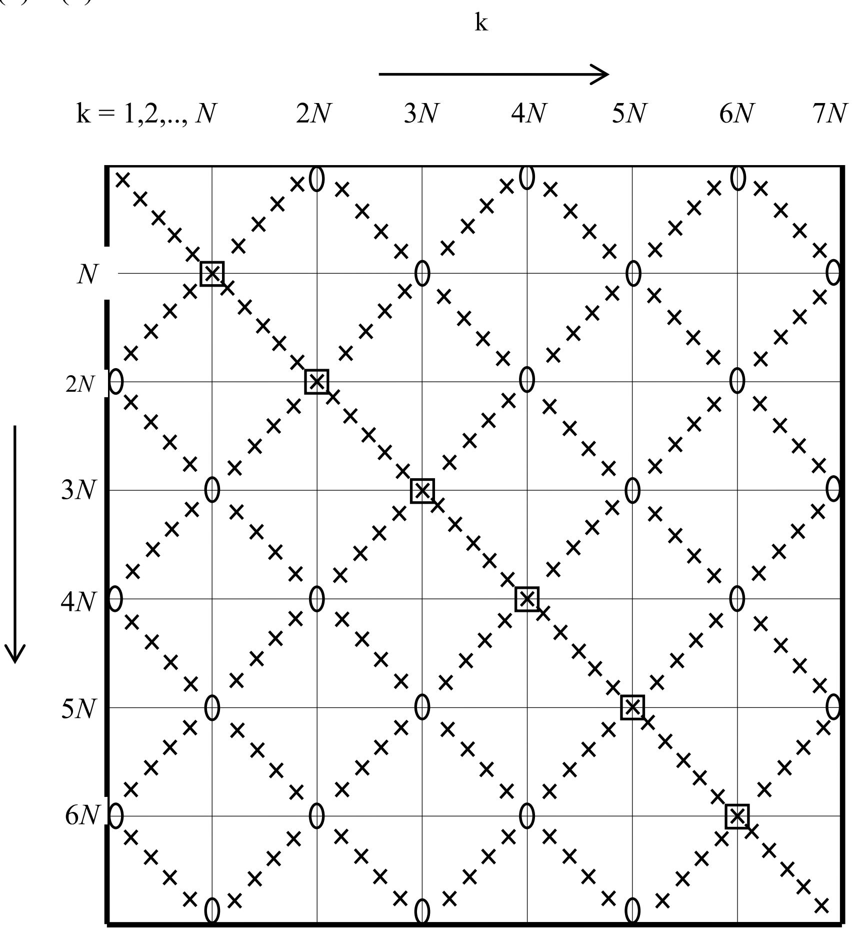



Рис. 2. Шаблон для матрицы коэффициентов системы канонических уравнений метода обобщенных сил

Анализ этого шаблона показывает, что структура его повторяет структуру шаблона для статической задачи [5].

Анализируя структуру матрицы коэффициентов (см. рис. 2), приходим к выводу, что она включает ($v$ – 1) независимых уравнений:

$$r_{kk}A_k + r_{kk}^{(F)}A_k = 0, \text{ для случаев } k = Na, \ a\Big|_1^v \tag{10}$$

и ($N$ – 1) независимых блоков уравнения по $v$ уравнений в каждом. Всего $(N-1)v + (v-1) = Nv - 1 = n - 1$ уравнений.

Все уравнения каждого из независимых блоков $k$ (где $k$ изменяется от 1 до ($N$ – 1)) можно представить попарно в следующем виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{a=0}^{v/2}\begin{pmatrix} r_{2Nb-k,\,2Na-k}A_{2Na-k} + \\ + r_{2Nb-k,\,2Na+k}A_{2Na+k}\end{pmatrix} + R^{(F)}_{(2Nb-k),\,(2Nbk)} = 0, \\ \left(b\Big|_0^{v/2},\ k\Big|_1^{N-1}\right) \\ \sum\limits_{a=0}^{v/2}\begin{pmatrix} r_{2Nb+k,\,2Na-k}A_{2Na-k} + \\ + r_{2Nb+k,\,2Na+k}A_{2Na+k}\end{pmatrix} + R^{(F)}_{(2N+k),\,(2N+k)} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $R^{(F)}_{(2Nb\pm k)(2Nb\pm k)} = -\dfrac{n}{2}m\Omega^2 A_{2Nb\pm k}$.

Меняя значения $a$ целочисленно от 0 до $v/2$ при фиксированном $b$, получаем последовательно все слагаемые конкретного уравнения. Так, например, чтобы получить первое уравнение первого блока, нужно принять $k$ = 1, $b$ = 0 и последовательно менять $a$ целочисленно от 0 до $v/2$.

Меняя в уравнениях (11) значения $b$ целочисленно в пределах от 0 до $v/2$, т. е. принимая $b$ = 0,1, …, $v/2$, получаем все $v$ уравнений блока $k$.

Для наглядности структура первого блока уравнений приведена ниже:

$$b = 0\left(\underset{(\epsilon=0)}{r_{11} - \frac{n}{2}m\Omega^2}\right)A_k + \left(\underset{(\epsilon=1)}{r_{1,2N1}}\right)A_{2N1} + \underset{(\epsilon=2)}{r_{1,2N+1}}\cdot A_{2N+1} + r_{1,2N+1}\cdot A_{2N+1} + \ldots = 0,$$

$$b = 1\begin{cases} (r_{2N-1,1})A_1 + \left(r_{2N-1,\,2N-1} - \frac{n}{2}m\Omega^2\right)A_{2N-1} + r_{2N-1,\,2N-1}A_{2N+1} + \ldots = 0, \\ (r_{2N+1,1})A_1 + (r_{2N+1,\,2N-1})A_{2N-1} + \left(r_{2N+1,2N+1} - \frac{n}{2}m\Omega^2\right)A_{2N+2} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (r_{vN-1,1})A_1 + (r_{vN-1,\,2N-1})A_{2N-1} + \ldots + \left(r_{vN-1,\,vN-1} - \frac{n}{2}m\Omega^2\right)A_{vN-1} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Меняя значения $k$ в пределах от 0 до ($N$ – 1), получим все блоки независимых друг от друга уравнений [17].

Таким образом, каждый из независимых друг от друга блоков уравнений представляет собой, как это видно на примере первого блока, систему линейных однородных алгебраических уравнений, для которой алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений записывается в стандартном виде:

$$C - \lambda E = 0, \tag{12a}$$

где $C$ — матрица порядка $\nu$ из коэффициентов $r_{kt}$, а $\lambda = \frac{n}{2} m\Omega^2$.

Решив $(N - 1)$ уравнений, найдем $(N - 1)\nu$ собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ). Остальные $(\nu - 1)$ собственных векторов и собственных значений находятся из решения уравнений (10) с учетом (9):

$$\Omega_k^2 = \frac{C_k}{m}, \text{где } k = Na,\ a\Big|_1^{\nu}. \tag{13}$$

Результаты расчетов собственных частот колебаний многопролетной неразрезной балки на упругих опорах, полученные по методу конечного элемента, который для данной задачи является точным, и по методу обобщенных сил, полностью совпадают.

Решения поставленной задачи строятся в обобщенных силах, получаемых заменой обычных сил в узловых точках дискретной регулярной системы групповыми силами в виде дискретных рядов, что дает возможность перехода от системы уравнений к решению отдельных независимых уравнений для определения частот собственных колебаний.

Таким образом, на основании вышеизложенного мы уходим от решения систем уравнений и приводим определение частот свободных колебаний многопролетной системы на упругих опорах к решению отдельных независимых уравнений.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.* The finite element method in structural and continuum mechanics. 1st ed. London : McGraw-Hill Book Company, 1967. 274 p.

2. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1996. 1036 p.

3. *Oden J. T., Reddy J. N.* Some observation on properties of certain mixed finite element approximations // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1975. Vol. 9. No. 4. Pp. 933—938.

4. *Игнатьев В. А., Коновалов О. В.* Свободные колебания бирегулярных систем с граничными условиями, соответствующими условиям периодического продолжения : депонир. рукоп. Волгоград : ВолгИСИ, 1994. 13 с.

5. *Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е.* Особенности метода обобщенных неизвестных в расчетах свободных колебаний одномерных бирегулярных систем // Вестн. ВолгГАСУ. Сер. : Стр-во и архитектура. 2018. Вып. 54(73). С. 61—69.

6. *Zienkiewicz O. C.* The finite element method — from intuition to generality // Appl. Mech. Rev. 1970. No. 23. Pp. 249—256.

7. *Felipa C.* Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures. University of California, Berkeley, str. Eng. Lab., Rep. SESM 66—22, 1966. 212 p.

8. *Гордеев В. Н., Динкевич С. З.* Об особенностях расчета механических систем, обладающих свойствами симметрии // Численные методы решения задач строительной механики. Киев, 1978. С. 126—149.

9. *Basri K., Zainorabidin A., Mohamad H. M., Musta B.* Determining the peat soil dynamic properties using geophysical methods // Magazine of Civil Engineering. 2021. Vol. 105. Iss. 5. Article No. 10508. DOI: 10.34910/MCE.105.8.

10. *Ricker N.* The form and laws of propagation of seismic wavelets // Geophysics. 1953. Vol. 18. No. 1. P. 10. DOI: 10.1190/1.1437843.

11. *Динкевич С. З.* Расчет циклических конструкций. Спектральный метод. М. : Стройиздат, 1977. 128 с.

12. *McKay A.* Alternate path method in progressive collapse analysis: variation of dynamic and non-linear load increase factors : thesis presented to the graduate faculty of The University of Texas at San Antonio, 2008.

13. *Жданов А. П.* Тригонометрические полиномы по теории интерполиирования и их применение к расчету регулярных статически неопределимых систем строительных конструкций // Тр. МАДИ. 1972. Вып. 36. С. 92—110.

14. *Золотов О. Н., Милейковский И. Е.* Использование свойств ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента при расчете пространственных систем // Механика твердого тела. 1995. № 2. С. 148—154.

15. *Коновалов О. В.* Расчет свободных колебаний бирегулярных стержневых систем // Проблемы теории пластин, оболочек и стержневых систем : межвуз. науч. сб. Саратов : СГУ, 1995. С. 82—91.

16. *Игнатьев В. А.* Расчет регулярных статически неопределимых стержневых систем. Саратов : Сарат. ун-т, 1979. 327 с.

17. *Игнатьев В. А., Коновалов О. В.* К расчету циклических систем // Вестн. ВолгГАСУ. Сер. : Стр-во и архитектура. 1999. Вып. 1. С. 6—11.

18. *Pietruszczak S., Mroz Z.* Finite element analysis of deformation of strain-softening materials // Int. J. Numer. Methods Eng. 1981. Vol. 17. No. 3. Pp. 327—334. DOI: 10.1002/nme.1620170303.



*Поступила в редакцию
в январе 2022 г.*

*Ссылка для цитирования:*

*Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е.* Динамика циклических систем на упругих опорах с эквидистантно расположенными массами // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 1(86). С. 145—152.

*Об авторах:*

**Коновалов Олег Владимирович** — канд. техн. наук, доц., доц. каф. математики и естественнонаучных дисциплин, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; miit.vgasu@mail.ru

**Арзамаскова Лариса Михайловна** — канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

**Евдокимов Евгений Евгеньевич** — канд. тех. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

***Oleg V. Konovalov, Larisa M. Arzamaskova, Evgenii E. Evdokimov***

***Volgograd State Technical University***

## DYNAMICS OF CYCLIC SYSTEMS ON ELASTIC SUPPORTS WITH EQUIDISTANT MASSES

A cyclic system in the form of a multi-span beam on elastic supports loaded with regularly spaced point masses is considered. A method is proposed for calculating the frequencies of free vibrations of the structure based on the method of generalized unknowns in the form of the displacement method. The results of the work and the calculation methodology can be used in the calculations of regular and irregular systems in the form of plates and shells.

Key words: cyclic system, generalized displacements, generalized unknowns, inertial displacements, free oscillations.

*For citation:*

Konovalov O. V., Arzamaskova L. M., Evdokimov E. E. [Dynamics of cyclic systems on elastic supports with equidistant masses]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2022, iss. 1, pp. 145—152.

*About authors:*

**Oleg V. Konovalov** — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; miit.vgasu@mail.ru

**Larisa M. Arzamaskova** — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru

**Evgenii E. Evdokimov** — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru