

УДК 539.32, 624.046

С. Ю. Калашников^{а,б}, Е. В. Гурова^а, Е. Г. Шведов^а

^а *Волгоградский государственный технический университет*

^б *Центральный научно-исследовательский и проектный институт
Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства
Российской Федерации*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА ДЛЯ АНАЛИЗА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ С ИНДУЦИРОВАННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Работа выполнена по «Плану фундаментальных научных исследований Российской академии архитектуры и строительных наук и Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации на 2021 г.» по теме № 3.1.1.14 «Разработка методов определения устойчивости стержней с анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния»

В статье рассматривается продольный изгиб гибкого прямолинейного стержня. Неоднородность напряженного состояния в изогнутом состоянии приводит к стеснению деформаций, вызывающих переменность упругих характеристик материала. Для получения уравнения стержня в отклоненном состоянии используется ранее предложенная авторами теория деформирования тел в неоднородных полях напряжений с индуцированной анизотропией свойств. Решение строится на вариационном анализе прогибов стержня с использованием метода Бубнова — Галеркина. Установлено заметное увеличение сжимающей силы, отвечающей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.

К л ю ч е в ы е с л о в а: устойчивость стержней, градиент напряжений, критические силы, индуцированная анизотропия, запас устойчивости.

В ряде экспериментальных работ установлено, что в процессе деформирования изотропные поликристаллические и многокомпонентные материалы типа стали и бетона могут проявлять свойства анизотропии [1—4].

Сложившиеся представления объясняют эти проявления эволюцией микроструктуры материала из-за переориентации кристаллографических осей при больших деформациях и связывают с упрочнением. Анизотропия подобного типа получила название наведенной или индуцированной.

В [5] была предложена модель поведения упругого материала и отвечающая ей группа физических уравнений, когда считается, что распределение напряжений вызывает анизотропию физических свойств материала, зависящую от степени неоднородности напряженного состояния в окрестностях рассматриваемой точки. Эта зависимость характеризуется учетом в определяющих соотношениях градиентов тензоров напряжений и деформаций относительно пространственных координат. Неоднородное напряженное состояние вызывает стеснение деформаций, когда менее напряженные объемы материала «поддерживают» более напряженные объемы, усиливая их сопротивляемость деформированию [6, 7]. В пределах геометрических размеров тела в плоскости, касательной к поверхности одинакового уровня интенсивности касательных напряжений, деформирование наиболее стеснено, но эквивалентно по любым направлениям. В направлении, нормальном к этой плоскости, совпадающим с направлением вектора-градиента, материал будет

иметь иные физические свойства. Подобное распределение будет отвечать каждой точке тела, следовательно, имеет место локальная трансверсальная изотропия. В этом случае касательная плоскость является плоскостью локальной изотропии, а нормаль к плоскости — локальной осью упругой симметрии. В [8—11] разрешающие соотношения деформирования тел с инкрементальной анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния, применялись к различным задачам. По известному начальному линейному решению аналогично методу упругих решений [12] последовательно производилась корректировка упругих характеристик для многократной реализации системы разрешающих дифференциальных уравнений. Кроме упомянутых численных методов представляется целесообразным применить приближенные способы реализации, например вариационные методы. Метод Бубнова — Галеркина представляет собой некоторый приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений краевой задачи. Для дифференциального уравнения вида $\Phi(x, y, y', \dots) = 0$ приближенное решение ищется в виде ряда

$$y = \sum_{k=1}^n m_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

где базисные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям задачи при $x = x_1$ и $x = x_2$, а m_k — неопределенные параметры, которые находятся из условия ортогональности невязки к базисным функциям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (2)$$

Последнее распадается на систему алгебраических уравнений, из которых и определяются параметры m_k . Количество уравнений равно числу неопределенных параметров m_k . Метод может быть применен для анализа прогибов оси стержня при продольном изгибе и в этом смысле исходно связан с вариационным уравнением задачи устойчивости, вытекающим из принципа возможных перемещений [13]. Здесь для базисной функции в виде квадратной параболы, подчиненной геометрическим граничным условиям для прогиба, методом Бубнова — Галеркина аналитически в конечном виде получено значение критической силы, всего лишь на 1,5 % больше эйлеровой силы.

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения длиной l , подвергающийся продольному изгибу в плоскости наименьшей жесткости EI_x (рис. 1). Любое малейшее отклонение от прямолинейной формы равновесия может быть следствием погиби из-за технологических погрешностей изготовления. Естественно, что при таком отклонении уже будет иметь место продольный изгиб.

При этом в каждом сечении по длине стержня степень неоднородности напряженного состояния различна из-за разной величины прогиба. Таким образом, создается трансверсальная анизотропия, индуцированная прогибом «у», функционально зависящая от координаты по сечению y_1 . Поверхность одинакового уровня напряжений U вырождается в линию L (рис. 2). Касательная к ней плоскость P , соответственно, совпадает с плоскостью,

касательной к изогнутой оси стержня S . Направление вектора-градиента T (значит, и σ_z) нормально к плоскости S и, разумеется, линии L . Обозначив это как ось α , примем направление оси γ совпадающим с линией L , а оси β — нормально к линии L в плоскости S (т. е. по касательной). Заметим, что слои материала по направлению α спрессованы, значит, модули упругости $E_\beta = E_{gr}$, а $E_\alpha = E_0$.

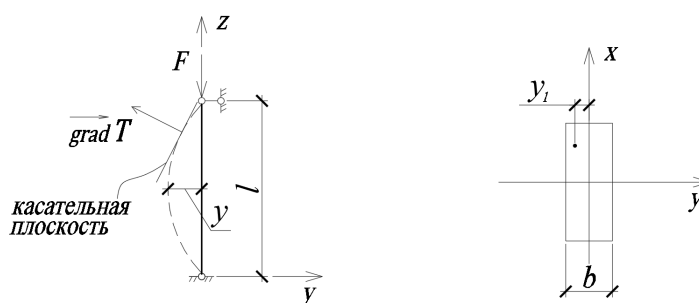


Рис. 1. Расчетная схема сжато-изогнутого стержня

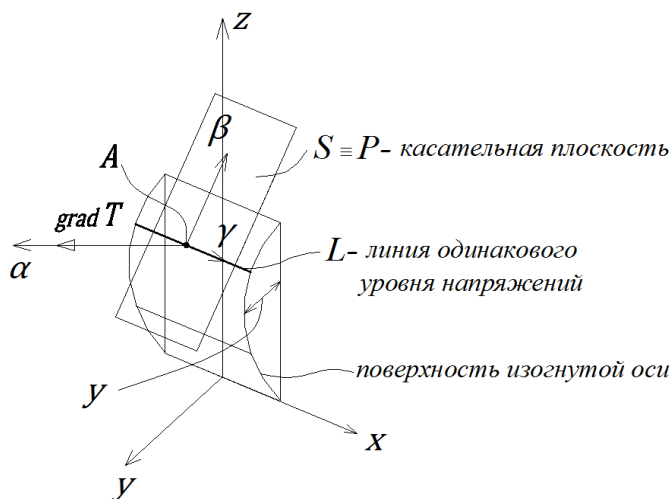


Рис. 2. Поверхность напряжений при продольном изгибе стержня

С учетом правила знаков приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня

$$EI_x y''(z) = -M(z). \quad (3)$$

Для рассматриваемой задачи $M(z) = F \cdot y$ — величина, переменная по длине стержня. Кроме сжимающих, по поперечному сечению имеют место создающие неоднородность изгибные напряжения. В каждом сечении по длине стержня степень неоднородности различна в зависимости от величины прогиба, который выступает как параметр (приблизительным аналогом может служить эксцентриситет при внецентренном сжатии). Любое увеличение продольной нагрузки F приведет к новому равносному состоянию: прогиб увеличится, новый изгибающий момент вызовет увеличенные

изгибные напряжения. Следствием усугубившейся неоднородности напряженного состояния станет рост \overline{gradT} , еще большее стеснение деформаций, изменяющее упругие характеристики материала в этом сечении. В другом поперечном сечении по длине стержня при этой же продольной нагрузке упругие характеристики будут иметь другие численные значения, но их комбинация остается одинаковой для всех сечений. С учетом ранее приведенных теоретических построений констатируем, что при продольном изгибе имеет место индуцированная видом напряженного состояния анизотропия, принципиально отличающаяся от продольного изгиба неоднородного или ортотропного стержня.

Модуль упругости и по длине и по высоте поперечного сечения $E_{\beta} = E_{gr} = E_{gr}(T, gradT)$ является функцией градиента интенсивности касательных напряжений [5], которая для рассматриваемого случая

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sigma_z^2}.$$

Нормальное напряжение для произвольной точки K :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{F}{A} = \frac{F}{A} \left(1 \pm \frac{12y}{b^2} y_1 \right).$$

Модуль градиента интенсивности касательных напряжений:

$$gradT = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial T}{\partial y_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{F}{A} \cdot \frac{12y}{b^2}.$$

Закон изменения градиентного модуля упругости примем по [5]:

$$E_{gr} = E_0 + 0,5 \frac{gradT / T}{\lambda_E + gradT / T},$$

где λ_E — некоторая упругая характеристика материала, определяемая экспериментально и имеющая соответственно размерность m^{-1} . Обозначим через g меру неоднородности напряженного состояния:

$$g = \frac{gradT}{T} = \frac{1}{b^2 / 12y + y_1}.$$

Тогда, рассматривая математическую ось стержня, где $y_1 = 0$, из двух последних выражений получим

$$E_{gr} = E_0 \left(\frac{\lambda_E \cdot b^2 + 18y}{\lambda_E \cdot b^2 + 12y} \right). \quad (4)$$

Заменим в уравнении изогнутой оси стержня (3) модуль Юнга E_0 на градиентный модуль упругости. Получим уравнение вида

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{F}{J \cdot E_0} y \frac{a + y}{a + 1,5y} = 0. \quad (5)$$

Методом Бубнова — Галеркина найдем приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (5), удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (6)$$

В качестве базисных выбираем функции, составляющие часть некоторой полной системы и удовлетворяющие условию (6):

$$u_1(z) = z(1 - z), \quad u_2(z) = z^2(1 - z).$$

Решение будем искать в виде:

$$y = C_1(z - z^2) + C_2(z^2 - z^3), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты (параметры m_k по (1)), не равные нулю одновременно. Функция y должна удовлетворять краевым условиям (6) при любом выборе коэффициентов C_i .

Подставляя y и y'' по (7) в левую часть дифференциального уравнения (5), получим невязку:

$$\begin{aligned} R(z, C_1, C_2) = & C_1^2 \left[-3z + 3z^2 + \frac{F}{E_0 J} (z^2 - 2z^3 + z^4) \right] + \\ & + C_1 C_2 \left[3z - 15z^2 + 12z^3 + \frac{2F}{E_0 J} (z^3 - 2z^4 + z^5) \right] + \\ & + C_2^2 \left[3z^2 - 12z^3 + 9z^4 + \frac{F}{E_0 J} (z^4 - 2z^5 + z^6) \right] + C_1 \left[-2a + \frac{Fa}{E_0 J} (z - z^2) \right] + \\ & + C_2 \left[2a - 6az + \frac{Fa}{E_0 J} (z^2 - z^3) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где для сокращения записи обозначено $a = \lambda_e b^2 / 12$.

Условия ортогональности (3) функции R функциям $u_1(z)$ и $u_2(z)$ приводят к системе

$$\begin{cases} \int_0^l (z - z^2) R(z, C_1, C_2) dz = 0; \\ \int_0^l (z^2 - z^3) R(z, C_1, C_2) dz = 0. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему вместо $R(z, C_1, C_2)$ выражение (8), получим:

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_0^l \left(C_1^2 \left[-3z^2 + 3z^3 + \frac{F}{E_0 J} (z^3 - 2z^4 + z^5) \right] + \right. \\
 & + C_1 C_2 \left[3z^2 - 15z^3 + 12z^4 + \frac{2F}{E_0 J} (z^4 - 2z^5 + z^6) \right] + \\
 & + C_2^2 \left[3z^3 - 12z^4 + 9z^5 + \frac{F}{E_0 J} (z^5 - 2z^6 + z^7) \right] + C_1 \left[-2az + \frac{Fa}{E_0 J} (z^2 - z^3) \right] + \\
 & + C_2 \left[2az - 6az^2 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^3 - z^4) \right] - C_1^2 \left[-3z^3 + 3z^4 + \frac{F}{E_0 J} (z^4 - 2z^5 + z^6) \right] - \\
 & - C_1 C_2 \left[3z^3 - 15z^4 + 12z^5 + \frac{2F}{E_0 J} (z^5 - 2z^6 + z^7) \right] - \\
 & - C_2^2 \left[3z^4 - 12z^5 + 9z^6 + \frac{F}{E_0 J} (z^6 - 2z^7 + z^8) \right] - \\
 & - C_1 \left[-2az^2 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^3 - z^4) \right] - C_2 \left[2az^2 - 6az^3 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^4 - z^5) \right] \Big) dz = 0; \\
 & \int_0^l \left(C_1^2 \left[-3z^3 + 3z^4 + \frac{F}{E_0 J} (z^4 - 2z^5 + z^6) \right] + \right. \\
 & + C_1 C_2 \left[3z^3 - 15z^4 + 12z^5 + \frac{2F}{E_0 J} (z^5 - 2z^6 + z^7) \right] + \\
 & + C_2^2 \left[3z^4 - 12z^5 + 9z^6 + \frac{F}{E_0 J} (z^6 - 2z^7 + z^8) \right] + C_1 \left[-2az^2 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^3 - z^4) \right] + \\
 & + C_2 \left[2az^2 - 6az^3 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^4 - z^5) \right] - C_1^2 \left[-3z^4 + 3z^5 + \frac{F}{E_0 J} (z^5 - 2z^6 + z^7) \right] - \\
 & - C_1 C_2 \left[3z^4 - 10z^5 + 12z^6 + \frac{2F}{E_0 J} (z^6 - 2z^7 + z^8) \right] - \\
 & - C_2^2 \left[3z^5 - 12z^6 + 9z^7 + \frac{F}{E_0 J} (z^7 - 2z^8 + z^9) \right] - \\
 & - C_1 \left[-2az^3 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^4 - z^5) \right] - C_2 \left[2az^3 - 6az^4 + \frac{Fa}{E_0 J} (z^5 - z^6) \right] \Big) dz = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При заданном значении силы F система уравнений (9) дает решение в виде четырех пар постоянных интегрирования C_1 и C_2 .

В качестве примера рассмотрим стальной стержень длиной $l=1$ м, размерами $h=0,05$ м; $b=0,02$ м. Значение упругой постоянной принято $\lambda_E = 20,1587 \text{ м}^{-1}$ в [5] по экспериментальным данным [14], модуль Юнга для строительной стали принят $E_0 = 210 \cdot 10^6$ кПа, предел текучести $\sigma_0 = 260$ МПа. Соответствующая эйлерова критическая сила составляет $F_3 = 68,4$ кН.

Нагружение стержня осуществлялось ступенями, начиная с $0,25F_3$ до $1,5F_3$. Реализация системы (9), интегрирование и построение упругой линии (7) выполнены в авторском программном модуле, работающем под управлением системы Wolfram Mathematica. Он позволяет производить не только вычисления, но и визуализацию. Оказалось, что первые две пары корней имеют комплексные значения и не приводят к имеющему физический смысл решению (7). Третья пара вещественных значений произвольных постоянных (ненулевые и некомплексные) имеет место в докритической области значений силы, а четвертая их пара — в закритической области значений силы F . Численные значения этих параметров и величина максимального прогиба посередине высоты стержня для некоторых значений ступени нагружения приведены в табл. 1 и 2 и в графической форме на рис. 3.

Таблица 1

Значения третьей пары постоянных интегрирования по (9) и прогибов по (7)

F , кН	$\frac{F}{F_3}$	Постоянные интегрирования		Наибольший прогиб y_{\max} , мм
		C_1	C_2	
17,1	0,25	-0,002	$8,7 \cdot 10^{-19}$	-0,5
34,2	0,5	-0,0017	0	-0,43
51,3	0,75	-0,0012	0	-0,3
68,4	1,0	-0,0001	$8,7 \cdot 10^{-19}$	-0,025
69,2	1,012	-0,000011	$1,9 \cdot 10^{-19}$	-0,003
69,4	1,015	0	0	0
85,5	1,25	0	0	0
90,6	1,32	0	0	0
94,0	1,37	0	0	0
95,7	1,4	0	0	0
97,4	1,423	i	i	—

Таблица 2

Значения четвертой пары постоянных интегрирования по (9) и прогибов по (7) для стержня $h = 0,02$ м, $F_3 = 68,4$ кН, $\lambda = 173,3$, $i_x = 0,00577$ м

F , кН	$\frac{F}{F_3}$	Постоянные интегрирования		Наибольший прогиб y_{\max} , м	Относительный прогиб y_{\max} / i_x
		0	0		
69,4	1,015	0,000011	$-9,58 \cdot 10^{-20}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	0,0005
75,2	1,1	0,00085	$-1,1 \cdot 10^{-17}$	0,00021	0,036
80,3	1,17	0,0021	$-1,02 \cdot 10^{-17}$	0,00053	0,092
85,5	1,25	0,0044	$-1,47 \cdot 10^{-17}$	0,0011	0,19
88,9	1,3	0,0076	$-1,5 \cdot 10^{-15}$	0,0019	0,33
90,6	1,32	0,0104	$-5,74 \cdot 10^{-17}$	0,0026	0,45
92,3	1,35	0,0153	$-2,1 \cdot 10^{-17}$	0,0038	0,66
94,0	1,37	0,0256	$-4,55 \cdot 10^{-15}$	0,0064	1,11
95,7	1,4	0,0627	$-2,17 \cdot 10^{-15}$	0,0157	2,72
97,4	1,423	0	0	0	0
102,6	1,5	-0,0187	$-6,98 \cdot 10^{-15}$	-0,0046	-0,79

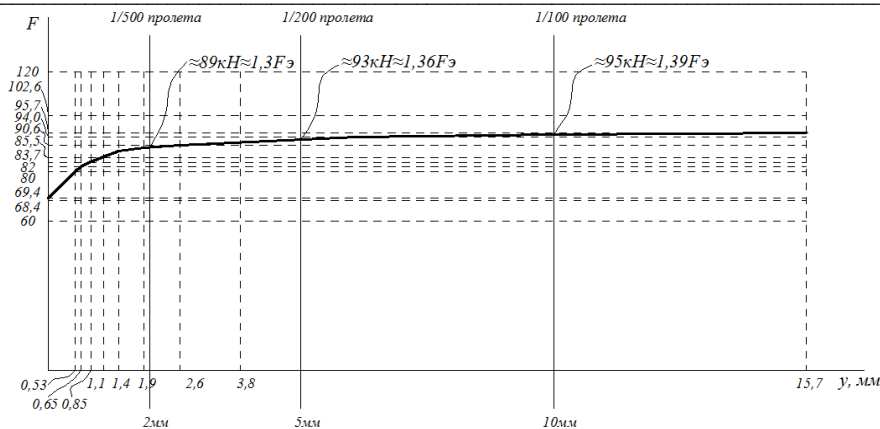


Рис. 3. График зависимости прогиба посередине высоты стержня от продольной силы

Анализ табл. 1 свидетельствует о том, что третья пара вычисленных параметров приводит к решению по (7) в виде уменьшающихся прогибов при росте продольной силы даже в докритической области нагружения с их обнулением в закритической области. Такое решение не соответствует смыслу сформулированной задачи. Следовательно, решению задачи отвечает четвертая пара постоянных C_1 и C_2 .

Из анализа рис. 3 и табл. 2 видно, что кривая роста прогибов лишь отдаленно напоминает известную бифуркационную диаграмму «нагрузка — прогиб». Закладываемая в приближенное решение невязка (8) как бы имитирует начальную погибь стержня, приводя задачу к потере устойчивости 2-го рода.

Возникает вопрос: какое значение сжимающей силы следует считать критическим. Заметим, что при нагрузке примерно до $1,25F_3 = 85,5$ кН прогибы не превышают $1/1000$ длины пролета. Лишь при нагрузке от $1,3F_3 = 89$ кН прогибы превосходят $1/500$ пролета и начинают непропорционально увеличиваться при росте нагрузки примерно до $1,35F_3 = 92,3$ кН. Напряжения в наиболее нагруженном крайнем волокне начинают приближаться к пределу текучести, а прогиб достигает $1/200$ пролета. Дальнейшее увеличение силы до $1,4F_3$ вызывает бурный рост прогибов, затем при $F = 1,423F_3$ решение обнуляется, а при сжимающей силе $1,5F_3 = 102,6$ кН решение меняет знак, прогибы становятся отрицательными, что в рамках реализуемой нами модели следует истолковать как исчерпание запаса устойчивости стержня. Таким образом, представляется целесообразным полагать, что критической силой является $F_{кр} = 1,25F_3$.

Зададим стержню чуть большую высоту поперечного сечения — $h = 0,025$ м. При всех остальных сохраненных параметрах это определяет величину эйлеровой силы $F_3 = 134,7$ кН. Как и в предыдущем случае, имеющее физический смысл решение уравнения (5) дает четвертая пара постоянных C_1 и C_2 из выражения (9), значения которых для соответствующих ступеней нагружения приведены в табл. 3, а диаграмма «нагрузка — прогиб» — на рис. 4. Прогиб, превышающий $1/1000$ пролета, в этом случае преодолевается при нагрузке примерно $1,19...1,23F_3$. При нагрузке $\approx 1,26F_3 = 170$ кН переме-

щения начинают превышать $1 / 500$ пролета, а при нагрузке $\approx 1,34F_3 = 180$ кН достигают $1 / 200$ пролета и начинают непропорционально увеличиваться со значительным ростом до $F = 1,4F_3$. Таким образом, для этого стержня можно полагать критической силой $F_{кр} = 1,23F_3$.

Для стержня с размерами поперечного сечения $h = 0,03$ м эйлера сила составляет $F_3 = 232$ кН. Численные значения постоянных интегрирования представлены в табл. 4, а построенный по ним график изменения прогибов — на рис. 5. В этом случае продольная сила, соответствующая $1 / 500$ пролета, составляет $1,23F_3 = 285$ кН, прогиб, соответствующий $1 / 200$ длины пролета, преодолевается при $1,31F_3 = 305$ кН, а $1 / 100$ длины проекта — при нагрузке $\approx 1,36F_3 = 315$ кН. Поэтому критической силой можно полагать значение $F_{кр} = 1,2F_3$.

Таблица 3

Значения четвертой пары постоянных интегрирования по (9) и прогибов по (7) для стержня $h = 0,025$ м, $F_3 = 134,7$ кН, $\lambda = 138$, $i_x = 0,00721$ м

F, кН	$\frac{F}{F_3}$	Постоянные интегрирования		Наибольший прогиб y_{\max} , м	Относительный прогиб y_{\max} , м / i_x
		C_1	C_2		
134,7	1,0	0	0	0	0
136,7	1,015	0,000018	$-3,4 \cdot 10^{-19}$	$-4,5 \cdot 10^{-6}$	0,0006
160,5	1,19	0,0038	$-5,5 \cdot 10^{-18}$	0,001	0,132
164,9	1,22	0,0053	$-4,8 \cdot 10^{-15}$	0,0013	0,184
168,3	1,25	0,0068	$-2,2 \cdot 10^{-17}$	0,0017	0,236
175	1,3	0,0117	$-2,2 \cdot 10^{-15}$	0,0029	0,405
182	1,35	0,0245	$-1,06 \cdot 10^{-15}$	0,0061	0,849
185,2	1,37	0,0404	$-1,0 \cdot 10^{-16}$	0,0101	1,4
188,6	1,4	0,1021	$-5,9 \cdot 10^{-15}$	0,0255	3,538

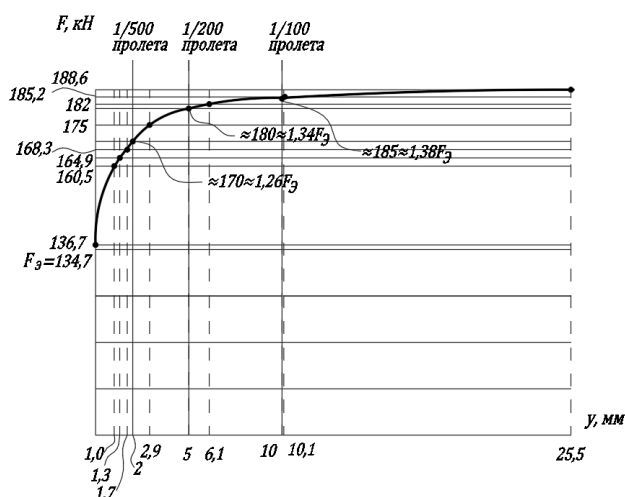


Рис. 4. График зависимости прогиба стержня с $h = 0,025$ м посередине высоты от продольной силы

Таблица 4

Значения четвертой пары постоянных интегрирования по (9) и прогибов по (7)
 для стержня $h = 0,03$ м, $F_3 = 232$ кН, $\lambda = 115,5$, $i_x = 0,00866$ м

F, кН	$\frac{F}{F_3}$	Постоянные интегрирования		Наибольший прогиб y_{\max} , М	Относительный прогиб y_{\max} / i_x
		C_1	C_2		
232	1,0	0	0	0	0
234,6	1,011	0	0	0	0
272,4	1,17	0,00461	$-1,5 \cdot 10^{-17}$	0,00115	0,133
284	1,22	0,0076	$-1,97 \cdot 10^{-17}$	0,0019	0,22
298	1,28	0,0142	$2,63 \cdot 10^{-15}$	0,00355	0,41
301,6	1,3	0,0169	$-9,75 \cdot 10^{-17}$	0,00423	0,49
307,4	1,325	0,0233	$3,75 \cdot 10^{-15}$	0,0058	0,67
313,4	1,35	0,0347	$-6,67 \cdot 10^{-15}$	0,0087	1,005
318,4	1,37	0,054	$-1,86 \cdot 10^{-14}$	0,0135	1,56
325	1,4	0,148	$-2,06 \cdot 10^{-14}$	0,037	4,27

Корректнее полученные результаты характеризуются величиной максимального прогиба, отнесенного к радиусу инерции поперечного сечения в плоскости наименьшей жесткости y_{\max} / i_x , как это принимается в [13].

Для первого стержня $J_x = bh^3 / 12 = 0,05 \cdot 0,02^3 / 12 = 3,3 \cdot 10^{-8}$ м⁴. Радиус инерции $i_x = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{3,3 \cdot 10^{-8} / (0,05 \cdot 0,02)} = 5,77 \cdot 10^{-3}$ м.

Соответствующая гибкость $\lambda_x = \mu / i_x = 1 \cdot 1,0 / 5,77 \cdot 10^{-3} = 173,3$ больше предельной $\lambda_{\text{пред}} = 100$, отвечающей упругой работе стержня, и в то же время меньше максимально допускаемой по СП 16.13330.2017* $\lambda = 200$ для стальных стержней.

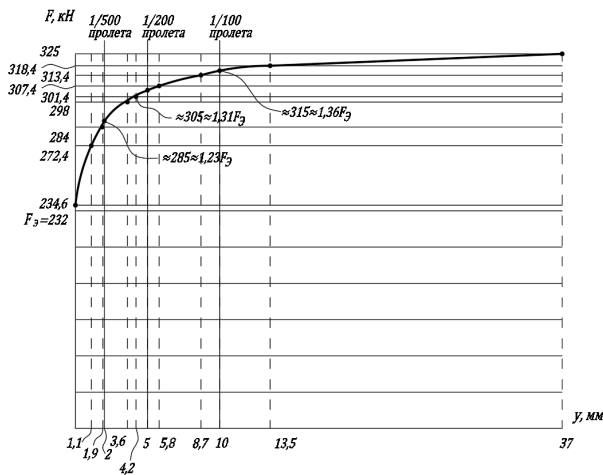


Рис. 5. График зависимости прогиба стержня с $h = 0,03$ м посередине высоты от продольной силы

* СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализир. ред. СНиП II-23-81*. М. : Минстрой России, 2017.

Характеристики сечения второго стержня: $J_x = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $i_x = 7,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\lambda_x = 138,6$. Геометрические параметры третьего сечения: $J_x = 11,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, $i_x = 8,64 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $\lambda_x = 115,5$. Вычисленные значения относительного прогиба приведены в табл. 2—4 в последнем столбце, а график зависимости приведенного максимального прогиба стержня одинаковой длины для вышеуказанных сечений представлен на рис. 6. Область изменения прогиба $l/500 = 2 \text{ мм}$, отнесенная к характерным гибкостям $\lambda_{\text{пред}} = 100$ и $\lambda_{\text{max}} = 200$, на рис. 6 затонирована.

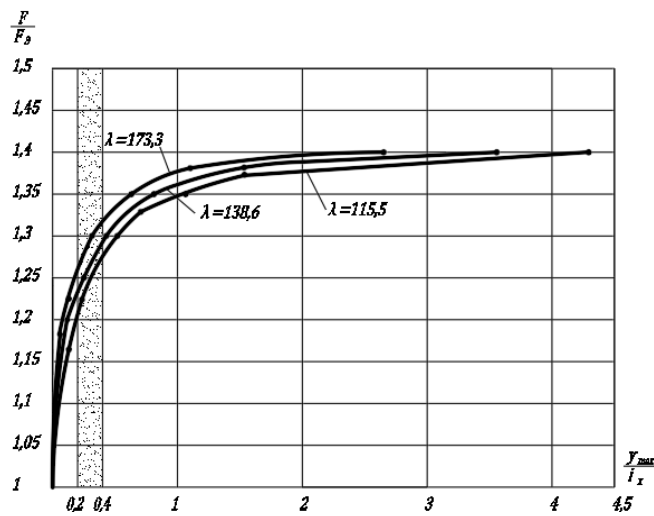


Рис. 6. График зависимости приведенного максимального прогиба от сжимающей силы для стержня длиной $l = 1,0 \text{ м}$ при разных гибкостях

Анализ графиков показывает, что более существенно градиентные эффекты, приводящие к увеличению запаса устойчивости, проявляются при увеличении гибкости стержней. При этом очевидно, что в указанной зоне ограничения прогиба превышение F/F_0 укладывается в интервал $1,2 \dots 1,3$.

Выводы

1. Приведенные в статье теоретические построения демонстрируют, что в сжато-изогнутом стержне вследствие неоднородности напряженного состояния в сечениях создается индуцированная видом напряженного состояния криволинейная анизотропия со сложноизменяющимися упругими характеристиками.

2. Продемонстрирована эффективность решения соответствующего уравнения изогнутого стержня в отклоненном состоянии. Решение строится на вариационном анализе прогибов стержня с использованием метода Бубнова — Галеркина.

3. Установлено заметное увеличение силы, соответствующей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом. Новые решения свидетельствуют об уточненной оценке устойчивого состояния стержня в сжато-изогнутом деформированном состоянии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колмогоров В. Л., Соловей В. Д., Абдулин Е. Б. Исследование процесса осадки монокристалла методами теории пластичности анизотропных сред // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. 1974. Вып. 2. С. 60—64.
2. Одесский П. Д., Гурьева Е. С. Влияние пластической деформации на анизотропию механических свойств стальных листов большой толщины для строительных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. 1991. № 1. С. 70—77.
3. Хван Д. В., Розенберг О. А., Цеханов Ю. А. Исследование деформационной анизотропии металлов при немономтонном пластическом деформировании в условиях линейного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1990. № 12. С. 53—56.
4. Meschke G., Lackner R., Mang H. A. An anisotropic elastoplastic-damage model for plane concrete // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1988. Vol. 42. No. 4. Pp. 703—727.
5. Гениев Г. А., Калашиников С. Ю. Инкрементальная теория нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния : моногр. Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т., 2004. 172 с.
6. Гениев Г. А., Калашиников С. Ю. Об учете влияния неоднородности напряженного состояния на переход материала в пластическое состояние // Строительная механика и расчет сооружений. 1988. № 6. С. 12—15.
7. Гениев Г. А., Калашиников С. Ю. Влияние градиентов напряжений, геометрии и масштабов сечений на переход изгибаемых элементов в пластическое состояние // Исследования по строительной механике : тр. ин-та ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, 1985. С. 5—12.
8. Гениев Г. А., Калашиников С. Ю. О построении уравнений инкрементальной теории упругости тела, деформируемого в условиях неоднородного напряженного состояния // Исследования по строительной механике и надежности строительных конструкций : сб. науч. тр. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, 1992. С. 4—18.
9. Калашиников С. Ю. Задачи упругого нелинейно-ортотропного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния // Изв. вузов. Стр.-во. 2003. № 4. С. 16—22.
10. Калашиников С. Ю. Расчет сферического резервуара при учете анизотропных свойств материала, индуцированных неоднородным напряженным состоянием // Вестн. ВолгГАСА. Сер. : Техн. науки. 2001. Вып. 1(4). С. 15—19.
11. Калашиников С. Ю. Расчет толстостенных цилиндров с горячей посадкой при учете индуцированной анизотропии физических свойств материала // Надежность и долговечность строительных материалов и конструкций : сб. тр. II Междунар. конф. Ч. 1. Волгоград, 2000. С. 128—130.
12. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М. : Оборонгиз, 1956. 496 с.
13. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М. : Физматгиз, 1963. 880 с.
14. Балдин В. А., Потапов В. Н., Фадеев А. А. О сопротивлении стали деформированию при неравномерном распределении напряжений // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. № 5. С. 23—26.

© Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г., 2022

Поступила в редакцию
в январе 2022 г.

Ссылка для цитирования:

Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г. Применение метода Бубнова — Галеркина для анализа деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 1(86). С. 132—144.

Об авторах:

Калашиников Сергей Юрьевич — д-р техн. наук, проф., зав. каф. экспертизы и эксплуатации объектов недвижимости, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ); Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; kalashnikov@vstu.ru

Гурова Елена Владимировна — канд техн. наук, доц. каф. экспертизы и эксплуатации объектов недвижимости, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; eun.cafedra@yandex.ru

Шведов Евгений Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400005, г. Волгоград, пр. им. Ленина, 28; esheg@rambler.ru

Sergei Yu. Kalashnikov^{a, b}, Elena V. Gurova^a, Evgeniy G. Shvedov^a

^a *Volgograd State Technical University*

^b *Central Research and Design Institute of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation*

APPLICATION OF THE BUBNOV — GALERKIN METHOD FOR THE ANALYSIS OF DEFORMATION OF A COMPRESSED-CURVED ROD WITH INDUCED ANISOTROPY

The article deals with the longitudinal bending of a flexible rectilinear rod. The inhomogeneity of the stress state in the curved state leads to the constraint of deformations that cause variability in the elastic characteristics of the material. To obtain the equation of the rod in the deflected state, the theory of deformation of bodies in inhomogeneous stress fields with induced anisotropy of properties proposed earlier by the authors is used. The solution is based on variational analysis of rod deflections using the Bubnov — Galerkin method. A noticeable increase in the compressive force corresponding to a significant increase in deflections compared to the bifurcation approach was found.

Key words: stability of rods, stress gradient, critical forces, induced anisotropy, stability margin.

For citation:

Kalashnikov S. Yu., Gurova E. V., Shvedov E. G. [Application of the Bubnov — Galerkin method for the analysis of deformation of a compressed-curved rod with induced anisotropy]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2022, iss. 1, pp. 132—144.

About authors:

Sergei Yu. Kalashnikov — Doctor of Engineering Sciences, Professor, Volgograd State Technical University (VSTU); Central Research and Design Institute of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation; 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; kalashnikov@vstu.ru

Elena V. Gurova — Candidate of Engineering Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; eun.cafedra@yandex.ru

Evgeniy G. Shvedov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Volgograd State Technical University. 28, Lenin Ave., Volgograd, 400074, Russian Federation; esheg@rambler.ru