На правах рукописи

Игнатьев Александр Владимирович

# РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

05.23.17 Строительная механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Волгоград – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный технический университет»

| | |
|---|---|
| **Официальные оппоненты:** | |
| доктор технических наук, профессор | **Крысько Вадим Анатольевич**, заведующий кафедрой «Математика и моделирование» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.» |
| доктор технических наук, профессор | **Лалин Владимир Владимирович**, заведующий кафедрой «Строительная механика и строительные конструкции» ИСИ ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» |
| доктор технических наук, доцент | **Тюкалов Юрий Яковлевич,** профессор кафедры «Строительные конструкции и машины» ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет» |
| **Ведущая организация:** | ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» |

Защита состоится «22» октября 2019 г. в 10 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.028.10 при ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» по адресу: 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1, ауд. Б–203.

С диссертацией можно ознакомиться в информационно-библиотечном центре и на сайте ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет».

Автореферат разослан «___» ___ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Воронкова Галина Вячеславовна

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования**.

При выборе лучшего конструктивного решения для строительной конструкции или её конструктивной части, необходимо иметь возможность определить полную картину их напряженно-деформированного состояния от комбинации различных вариантов воздействий, позволяющую прогнозировать поведение конструкции при изменении ее параметров. Для этого могут быть использованы как аналитические, так и численные методы.

В настоящее время одним из наиболее распространенных и универсальных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод на начальном этапе применялся для расчета стержневых систем, и рассматривался как развитие классических методов строительной механики, а затем был обобщен на расчет пластин и оболочек, что позволило в дальнейшем обосновать и развить, как методы дискретизации континуальных систем, так и методы континулизации регулярных дискретных систем.

Теории этого метода и реализации разработанных на его основе алгоритмов расчета посвящено огромное количество статей, монографий, учебников и обзоров: работы Дж. Аргириса, К.Ю. Бате, Р. Галлагера, А.С. Городецкого, О.К. Зенкевича, А.М. Масленникова, Д. Норри, Дж. Одена, Д.Дж. Олмана, В.И. Сливкера, А.В. Перельмутера, А.А. Покровского, Б.Г. Попова, В.А. Постнова, Я.А. Пратусевича, Р.Б. Рикардса, А.Е. Белкина, С.С. Гаврюшина, М. Секуловича, Г. Стренга, Дж. Фикса, Ю.А. Тюкалова, С.Ю. Фиалко, А.С. Цыбенко, В.С. Чувиковского, Л.А. Шмита, Ф.К. Богнера, Р.Л. Фокса, Ф. Бреззи, А. Поцески и др.

В строительной механике метод конечных элементов чаще всего используют в его классическом виде - в форме метода перемещений. Это объясняется его известным преимуществом, заключающемся в возможности полной формализации алгоритмов расчета и реализующих их программных средств, по сравнению с другими известными формами и модификациями МКЭ.

Многочисленные программные комплексы, реализующие метод конечных элементов, позволяют провести детальное исследование сложных конструкций и получить полную информацию об их напряженно-деформированном состоянии.

Тем не менее, анализ имеющихся публикаций по теории МКЭ и практике его применения в программных комплексах показал, что традиционная форма МКЭ в перемещениях, на которой основано большинство программных комплексов, наряду с достоинствами имеет и ряд неразрешенных до конца проблем, приводящих к необходимости верификации получаемых на его основе результатов расчета, как дискретных (стержневых), так и дискретезированных континуальных систем.

Как отмечается в ряде работ, к ним относятся: проблема одновременного удовлетворения в разрешающих уравнениях условиям равновесия в узлах конечно-элементной и совместности деформаций на межэлементных границах; пониженная, по сравнению с перемещениями, точность вычисления усилий (напряжений); сложность учета разрывов значений усилий (напряжений) на межэлементных границах; неиспользование граничных условий, выраженных в усилиях (напряжениях); “запирание” при расчете с учетом элементов, обладающих большой сдвиговой жесткостью, когда энергия деформации от сдвига значительно превышает энергию деформации от изгиба.

Также к ним относятся содержащиеся в кинематических граничных условиях смещения конечного элемента как жесткого целого, не связанные с работой внутренних сил. Они приводят к ухудшению обусловленности матрицы жесткости всей конструкции при сгущении конечно-элементной сетки, когда необходимо повысить точность решения в опасных зонах, или при итерационном решении нелинейных задач.

Сложности применения МКЭ в перемещениях возникают также при включении в конструкцию недеформируемых элементов и при расчетах геометрически изменяемых систем в виде кинематической цепи.

Именно эти проблемы объясняют появление ряда работ целью которых является теоретическое обоснование, исследование и развитие других форм МКЭ: в напряжениях, в форме метода сил, в смешанной форме и в различных гибридных вариантах.

Однако анализ имеющихся на сегодняшний день публикаций по этим формам МКЭ приводит к выводу о том, что рассматриваемые в них формы МКЭ не удалось формализовать и алгоритмизировать с той же простотой, как это имеет место в традиционном МКЭ в перемещениях.

Проведенный анализ современных исследований позволяет сформулировать фундаментальную научную проблему, на решение которой направлено данное исследование: расширение возможностей метода конечных элементов и его развитие, дающее возможность сравнительного анализа результатов расчета получаемых на основе его различных форм.

Если принять за основу классическую форму смешанного метода строительной механики и использовать расчетную схему МКЭ со смешанными неизвестными, то упомянутые выше проблемы можно устранить. Такая расчетная схема будет применима к любым типам элементов и будет неизменной на всех стадиях работы конструкции, включая ее переход в механизм.

**Целью исследования** является расширение теории метода конечных элементов включением в неё МКЭ в форме классического смешанного метода строительной механики и разработки соответствующих физико-математических моделей конечных элементов и алгоритмов расчетов различных типов конструктивных элементов и конструкций в линейной и нелинейной постановках.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Расширить общую теорию метода конечных элементов, включив в неё МКЭ в форме классического смешанного метода строительной механики.

2. Обосновать для этой формы МКЭ физико-математические модели конечных элементов и их основные системы.

3. Разработать алгоритмы формирования разрешающих уравнений для решения задач статики, динамики и устойчивости конструктивных элементов и конструкций.

4. Провести тестирование и апробацию, реализованных физико-математических моделей конечных элементов и алгоритмов расчетов различных типов конструктивных элементов и конструкций в линейной и нелинейной постановках.

**Методы исследования**.

В работе использовались подходы и методы строительной механики и теории упругости с использованием общепринятых гипотез и допущений, методы линейной алгебры и вычислительной математики.

**Положения, выносимые на защиту**:

1. Основные положения теории метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

2. Способы получения физико-математических моделей конечных элементов со смешанными неизвестными в основной системе.

3. Построение разрешающих уравнений на базе полученных математических моделей конечных элементов и разработка алгоритмов их решения.

4. Алгоритмы решения проблемных задач: исключение влияния на деформированное состояние системы перемещений конечных элементов как жесткого целого, учет жестких включений и отверстий.

5. Особенности физико-математических моделей задач динамики и устойчивости конструкций и реализующих их алгоритмов расчета.

6. Физико-математические модели редукционных методов понижения порядка больших систем частотных разрешающих уравнений.

7. Физико-математические модели и алгоритмы решения геометрически нелинейных задач и задач расчета конструктивно-нелинейных систем с односторонними связями.

**Научная новизна исследования**:

1. Расширена общая теория метода конечных элементов, включением в него новой формы, базирующейся на классическом смешанном методе строительной механики.

2. Впервые введено фундаментальное понятие-термин – «матрица откликов», являющееся обобщением понятий матриц жесткости и податливости, и позволяющее придать явный физический смысл соответствующим смешанному методу основным системам для конечных элементов.

3. Разработаны алгоритмы получения матриц откликов КЭ для задач статики, а также матриц масс для задач динамики и матриц откликов для задач устойчивости, позволяющие получать эти матрицы для различных типов конечных элементов с той же простотой, как это имеет место при построении матриц жесткости и масс в МКЭ в перемещениях.

4. Разработаны алгоритмы построения систем разрешающих конечно-элементных уравнений для задач статики, динамики и устойчивости, отличающихся от разрешающих уравнений МКЭ в перемещениях наличием в них в качестве узловых неизвестных как перемещений, так и усилий, при том же количестве неизвестных в узле.

5. Решена, присущая МКЭ в перемещениях, проблема выполнения в узлах конечно-элементной сетки одновременно как условий равновесия, так и совместности деформаций на межэлементных границах.

6. Решена проблема исключения влияния на деформированное состояние системы перемещений конечных элементов как жесткого целого. Для систем, представляемых ансамблем стержневых КЭ или треугольных КЭ-пластинок, в разрешающих уравнениях МКЭ в форме классического смешанного метода исключение влияния перемещений конечных элементов как жесткого целого из разрешающих конечно-элементных уравнений выполняется в явном виде, что снимает проблему плохой обусловленности систем разрешающих уравнений, присущую МКЭ в перемещениях.

7. Впервые на основе МКЭ в форме классического смешанного метода разработан единый алгоритм решения нелинейных задач о нахождении напряженно-деформированного состояния, как нерастяжимых, так и растяжимых нитей.

8. Разработан алгоритм решения геометрически нелинейных задач, позволяющий выявить конфигурации конструкции, соответствующие точкам бифуркации.

9. Разработан алгоритм расчета конструктивно нелинейных систем с односторонними связями, который позволяет отследить включение и выключение односторонних связей в процессе пошагового нагружения, устранить проблему зацикливания в итерационном процессе отыскания рабочей схемы и существенно уменьшить число итераций.

**Теоретическая и практическая значимость.**

Практическое значение полученных результатов состоит в том, что предлагаемая форма МКЭ расширяет возможности МКЭ по сравнению с существующими его вариантами и формами. Разработанные для этой формы МКЭ алгоритмы и программные средства численной реализации моделей разрешающих конечно-элементных уравнений предоставляют возможность более глубокого сравнительного анализа результатов расчета, полученных другими численными методами.

Результаты работы используются в учебном процессе на кафедре строительной механики ИАиС ВолгГТУ в виде учебных пособий и расчетных программ.

Диссертационное исследование выполнялось в рамках проектов РФФИ: 16-41-340558-р_а «Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, алгоритмы, программы)», 18-41-340008-р_а «Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для исследования конструктивно-нелинейного поведения строительных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода», 18-41-340013-р_а Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для определения низших частот и форм собственных колебаний сложных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода».

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Диссертационные исследования соответствуют паспорту специальности 05.23.17 – «Строительная механика»: п. 1 (общие принципы расчета сооружений и их элементов), п. 2 (линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета), п. 4 (численные методы расчета сооружений и их элементов).

**Достоверность результатов** обеспечивается удовлетворением разработанных алгоритмов основным соотношениям строительной механики, теории упругости и механики сплошной среды, использованием обоснованных численных методов и подтверждается сравнением результатов решения тестовых примеров, полученных с помощью разработанных конечных элементов, с результатами исследований других авторов.

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: 60-я международная научно-техническая конференция молодых ученых (СПбГАСУ, Санкт-Петербург, 2007); симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Нижний Новгород, 2007); 16th Annual Workshop of the European Group for Intelligent Computing in Engineering (EG-ICE) (TU Berlin, Germany, 2009); 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (Moscow, Russia 2012); третья международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2014); пятый международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Иркутск, Россия, 2014); четвертая международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2015); пятая международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2016); международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг» (Челябинск, Россия, 2016); международная научно-техническая конференция «Строительство, архитектура и техносферная безопасность» (Челябинск, Россия, 2017); десятая всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, Россия, 2017); межвузовский семинар «Геометрия и расчет оболочек неканонической формы» (Москва, Россия, 2018); симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Новосибирск, Россия, 2018); Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы – 2019» (Москва, Россия, 2019); межвузовский семинар «Геометрия и расчет оболочек неканонической формы» (Москва, Россия, 2019).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 75 работ. Из них: 1 монография, 32 статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, 6 статей в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирований Web of Science и Scopus, 6 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, 5 учебных пособий, 25 статей в прочих рецензируемых журналах и сборниках трудов конференций.

**Личный вклад автора** состоит в теоретическом обосновании новой формы метода конечных элементов, базирующейся на классическом смешанном методе, разработке физико-математических моделей конечных элементов, алгоритмов и программных средств, позволяющих выполнять решение линейных и нелинейных задач статики, динамики и устойчивости сооружений.

Все представленные в диссертации положения, выносимые на защиту, получены лично автором, либо под его руководством. В работах, опубликованных в соавторстве, личное участие автора заключается в определении проблемы, постановке задач, разработке теоретического обоснования.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и приложений. Количество страниц – 283, рисунков – 125, таблиц – 26.

## Содержание работы

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, степень её разработанности, сформулированы цель, задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость, методология и методы исследования, степень достоверности и апробация результатов.

**В первой главе** представлен краткий исторический обзор становления и развития классических методов строительной механики и метода конечных элементов.

Первоначально метод конечных элементов применялся в основном в задачах строительной механики и рассматривался как развитие и расширение её классических методов. Такое расширение осуществлялось на основе двух подходов: а) дискретизация сплошной среды (пластин, оболочек) на основе представления их совокупностью простых элементов, рассматриваемых в строительной механике; б) дискретизация на основе перехода от дифференциальных к конечно-разностным или алгебраическим уравнениям.

Позже пришло понимание связи этих подходов к дискретизации дифференциальных уравнений и дискретизации сплошной области, т.е. перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим на основе вариационных методов и перехода от континуальных систем к дискретным, на основе классических методов строительной механики.

Математические основы метода конечных элементов впервые были сформулированы Р. Курантом в 1943г., и развиты в семидесятых годах 20 века в работах Дж. Одена, а термин «конечный элемент», прочно вошедший в научную и учебную литературу, впервые введен в 1960 г. Р.В. Клафом.

Если на начальном этапе развития МКЭ в его основе, как и в классических методах строительной механики лежал принцип возможных перемещений, то в дальнейшем стали использовать и другие вариационные принципы, и методы (принцип Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера и т.д.). Причиной этого стала необходимость преодоления проблем при применении МКЭ в перемещениях, отмеченных выше при обосновании актуальности темы исследования.

В результате были развиты смешанные и гибридные формулировки МКЭ.

Всем этим формулировкам посвящено за последнее время достаточно большое количество статей и монографий. Особый интерес представляют работы Ф. Брецци и А. Поцески.

Идея применения МКЭ на основе классического смешанного метода для задачи изгиба пластинки была изложена в работах А.М. Масленникова еще в 80-х годах 20-го века. Однако она осталась практически не замеченной и не получила дальнейшего развития. Значительно позже А.А. Покровским и Р.А. Хечумовым в расчете шарнирно-стержневых систем по МКЭ была применена основная система смешанного метода без теоретического обоснования. Эта же основная система получила применение в публикациях и докторской диссертации А.А. Покровского.

Работы упомянутых выше исследователей, посвященные проблеме различных форм МКЭ, не привели к разработке форм, аналогичных по степени простоты формализации и алгоритмизации методу конечных элементах в перемещениях и приводят к выводу о необходимости разработки более общей формы МКЭ на основе классического смешанного метода строительной механики.

В отличие от смешанных и гибридных формулировок МКЭ, основанных на использовании смешанных функционалов потенциальной энергии (Хеллингера Рейсснера, Ху Васидзу и др.), разработанная в данной диссертации форма МКЭ, основана на классическом смешанном методе строительной механики.

Отправной точкой для теоретического обоснования использования основной системы смешанного метода для конечного элемента, послужили упомянутые выше работы А.М. Масленникова.

**Во второй главе** изложены теоретические основы метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

Введение фундаментального понятия – «матрица откликов», являющегося обобщением понятий «матрица жесткости» в методе перемещений и «матрица податливости» в методе сил, позволило обосновать соответствующие классическому смешанному методу основные системы для конечного элемента.

На базе двух вариационных принципов механики деформируемого твердого тела исследована возможность построения двух вариантов математической модели КЭ и систем разрешающих уравнений.

Первый из них заключается в непосредственном использовании принципа возможного изменения напряженно-деформированного состояния системы. Показано, что на основе этого принципа могут быть получены коэффициенты системы канонических уравнений смешанного метода.

Второй вариант заключается в составлении для системы, моделируемой ансамблем конечных элементов, энергетического функционала с использованием основной системы для КЭ со смешанными неизвестными. Полученный таким образом функционал для дискретных систем является аналогом функционала Рейсснера для континуальных систем.

Показано, что оба варианта алгоритма получения коэффициентов матрицы откликов приводят к одинаковым результатам. Однако вариант, основанный на классическом смешанном методе более удобен для формализации расчета и его программной реализации.

Система канонических уравнений смешанного метода с матрицей коэффициентов, называемой матрицей откликов, имеет вид:

$$R_i = \sum_{k=1}^{n} r_{i,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \tilde{r}_{i,s} \tilde{q}_s + R_{i,P} = 0, \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$$ - уравнения равновесия узлов конечно-элементной сетки

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\delta}_{j,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \delta_{j,s} \tilde{q}_s + \Delta_{j,P} = 0, \quad \left(j = n+1, \ldots, n+m\right) \qquad (1)$$ - уравнения совместности деформаций конечных элементов, сходящихся в общем узле сетки КЭ

В матричной форме эти уравнения могут быть записаны в форме:

$$\left[D\right] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_P \\ \Delta_P \end{Bmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где $\left[D\right] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$ - матрица откликов системы;

$\left[r\right]$ - матрица реакций в связях основной системы смешанного метода от единичных смещений этих связей;

$\left[\tilde{r}\right]$ - матрица реакций в связях основной системы от силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных;

$\left[\delta\right]$ - матрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных при единичных значениях этих неизвестных;

$\left[\tilde{\delta}\right]$ - матрица перемещений (коэффициентов податливости) по направлению силовых неизвестных от единичных смещений связей основной системы (косая симметрия блоков $\tilde{\delta}$ и $\tilde{r}$, т.е. $\left[\tilde{\delta}\right] = -\left[\tilde{r}\right]^T$, является выражением теоремы А.А. Гвоздева о взаимности реакций и перемещений);

$\left\{R_P\right\}$ - вектор реакций во введенных связях от узловых нагрузок, к которым приведена локальная нагрузка, распределенная по элементам основной системы;

$\left\{\Delta_P\right\}$ - вектор перемещений по направлению силовых неизвестных от нагрузки в основной системе;

$\left\{q \quad \tilde{q}\right\}^T$ - вектор неизвестных смешанного метода;

$\left\{q\right\}$ - подвектор неизвестных перемещений, $\left\{\tilde{q}\right\}$ - подвектор неизвестных усилий.

На основе классического смешанного метода построены матрицы откликов одномерного конечного элемента – изгибаемая однослойная (рис. 1, 2) и двухслойная балка (рис. 3), пространственно-ориентированный стержень (рис. 4), двумерного КЭ – изгибаемая (рис. 5, 6) и плосконапряженная пластинка (рис. 7), трехмерного (объемного) КЭ в форме параллелепипеда (рис. 8).

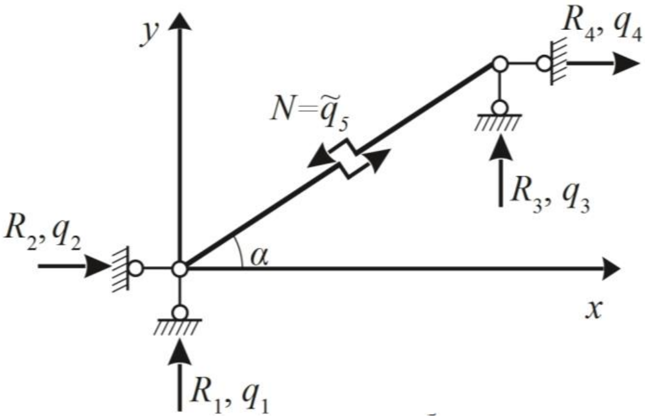



Рис. 1

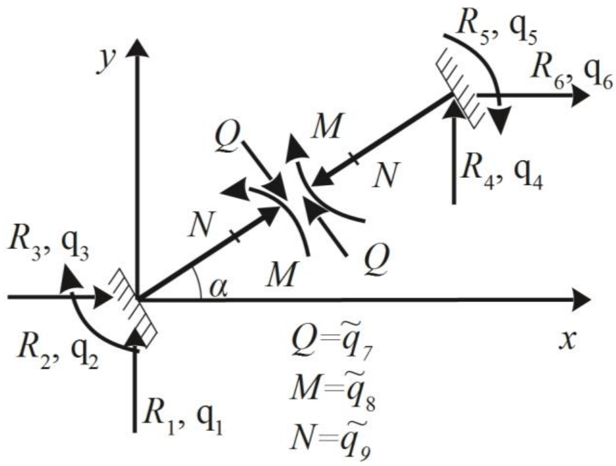



Рис. 2

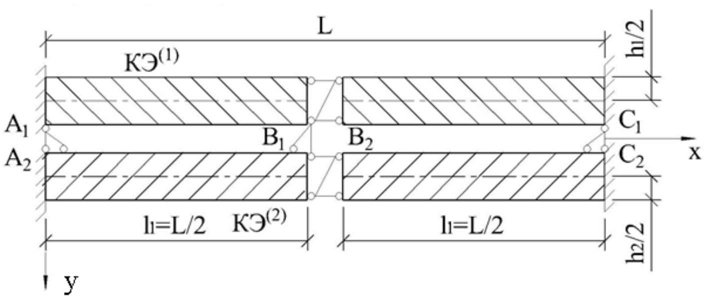



Рис. 3

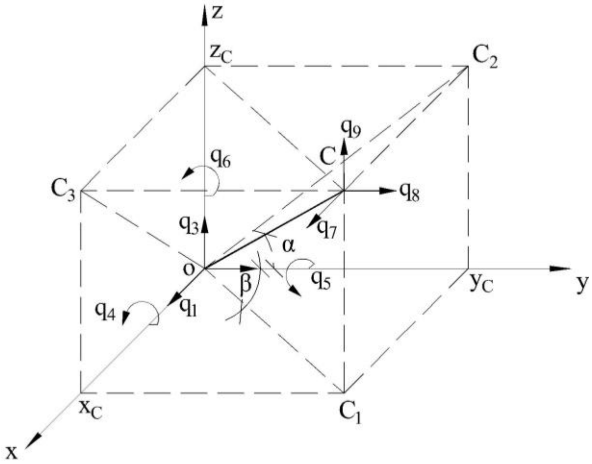



Рис. 4

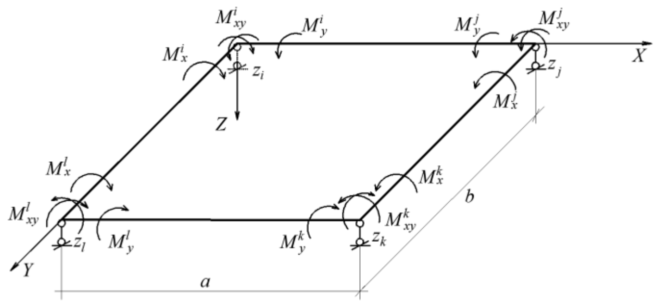



Рис. 5

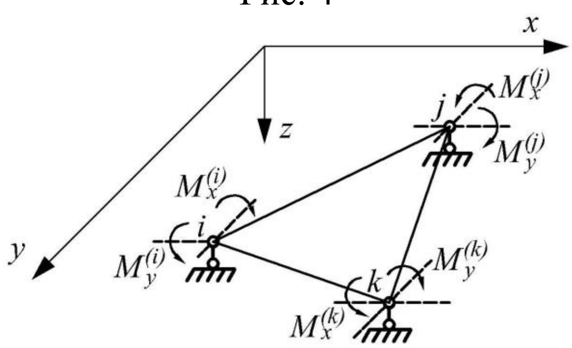



Рис. 6

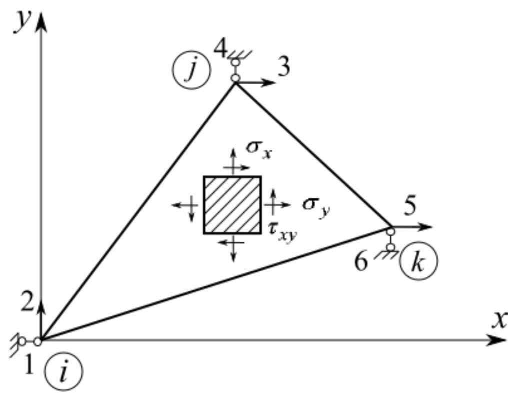



Рис. 7

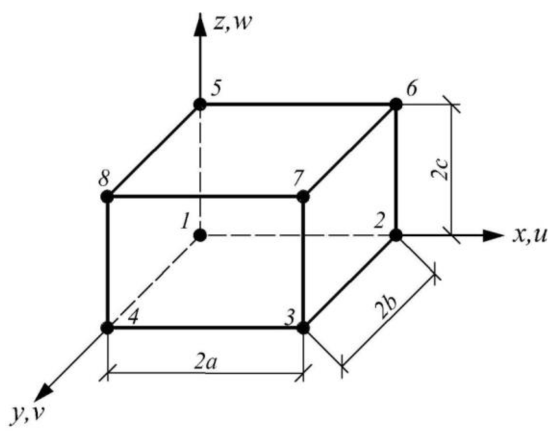



Рис. 8

Показаны особенности получения коэффициентов матриц откликов для каждого из рассмотренных типов конечных элементов, связанные с выбором функций форм, аппроксимирующих перемещений (деформаций) и поля усилий (напряжений) в области конечного элемента. Проанализирована аналитическая связь между этими полями, позволяющая упростить алгоритм получения коэффициентов матриц откликов.

Так для стержневых КЭ элементы матриц откликов получаются непосредственно из физического смысла задачи, т.е. из условий неразрывности, статических и кинематических условий, в виду простоты основных систем.

Так, например, для конечного элемента, изображенного на рис. 2, блоки матрицы откликов (2) имеют следующую структуру (без учета влияния поперечных сил):

$\left[r\right]$ - квадратная нулевая матрица шестого порядка,

$$\left[\delta\right]=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{l^3}{12EI}+\dfrac{kl}{GF}\right) & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{l}{EI} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{l}{EF}\end{bmatrix},\left[\tilde{r}\right]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha\\ -\dfrac{l}{2} & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ -\dfrac{l}{2} & -1 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix},\left[\tilde{\delta}\right]=-\left[\tilde{r}\right]^T. \qquad (3)$$

Формирование матриц откликов КЭ пластин и объемных конечных элементов происходит аналогично формированию матриц жесткости в МКЭ в перемещениях.

Проанализирована аналитическая связь между этими полями, позволяющая упростить алгоритм получения коэффициентов матриц откликов.

Формирование матриц откликов КЭ пластин и объемных конечных элементов выполняется аналогично формированию матриц жесткости в МКЭ в перемещениях. Различие состоит в основных системах.

Так, например, для прямоугольного конечного элемента, работающего на изгиб при действии узловой поперечной нагрузки за неизвестные приняты вертикальные линейные смещения четырех угловых точек конечного элемента, изгибающие моменты в направлении осей *0x* и *0y* ($M_x$ и $M_y$) и крутящие моменты ($M_{xy}=M_{yx}$) в этих же точках (всего 16 смешанных неизвестных).

При таком количестве неизвестных функция прогибов конечного элемента $z=w(x,y)$ аппроксимируется как и при расчете по МКЭ в перемещениях полным бикубическим полином, удовлетворяющим дифференциальное уравнение изгиба пластинки:

$$\begin{aligned}w(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2+\alpha_7x^3+\alpha_8x^2y+\alpha_9xy^2+\\&+\alpha_{10}y^3+\alpha_{11}x^3y+\alpha_{12}xy^3+\alpha_{13}x^2y^2+\alpha_{14}x^3y^2+\alpha_{15}x^2y^3+\alpha_{16}x^3y^3.\end{aligned} \qquad (4)$$

Коэффициенты полинома (4) находятся для каждого из 16 узловых единичных воздействий основных неизвестных $q_i = 1$ (индексы $i = 1..4$ - относятся к кинематическим неизвестным, а $i = 5..16$ - к силовым).

Кривизны и усилия в поле КЭ определяются в соответствии с этой функцией соотношениями:

$$\kappa_x^{(1)}(x,y) = \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2},\ \kappa_y^{(1)}(x,y) = \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2},\ \kappa_{xy}^{(1)}(x,y) = \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y},$$

$$M_x^{(1)}(x,y) = -D_x\left[\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2}\right],\ M_y^{(1)}(x,y) = -D_y\left[\mu_y \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2}\right], \qquad (5)$$

$$M_{xy}^{(1)}(x,y) = -D_k \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y}.$$

Коэффициенты блоков $r$ и $\delta$ матрицы откликов находятся аналогично тому, как находятся коэффициенты матрицы жесткости для прямоугольного КЭ для МКЭ в перемещениях:

$$r_{ij} = \int_\Omega (M_x^{(i)}\chi_x^{(j)} + M_y^{(i)}\chi_y^{(j)} + 2M_{xy}^{(i)}\chi_{xy}^{(j)})d\Omega,\ (i = 1..4,\ j = 1..4),$$
$$\delta_{ij} = \int_\Omega (M_x^{(i)}\chi_x^{(j)} + M_y^{(i)}\chi_y^{(j)} + 2M_{xy}^{(i)}\chi_{xy}^{(j)})d\Omega,\ (i = 5..16;\ j = 5..16). \qquad (6)$$

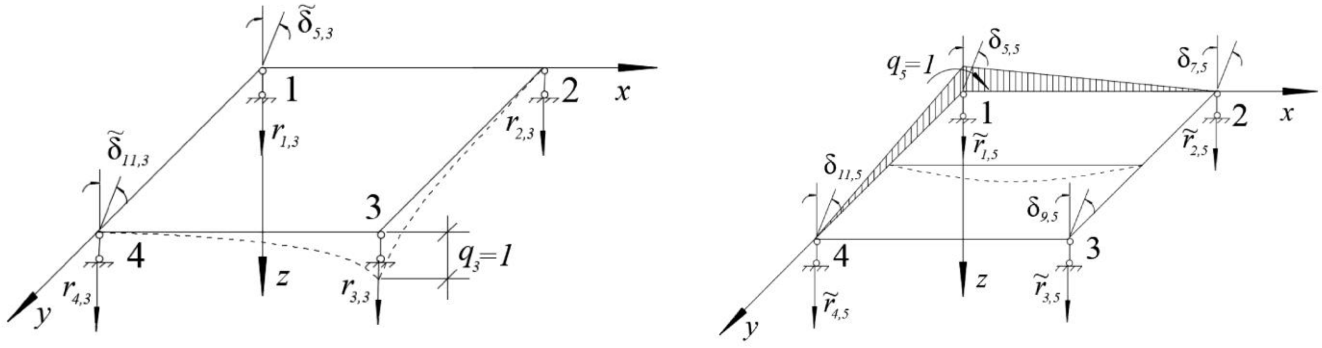
Найти по этому же алгоритму коэффициенты блоков $[\tilde{\delta}]$и $[\tilde{r}]$ невозможно.

Докажем это утверждение. Для этого рассмотрим, например задачу о нахождении коэффициентов $\tilde{r}_{3,5}$ и $\tilde{\delta}_{3,5}$.

Рассматривая соответственно единичное кинематическое воздействие $q_3 = 1$ (рис. 9, *а*) и единичное силовое воздействие $\tilde{q}_5 = 1$ (рис. 9, *б*), получим на основе принципа возможных перемещений следующее выражение: $1 \cdot \tilde{\delta}_{5,3} + \tilde{r}_{3,5} \cdot 1 = W_{5,3} = W_{3,5}$.

Из этого уравнения найти $\tilde{\delta}_{3,5}$ и $\tilde{r}_{3,5}$ невозможно, так как из теоремы о взаимности работ двух систем внешних сил следует $A_{3,5} = A_{5,3}$, т.е. $r_{3,3} \cdot 0 = 1 \cdot \tilde{\delta}_{5,3} + \tilde{r}_{3,5} \cdot 1$ и $\tilde{r}_{3,5} = -\tilde{\delta}_{5,3}$.

В связи с доказанным утверждением в качестве возможных состояний для нахождения коэффициентов блоков $[\tilde{\delta}]$и $[\tilde{r}]$ приняты функции формы на основе полинома Эрмита, используемого иногда в расчетах по МКЭ в перемещениях.




*а* *б*

Рис. 9

Рассмотрены различные математические модели конечных элементов в зависимости от принимаемого числа неизвестных (степеней свободы) в основной системе.

Описаны алгоритмы составления разрешающей системы уравнений (1) для конечно-элементного расчета в форме классического смешанного метода. Показано, что число этих уравнений определяется, как в МКЭ в перемещениях, числом неизвестных в узле принимаемой основной системы.

В разрешающих уравнениях (1) выполняются одновременно как условия равновесия узлов конечно-элементной сетки, так и условия совместности деформаций на межэлементных границах. Кроме того, в разрешающих уравнениях (1) развиваемой нами формы МКЭ содержатся одновременно как кинематические (узловые линейные перемещения), так и силовые неизвестные (моменты), что позволяет получить в результате решения все основные параметры напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции и обеспечить гарантированную сходимость к точному решению при сгущении конечно-элементной сетки.

Разработан алгоритм решения системы конечно-элементных уравнений, позволяющий предварительно свести её или к системе уравнений метода перемещений, что позволяет устранить проблемы, связанные с отсутствием положительной определенности разрешающей системы уравнений смешанного метода.

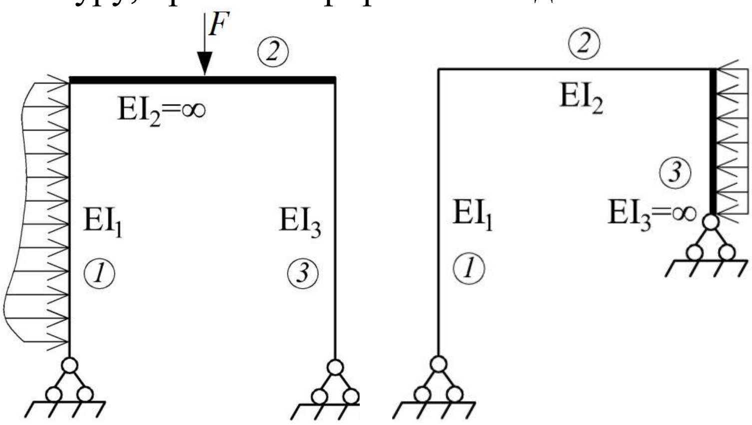
**В третьей главе** выполнен анализ эффективности применения разработанных математических моделей конечных элементов и алгоритмов формирования разрешающих конечно-элементных уравнений в задачах статики.

С использованием разработанных алгоритмов и реализующих их программ выполнены расчеты стержневых систем различных видов, позволяющие выявить особенности, проблемы и возможности применения МКЭ в форме классического смешанного метода.

Для тестирования корректности и точности решений, получаемых на основе разрабатываемой формы МКЭ, выполнено сравнение результатов расчета нескольких простых регулярных конструкций по этой форме МКЭ с результатами их расчета по методу сил и методу перемещений. Так как все три метода линейного расчета основаны на одних и тех же положениях, гипотезах и допущениях, то и решения по этим методам получены идентичные.

Выявлены особенности расчета плоских ферм со сложной решеткой, учет которых позволяет избежать ошибочных результатов расчета, допущенных в опубликованных работах некоторых исследователей.

На примерах расчета плоских стержневых систем, шарнирно опертой балки составного сечения и системы перекрестных балок (РСПБ) шарнирно опертой по контуру, проиллюстрирована сходимость и точность получаемых решений.



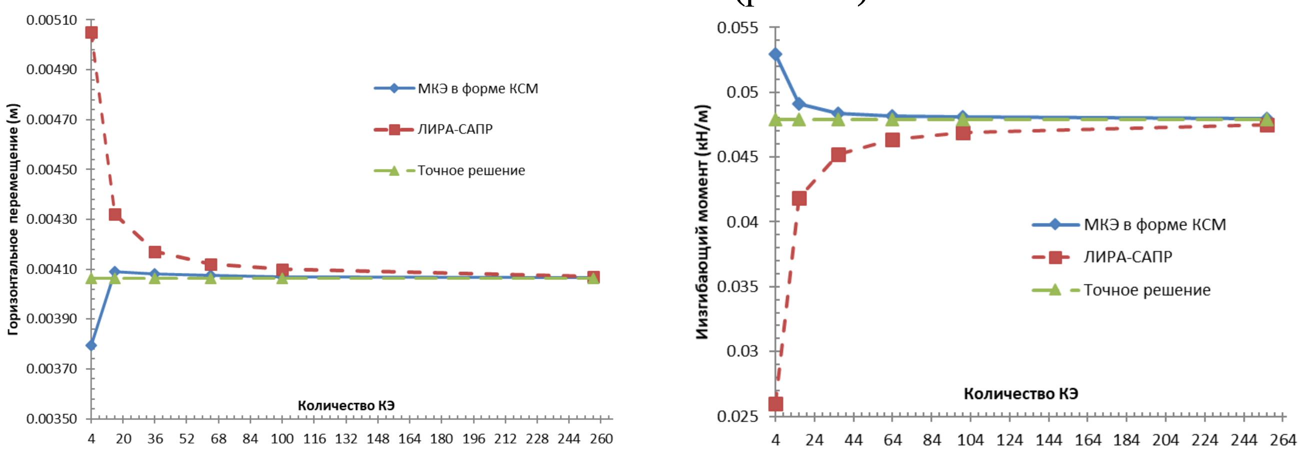

*а* *б*

Рис. 10

Получено решение известной проблемы расчета стержневых систем, содержащих в расчетной схеме конечные элементы большой или абсолютной жесткостью (рис. 10). На простых примерах показано, что в этом случае формальное применение метода перемещений или МКЭ в перемещениях невозможно.

В этой же главе, на основе разработанных во второй главе математической модели и алгоритма расчета, выполнено математическое моделирование и анализ изгибаемых пластинок.

Рассмотрены особенности решения системы конечно-элементных уравнений, моделирующих напряженно-деформированное состояние пластинки. Выполнен сравнительный анализ сходимости численных решений по МКЭ в перемещениях и МКЭ в развиваемой форме КСМ. Для квадратной шарнирно опертой по контуру пластины под воздействием поперечной равномерно распределенной нагрузки выявлено, что для достижения одинакового уровня приближения к точному решению в расчете по МКЭ в перемещениях по сравнению с МКЭ в форме КСМ необходимо использовать более мелкую сетку, т.е. большее количество конечных элементов (рис. 11).



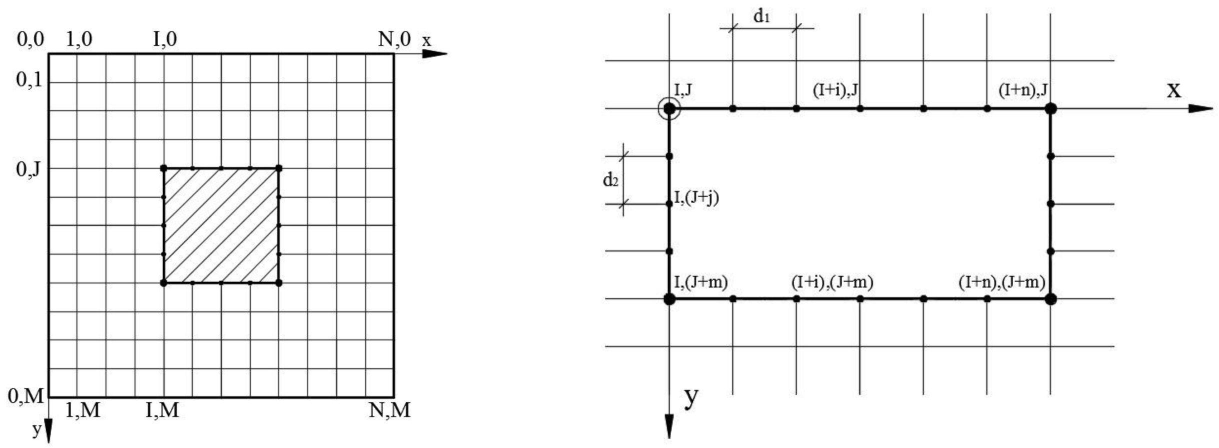

*а* *б*

Рис. 11

Особенностью стержневых и треугольных конечных элементов состоит в том, что основная система для них является статически определимой. Как следствие этого кинематические узловые воздействия на них вызывают лишь их смещения как жесткого целого, т.е. без появления внутренних усилий и соответствующих деформаций. Поэтому в разрешающих уравнениях для систем, представляемых ансамблем таких КЭ, будут отсутствовать смещения конечных элементов как жесткого целого, а матрица откликов такой системы не будет особенной, т.е. будет обратимой.

Для конечных элементов в виде четырехугольных пластинок основная система смешанного метода статически неопределимая. Однако и в этом случае исключение перемещений конечных элементов как жесткого целого из разрешающих конечно-элементных уравнений выполняется в явном виде путем выражения “лишних” узловых кинематических неизвестных через перемещения конечных элементов как жесткого целого.

Для пластин, имеющих отверстия и жесткие включения (рис. 12), анализ показал, что расчет по альтернативной форме МКЭ позволяет получить более точную картину напряженно-деформированного состояния пластинки, в особенности в угловых зонах жестких включений или отверстий, где возникает концентрация напряжений.




*а* *б*

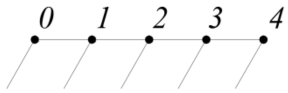
Рис. 12

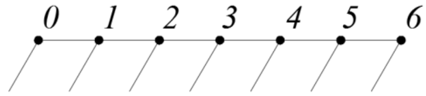
В табл. 1 приведены значения моментов $M_x/M_y$ в узлах на кромке жесткого квадратного симметричного включения.

В табл. 2 приведены величины прогибов $w$ и изгибающих моментов $M_x$ в узлах на кромке отверстия для различных вариантов густоты сетки КЭ при расчете пластинки с прямоугольным отверстием в середине с размером 1/3 от размера её сторон.

Анализ результатов расчетов, выполненных по МКЭ в форме классического смешанного метода и по МКЭ в перемещениях, как для пластинок с жесткими включениями, так и с отверстиями, позволяют сделать вывод, что они практически совпадают по прогибам и существенно отличаются по моментам в угловых зонах жестких включений или отверстий. При этом МКЭ в перемещениях не обеспечивает получение достоверной оценки НДС в угловых зонах пластинки.

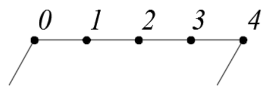
Табл. 1

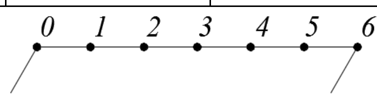
| Сетка 12х12, схема расположения узлов на стороне контура жесткой вставки: | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  | | | | | | |
| | | Номер узла | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $M_x$ / $M_y$ | а) | 0.0528003 / 0.0528003 | -0.0013975 / 0.0293264 | 0.0154761 / 0.0286309 | -0.0013975 / 0.0293264 | 0.0528003 / 0.0528003 |
| | б) | 0.0473646 / 0.0473646 | 0 / 0.0540278 | 0 / 0.0285276 | 0 / 0.0540278 | 0.0473646 / 0.0473646 |
| | в) | 0.0378305 / 0.0378305 | 0.0167902 / 0.0364982 | 0.0101641 / 0.0310212 | 0.0167902 / 0.0364982 | 0.0378305 / 0.0378305 |

| Сетка 18х18, схема расположения узлов на стороне контура жесткой вставки: | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | | | | | | | | |
| | | Номер узла | | | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $M_x$ / $M_y$ | а) | 0.0619342 / 0.0619342 | -0.0014288 / 0.031304 | 0.0130633 / 0.0280186 | 0.0054305 / 0.0264357 | 0.0130633 / 0.0280186 | -0.0014288 / 0.031304 | 0.0619342 / 0.0619342 |
| | б) | 0.0553253 / 0.0553253 | 0 / 0.0583592 | 0 / 0.0289407 | 0 / 0.0317048 | 0 / 0.0289407 | 0 / 0.0583592 | 0.0553253 / 0.0553253 |
| | в) | 0.0434851 / 0.0434851 | 0.0192547 / 0.0401058 | 0.0107435 / 0.0316814 | 0.0090207 / 0.0294146 | 0.0107435 / 0.0316814 | 0.0192547 / 0.0401058 | 0.0434851 / 0.0434851 |

а) МКЭ в форме КСМ при $D_k = 1000D$; б) МКЭ в форме КСМ при $D_k = \infty$; в) ПК ЛИРА-САПР

Табл. 2

| Сетка 12х12, схема расположения узлов на кромке отверстия: | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  | | | | | | |
| | | Номер узла | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $w$ | а) | 0.0038559 | 0.0043859 | 0.0045534 | 0.0043859 | 0.0038559 |
| | б) | 0.00374746 | 0.00428764 | 0.00445995 | 0.00428764 | 0.00374746 |
| $M_x$ | а) | 0.0557388 | 0.0414707 | 0.041163 | 0.0414707 | 0.0557388 |
| | б) | 0.0281528 | 0.0459029 | 0.0410237 | 0.0459029 | 0.0281528 |

| Сетка 18х18, схема расположения узлов на кромке отверстия: | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | | | | | | | | |
| | | Номер узла | | | | | | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $w$ | а) | 0.0038289 | 0.0042267 | 0.0044534 | 0.004528 | 0.0044534 | 0.0042267 | 0.0038289 |
| | б) | 0.00376506 | 0.00416942 | 0.00440017 | 0.0044757 | 0.00440017 | 0.00416942 | 0.00376506 |
| $M_x$ | а) | 0.0618897 | 0.0444113 | 0.0427939 | 0.0418117 | 0.0427939 | 0.0444113 | 0.0618897 |
| | б) | 0.0308483 | 0.0503841 | 0.0437953 | 0.0419085 | 0.0437953 | 0.0503841 | 0.0308483 |

а) МКЭ в форме КСМ; б) ПК ЛИРА-САПР

**Четвертая глава** посвящена двум проблемам:

- математическое моделирование матриц масс конечных элементов и формирование частотных уравнений в рассматриваемой форме метода конечных элементов;

- проблема частотных уравнений высокого порядка и методы ее решения.

При рассмотрении первой проблемы выполнено сравнение эффективности использования согласованной и несогласованной матрицы масс, исследованы возможные упрощения моделей динамических матриц откликов, показаны особенности задач в альтернативной форме МКЭ.

Выполнено математическое моделирование динамических матриц откликов стержневых и пластинчатых конечных элементов.

Частотное уравнение для рассматриваемой задачи состоит из статической матрицы откликов и динамической матрицы масс:

$$\left(\left[D\right]-\lambda\left[\boldsymbol{m}\right]\right)\left\{q\right\}=0,$$

где $D$ – статическая матрица откликов,

$\left[\boldsymbol{m}\right]$ - динамическая матрица масс,

$\left\{q\right\}$ - вектор основных неизвестных в основной системе КЭ в форме смешанного метода ($q$ – кинематические неизвестные, $\tilde{q}$ – силовые),

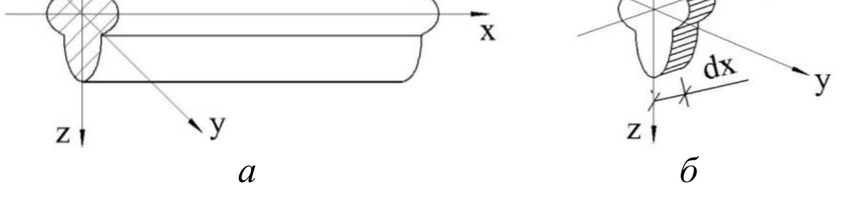
$\lambda=\omega^2$, $\omega$ - частота свободных колебаний.

Алгоритм формирования частотного уравнения включает несколько операций:

- по тому же алгоритму, который используется при приведении распределённой по площади КЭ нагрузки к узловой, находятся величины узловых масс (согласованная матрица масс КЭ) и соответствующие инерционные нагрузки;
- формируется статическая матрица масс для каждого конечного элемента;
- для получения динамической матрицы масс все узловые инерционные силы выражаются через тот же вектор основных неизвестных, что и матрица откликов конечного элемента;
- по тому же алгоритму, который используется для формирования статической матрицы для этой конструкции, формируется матрица масс всей конструкции.

Возможны различные варианты получения динамической матрицы откликов конечных элементов, соответствующей различным вариантам приведения масс к узлам.

Так, например, для изгибаемого стержневого конечного элемента в виде балки переменного сечения и, соответственно, с переменными по длине моментом инерции сечения и распределенной массой (рис. 13), матрицу узловых масс можно найти из условия равенства возможных работ внешних и внутренних сил на перемещениях в области конечного элемента.




*а* *б*

Рис. 13

В этом случае матрица масс является симметричной и называется «согласованной», так как для ее вычисления используются те же функции формы (аппроксимирующие функции), что и при вычислении матрицы жесткости.

Матрица масс конечного элемента также может быть получена другим путем, а именно, простым статическим способом сведения массы конечного элемента к его узлам. Такая матрица называется матрицей сосредоточенных масс конечного элемента. В отличие от «согласованной» она диагональная и более удобна для расчета, но и одновременно менее точно отражает динамические характеристики распределенной по длине конечного элемента массы.

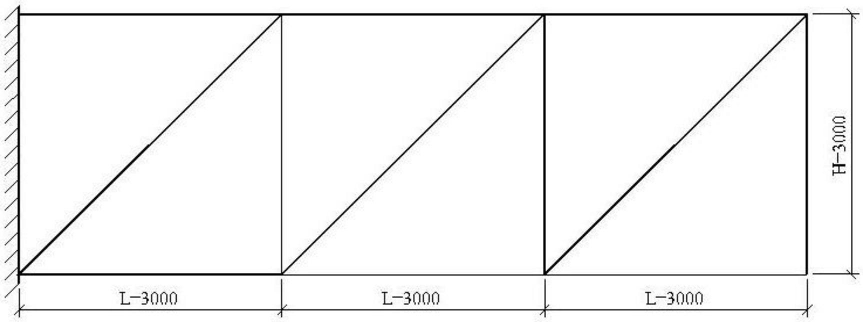
С использованием полученных матриц масс, найдены частоты свободных изгибных колебаний балки прямоугольного поперечного сечения с учетом только равномерно распределенной по длине балки собственной массы. Расчет выполнен при разном количестве конечных элементов.

В табл. 3 приведены погрешности (%) первых трех собственных частот по отношению к их точным значениям при их вычислении с использованием согласованной матрицы масс (СММ), диагональной матрицы масс (ДММ) и по методу конечных элементов в перемещениях с использованием ПК Лира при различном числе конечных элементов. Результаты показывают явное превосходство МКЭ в форме КСМ перед МКЭ в перемещениях по точности результатов

Табл. 3

| | 4 КЭ | 6 КЭ | 8 КЭ | 10 КЭ | 12 КЭ | 14 КЭ | 16 КЭ | Точное решение (Гц) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\omega_1$ | | | | | | | | |
| СММ | 0.13% | 0.03% | 0.01% | 0.006% | 0.006% | 0.006% | 0.00% | |
| ДММ | -0.32% | -0.04% | -0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 15.810 |
| ПК ЛИРА-САПР | -3.6% | -2.4% | -1.87% | -1.48% | -1.35% | -1.22% | -1.09% | |
| $\Delta\omega_2$ | | | | | | | | |
| СММ | 0.92% | 0.20% | 0.06% | 0.025% | 0.013% | 0.01% | 0.004% | |
| ДММ | -4.08% | -0.45% | -0.11% | -0.04% | -0.02% | 0.00% | 0.00% | 43.582 |
| ПК ЛИРА-САПР | -13.6% | -8.14% | -6.14% | -4.97% | -4.21% | -3.62% | -3.22% | |
| $\Delta\omega_3$ | | | | | | | | |
| СММ | 2.13% | 0.71% | 0.23% | 0.09% | 0.04% | 0.02% | 0.01% | |
| ДММ | -24.1% | -2.45% | -0.52% | -0.18% | -0.08% | -0.04% | -0.02% | 85.444 |
| ПК ЛИРА-САПР | -27.5% | -16.9% | -13.1% | -10.2% | -8.62% | -7.45% | -6.56% | |
| $L = 8м, EI = const, E = 3\cdot10^6 т/м^2, b = 0.15м, h = 0.15м, \rho = 2.75т/м^3$ | | | | | | | | |

Также найдены частоты свободных колебаний рамы с элементами прямоугольного поперечного сечения (рис. 14) с учетом только собственной массы, приведенной к узлам конечного элемента.




$E = 3\cdot10^6 т/м^2,$

$b = 0.15м, h = 0.15м,$

$\rho = 2.75т/м^3$

Рис. 14

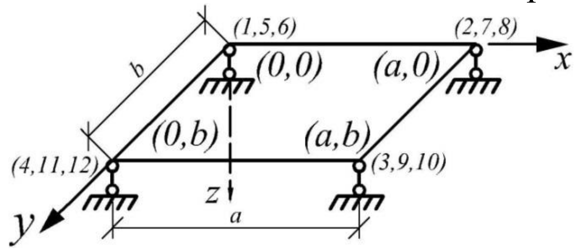
Рассмотрены три варианта сетки конечных элементов: 12, 24 и 36 конечных элементов. Результаты вычислений с использованием смешанной формы метода конечных элементов и МКЭ в перемещениях (ПК ЛИРА-САПР) приведены в табл. 4 (все результаты приведены в Гц).

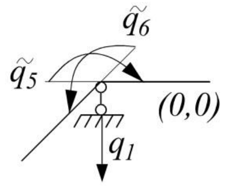
Табл. 4

| | | 12 КЭ | 24 КЭ | 36 КЭ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | СММ | 14,605 | 14,294 | 14,148 |
| | ДММ | 14,57 | 14,16 | 14,15 |
| | ПК ЛИРА-САПР | 14,44 | 14,09 | 14,08 |
| $\omega_2$ | СММ | 29,403 | 23,217 | 21,795 |
| | ДММ | 44,63 | 20,23 | 21,36 |
| | ПК ЛИРА-САПР | 21,69 | 19,43 | 20,19 |
| $\omega_3$ | СММ | 33,819 | 26,173 | 25,090 |
| | ДММ | 61,83 | 22,34 | 24,09 |
| | ПК ЛИРА-САПР | 22,87 | 21,62 | 22,66 |
| $\omega_4$ | СММ | 34,909 | 26,921 | 26,659 |
| | ДММ | 78,17 | 22,60 | 24,45 |
| | ПК ЛИРА-САПР | 25,18 | 21,92 | 23,05 |

По ним можно сделать следующие выводы: при сгущении сетки КЭ результаты по первым двум вариантам асимптотически сближаются; по ЛИРА-САПР погрешность расчета по сравнению с результатами по первому варианту, принимаемым за точное, не снижается.

Основная система МКЭ в форме КСМ для изгибаемого прямоугольного элемента с 12 степенями свободы и нумерация основных неизвестных в узлах конечного элемента показаны на рис. 15.




*а* *б*

Рис. 15

Функция прогибов КЭ аппроксимируется неполным бикубическим полиномом: $w(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\ldots+\alpha_{12}xy^3$.

Величины узловых масс (согласованную матрицу масс) конечного элемента получим по алгоритму, который используется при приведении распределенной по площади КЭ нагрузки к узловой, т.е. приравнивая возможные работы распределенных нагрузок и возможные работы узловых инерционных нагрузок:

$$[\boldsymbol{m}]=\int_0^a\int_0^b\begin{bmatrix}\bar{m} & 0 & 0\\ 0 & \rho I_x & 0\\ 0 & 0 & \rho I_y\end{bmatrix}[\Phi]^T\cdot[\Phi]\,dxdy,$$

где $\Phi$ - квадратная диагональная матрица размером 3x3,

$$\Phi_{1,1}=\lfloor 1,\,x,\,y,\,x^2,\,y^2,\,xy,\,x^2y,\,xy^2,\,x^3,y^3,\,x^3y,\,xy^3\rfloor,\ \Phi_{2,2}=\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{1,1}),\ \Phi_{3,3}=\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_{1,1}).$$

Выполненные сравнительные расчеты показали высокую эффективность реализованного алгоритма.

Сравнение результатов численного расчета с использованием алгоритма МКЭ в форме классического смешанного метода с результатами расчета по МКЭ в перемещениях с использованием ПК Лира показало их практически полное совпадение.

Преимущество первого алгоритма особенно убедительно проявляется при расчетах на вынужденные колебания, где наибольший интерес представляют усилия, входящие в качестве неизвестных в разрешающую систему уравнений.

В рамках решения, упомянутой выше, второй проблемы выполнено исследование эффективности численного моделирования проблем разрешающих систем алгебраических уравнений высокого порядка и соответствующих частотных уравнений на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Для этого разработаны и апробированы на тестовых и модельных задачах различные варианты моделирования редуцированных частотно-динамических уравнений.

Первый из них, называемый сплайн – коллокационной интерполяцией искомых параметров (перемещений), наиболее эффективен в том случае, когда поле искомых параметров (перемещений) может быть аппроксимирована достаточно гладкой функцией с производными не ниже второго порядка.

Второй разработан для решения неполной алгебраической проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) и основан на методе многоступенчатой частотно – динамической конденсации применительно к частотным уравнениям в форме смешанного метода.

Основная идея этого метода заключается в замене расчетной схемы с большим числом динамических степеней свободы к системе с заранее назначенным небольшим числом степеней свободы, т.е. редуцированной к так называемым главным степеням свободы системе.

Алгоритм получения такой редуцированной системы состоит из нескольких последовательно выполняемых операций:

1. Все динамические степени свободы системы и узлы, к которым они относятся, разделяются на главные и второстепенные.

2. Все второстепенные степени свободы и узлы, к которым они относятся, разделяются на группы, по степени близости к главным.

3. Формируются парциальные динамические системы, каждая из которых включает главные степени свободы и степени свободы одной из групп второстепенных степеней свободы.

4. Для каждой из этих групп решается полная алгебраическая проблема СЗ и СВ.

5. Находится динамическая матрица масс редуцированной системы, исходя из условия равенства собственных значений ее частотного уравнения и собственных частот парциальной системы.

6. Из сравнения полученной матрицы масс и соответствующих элементов матрицы масс, связанной с главными степенями свободы исходной нередуцированной системы, находятся конденсационные добавки к массам в главных узлах от масс конденсируемой группы второстепенных степеней свободы.

7. Суммируя конденсационные добавки от масс во всех второстепенных степенях свободы, получаем редуцированную матрицу масс.

8. В соответствии с этой матрицей масс, строится редуцированное частотное уравнение и находится его решение как полной алгебраической проблемы СЗ и СВ.

Увеличив число узлов конденсации, получим последовательность уточняющихся решений. Предварительная статическая конденсация существенно уменьшает погрешность решения, получаемого без её использования.

В математическом плане все упомянутые выше варианты сводятся к решению неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов для систем с небольшим числом степеней свободы.

Выполнен сравнительный анализ эффективности этих вариантов.

Выполнен расчет жестко защемленной по контуру пластинки, несущей равномерно распределенную массу. По сравнению с методом статической конденсации, которая обеспечивает получение приемлемого результата только для минимальной собственной частоты, метод частотно-динамической конденсации позволяет получить результаты близкие к точным (с абсолютной погрешностью не более 7%) для 13-ти первых собственных частот.

Так как в математическом плане проблема нахождения спектра собственных частот (СЗ) и собственных форм колебаний (СВ) и проблема нахождения спектра критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости являются, по сути, одинаковыми, то разработанные алгоритмы применимы как для решения задач динамики, так и для задач устойчивости.

**В пятой главе** рассмотрены проблемы математического моделирования задач устойчивости стержневых и пластинчатых систем на основе МКЭ в форме КСМ. Для лучшего понимания различных подходов решению этих задач в настоящее время, приведена сложившаяся в научной литературе градация теорий устойчивости и приведены основные положения, лежащие в основе теорий первого, второго и третьего порядков.

В рамках теории первого порядка, так называемой линейной теории, на основе МКЭ в форме КСМ разработаны математические модели матриц откликов продольно-сжатых стержневых и пластинчатых конечных элементов и разрешающих уравнений задач устойчивости систем, представляемых ансамблем таких конечных элементов.

Рассмотрены и проанализированы два варианта матриц откликов и соответствующих разрешающих уравнений: “точный” в рамках, заложенных в теории первого порядка положений и допущений, и приводящих к трансцендентным уравнениям относительно параметра устойчивости, и приближенный, основанный на аппроксимации полей деформации конечных элементов функциями деформации от статических нагрузок.

Особенностью алгоритмов второго варианта является построение матрицы потенциала продольных (сжимающих) нагрузок для конечного элемента и для конструкции в целом с использованием в качестве элемента, тех же функций, что и при обычном статическом расчете. Это позволяет избежать трудоемких вычислительных проблем, связанных с использованием трансцендентных функций.

Матрица откликов $[d]$ конечного элемента может быть представлена в виде суммы двух матриц

$$[d]=[d_{cm}]-N[d_N], \qquad (7)$$

где $[d_{cm}]$ – матрица откликов КЭ при отсутствии продольной силы,

$N[d_N]$ – дополнительная матрица, учитывающая влияние продольной силы.

На примере КЭ-стержня найдем зависимость возникающих реакций и смещений от единичных значений неизвестных с учетом влияния продольной силы $N$, т.е. сформируем матрицу откликов $[d]$ конечного элемента – стержня.

Принципиально это может быть выполнено на основе принципа возможных перемещений:

$$A_{ij}+W_{ij}=r_{ij}\cdot 1+N\int_0^l (y_i^{'}y_j^{'})dx-\int_0^l EI(y_i^{''}y_j^{''})dx=0. \qquad (8)$$

Отсюда следует

$$r_{ij}=\int_0^l EI(y_i^{''}y_j^{''})dx-N\int_0^l (y_i^{'}y_j^{'})dx. \qquad (9)$$

Здесь $y_i(x)$, $y_j(x)$ – функции соответствующей статической деформации от $i$-го и $j$-го единичных воздействий основных неизвестных.

Как показывает опыт расчетов, замена точных решений с использованием трансцендентных функций приближенными дает хорошие результаты в тех случаях, когда критическая сила для любого конечного элемента основной системы значительно выше критической силы для всей системы в целом.

Для иллюстрации рассмотрена модельная задача о нахождении критической нагрузки для продольно-сжатого стержня. Полученные результаты показали хорошую сходимость результатов по второму варианту к “точным” решениям.

Также получена матрица откликов продольно-сжатого изгибаемого конечного элемента – пластинки (рис. 16).

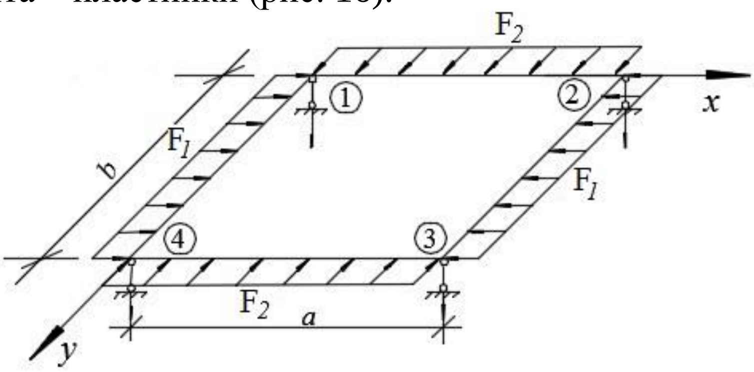



Рис. 16

Основная система и функция формы для КЭ-пластинки принимаются в том же виде, что и для изгибаемого КЭ без продольного сжатия.

Поэтому без изменений остаются все выражения для моментов и кривизн.

При вычислении коэффициентов $r_{ij}$, $\delta_{ij}$ в матрице откликов КЭ необходимо учесть сближение кромок КЭ от воздействия приложенных по кромкам сжимающих продольных сил $F_1$ и $F_2$.

$$\Delta_x^{(j)} = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{a}\left(\frac{dw^{(j)}(x,y)}{dx}\right)^2 dx,$$
$$\Delta_y^{(j)} = \frac{1}{2}\int\limits_{x=0}^{b}\left(\frac{dw^{(j)}}{dy}\right)^2 dy, \tag{10}$$

где $j$ – номер единичного воздействия, т.е. номер соответствующего неизвестного в основной системе конечного элемента.

С учетом (10) выражение для определения коэффициентов $r_{ij}$ будет иметь следующий вид:

$$r_{ij} = \iint\limits_{\Omega}\Big[M_x^{(i)}(x,y)\kappa_x^{(j)}(x,y) + M_y^{(i)}(x,y)\kappa_y^{(j)}(x,y) +$$
$$+2M_{xy}^{(i)}(x,y)\kappa_{xy}^{(j)}(x,y)\Big]dxdy - \Delta_x^{(j)} - \Delta_y^{(j)}. \tag{11}$$

При вычислении коэффициентов $\delta_{ij}$ в выражении (11) верхний индекс ($j$) при $\Delta_x^{(\ )}$ и $\Delta_y^{(\ )}$ заменяется на индекс ($i$).

Формирование разрешающей системы уравнений для задачи устойчивости не отличается от ее формирования в задачах статики.

Для решения задачи устойчивости матрицу откликов системы нужно представить в виде (7) – разности двух матриц: матрицы, получаемой в статических задачах (статическая матрица откликов $d_{cm}$), и матрицы, состоящей из добавок от учета продольно-поперечного изгиба (матрица добавочных откликов на действие продольного сжатия $Nd_N$): $d = d_{cm} - Nd_N$. В случае приближенных выражений для матрицы откликов (т.е. без трансцендентных функций) разрешающие уравнения принимают вид

$$\left([d_{cm}] - N[d_N]\right)\begin{Bmatrix} q \\ q \end{Bmatrix} = 0, \tag{12}$$

или

$$[C - \lambda E]\begin{Bmatrix} q \\ q \end{Bmatrix} = 0, \tag{13}$$

где $[C] = [d_N][d_{cm}]^{-1}, \quad \lambda = \dfrac{1}{N}.$

Уравнение (13) имеет нетривиальное решение, если

$$\left|C - \lambda E\right| = 0. \tag{14}$$

Выражение (14) является стандартной записью алгебраической проблемы собственных векторов и собственных значений.

Найдя любым из известных методов [$\lambda_{\max}$], получим

$$F_{кр,\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}}.$$

Изложенные варианты решения задач устойчивости стержней и стержневых конструкций на основе МКЭ в форме КСМ дают возможность решить отмечаемую во многих работах проблему наличия в расчетной конечно-элементной схеме очень жестких или бесконечно жестких элементов. При расчетах по МКЭ в форме метода перемещений их наличие приводит к ухудшению обусловленности матрицы жесткости и, как следствие, к существенным погрешностям решения, а иногда и к неверным результатам.

При использовании МКЭ в форме КСМ ухудшения обусловленности матрицы откликов КЭ не происходит. В этом не трудно убедиться, подставив бесконечную жесткость КЭ в блок $\delta$ матрицы откликов. В результате получаем нулевые значения элементов этого блока.

Это означает, что математическая модель продольно-сжатого КЭ в МКЭ в форме КСМ остается неизменной и при его бесконечной жесткости, что позволяет без затруднений решать задачи, отмечаемые в некоторых работах как проблемные.

**В шестой главе** рассмотрено моделирование геометрически и конструктивно нелинейных задач и изложен алгоритм решения нелинейной системы разрешающих уравнений метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

Использование МКЭ в форме классического смешанного метода приводит к получению разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений относительно определяемых неизвестных параметров. Эта система может быть представлена в форме матричного уравнения

$$\left[D(q)\right]\{q\} - \{F\} = 0, \qquad (15)$$

где $\{q\} = \lfloor q_1, q_2, \ldots, q_n, \tilde{q}_{n+1}, \tilde{q}_{n+2}, \ldots, \tilde{q}_{n+m} \rfloor^T$ - вектор кинематических ($q$) и силовых ($\tilde{q}$) неизвестных в основной системе смешанного метода,

$\{F\} = \lfloor F_1, F_2, \ldots, F_n, \tilde{F}_{n+1}, \tilde{F}_{n+2}, \ldots, \tilde{F}_{n+m} \rfloor^T$ - вектор, элементами которого являются внешние воздействия ($F$ - кинематические, $\tilde{F}$ - силовые),

$\left[D(q)\right]$ - матрица откликов конструкции размером $(n+m)\times(n+m)$, элементы которой зависят не только от свойств материала и геометрии конструкции, но и от её напряженно-деформированного состояния, выражаемого через вектор $\{q\}$.

Система уравнений (14) является системой нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно искомых перемещений и усилий.

Решение её выполняется инкрементальным методом (пошаговое нагружение) с уточнением решения после каждого шага нагружения по методу Ньютона-Рафсона.

Предположим, что после выполнения $k$-го шага догружения, т.е. при уровне нагрузки $P^{(k)}$, найдены значения искомых неизвестных: $q_1^{(k)}$ , $q_2^{(k)}$ ,…, $q_n^{(k)}$ - кинематических и $\tilde{q}_{n+1}^{(k)}$ , $\tilde{q}_{n+2}^{(k)}$ ,…, $\tilde{q}_{n+m}^{(k)}$ - силовых.

Эти значения неизвестных удовлетворяют СЛАУ.

$$L_1\left[q_1^{(k)},\ \ldots,q_n^{(k)},\tilde{q}_{n+1}^{(k)},\ \ldots,\tilde{q}_{n+m}^{(k)},F^{(k)}\right]=0\,. \qquad (16)$$

При добавлении на $(k+1)$-ом шаге нагрузки $\Delta F^{(k+1)}$ получаем СНАУ

$$\begin{aligned}&L_2\Big[\left(q_1^{(k)}+\Delta q_1^{(k+1)}\right),\ldots,\left(q_n^{(k)}+\Delta q_n^{(k+1)}\right),\ \left(\tilde{q}_{n+1}^{(k)}+\Delta q_{n+1}^{(k+1)}\right),\ldots,\\&\ldots,\left(\tilde{q}_{n+m}^{(k)}+\Delta q_{n+m}^{(k+1)}\right),\left(F^{(k)}+\Delta F^{(k+1)}\right)\Big]=0.\end{aligned} \qquad (17)$$

Вычтя из оператора (17) оператор (16), получим СНАУ в приращениях параметров $\Delta q^{(k+1)}$, $\Delta F^{(k+1)}$:

$$\begin{aligned}&L_2\Big[\left(q^{(k)}+\Delta q^{(k+1)}\right),\left(F^{(k)}+\Delta F^{(k+1)}\right)\Big]-L_1\left(q^{(k)},\,P^{(k)}\right)=\\&=L_3\left[\Delta q^{(k+1)},\ \Delta F^{(k+1)}\right]=0\,.\end{aligned} \qquad (18)$$

Выполнив линеаризацию СНАУ (18), оставляя величины первого порядка малости, и решив полученную СЛАУ, найдем значения приращений искомых параметров $\Delta q^{(k+1)}$ и по ним значения параметров $q^{(k+1)}=q^{(k)}+\Delta q^{(k+1)}$ после $(k+1)$-го шага догружения.

Уточнение этого решения выполняется по методу Ньютона – Рафсона или его модификации.

Уточнение решения после $(k+1)$-го шага догружения выполняется по следующему алгоритму.

Найденное решение после $(k+1)$-го шага догружения $q^{(k+1)}=\left(q^{(k)}+\Delta q^{(k+1)}\right)$ подставляется в СНАУ (17). Так как это решение является лишь нулевым (линейным) приближением, то в правой части этой СНАУ получим не нули, а вектор невязок в уравнениях равновесия и совместности деформаций (перемещений)

$$L_2\left({}^{(0)}q^{(k+1)},F^{(k+1)}\right)=\left\lfloor\delta\left({}^{(0)}R^{(k+1)}\right),\delta\left({}^{(0)}\Delta^{(k+1)}\right)\right\rfloor^T. \qquad (19)$$

Для получения первого приближения (уточнения) к точному решению подставим в (19) вместо ${}^{(0)}q^{(k+1)}$ величину ${}^{(0)}q^{(k+1)}={}^{(0)}q^{(k+1)}+{}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$ и выполним линеаризацию полученного СНАУ.

$$L_2\left({}^{(0)}q^{(k+1)}+{}^{(1)}\Delta q^{(k+1)},F^{(k+1)}\right)=0. \qquad (20)$$

Решив полученное из (20) линеаризованное уравнение относительно поправок ${}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$, получим уточненное решение ${}^{(1)}q^{(k+1)}={}^{(0)}q^{(k+1)}+{}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$.

Подставив это решение в (20), получим вектор невязок $\left\lfloor\delta\left({}^{(1)}R^{(k+1)}\right),\delta\left({}^{(1)}\Delta^{(k+1)}\right)\right\rfloor^T$.

Циклы итераций повторяются до достижения нужной степени приближения к нулю разницы невязок между двумя последовательными приближениями.

Излагаемый алгоритм является обобщением математической модели, использованной в главе 3 для расчета линейно – деформируемых стержневых систем. Возможность учета различных видов нелинейностей в математических моделях упругих стержневых систем, основанных на МКЭ в форме классического смешанного метода, существенно расширяет область их применения.

Следует отметить также, что в разрешающей системе уравнений (15), не меняя ее структуру, можно менять местами часть искомых параметров и часть заданных параметров, что особенно важно при расчете конструктивно-нелинейных систем и при исследовании моделей геометрически или физически нелинейного поведения конструкций.

Смену параметров в ходе такого исследования принято называть сменой “жесткого” нагружения на “мягкое” или наоборот. Такой прием позволяет проследить “ветвление” решений в закритической области.

При решении геометрически нелинейных задач необходимо детальное исследование траектории деформирования конструкции в связи с тем, что возможна неоднозначность решения, когда одному уровню внешних силовых или кинематических воздействий могут соответствовать различные конфигурации деформированной конструкции.

Поэтому необходимо выяснить, какие из равновесных конфигураций являются устойчивыми, а какие нет. Проблема достоверности численного решения геометрически нелинейных задач деформирования стержневых конструкций (большие перемещения) до сих пор вызывает большой интерес. В ряде публикаций рассмотрены некоторые модельные задачи, позволившие выявить “подводные камни” при использовании в расчетах МКЭ в перемещениях. Хотя в дальнейшем и была показана некорректность в математических выкладках в исходных публикациях, полную достоверность решения можно подтвердить только совпадением результатов, полученных двумя различными способами или с экспериментом.

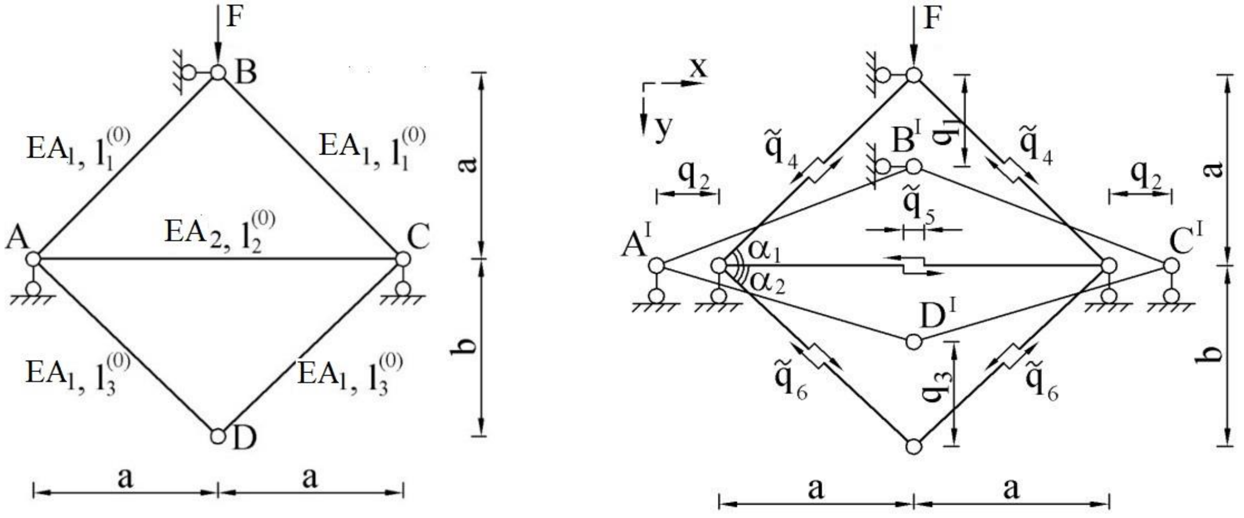
Одним из таких методов является расширенный метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, с использованием которого, на основе изложенного выше алгоритма, нами была решена, как задача, с которой началась упомянутая дискуссия, так и ряд других задач.

Для отслеживания смены конфигураций шарнирно-стержневых систем построен алгоритм решения задач о деформировании шарнирно-стержневых систем в геометрически нелинейной постановке.

С его использованием получено решение геометрически нелинейной задачи о деформировании простой шарнирно-стержневой системы из пяти линейно-упругих стержней (рис. 17, а), вызвавшей дискуссию, упомянутую выше.

Основная система и система в деформированном состоянии показаны на рис. 17, *б*.

Выполненные численные примеры анализа показали, что смена конфигураций шарнирно-стержневой системы без “прощелкиваний” возможна только при приложении компенсирующей (отрицательной по направлению) нагрузки, обеспечивающей разгружение системы.




*а* *б*

Рис. 17

По упомянутому алгоритму найдены все возможные равновесные состояния системы. На всех этапах нагруженния, связанных со сменой конфигураций системы, совпадение результатов решения на основе МКЭ в форме КСМ с результатами аналитического решения, подтверждают эффективность этой формы МКЭ.

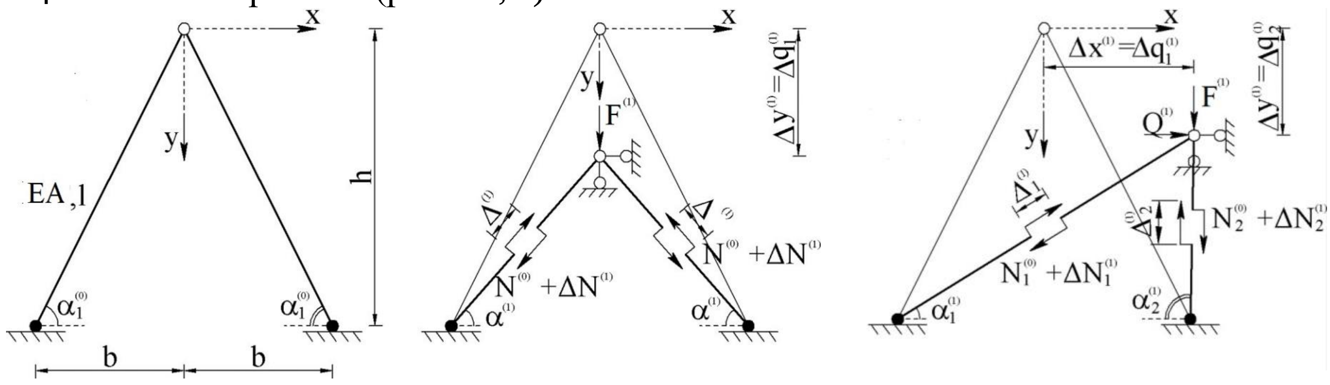
Второй рассмотрена задача о геометрически нелинейном проведении простейшей симметричной двухстержневой плоской шарнирно-стержневой системы, называемой фермой Мизеса.

Эта задача решалась многими авторами в различных постановках и различными методами. Как модельная и тестовая она используется и в настоящее время для анализа, отладки и тестирования алгоритмов и программного обеспечения решения геометрически нелинейных задач. В данном случае задача решается методом конечных элементов в форме классического смешанного метода в геометрически нелинейной постановке.

Как показано в работах В.В. Галишниковой, алгоритм известного программного комплекса, основанный на реализации МКЭ в перемещениях, не позволяет выявить критическую конфигурацию, соответствующую точке бифуркации, и продолжает следовать кривой равновесных состояний за точкой бифуркации при продолжении возрастания нагрузки. Создается ложное впечатление, что ферма устойчива, однако, на самом деле нагрузка после прохождения точки бифуркации снижается (ферма теряет устойчивость). Потеря устойчивости вследствие бифуркации алгоритмом не выявляется.

В пятой главе было показано, что простейшая шарнирно-стержневая система в виде фермы Мизеса может терять устойчивость (при расчете ее по теории устойчивости первого порядка) как по прямосимметричной форме, так и по кососимметричной.

В данной главе построены математические модели задачи нелинейного расчета фермы Мизеса (рис. 18, *а*) по теории второго порядка двух возможных форм потери устойчивости – прямосимметричной (рис. 18, *б*) и обратносимметричной (рис. 18, *в*).




*а* *б* *в*

Рис. 18

Одной из проблем нелинейного расчета фермы Мизеса является выявление точек ветвления решения на кривой равновесных состояний. При использовании МКЭ в форме КСМ эта проблема не возникает.

Выполненный численный анализ геометрически нелинейного поведения фермы Мизеса привел к алгоритму построения кривой равновесных состояний фермы в докритической и закритической областях. В соответствии с ним в докритической области параметром шагового нагружения является силовая нагрузка *P*. При силовой нагрузке, близкой к точке ветвления решения на кривой равновесных состояний, параметр шагового нагружения меняется на деформационный. Анализ результатов расчета при различных углах наклона $\alpha$ стержней фермы позволил выявить тот факт, что ветвление происходит при $\alpha = 64{,}1^{o}$. При меньших значениях углах $\alpha$ обратносимметричная форма потери устойчивости невозможна.

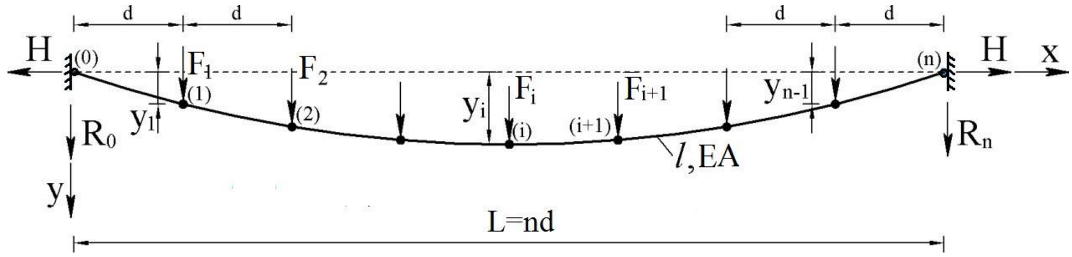
Математическое моделирование задач о геометрически нелинейном поведении нерастяжимых и растяжимых нитей и тросов в рамках традиционного МКЭ в перемещениях невозможно.

При использовании МКЭ в форме КСМ такое моделирование никаких затруднений не вызывает. Оно выполняется по общему алгоритму, изложенному в начале главы.

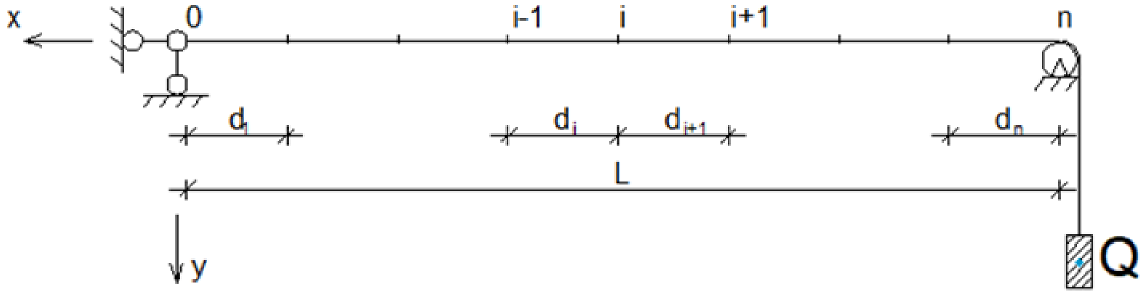
В диссертации приведены примеры моделирования разрешающих уравнений для нерастяжимой и растяжимой нити, загруженной в равноотстоящих точках (рис.19, *а*) и преднапряженной контргрузом (рис.19, *б*).

При использовании процедуры пошагового догружения прослеживается процесс изменения геометрии нити.

Для оценки сходимости получаемых численных результатов выполнено их сравнение с аналитическим решением.




*а*




*б*

Рис. 19

Физическая модель конструктивно нелинейной системы предусматривает описание геометрии конструкции, характеристик односторонних опор (жесткость опор и их рабочие направления, величины зазоров между конструкцией и опорами), размещения и величины нагрузки (рис. 20).

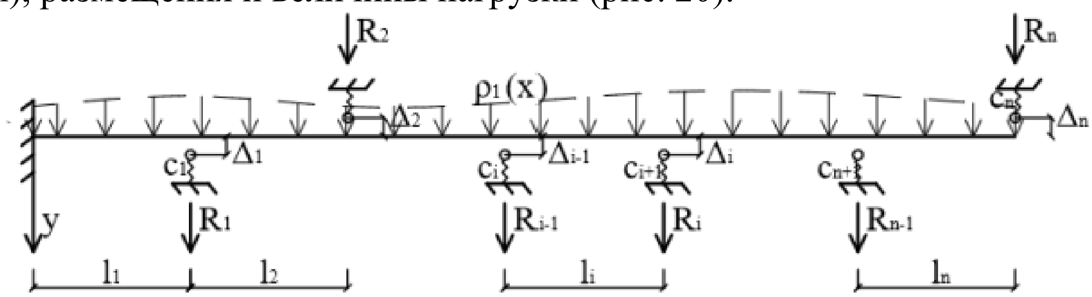



Рис. 20

На основе этой физической модели строятся математические модели конструкций и соответствующие им расчетные схемы для каждой стадии нагружения. Так как величина ступени нагружения принимается малой, то для нахождения рабочей схемы требуется небольшое число итераций, не приводящих к зацикливанию итерационного процесса.

После каждой итерации выполняется анализ результатов – величин реакций и их направлений в принятой на этой итерации расчетной схеме, величин и направлений перемещений по направлениям зазоров. Если направление реакций в какой-то связи соответствует рабочему направлению этой связи, то эта связь остается и в следующей итерации расчетной схемы. Если перемещение в направлении имеющегося зазора меньше его величины, то и в следующей итерации расчетной схемы в этой точке расчетная схема не изменяется. В противном случае принимается решение об исключении или постановке связи в анализируемом узле расчетной схемы.

Рабочая схема конструкции на каждом шаге догружения считается найденной, если на $k$-ой и $k$+1-ой итерациях расчетные схемы совпадают.

В результате можно проследить изменения рабочей схемы в процессе пошагового догружения.

В диссертации приведены примеры расчета систем с односторонними связями в виде многопролетной балки и пластинки с односторонними связями по контуру.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы, полученные при выполнении данной диссертационной работы:

**Основные результаты**

1. В соответствии со сформулированной целью в диссертации разработан расширенный метод конечных элементов в форме классического смешанного метода физический смысл которого наиболее логично объясняется с помощью введенного термина-понятия “матрица откликов” конечного элемента.
2. На основе этой формы МКЭ разработаны физико-математические модели некоторых типов конечных элементов и алгоритмы формирования разрешающих уравнений применительно к линейным и нелинейным задачам статики, динамики и устойчивости в строительной механике.
3. Разработаны алгоритмы и программные средства численной реализации разрешающих конечно-элементных уравнений.
4. Эффективность разработанных моделей и алгоритмов подтверждена численным решением широкого круга тестовых примеров: линейных и нелинейных задач статики, динамики и устойчивости, и сравнением с имеющимися аналитическими решениями и результатами, полученными на основе других методов.
5. Разработанные программные средства и выполненное их вычислительное тестирование создают основу для разработки программного обеспечения развиваемой формы МКЭ.
6. Заложены основы для дальнейшего развития расширенной теории МКЭ на основе классического смешанного метода, расширения библиотеки матриц откликов конечных элементов, разработки программных средств для реализации алгоритмов расчета сложных конструкций.

**Выводы**

1. Обзор литературы по теме исследования показал отсутствие сопоставимого по эффективности и степени формализации с МКЭ в перемещениях других форм или вариантов МКЭ.
2. При реализации вычислительного процесса по МКЭ в перемещениях возникает ряд не решенных до сегодняшнего дня проблем.
3. Наиболее перспективной, из имеющихся в настоящее время форм МКЭ, представляется расширенный МКЭ в форме классического смешанного метода. По степени простоты формализации и алгоритмизации, т.е. математического моделирования, МКЭ в этой форме аналогичен классическому МКЭ в перемещениях. Поэтому все программные средства, реализующие МКЭ в перемещениях, могут быть использованы как основа для программных средств, реализующих МКЭ в форме смешанного метода.

4. Основное терминологическое отличие этой формы МКЭ заключается во введенном фундаментальном термине-понятии – «матрица откликов», позволившем логически обосновать соответствующие смешанному методу физические и математические модели конечных элементов и разрешающих систем уравнений.

5. Число этих уравнений определяется, как и в МКЭ в перемещения, числом неизвестных в узле конечно-элементной сетки принимаемой основной системы. Это означает, что и традиционной форме МКЭ в перемещениях, и в МКЭ в форме КСМ, число уравнений будет одинаковым. Однако в МКЭ в форме КСМ в разрешающих уравнениях содержатся одновременно как кинематические, так и силовые неизвестные, что позволяет получить в результате решения все основные параметры напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции (напряжения и перемещения).

6. Выполненные примеры расчета на основе разработанных моделей позволили выявить ряд преимуществ и особенностей МКЭ в форме классического смешанного метода, позволяющих решить ряд отмечаемых многими исследователями проблем, связанных с применением традиционного МКЭ:

- одновременного удовлетворения условий равновесия и условий неразрывности деформаций;
- обеспечения совместности как перемещений, так и усилий на границах смежных конечных элементов;
- исключение из расчетов влияния смещения конечного элемента как жесткого целого;
- учета влияния конечных элементов с очень большой жесткостью.

7. Основные преимущества развиваемой формы МКЭ заключаются в следующем:

- не меняя структуру системы разрешающих уравнений, можно после любого шага нагружения сменить вид параметра нагружения, т.е. менять местами задаваемый вид параметра нагружения и один из подлежащих нахождению видов неизвестных, что особенно важно при расчете конструктивно – нелинейных систем с пошаговой процедурой нагружения, что оказывается очень эффективным при исследовании закритического поведения стержневых конструкций, позволяя проследить “ветвление” решений в закритической области;
- разрешающая система конечно-элементных уравнений метода конечных элементов в альтернативной форме оказывается особенно удобной при решении геометрически и конструктивно нелинейных задач, т.е. в расчете систем с изменяющейся расчетной схемой при пошаговом процессе нагружения (инкрементальное нагружение);
- возможность расчета нерастяжимых и растяжимых нитей, что невозможно в традиционном МКЭ в перемещениях, из-за отсутствия в нем КЭ-нити.

## Основные публикации по теме диссертации

### Монографии

1. Игнатьев, В. А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики : моногр. [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, А. В. Жиделев ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград, 2006. - 176 с.

### Статьи в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирований Web of Science, Scopus

1. Игнатьев, А. В. Obtaining the dynamic frequency equation for the plate calculation by the Finite Element Method in the form of a classical mixed method [Электронный ресурс] / А. В. Игнатьев // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456 : VII International Symposium Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (Novosibirsk, Russian Federation, 1-8 July, 2018) / Russian Academy of Architecture and Civil Engineering Sciences (RAACS). – [IOP Publishing], 2018. – URL : http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012110/pdf.
2. Игнатьев, А. В. The mathematical modeling of the incomplete algebraic eigenvector and eigenvalue problem for obtaining the reduced frequency equation and its solution [Электронный ресурс] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456 : VII International Symposium Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (Novosibirsk, Russian Federation, 1-8 July, 2018) / Russian Academy of Architecture and Civil Engineering Sciences (RAACS). – [IOP Publishing], 2018. – URL : http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012109/pdf.
3. Игнатьев, А. В. Analysis of Flexible Bars and Frames with Large Displacements of Nodes By Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method [Электронный ресурс] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 262 : International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017) (21–22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation) : Conference Proceedings. – [IOP Publishing], 2017. – URL : http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049.
4. Игнатьев, А. В. Analysis of Systems with Unilateral Constraints through the Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко [Текст] // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1754-1759.
5. Игнатьев, А. В. Modified Algorithm for the Analysis of Thin Plates by the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1766-1770.
6. Игнатьев, А. В. On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial

Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1760-1765.

**Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях**

1. Игнатьев, А. В. Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, А. В. Чумаков, В. В. Гилка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2019. - Т. 15, № 1. - С. 62-68.

2. Игнатьев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2018. - № 8 (716). - С. 5-14.

3. Игнатьев, А. В. Расчёт тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жёсткого целого [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2018. - № 3 (711). - С. 5-13.

4. Игнатьев, А. В. Математическая модель и алгоритмы динамического расчёта конструкций по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев // Известия ВолгГТУ. Сер.: Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. - Волгоград, 2018. - № 5 (215). - С. 22-26.

5. Игнатьев, А. В. Конструктивные особенности и дефекты некоторых типов плоских регулярных балочных ферм [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, В. В. Габова // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2018. - № 1 (276). - С. 17-23.

6. Игнатьев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жёсткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2017. - № 9. - С. 5-14.

7. Игнатьев, А. В. Особенности расчёта плоских регулярных балочных ферм со сложной решёткой [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2017. - № 6. - С. 28-34.

8. Игнатьев, А. В. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчёту систем с односторонними связями [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, М. И. Бочков // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2017. - № 2. - С. 52-61.

9. Игнатьев, А. В. Расчёт многопролётных балок с односторонними связями по МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, М. И. Бочков // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Стр-во и архитектура. - 2017. - № 48 (67). - С. 94-108.

10. Игнатьев, А. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестник МГСУ. - 2016. - № 2. - С. 20-33.

11. Игнатьев, А. В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестник МГСУ. - 2015. - № 12. - С. 47-58.

12. Игнатьев, А. В. Особенности применения и сходимость МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, Е. А. Невзорова, Н. С. Самылина // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2015. - Т. 11, № 2. - С. 89-93.

13. Игнатьев, А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода (особенности и возможности применения) [Текст] / А. В. Игнатьев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2015. № 3 (260). - С. 55-60.

14. Игнатьев, В. А. Расчет плоских рам с большим перемещением узлов по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев // Строительство и реконструкция. - 2015. - № 2 (58). - С. 12-19.

15. Игнатьев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 [Текст] / А. В. Игнатьев // Вестник МГСУ. - 2015. - № 1. - С. 16-26.

16. Игнатьев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 2 [Текст] / А. В. Игнатьев // Вестник МГСУ. - 2014. - № 12. - С. 40-59.

17. Игнатьев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 1 [Текст] / А. В. Игнатьев // Вестник МГСУ. - 2014. - № 11. - С. 37-57.

18. Игнатьев, А. В. Расчёт нерастяжимой преднапряженной контргрузом нити по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2014. - Вып. 36 (55). - С. 104-111.

19. Игнатьев, А. В. Исследование устойчивости и закритического поведения фермы Мизеса по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, Е. В. Симон // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2014. – Вып. 38. - С. 94-101.

20. Игнатьев, А. В. Specific features and advantages of the finite element method in the form of classical mixed method as an alternative for the traditional finite element method [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2014. - Т. 10, № 4. - С. 121-124.

21. Игнатьев, В. А. Решение плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев [Текст] // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2013. - Вып. 31-2 (50). - С. 337-343.

22. Игнатьев, А. В. Расчет геометрически нелинейных плоских шарнирно-стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2013. – Вып. 34 (53). - С. 82-89.

23. Игнатьев, А. В. Проблема бесконечно жестких элементов при расчете стержневых систем [Текст] / А. В. Игнатьев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2012. - № 5. - С. 10-13.

24. Игнатьев, А. В. Применение смешанной формы МКЭ к расчету стержневых систем, содержащих элементы с резко различными жесткостями [Текст] / А. В. Игнатьев, В. В. Габова // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2011. – Вып. 22. - С. 22-25.

25. Жиделёв, А. В. Расчет плоских геометрически нелинейных стержневых систем с наличием следящей нагрузки / А. В. Жиделёв, А. В.

Игнатьев [Текст] // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2010. - Вып. 17. - С. 14-16.

26. Жиделёв, А. В. Сравнительный анализ расчетов на устойчивость геометрически нелинейных стержневых систем в статической и динамической постановках на примере фермы Мизеса [Текст] / А. В. Жиделёв, А. В. Игнатьев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. - Вып. 15. - С. 52-54.

27. Игнатьев, А. В. Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов плоской стержневой системы [Текст] / А. В. Игнатьев, В. В. Габова // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. – Вып. 14. - С. 71-74.

28. Габова, В. В. Получение матрицы откликов стержневого конечного элемента плоской стержневой системы на основе смешанного вариационного принципа [Текст] / В. В. Габова, А. В. Игнатьев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. - Вып. 14. - С. 75-79.

29. Игнатьев, А. В. Алгоритм расчета стержневых систем по методу конечных элементов (МКЭ) в смешанной форме / А. В. Игнатьев // Вестник гражданских инженеров. - 2007. - № 2. - С. 106-108.

30. Игнатьев, В. А. Смешанная форма МКЭ в задачах строительной механики [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2006. - № 1. - 59-64.

31. Игнатьев, В. А. МКЭ в смешанной форме к расчету стержневых систем [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2002. - № 8. - С. 115-118.

32. Игнатьев, А. В. Матрица упругих свойств изгибаемого прямоугольного конечного элемента [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. академии. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2002. – Вып. 2 (5). - С. 139-141.

**Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

1. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2019613405 Рос. Федерация. Модуль поиска частот и форм свободных колебаний плоских стержневых систем для ПК КСФ МКЭ [Текст] / А. В. Игнатьев, В. В. Гилка, А. В. Чумаков ; ВолгГТУ. – Опубл. 15.03.2019.

2. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018662231 Рос. Федерация. Модуль визуализации и расчёта плоских стержневых систем для ПК КСФ МКЭ [Текст] / А. В. Ильин, А. В. Игнатьев ; ВолгГТУ. – Опубл. 02.10.2018.

3. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018662103. Рос. Федерация. Динамический расчёт плоских стержневых систем (ДРПСС КСФ МКЭ) [Текст] / А. В. Игнатьев; ВолгГТУ. – Опубл. 03.09.2018.

4. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018619882 Рос. Федерация. Расчет устойчивости стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев. – Опубл. 14.08.2018.

5. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017661091 Рос. Федерация. Расчёт изгибаемых пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, Е. А. Невзорова ; ВолгГТУ. – Опубл. 03.10.2017.

6. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016660344 Рос. Федерация. Программа расчёта плоских стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. В. Габова ; ВолгГАСУ. – Опубл. 13.09.2016.

**Опубликовано 5 учебных пособий и 25 статей в прочих рецензируемых журналах и сборниках трудов конференций**

ИГНАТЬЕВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ

РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук

Подписано в печать 16.07.2019. Формат 60x80 1/16
Бумага офсетная. Гарнитура таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,7.
Тираж 100 экз. Заказ № 380