

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»

На правах рукописи

Игнатьев Александр Владимирович



**РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

05.23.17 Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Волгоград – 2019

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
 <b>Глава 1 Краткий обзор истории зарождения и развития метода конечных элементов (МКЭ) .....</b>	 <b>5</b>
1.1 Становление и развитие науки о прочности .....	15
1.2 Механика сплошной упругой среды .....	16
1.3 Становление классических методов строительной механики .....	17
1.4 Становление и развитие метода конечных элементов .....	20
1.5 Выводы по главе 1 .....	27
 <b>Глава 2 Развитие теории метода конечных элементов в форме классического смешанного метода .....</b>	 <b>28</b>
2.1 Формирование матрицы откликов стержневых и дискретных систем на основе принципа возможных изменений напряженно-деформированного состояния. Смешанный функционал .....	28
2.2 Формирование матриц откликов стержневых конечных элементов на основе классического смешанного метода строительной механики .....	33
2.3 Формирование матриц откликов пластинчатых конечных элементов ....	48
2.4 Формирование глобальной матрицы откликов и разрешающей системы уравнений .....	74
2.5 Проблема сгущения сетки для повышения точности решения .....	77
2.6 Выводы по главе 2 .....	83
 <b>Глава 3 Исследование эффективности метода конечных элементов в форме классического смешанного метода в задачах статики .....</b>	 <b>85</b>
3.1 Расчет плоских стержневых конструкций .....	85
3.2 Расчет балки составного сечения .....	90
3.3 Расчет систем перекрестных балок .....	91

3.4 Расчет стержневых систем, содержащих бесконечно жесткие элементы или элементы большой, или бесконечно большой жесткости.....	93
3.5 Расчет тонких пластин .....	96
3.6 Выводы по главе 3 .....	114

## **Глава 4 Моделирование задач динамики дискретных и дискретизированных систем на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (алгебраическая проблема собственных значений и собственных векторов).....**

4.1 Формирование динамических матриц откликов стержневых конечных элементов .....	118
4.2 Формирование динамической матрицы откликов продольно-сжатого конечного элемента-стержня .....	128
4.3 Вынужденные колебания .....	135
4.4 Формирование динамической матрицы масс для изгибаемого конечного элемента - пластинки .....	138
4.5 Алгоритмы построения редуцированных частотных уравнений в форме неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов и ее решение .....	146
4.6 Выводы по главе 4 .....	163

## **Глава 5 Построение математических моделей задач устойчивости упругих систем на основе МКЭ в форме классического смешанного метода .....**

5.1 Математические модели задач устойчивости стержневых систем .....	166
5.2 Решение задач устойчивости стержневых систем по теории I-го порядка .....	169
5.3 Матрицы откликов продольно сжатого КЭ-стержня второго типа и сжато-изогнутого КЭ-пластинки .....	187
5.4 Выводы по главе 5 .....	194

<b>Глава 6 Физические и математические модели геометрически и конструктивно нелинейных задач.....</b>	<b>196</b>
6.1 Нелинейная система разрешающих уравнений метода конечных элементов в форме классического смешанного метода. Алгоритм решения .....	196
6.2 Анализ геометрически нелинейных задач устойчивости шарнирно-стержневых систем.....	199
6.3 Геометрически нелинейные задачи статики гибкой нити.....	213
6.4 Расчет систем с односторонними связями .....	228
6.4.1 Алгоритм расчета стержневых систем с односторонними связями ...	231
6.4.2 Расчет изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода .....	239
6.5 Выводы по главе 6 .....	245
<b>Заключение .....</b>	<b>247</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>250</b>
<b>Приложение А Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.....</b>	<b>250</b>
<b>Приложение Б Акты внедрения научного исследования .....</b>	<b>291</b>

## Введение

### **Актуальность темы исследования.**

При выборе лучшего конструктивного решения для строительной конструкции или её конструктивной части, необходимо иметь возможность определить полную картину их напряженно-деформированного состояния от комбинации различных вариантов воздействий, позволяющую прогнозировать поведение конструкции при изменении ее параметров. Для этого могут быть использованы как аналитические, так и численные методы.

В настоящее время одним из наиболее распространенных и универсальных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод на начальном этапе применялся для расчета стержневых систем, и рассматривался как развитие классических методов строительной механики, а затем был обобщен на расчет пластин и оболочек, что позволило в дальнейшем обосновать и развить, как методы дискретизации континуальных систем, так и методы континуализации регулярных дискретных систем.

Теории этого метода и реализации, разработанных на его основе алгоритмов расчета, посвящено огромное количество статей, монографий, учебников и обзоров. Это работы Дж. Аргириса, К.Ю. Бате, Р. Галлагера, А.С. Городецкого, О.К. Зенкевича, А.М. Масленникова, Д. Норри, Дж. Одена, Д.Дж. Олмана, В.И. Сливкера, А.В. Перельмутера, А.А. Покровского, Б.Г. Попова, В.А. Постнова, Я.А. Пратусевича, Р.Б. Рикардса, А.Е. Белкина, С.С. Гаврюшина, М. Секуловича, Г. Стренга, Дж. Фикса, Ю.А. Тюкалова, А.С. Цыбенко, В.С. Чувиковского, Л.А. Шмита, Ф.К. Богнера, Р.Л. Фокса, Ф. Бреззи, А. Поцески и др.

В строительной механике метод конечных элементов чаще всего используют в его классическом виде в форме метода перемещений. Это объясняется его известным преимуществом по сравнению с МКЭ в форме метода сил, заключающимся в возможности полной формализации алгоритмов расчета и реализующих их программных средств.

Многочисленные программные комплексы, реализующие метод конечных элементов, позволяют провести детальное исследование сложных конструкций получив информацию об их напряженно-деформированном состоянии.

Тем не менее, анализ имеющихся публикаций по теории МКЭ и практике его применения в программных комплексах показал, что традиционная форма МКЭ в перемещениях, на которой основано большинство программных комплексов, наряду с достоинствами имеет и ряд неразрешенных до конца проблем, приводящих к необходимости верификации получаемых на его основе результатов расчета, как дискретных (стержневых), так и дискретизированных континуальных систем.

Как отмечается в ряде работ, к ним относятся: пониженная, по сравнению с перемещениями, точность вычисления усилий (напряжений); сложность учета разрывов значений усилий (напряжений) на межэлементных границах; неиспользование граничных условий, выраженных в усилиях (напряжениях); “запирание” при расчете с учетом элементов, обладающих большой сдвиговой жесткостью, когда энергия деформации от сдвига значительно превышает энергию деформации от изгиба.

Также к ним относятся содержащиеся в кинематических граничных условиях смещения конечного элемента как жесткого целого, не связанные с работой внутренних сил. Они приводят к ухудшению обусловленности матрицы жесткости всей конструкции при сгущении конечно-элементной сетки, когда необходимо повысить точность решения в опасных зонах, или при итерационном решении нелинейных задач.

Сложности применения МКЭ в перемещениях возникают также при включении в конструкцию недеформируемых элементов и при расчетах геометрически изменяемых систем в виде кинематической цепи.

Именно эти проблемы объясняют появление ряда работ в которых приводится теоретическое обоснование, исследование и развитие других форм МКЭ: в напряжениях, в форме метода сил, в смешанной форме и в различных гибридных вариантах.

При этом анализ имеющихся на сегодняшний день публикаций по этим формам МКЭ приводит к выводу о том, что их не удалось формализовать и алгоритмизировать с той же простотой, как это имеет место в традиционном МКЭ в перемещениях.

Проведенный анализ современных исследований позволяет сформулировать фундаментальную научную проблему, на решение которой направлено данное исследование: расширение возможностей метода конечных элементов и его развитие, дающее возможность сравнительного анализа результатов расчета получаемых на основе его различных форм.

Если принять за основу такого расширения классическую форму смешанного метода строительной механики и использовать расчетную схему МКЭ со смешанными неизвестными, то упомянутые выше проблемы можно устранить. Такая расчетная схема будет применима к любым типам элементов и будет неизменной на всех стадиях работы конструкции, включая ее переход в механизм.

**Целью исследования** является расширение теории метода конечных элементов при представлении его в форме классического смешанного метода строительной механики и разработка соответствующих физико-математических моделей конечных элементов и алгоритмов расчетов различных типов конструктивных элементов и конструкций в линейной и нелинейной постановках.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Расширить общую теорию метода конечных элементов, включив в неё МКЭ в новой форме классического смешанного метода строительной механики.
2. Обосновать для этой формы МКЭ физико-математические модели конечных элементов и их основные системы.
3. Разработать алгоритмы формирования разрешающих уравнений для решения задач статики, динамики и устойчивости конструктивных элементов и конструкций.

4. Провести тестирование и апробацию, реализованных физико-математических моделей конечных элементов и алгоритмов расчетов различных типов конструктивных элементов и конструкций в линейной и нелинейной постановках.

#### **Методология и методы исследования.**

В работе использовались подходы и методы строительной механики и теории упругости с использованием общепринятых гипотез и допущений, методы линейной алгебры и вычислительной математики.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Основные положения теории метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

2. Способы получения физико-математических моделей конечных элементов со смешанными неизвестными в основной системе.

3. Построение разрешающих уравнений на базе полученных математических моделей конечных элементов и разработка алгоритмов их решения.

4. Алгоритмы решения проблемных задач: учет смещений КЭ как жесткого целого, учет жестких включений и отверстий.

5. Особенности физико-математических моделей задач динамики и устойчивости конструкций и реализующих их алгоритмов расчета.

6. Физико-математические модели редуccionных методов понижения порядка больших систем частотных разрешающих уравнений.

7. Физико-математические модели и алгоритмы решения геометрически нелинейных задач и задач расчета конструктивно-нелинейных систем с односторонними связями.

#### **Научная новизна исследования:**

1. Расширена общая теория метода конечных элементов, включением в него новой формы, базирующейся на классическом смешанном методе строительной механики.

2. Впервые введено фундаментальное понятие-термин – «матрица откликов», являющееся обобщением понятий матриц жесткости и податливости, и позволяющее придать явный физический смысл соответствующим смешанному методу основным системам для конечных элементов.

3. Разработаны алгоритмы получения матриц откликов КЭ для задач статики, а также матриц масс для задач устойчивости и потенциала нагрузки для задач устойчивости, позволяющие получать эти матрицы для различных типов конечных элементов с той же простотой, как это имеет место при построении матриц жесткости в МКЭ в перемещениях.

4. Разработаны алгоритмы построения систем разрешающих конечно-элементных уравнений для задач статики, динамики и устойчивости, отличающихся от разрешающих уравнений МКЭ в перемещениях наличием в них в качестве узловых неизвестных как перемещений, так и усилий, при том же количестве неизвестных в узле.

5. Решена, присущая МКЭ в перемещениях, проблема выполнения в узлах конечно-элементной сетки одновременно как условий равновесия, так и совместности деформаций.

6. Решена проблема исключения влияния на деформированное состояние системы перемещений конечных элементов как жесткого целого. Для систем, представляемых ансамблем стержневых КЭ или треугольных КЭ-пластинок, в разрешающих уравнениях МКЭ в форме классического смешанного метода исключение влияния перемещений конечных элементов как жесткого целого из разрешающих конечно-элементных уравнений выполняется в явном виде, что снимает проблему плохой обусловленности систем разрешающих уравнений, присущая МКЭ в перемещениях.

7. Впервые на основе МКЭ в форме классического смешанного метода разработан единый алгоритм решения нелинейных задач о нахождении напряженно-деформированного состояния, как нерастяжимых, так и растяжимых нитей.

8. Разработан алгоритм решения геометрически нелинейных задач, позволяющий выявить конфигурации конструкции, соответствующие точкам бифуркации.

9. Разработан алгоритм расчета конструктивно нелинейных систем с односторонними связями, который позволяет отследить включение и выключение односторонних связей в процессе пошагового нагружения, устранить проблему закливания в итерационном процессе отыскания рабочей схемы и существенно уменьшить число итераций.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Практическое значение полученных результатов состоит в том, что предлагаемая форма МКЭ расширяет возможности МКЭ по сравнению с существующими его вариантами и формами. Разработанные для этой формы МКЭ алгоритмы и программные средства численной реализации моделей разрешающих конечно-элементных уравнений предоставляют возможность более глубокого сравнительного анализа результатов расчета, полученных другими численными методами.

Результаты работы используются в учебном процессе на кафедре строительной механики ИАиС ВолгГТТУ в виде учебных пособий и расчетных программ.

Диссертационное исследование выполнялось в рамках проектов РФФИ: 16-41-340558-р\_а «Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, алгоритмы, программы)», 18-41-340008-р\_а «Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для исследования конструктивно-нелинейного поведения строительных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода», 18-41-340013-р\_а «Разработка математических моделей, алгоритмов и программных средств для определения низших частот и форм собственных колебаний сложных конструкций, на основе МКЭ в форме классического смешанного метода».

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.**

Диссертационные исследования соответствуют паспорту специальности 05.23.17 – «Строительная механика»: п. 1 (общие принципы расчета сооружений и их элементов), п. 2 (линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета), п. 4 (численные методы расчета сооружений и их элементов).

**Достоверность результатов** обеспечивается удовлетворением разработанных алгоритмов основным соотношениям строительной механики, теории упругости и механики сплошной среды, использованием обоснованных численных методов и подтверждается сравнением результатов решения тестовых примеров, полученных с помощью разработанных конечных элементов, с результатами исследований других авторов.

Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: 60-я международная научно-техническая конференция молодых ученых (СПбГАСУ, Санкт-Петербург, 2007); симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Нижний Новгород, 2007); 16th Annual Workshop of the European Group for Intelligent Computing in Engineering (EG-ICE) (TU Berlin, Germany, 2009); 14th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering (Moscow, Russia 2012); третья международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2014); пятый международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Иркутск, Россия, 2014); четвертая международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2015); пятая международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, Россия, 2016); международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг» (Челябинск, Россия, 2016); международная научно-техническая конференция «Строительство, архитектура и техносферная

безопасность» (Челябинск, Россия, 2017); десятая всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, Россия, 2017); межвузовский семинар «Геометрия и расчет оболочек неканонической формы» (Москва, Россия, 2018); симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Новосибирск, Россия, 2018); Международная научно-практическая конференция «Инженерные системы – 2019» (Москва, Россия, 2019); межвузовский семинар «Геометрия и расчет оболочек неканонической формы» (Москва, Россия, 2019).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 75 работ. Из них: 1 монография, 32 статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, 6 статей в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирований Web of Science и Scopus, 6 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, 5 учебных пособий, 25 статей в прочих рецензируемых журналах и сборниках трудов конференций.

**Личный вклад автора** состоит в теоретическом обосновании новой формы метода конечных элементов, базирующейся на классическом смешанном методе, разработке физико-математических моделей конечных элементов, алгоритмов и программных средств, позволяющих выполнять решение линейных и нелинейных задач статики, динамики и устойчивости сооружений.

Все представленные в диссертации положения, выносимые на защиту, получены лично автором, либо под его руководством. В работах, опубликованных в соавторстве, личное участие автора заключается в определении проблемы, постановке задач, разработке теоретического обоснования.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и приложений. Количество страниц – 283, рисунков – 125, таблиц – 26.

**В первой главе** представлен краткий исторический обзор развития метода конечных элементов, дан анализ современного состояния проблемы и показаны основные недостатки существующих вариантов и форм МКЭ, обоснована

необходимость развития метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики.

**Во второй главе** изложены теоретические основы развиваемого метода конечных элементов в форме классического смешанного метода. На базе этого метода, и смешанного вариационного принципа строительной механики и механики деформируемого твердого тела, исследована возможность построения двух вариантов математической модели КЭ и систем разрешающих уравнений. Показано, что оба варианта алгоритма получения коэффициентов матрицы откликов приводят к одинаковым результатам, так как основаны на одних и тех же положениях, и допущениях строительной механики. Однако вариант, основанный на классическом смешанном методе более удобен для формализации расчета и его программной реализации. Рассмотрены различные математические модели конечных элементов в зависимости от принимаемого числа неизвестных (степеней свободы) в основной системе. Описаны алгоритмы составления разрешающей системы уравнений для конечно-элементного расчета в форме классического смешанного метода.

**В третьей главе** выполнен анализ эффективности применения разработанных математических моделей конечных элементов и алгоритмов формирования разрешающих конечно-элементных уравнений в задачах статики. Рассмотрены особенности и возможности применения метода конечных элементов в форме классического смешанного метода при статическом расчете стержневых систем и тонких пластин. Для конечных элементов в виде прямоугольных пластинок рассмотрен алгоритм исключения влияния на деформированное состояние системы перемещений конечных элементов как жесткого целого, снимающий проблему плохой обусловленности систем разрешающих уравнений, присущую МКЭ в перемещениях.

**Четвертая глава** посвящена двум проблемам:

- математическое моделирование матриц масс конечных элементов и формирование частотных уравнений в развиваемой форме метода конечных

элементов, в рамках которого выполнено математическое моделирование динамических матриц откликов стержневых и пластинчатых конечных элементов - проблема частотных уравнений высокого порядка и методы ее решения.

При решении второй проблемы выполнено исследование эффективности численного моделирования разрешающих систем алгебраических уравнений высокого порядка и соответствующих частотных уравнений на основе МКЭ в форме классического смешанного метода. Для этого разработаны и апробированы на тестовых и модельных задачах различные варианты моделирования редуцированных частотно-динамических уравнений.

**В пятой главе** рассмотрены проблемы математического моделирования задач устойчивости стержневых и пластинчатых систем на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ). В рамках линейной теории, так называемой теории первого порядка, на основе МКЭ в форме КСМ разработаны математические модели матриц откликов продольно-сжатых стержневых и пластинчатых конечных элементов, и разрешающих уравнений задач устойчивости систем, представляемых ансамблем таких конечных элементов.

**В шестой главе** рассмотрено моделирование геометрически и конструктивно нелинейных задач и изложен алгоритм решения нелинейной системы разрешающих уравнений метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

**В заключении** приведены основные результаты, полученные при выполнении данной диссертационной работы, и выводы.

## Краткий обзор истории зарождения и развития метода конечных элементов (МКЭ)

### 1.1 Становление и развитие науки о прочности

До 50-х годов XX века в научной и учебной литературе СССР термина-названия «Строительная механика» не было. Было лишь название «Теория сооружений».

Исторически становление и развитие науки о прочности шло одновременно в двух направлениях: теория сооружений и механика упругой среды (континуума).

Теория сооружений возникла и развивалась, исходя из потребностей практики, связанных с развитием промышленности и техники, и особенно ярко проявившихся во время промышленной революции в Западной Европе.

Механика упругой среды и аналитическая механика изначально были связаны с разработкой и развитием теории, физико-математических моделей упругой среды, с методами получения и решения уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние этой среды.

Первое направление имело со времен Галилея сугубо инженерный, прикладной характер, что нашло отражение в современных названиях книг и учебниках:

- «Festigkeitslehre und Elastizitätslehre» - в Германии,
- «Resistance des matériaux» - во Франции,
- «Strength of materials» - в Англии,
- «Сопротивление материалов и теория упругости» - в России и СССР.

Второе направление – математизированное, нашло наиболее глубокое обоснование в книге Лагранжа (1735-1813) «Аналитическая механика» (1788 г.),

где он установил фундаментальный принцип возможных перемещений и завершил математизацию механики.

Хронологически оба эти направления неразрывно связаны друг с другом, развиваясь и взаимно обогащая друг друга идеями и методами решения задач.

В связи с этим представляет интерес хронологическая последовательность возникновения и развития идей и методов в этих двух направлениях.

## 1.2 Механика сплошной упругой среды

Основной гипотезой в ней является гипотеза о сплошности.

Она связана с именем Л. Эйлера (1707-1783), который ввел в механику понятие континуума, в соответствии с которым материальное тело представляется в виде непрерывной сплошной среды, абстрагируясь от его молекулярной структуры.

Поэтому деформации и перемещения точек тела являются неразрывными функциями координат, дающими возможность использовать дифференциальное и интегральное исчисление.

Задачи механики сплошной упругой среды описываются фундаментальной системой уравнений из трех групп: статические, геометрические, физические.

**Статическая группа уравнений** получается при применении основной теоремы статики и использования принципа отвердения (расчет по недеформированной схеме).

Использование принципа отвердения и основной теоремы статики позволило Навье (1785-1836) вывести уравнения равновесия теории упругости (1821 г.).

В 1821 г. он сформулировал в математическом виде теорию упругости (уравнения равновесия Навье).

В 1826 г. ввел модуль упругости как характеристику материала.

**Геометрические уравнения**, определяющие связь деформаций и перемещений, получены Коши (1789-1857).

Из них путем исключения перемещений получаются уравнения непрерывности или условия совместности деформаций Сен-Венана (1797-1886).

**Физическая группа уравнений.**

В случае малых деформаций поведение материала описывается обобщенным законом Гука, который предполагает линейную зависимость между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций.

Гук (1635-1703) сформулировал первым эту линейную зависимость для малых деформаций.

### 1.3 Становление классических методов строительной механики

В теории упругости ряд исследований Л. Эйлера (1740-е гг.) посвящен теории изгиба балок и стержней. Он первым применил точное выражение для кривизны изогнутой оси балки  $\frac{1}{\rho} = -\frac{y''}{\left[1 + (y'')^2\right]^{3/2}} = -\frac{d\theta}{ds}$ , устанавливающее связь

с изгибающими моментами в сечениях этой балки.

Применение эпюры изгибающих моментов к вычислению прогибов балки было разработано О. Мором (1868 г.).

Этот подход впоследствии стал основой для вычисления коэффициентов при неизвестных в системе разрешающих уравнений метода сил.

**Метод сил.**

Идея дискретизации сплошной среды для упрощения расчетов возникла еще в XIX в. В 1808 г. в Германии вышла книга Эйтельвайна (1764-1848), содержащая правильное и притом прямое (без рассмотрения экстремума функционала) решение задачи о гибкой неразрезной двух пролётной балке [246].

При решении ее он отбросил промежуточную опору, заменив ее неизвестной реакцией, и написал уравнение моментов для всех участков балки. Проинтегрировав дважды уравнение изогнутой оси балки  $EIy'' = -M$  и приравняв прогиб  $y$  на промежуточной опоре нулю, он получил окончательные формулы для реакций всех опор. Таким было рождение метода сил. Эйтельвайн был первым, кто овладел методом расчета статически неопределимых систем. Однако, к сожалению, имя его оказалось забытым среди имен создателей теории статически неопределимых систем.

Спустя почти 60 лет после выхода в свет книги Эйтельвайна французский академик Бресс (1822-1883) в третьем томе курса, вышедшего в 1865 г. [219], проявив незнание с книгой Эйтельвайна, рассмотрел случай загрузки одного из пролетов многопролётной балки и открыл существование моментных фокусов.

Незнакомство с этой книгой проявил и Навье (1785-1836). В 1826 г., т.е. через 18 лет после появления этой книги, вышла в свет, ставшая знаменитой книга Навье [283], в которой содержится в начальной стадии теория расчета статически неопределимых балок и ферм.

Дальнейшее развитие идея Навье получила в статье Клапейрона «Расчет упругой балки, свободно покоящейся на опорах с неодинаковыми промежутками» [230]. В ней он рассматривает неразрезную балку не как однопролетную, освобожденную от промежуточных опор и нагруженную их реакциями, а как совокупность простых балок, нагруженных моментами на промежуточных опорах. Можно утверждать, что Клапейрон стоял на пути к открытию общего метода расчета статически неопределимых систем – метода сил.

### ***Метод перемещений.***

Первые работы, в которых излагался и применялся в неявном виде метод деформаций (перемещений), были опубликованы еще в 60-х годах XIX века [219, 309].

Только спустя почти 30 лет этот метод был сформулирован и применен в явном виде в работах Мандерлы [277] и Мора [281]. Именно в этих работах было положено начало методу перемещений (деформаций) в его современном виде.

В дальнейшем этот метод получил развитие в работах Гелера [248], Бендиксена [212], Остенфельда [292]. В СССР этот метод получил широкую известность благодаря работам А.А. Гвоздева [24], И.М. Рабиновича [151] и др.

### ***Смешанный метод.***

Смешанный метод впервые был применен Ф. Блейхом [215] в 1918 г. как частный прием в виде метода четырех моментов при расчете многопролетной балки.

Полное теоретическое обоснование этот метод получил в 1927 г. в книге А.А. Гвоздева [24].

Говоря о классических методах строительной механики, следует отметить три важных момента:

1. все три метода основаны на одних и тех же положениях, и допущениях и поэтому расчёты стержневых систем по этим трём методам приводят к одним и тем же результатам;

2. из основной системы смешанного метода, как частные случаи, могут быть получены основные системы метода сил и метода перемещений;

3. для расчета стержневых систем по этим трём методам аппроксимация функций перемещений осей стержней от различных видов их нагрузок не требуется.

В заключение следует отметить разницу в математическом описании напряжённо-деформированного состояния упругой среды в теории упругости и напряжённо-деформированного состояния элемента конструкции в строительной механике. В первом случае используются напряжения и деформации в точке упругой среды, во втором – равнодействующие этих напряжений (моменты и усилия) и суммарные деформации (перемещения) в узловых поперечных сечениях.

## 1.4 Становление и развитие метода конечных элементов

К 40-м годам 20 века в строительной механике были разработаны три классических метода: метод перемещений, метод сил и смешанный метод. В дальнейшем они развивались и совершенствовались.

Традиционно объектом исследования в строительной механике были стержневые системы, т.е. дискретные системы, состоящие из отдельных элементов-стержней. Их расчет по всем трем методам сводился к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Небольшой порядок решаемых систем уравнений объясняется малыми возможностями вычислительной техники того времени. Поэтому совершенствование методов шло по пути развития различных вариантов алгоритмов точного и приближенного решения СЛАУ, оказавших заметное влияние на развитие численных методов.

Появление ЭВМ и связанные с этим успехи в расчете стержневых систем привели к идее распространения методов расчета стержневых (дискретных) систем на расчет континуальных систем.

В начале 20 века Г. Маркус [118, 279] предложил метод, на основе которого с привлечением теории уравнений в конечных разностях был разработан и развит в дальнейшем метод перехода от дифференциальных уравнений к конечно-разностным или алгебраическим уравнениям (метод конечных разностей или метод сеток).

Разработка теории метода перемещений (метода деформаций) и метода сил привели к идее замены пластинок и оболочек системами пересекающихся полос (балок или арок).

Первые попытки теоретически обосновать расчеты некоторой сплошной области на основе представления её совокупностью балочных и стержневых элементов принадлежат А. Хренникову (Hrennikoff A., 1941) [257], Д. Мак-Генри (McHenry D.A., 1943) [280], Н. Ньюмарку (Newmark N.M., 1949) [284]. Наиболее полное математическое обоснование метода впервые было сформулировано

Р. Курантом (Courant R., 1943) в 1943г. [237], но развитие он получил значительно позднее в семидесятых годах 20 века в работах Дж. Одена (Oden J.T., 1976, 1969, 1975) [128, 288, 289], когда с появлением мощных ЭВМ стало возможным реализовывать большие объемы вычислительной работы.

Первоначально метод конечных элементов применялся в основном в области строительной механики и рассматривался как развитие её классических методов [5, 6, 197, 198, 216, 257].

Позже пришло понимание связи двух подходов к дискретизации дифференциальных уравнений и дискретизации сплошной области: перехода от дифференциальных уравнений к алгебраическим на основе вариационных методов и перехода от континуальных систем к дискретным, на основе классических методов строительной механики.

В работах М. Тёрнера (Turner M.J., 1965) [307], Р. Клафа (Clough R.W., 1960, 1969) [231, 232] и Д. Аргириса (Argiris J., 1961, 1965) [5, 6, 197, 198] было предложено приближенное описание некоторой упругой среды при помощи соединенных в узлах дискретных элементов, условно вырезанных из этой среды.

В начале 60-х годов Р. Клафом (Clough R.W., 1960) была предложена так называемая прямая или статическая концепция МКЭ [231]. Им же был введен, прочно вошедший в научную и учебную литературу, термин «конечный элемент».

Дальнейшее развитие МКЭ подробно описано в цикле наших статей [73-75]. Там же приведена классификация, используемая в нашем диссертационном исследовании. В основе этой классификации лежат классические методы строительной механики стержневых систем. В соответствии с величинами, принимаемыми за основные неизвестные, было выделено три основных формы МКЭ по их соответствию классическим методам: метода перемещений; метода сил и смешанного метода.

В строительной механике и механике деформируемого твердого тела наибольшее распространение получил вариант в форме метода перемещений. Это объясняется основным преимуществом классического метода перемещений по сравнению с методом сил и существующими смешанными формулировками МКЭ

– возможностью формализации расчета и реализации разработанных алгоритмов на ЭВМ.

К настоящему времени стал очевидным тот факт, что МКЭ в перемещениях, несмотря на простоту его алгоритмизации и автоматизации численной реализации, имеет ряд проблемных недостатков.

К ним, по мнению многих исследователей [28, 130, 136, 170, 181, 297, 313 и др.], прежде всего относятся: «пониженная (по сравнению с перемещениями) точность вычисления напряжений и усилий», обусловленная приближенным выполнением условий неразрывности деформаций; «наличие разрывов значений напряжений и усилий на границах конечных элементов; неиспользование граничных условий, выраженных в напряжениях и усилиях»; существенное ухудшение обусловленности системы разрешающих уравнений при стыковке с элементами очень большой жесткости; невозможность расчета вантов (нитей) и вантовых систем по стандартному алгоритму МКЭ в перемещениях и др.

Если на начальном этапе развития МКЭ в его основе, как и в классических методах строительной механики лежал принцип возможных перемещений, то в дальнейшем стали использовать и другие вариационные принципы, и методы (принципы Лагранжа, Кастильяно, Хеллингера-Рейсснера и т.д.). Причиной этого стала необходимость преодоления отмеченных выше проблем при применении МКЭ в перемещениях.

Эти проблемы остаются актуальными и сегодня.

В результате были развиты альтернативные формулировки МКЭ.

Все существующие варианты МКЭ с узловыми неизвестными в виде напряжений (усилий) основаны на модифицированном функционале дополнительной энергии.

Система разрешающих уравнений относительно неизвестных усилий в узлах конечно-элементной сетки получается из условия минимума функционала дополнительной энергии системы.

Так как в большинстве случаев подобрать «точную» аппроксимирующую функцию для КЭ невозможно, то условия равновесия в узлах конечно-элементной

сетки выполняются лишь приблизительно. Поэтому используется процедура принудительного выполнения условий равновесия с использованием множителей Лагранжа. Весь этот алгоритм очень сложен в программной реализации [183-186].

Смешанным и гибридным формулировкам посвящено достаточно большое количество статей и монографий. Особый интерес представляют работы Ф. Бреззи (Brezzi F., 1985, 1987, 1991) [220-222] и А. Поцески (Poceski A., 1975, 1979, 1992) [295-297].

Подробное рассмотрение различных подходов к формулировкам МКЭ содержится в ряде монографий (в частности, М. Секуловича [170], К.Ю. Бате (Bathe K.J.) [209, 211], А.Е. Белкина и С.С. Гаврюшина [9]), статье А.В. Перельмутера [131], а также в цикле наших статей [73-75]. Как отмечено в монографии А.С. Городецкого и И.Д. Евзерова [28], каждый из этих подходов обладает рядом собственных существенных недостатков.

Научным советом РААСН, начиная с 2011 года, проводится регулярная работа по верификации зарубежных и отечественных программных комплексов с выдачей сертификатов. Для этого разрабатываются соответствующие тесты. К таким тестам относятся как простые – чистое растяжение, чистый изгиб, влияние соотношений размеров конечных элементов, так и более сложные – способность устранения эффекта “запирания” (возникновения неустойчивости счета и остановки счета, получения в результате этого решений несовместимых с физическим смыслом задачи) при расчетах с учетом сдвига; проблема расчетов с учётом смещений конечного элемента как жесткого целого.

По результатам тестирования сделаны выводы о недостатках программных комплексов, выявленных в процессе верификации.

Следует отметить, что публикационная активность по различным теоретическим и прикладным аспектам МКЭ за последние годы снова возросла [194-196, 200, 201, 226, 234-236, 242, 245, 247, 251, 260, 276, 278, 282, 285-287, 290, 291, 300, 303, 306, 313 и др.].

В абсолютном большинстве публикаций последнего времени излагаются подходы с позиции механики деформируемого твердого тела [194, 226, 285, 300 и

др.], т.е. рассматривается континуум, составляются дифференциальные уравнения, функционалы и затем производится дискретизация.

Используются различные варианты дискретизации: сплайн-дискретизация по расчетным точкам [196, 201, 251, 287, а также в цикле работ В.В. Рогалеви́ча за 1977-1999 г., анализ которых выполнен в [21]], конечно-элементная дискретизация на основе метода Галеркина и метода наименьших квадратов [21, 223-225, 232, 241, 251, 261, 262, 274, 285, 303, 306] или вариационных функционалов Лагранжа, Кастильяно, Хеллингера-Рейсснера [200, 210], Ху-Всаидзу [233, 271] и др.

Как правило, система разрешающих уравнений строится на независимой аппроксимации различных полей: напряжений (усилий), деформаций (перемещений) и др. В зависимости от количества полей, используются термины: двухпольная, трехпольная, четырехпольная аппроксимации [224, 264, 265, 271, 274, 300]. Как отмечено выше, при такой аппроксимации одновременное выполнение условий равновесия и совместности деформаций в узлах конечно-элементной сетки или сетки расчетных точек невозможно.

Некоторые из последних публикаций посвящены разработке КЭ из гиперэластичных материалов на основе теории Муни-Ривлина [301] и соответствующих алгоритмов расчета, позволяющих вычислять большие перемещения, соизмеримые с размерами конструкции.

На основе выполненного обзора можно сделать вывод о том, что практически все публикации по теории МКЭ основывались и основываются на использовании вариационных принципов и энергетических функционалов [13, 160-162, 170, 172, 308].

Высказываемое часто утверждение, что наиболее универсальным при получении матриц коэффициентов при неизвестных в основной системе МКЭ, смешанных и гибридных вариантов МКЭ является подход, основанный на составлении энергетического функционала для некоторого континуума, и нахождение его экстремума (минимума, максимума или стационарного значения) в заданных узловых точках условной сетки, покрывающей рассматриваемый

выделенный геометрически объем континуума, является по меньшей мере некорректным.

Рассматриваемые в строительной механике объекты (конструкции) по определению имеют конкретную геометрическую форму. Именно для их расчета разработаны классические методы расчета: метод сил, метод перемещений, смешанный метод. Вывод коэффициентов канонических уравнений всех этих методов основан на рассмотрении энергетического функционала (но в дискретной форме) и вариационных производных от него, имеющих названия: вариационный принцип Лагранжа (возможных перемещений), вариационный принцип Кастильяно (возможных изменений напряжённого состояния), смешанный вариационный принцип (возможных изменений напряженно-деформированного состояния) [90, 192 и др.].

Все основные допущения и положения строительной механики базируются на этих принципах: теоремы Лагранжа и Кастильяно, теорема о взаимности работ, теорема о взаимности реакций и перемещений.

Все они получили исторически позже развитие в механике деформируемого твердого тела в виде вариационных принципов Хеллингера-Рейсснера, Ху-Васидзу [253-255, 302, 308, 313 и др.].

Именно поэтому нет никакой необходимости доказывать идентичность результатов нахождения коэффициентов разрешающих уравнений МКЭ использованием общеизвестных подходов и алгоритмов строительной механики и механики деформируемого твердого тела. Однако с точки зрения простоты алгоритмизации и программной реализации, наиболее эффективными в расчетах конструкций являются классические методы строительной механики.

Идея формализации расчета регулярных стержневых систем по смешанному методу была изложена и теоретически разработана в работах В.А. Игнатьева [39, 40, 41 и др.], посвященных регулярным стержневым системам. В них, в частности, было показано, что из общих уравнений смешанного метода могут быть получены уравнения метода сил или метода перемещений.

Идея применения МКЭ на основе классического смешанного метода для задачи изгиба пластинки была изложена в работах А.М. Масленникова еще в 80-х годах 20-го века [119, 120]. Однако она осталась практически не замеченной и не получила дальнейшего развития. Значительно позже А.А. Покровским и Р.А. Хечумовым в работах [140, 143, 144] была предпринята попытка расчета шарнирно-стержневых систем по МКЭ в форме смешанного метода без теоретического обоснования. Особо следует отметить статью Р.А. Хечумова и А.А. Покровского [143], в которой “исследуется смешанная форма МКЭ, отличающаяся от смешанного метода проф. Гвоздева”, которой, по мнению авторов присущи как положительные свойства, так и недостатки, к которым они относят: “усложнение процесса получения разрешающих уравнений и необходимость выбора основной системы”. Эта же форма МКЭ получила полное изложение в публикациях и докторской диссертации А.А. Покровского [140, 142, 144].

Работы этих и других исследователей, посвященные проблеме различных форм МКЭ, приводят к выводу о необходимости разработки более общей формы МКЭ на основе классического смешанного метода строительной механики.

В отличие от смешанных и гибридных формулировок МКЭ, основанных на использовании смешанных функционалов потенциальной энергии (Хеллингера-Рейсснера, Ху-Васидзу и др.), разработанная в данной диссертации форма МКЭ, основана на классическом смешанном методе строительной механики.

Отправной точкой для теоретического обоснования использования основной системы смешанного метода для конечного элемента, послужили упомянутые выше работы А.М. Масленникова. Именно эта идея была использована в нашей кандидатской диссертации [86], получившей в своё время положительный отзыв от А.М. Масленникова, с указанием в нём некоторых возможных направлений дальнейших исследований.

## 1.5 Выводы по главе 1

1. Обзор литературы по теории и практике применения метода конечных элементов показал, что наиболее разработанным и применяемым является его вариант в перемещениях.

2. Практически все широко импользуемые программные комплексы основанны на МКЭ в перемещениях.

3. Несмотря на впечатляющие успехи в разработке теории МКЭ и её практических приложений, остаются не доконца разрешенными следующие актуальные проблемы:

- одновременного удовлетворения условий равновесия и условий неразрывности деформаций, т.е. обеспечения совместности деформаций, перемещений и усилий, как в узлах конечно-элементной сетки, так и на межэлементных границах;

- исключение влияния смещений конечного элемента как жесткого целого на работу внутренних сил, приводящих к плохой обусловленности матрицы жесткости конечного элемента и всей конструкции;

- одновременного наличия в расчетной схеме конечных элементов с очень большой и очень малой жесткостью.

4. Как показывает опыт использования программных комплексов, основанных на реализации алгоритмов МКЭ в перемещениях, результаты расчетов не всегда достоверны и поэтому необходима их верификация.

5. Обзор литературы по теме исследования показал отсутствие варианта МКЭ сопоставимого по эффективности и степени формализации с МКЭ в перемещениях.

6. Наиболее перспективной представляется разработка МКЭ в форме классического смешанного метода строительной механики, который по степени простоты формализации и алгоритмизации аналогичен МКЭ в перемещениях.

## Развитие теории метода конечных элементов в форме классического смешанного метода

### 2.1 Формирование матрицы откликов стержневых и дискретных систем на основе принципа возможных изменений напряженно-деформированного состояния. Смешанный функционал

Начало применения смешанной основной системы в расчете рам относится к периоду 1918 – 1925 гг. и связано с получившей большую известность работой Ф. Блейха [215], хотя в ней излагался не метод, а частный случай смешанной – основной системы в виде уравнения четырех моментов для стержневой системы.

Примечательно, что несколько ранее уже была опубликована работа Э. Хеллингера [252] по вариационному принципу в задачах механики деформируемого твердого тела. Таким образом, в начале 20 века зародились две идеи и два направления, породившие метод конечных элементов и базу для его развития.

Полное теоретическое обоснование и само название смешанный метод получил в 1927 г. в книге А.А. Гвоздева [24].

В ней впервые показана на примере стержневой системы взаимность реакций и перемещений, а именно  $r_{ik} = -\delta_{k,i}$ .

Это означает, что реакция  $r_{ik}$  в связи  $i$  от воздействия силы  $x_k = 1$  в точке  $k$  равна по абсолютному значению, но противоположна по знаку перемещению  $\delta_{ki}$  в точке  $k$  от единичного перемещения связи  $z_i = 1$ .

Эта взаимность, получившая в строительной механике стержневых систем [151] название теоремы о взаимности реакций и перемещений, получила в

дальнейшем в некоторых работах и учебниках по строительной механике название «принцип двойственности» [159].

Вариационный принцип смешанного типа формулируется следующим образом: из всех усилий  $\tilde{q}_i$  и перемещений  $q_s$  состоянию равновесия системы соответствуют те и только те, при которых энергетический функционал принимает стационарное значение [157, 170, 172, 192 (с. 128-133)]. Смешанный функционал Рейсснера является, по сути, трактовкой с позиции энергетического функционала известного в строительной механике классического смешанного метода и связанной с ним теоремы о взаимности реакций и перемещений (принципа двойственности).

Известно, что в состоянии равновесия конструкции смешанный функционал не имеет ни максимума, ни минимума. Он имеет лишь единственную стационарную точку, находящуюся в невырожденном седле [192 (с. 133)].

Смешанный функционал строится на основе более общего принципа возможных изменений напряженно-деформированного состояния системы [90], который формулируется следующим образом: “если система находится в равновесии, и ее деформации согласованы со всеми имеющимися внутренними и внешними связями (соблюдается совместность деформаций системы), то сумма работ всех внешних и внутренних сил на возможных бесконечно малых перемещениях системы и возможных работ бесконечно малых приращений всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях системы (вызванных статически действующими силами) равна нулю:

$$\delta\mathcal{E} = \delta A + \delta W = \left( \sum_{i=1}^n \delta F_i \cdot \Delta_i + \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta \Delta_i \right) + \delta U = 0. \quad (2.1)$$

Возможными считаются при этом такие изменения внешних и внутренних сил, которые удовлетворяют всем условиям равновесия, то есть являются статически допустимыми вариациями”.

Принцип возможных изменений напряженного состояния, исходя из его физической сущности, называют также принципом дополнительной виртуальной (возможной) работы [159].

Вполне очевидно, что для линейно деформируемой системы  $U' = U$ .

Если подставить в выражение (2.1) для  $\delta\mathcal{E}$  значение первой вариации  $\delta U$ ,

т. е.  $\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \cdot \delta \Delta_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial F_i} \cdot \delta F_i$ , то получим

$$\sum_{i=1}^n \left( F_i - \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \right) \cdot \delta \Delta_i + \sum_{i=1}^n \left( \Delta_i - \frac{\partial U}{\partial F_i} \right) \cdot \delta F_i = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности величин  $\delta \Delta_i$  и  $\delta F_i$ , будем иметь для линейно деформируемых систем результаты, известные как теоремы Лагранжа и Кастильяно:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i, \quad \frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i. \quad (2.2)$$

В случае, когда за независимые переменные принимаются частью силы  $F_j$ , а частью перемещения  $\tilde{\Delta}_k$ , на основании принципа суперпозиции для линейно деформируемых систем получаем для реакции в  $i$ -ой связи и перемещения в точке  $j$  следующие выражения:

$$R_i = \sum_{k=1}^n \Delta_k r_{i,k} + \sum_{s=n+1}^{n+m} F_s \tilde{r}_{i,s},$$

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^n \Delta_k \tilde{\delta}_{j,k} + \sum_{s=n+1}^{n+m} F_s \delta_{j,s}.$$

Если заменить наложенные на систему связи возникающими в них реакциями, то равновесие системы не нарушится и выражение для потенциальной энергии деформации системы с учетом выражений для  $R_i$  и  $\Delta_j$  должно быть записано в следующем виде:

$$U = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n R_i \Delta_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} F_j \Delta_j \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n \Delta_k r_{i,k} + \sum_{s=n+1}^{n+m} F_s \tilde{r}_{i,s} \right] \Delta_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} F_j \left[ \sum_{k=1}^n \Delta_k \tilde{\delta}_{j,k} + \sum_{s=n+1}^{n+m} F_s \delta_{j,s} \right] \right]. \quad (2.3)$$

Обозначим: неизвестные перемещения по направлению введенных в основную систему смешанного метода связей -  $q_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), усилия в удаленных связях -  $\tilde{q}_j$  ( $j=n+1, \dots, n+m$ ).

С учетом этих обозначений выражения для  $R_i$  и  $\Delta_j$  приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{k=1}^n r_{i,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \tilde{r}_{i,s} \tilde{q}_s + R_{i,F}, \\ \Delta_j &= \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_{j,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \delta_{j,s} \tilde{q}_s + \Delta_{j,F}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в выражение (2.3) для  $U$ , получим:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n r_{i,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \tilde{r}_{i,s} \tilde{q}_s + R_{i,F} \right] q_i + \sum_{j=n+1}^{n+m} \left[ \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_{j,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \delta_{j,s} \tilde{q}_s + \Delta_{j,F} \right] \tilde{q}_j \right\}. \quad (2.5)$$

В соответствии с выражениями (2.6)

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = R_i, \quad \frac{\partial U}{\partial \tilde{q}_j} = \Delta_j. \quad (2.6)$$

По условиям равновесия и неразрывности деформаций  $R_i = 0$ ,  $\Delta_j = 0$ .

Подставив в (2.6) выражение (2.5) и выполнив дифференцирование, получим две системы линейных алгебраических уравнений относительно смешанных неизвестных  $q_i$ ,  $\tilde{q}_j$ , которые в совокупности являются системой канонических уравнений смешанного метода:

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{k=1}^n r_{i,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \tilde{r}_{i,s} \tilde{q}_s + R_{i,F} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ \Delta_j &= \sum_{k=1}^n \tilde{\delta}_{j,k} q_k + \sum_{s=n+1}^{n+m} \delta_{j,s} \tilde{q}_s + \Delta_{j,F} = 0 \quad (j=n+1, \dots, n+m). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Операция дифференцирования (2.6) приводит одновременно к доказательству с более общих позиций теоремы о взаимности реакций и перемещений, т.е.  $r_{ik} = -\delta_{k,i}$ .

Для матрицы коэффициентов системы канонических уравнений смешанного метода (2.7), определяющей связь между узловыми воздействиями и откликами в

узлах на эти воздействия, в наших работах [70, 78 и др.] введен термин-понятие “матрица откликов”, наиболее полно соответствующий физическому смыслу канонических уравнений смешанного метода и являющимся обобщающим по отношению к терминам “матрица жёсткости” в методе перемещений и “матрица податливости” в методе сил.

Используя этот термин, представим систему уравнений смешанного метода (2.7) в матричной форме:

$$[D] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

где  $[D] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$  - матрица откликов системы,

$\begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix}$  - вектор откликов от внешних воздействий.

Элементы блоков этой матрицы имеют смысл реакций в связях основной системы смешанного метода и перемещений по направлению силовых неизвестных от единичных смещений этих связей и от силовых неизвестных при их единичных значениях.

Вектор откликов от внешних воздействий содержит реакции  $R_F$  во введенных связях от узловых нагрузок, к которым приведена местная нагрузка, распределенная по элементам основной системы и перемещения  $\Delta_F$  по направлению силовых неизвестных от нагрузки в основной системе.

Вектор неизвестных смешанного метода содержит как неизвестные перемещения  $q$ , так и неизвестные усилия  $\tilde{q}$ .

Смешанный функционал (2.5) является конечномерной функцией обобщенных неизвестных  $q_k$ ,  $\tilde{q}_s$  и нагрузки  $F$ , т.е. дискретным аналогом функционала Рейсснера.

Из его структуры видно, что он обладает лишь свойством стационарности, так как соответствующая ему квадратичная форма не является положительно определенной.

Изложенный алгоритм нахождения коэффициентов системы уравнений со смешанными неизвестными на основе различных энергетических функционалов является общепринятым в механике деформируемого твердого тела и теории упругости. Однако в стержневых и других видах дискретных систем для их нахождения используется общеизвестный из учебных курсов строительной механики [191 и др.] более простой метод, основанный на физическом смысле канонических уравнений смешанного метода строительной механики. В соответствии с ним все коэффициенты матрицы откликов (2.8) для линейно деформируемых систем находятся, как это показано в наших работах [58, 85, 89], на основе принципа возможных изменений НДС системы.

## **2.2 Формирование матриц откликов стержневых конечных элементов на основе классического смешанного метода строительной механики**

### **2.2.1 Конечный элемент–стержень**

Рассмотрим плоскую стержневую систему и два основных типа конечных элементов, которые наиболее удобны для расчета таких систем (ферм и рам) по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода:

- прямолинейный стержень, шарнирно закрепленный по концам (рисунок 2.1, *а*) для расчета шарнирно-стержневых систем;
- прямолинейный стержень, жестко закрепленный по концам (рисунок 2.2, *а*) для расчета плоских стержневых систем с жесткими узлами.

На рисунках 2.1, *б* и 2.2, *б* показаны варианты основных систем и принятых в них обозначений неизвестных смешанного метода для двух названных выше типов КЭ. (Следует отметить, что такие основные системы используются в

строительной механике для нахождения коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений метода сил [19] и др.)

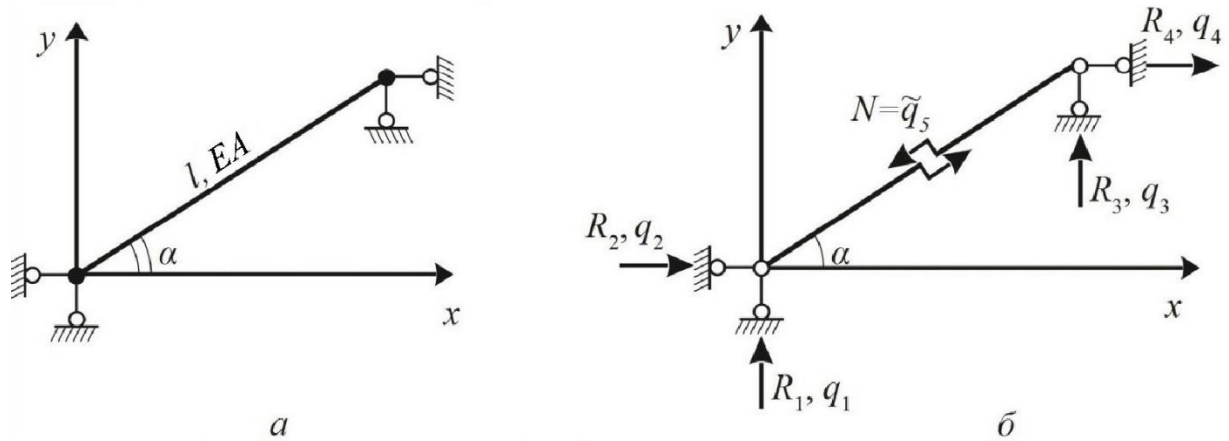


Рисунок 2.1 – а) прямолинейный стержень, шарнирно закрепленный по концам  
б) основная система

Для конечного элемента первого типа:

$q_1, q_2, q_3, q_4$  - перемещения по направлению реакций  $R_1, R_2, R_3, R_4$  во введенных связях,  $\tilde{q}_5 = N$  - неизвестное усилие по направлению удаленной в разрезе КЭ связи.

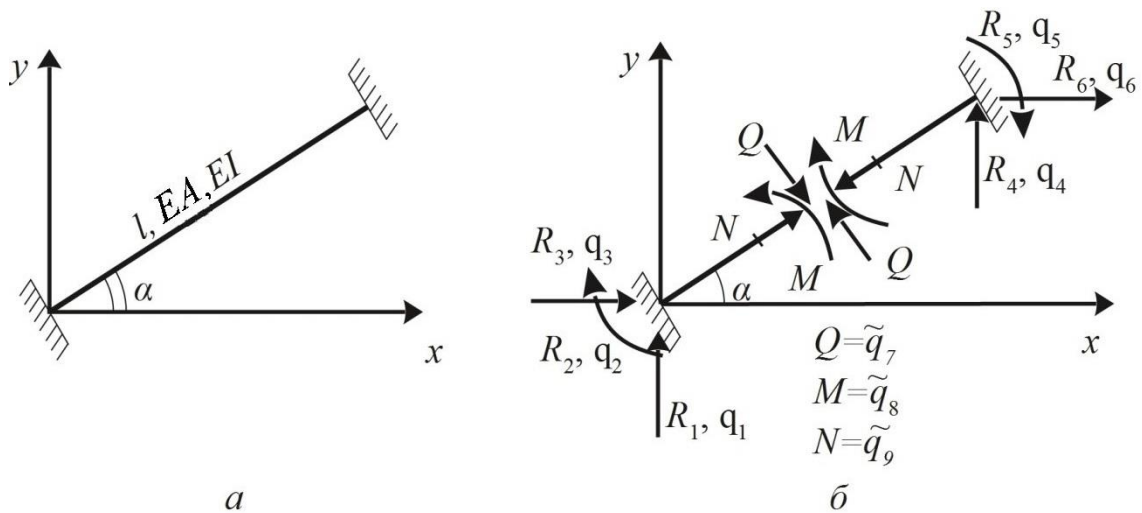


Рисунок 2.2 – а) прямолинейный стержень, жестко закрепленный по концам  
б) основная система

Возможны и другие варианты основных систем смешанного метода для этих типов КЭ.

Для знаков усилий, сил, перемещений и реакций используются правила, принятые в строительной механике.

Для рассматриваемых типов КЭ, имеющих статически определимые основные системы, элементы матриц откликов получаются непосредственно из физического смысла задачи, т.е. из условий неразрывности деформаций, статических условий равновесия и кинематических условий, как это показано в наших работах [20, 84, 86, 89, 155] и монографии [58].

Матрицу откликов конечного элемента по аналогии с (2.8) запишем в блочном виде:

$$[d] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Для конечного элемента в виде шарнирно закрепленного по концам стержня блоки матрицы откликов имеют следующую структуру:

$$[r] - \text{квадратная нулевая матрица четвертого порядка}, \quad (2.10)$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} l/EI \\ EA \end{bmatrix}, \quad [\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Для конечного элемента второго типа - в виде жестко закрепленного по концам стержня блоки матрицы откликов имеют приведенную ниже структуру:

$$[r] - \text{квадратная нулевая матрица шестого порядка},$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \left( \frac{l^3}{12EI} + \frac{kl}{GA} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l}{EA} \end{bmatrix}, [\tilde{r}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ -\frac{l}{2} & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ -\frac{l}{2} & -1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, [\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T. \quad (2.11)$$

При вычислении элементов блока  $\mathcal{S}$  матрицы откликов за возможные состояния принимаются действительные, соответствующие статически определимой основной системе:

$$1 \cdot \delta_{ik} = \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx + \int_0^l \eta \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k}{GA} dx + \int_0^l \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k}{EA} dx = \delta_{ki}, \quad (2.12)$$

где  $\eta$  – коэффициент, учитывающий форму поперечного сечения стержня.

В общем случае элементы блока  $\tilde{r}$ , могут быть также найдены с использованием в качестве возможного его действительное деформированное состояние в основной системе метода перемещений при единичном перемещении соответствующей связи. В частном случае учета только изгибающих моментов:

$$\tilde{r}_{jk} = \int_0^l \frac{\bar{M}_j \bar{\bar{M}}_k}{EI} dx \text{ или } \tilde{r}_{jk} = - \int_0^l \bar{M}_j \bar{\chi}_k dx, \quad (2.13)$$

где  $\chi_k$  - кривизна КЭ в возможном состоянии.

Проиллюстрируем это на примере КЭ в виде изгибаемого стержня (рисунок 2.2, б).

Для вычисления коэффициентов  $\tilde{r}_{17}$ ,  $\tilde{r}_{27}$ ,  $\tilde{r}_{18}$  и  $\tilde{r}_{28}$  возьмем в качестве возможных единичные смещения связей в основной системе метода перемещений:  $q_1 = 1$  и  $q_2 = 1$ .

Выполняя перемножение соответствующих эпюр изгибающих моментов, находим:

$$1 \cdot \tilde{r}_{17} = \int_0^l \frac{\bar{M}_7 \bar{\bar{M}}_1}{EI} dx = 1, \quad 1 \cdot \tilde{r}_{27} = \int_0^l \frac{\bar{M}_7 \bar{\bar{M}}_2}{EI} dx = -\frac{l}{2},$$

$$1 \cdot \tilde{r}_{18} = \int_0^l \frac{\bar{M}_8 \bar{\bar{M}}_1}{EI} dx = 0, \quad 1 \cdot \tilde{r}_{28} = \int_0^l \frac{\bar{M}_8 \bar{\bar{M}}_2}{EI} dx = 1.$$

Эти выражения для коэффициентов совпадают с полученными на основе условий статического равновесия (2.10) при  $\alpha = 0$ .

Коэффициенты блока  $[\tilde{\delta}]$  определяются или из кинематико-геометрических условий, или на основании теоремы о взаимности реакций и перемещений:

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T. \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) носит общий характер в строительной механике и теории упругости и называется принципом двойственности статических и геометрических условий.

Как уже отмечалось выше, расчет по МКЭ выполняется на воздействие нагрузки, приложенной в узлах соединения элементов между собой.

Вычисление коэффициентов подвекторов  $r_F$  и  $\delta_F$  для каждого КЭ не представляет труда, так как основная система для КЭ является статически определимой. Величины  $r_F$  находятся как реакции во введенных связях основной системы для КЭ от нагрузки, распределенной по его длине, а величины  $\delta_F$  находятся как перемещения от той же нагрузки по направлению силовых неизвестных  $\tilde{q}$  в основной системе.

На рисунке 2.3 представлен конечный элемент с упруго-податливыми связями по концам, позволяющий моделировать стержневые конструкции с податливыми узловыми соединениями стержней в узлах.

Основная система, для такого конечного элемента, будет аналогична представленной на рисунке 2.2, поэтому остальные блоки матрицы откликов для него, за исключением блока  $[r]$ , остаются неизменными.

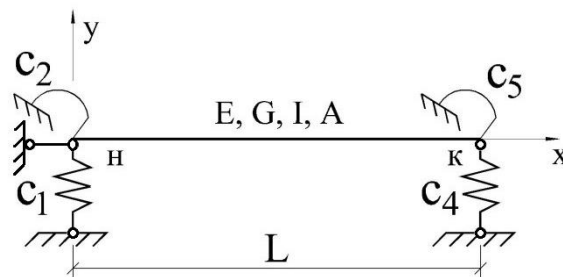


Рисунок 2.3 – Конечный элемент с упруго-податливыми связями

В блоке  $[r]$  матрицы откликов этого КЭ некоторые коэффициенты будут не нулевыми:

$$[r] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

где  $c_i$  - реакции от единичного смещения связей в упругоподатливой опоре.

Рассмотрим еще один вариант основной системы для конечного элемента-стержня, показанного на рисунке 2.4.

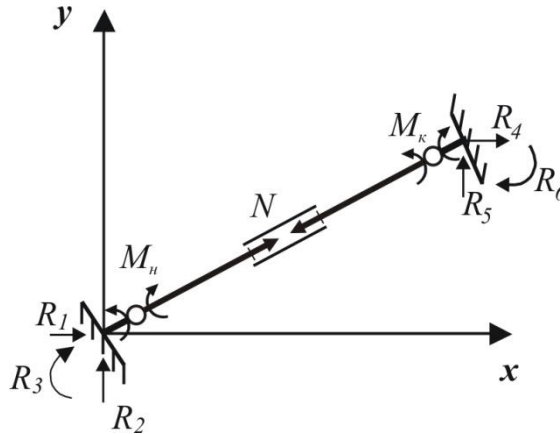


Рисунок 2.4 – Второй вариант конечного элемента-стержня

Расстояние от опоры до места установки шарнира бесконечно мало, по сравнению с длиной стержня. По этой причине можно считать изгибающие моменты приложенными концам стержня. Но в тоже время они не распространяются на другие примыкающие к узлу стержни. При данном выборе расчетной схемы удовлетворяется условие совместности деформаций в заданной системе и эквивалентность основной и заданной систем. Очевидно, что, как и в предыдущем варианте, основная система статически определима, и, следовательно, матрица откликов для этого варианта конечного элемента может быть получена без особых трудностей. Рассмотрим подробнее получение матрицы откликов  $d$  для КЭ, показанного на рисунке 2.4.

Для него введем следующие обозначения неизвестных:

$q_1, \dots, q_6$  - перемещения по направлению соответствующих реакций  $R_1, \dots, R_6$ ,

$\tilde{q}_7 = N$ ,  $\tilde{q}_8 = M_H$ ,  $\tilde{q}_9 = M_K$  - неизвестные усилия в удаленных связях.

Последовательно задавая каждому из неизвестных соответствующее единичное перемещение или усилие и рассматривая условия статического равновесия, физические и геометрические соотношения для конечного элемента, получаем блоки матрицы откликов.

Ненулевые блоки имеют следующий вид:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ 0 & \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EA} \end{bmatrix}, [\tilde{r}] = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\frac{\sin \alpha}{l} & \frac{\sin \alpha}{l} \\ -\sin \alpha & \frac{\cos \alpha}{l} & -\frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & \frac{\sin \alpha}{l} & -\frac{\sin \alpha}{l} \\ \sin \alpha & -\frac{\cos \alpha}{l} & \frac{\cos \alpha}{l} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, [\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T. \quad (2.15)$$

Блок  $r$  равен нулю, так как основная система статически определимая, и смещения кинематических связей не вызывают реакций.

### 2.2.2 Конечный элемент в виде сегмента кольца

По аналогии с рассмотренными выше вариантами стержневых конечных элементов могут быть построены физическо-математические модели конечных элементов в виде сегмента плоского кольца (рисунок 2.5).

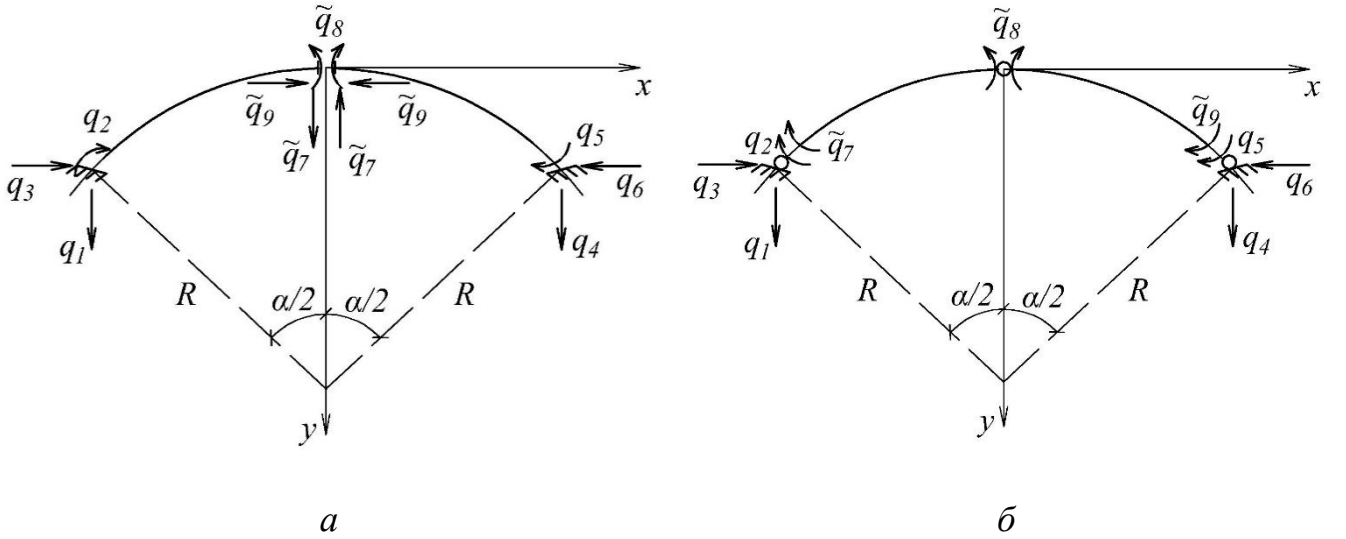


Рисунок 2.5 – Варианты основной системы для конечного элемента в виде сегмента плоского кольца: первый (а) и второй (б) варианты

Для физической модели первого варианта (рисунок 2.5, а) получаем по изложенному выше алгоритму для КЭ-стержня все выражения для коэффициентов матрицы откликов.

В блоке  $[r]$  все коэффициенты нулевые.

В блоке  $[\tilde{r}]$  для левой половины КЭ из условий статики получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1,7} &= -\cos \frac{\alpha}{2}, \quad \tilde{r}_{1,8} = 0, \quad \tilde{r}_{1,9} = -\sin \frac{\alpha}{2}, \quad \tilde{r}_{2,7} = R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \tilde{r}_{2,8} = 1, \quad \tilde{r}_{2,9} = -R \left( 1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \tilde{r}_{3,7} &= \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \tilde{r}_{3,8} = 0, \quad \tilde{r}_{3,9} = -\cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Для правой половины КЭ выражения для коэффициентов этого блока будут отличаться только знаками.

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T.$$

Выражения для коэффициентов в блоке  $[\delta]$  получаются, как и в случае КЭ-стержня, с использованием интеграла Мора, но в полярной системе координат:

$$\delta_{ij} = \int_0^\alpha \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} d\alpha + \int_0^\alpha k \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_j}{GA} d\alpha + \int_0^\alpha \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} d\alpha, \quad (i = 7, 8, 9; j = 7, 8, 9)$$

Для кольцевого КЭ с основной системой второго варианта (рисунок 2.5, б) блок  $[r]$  также нулевой.

Для элементов блока  $[\tilde{r}]$  из условий статики следует:

$$\tilde{r}_{1,7} = \frac{1}{l}, \quad \tilde{r}_{2,7} = -1, \quad \tilde{r}_{3,7} = \frac{1}{2f}, \quad \tilde{r}_{4,7} = -\frac{1}{l}, \quad \tilde{r}_{5,7} = 0, \quad \tilde{r}_{6,7} = -\frac{1}{2f}.$$

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T.$$

Элементы блоков  $[\tilde{r}]$  и  $[\tilde{\delta}]$ , относящиеся к воздействию  $q_3 = 1$ , не могут быть найдены из условий статического равновесия или смещений КЭ как жесткого целого. При кинематическом воздействии  $q_3 = 1$  происходит изменение геометрической конфигурации конечного элемента как механизма с изменением угла наклона хорд  $AC$  и  $BC$ , которыми можно условно представить полуарки (рисунок 2.6).

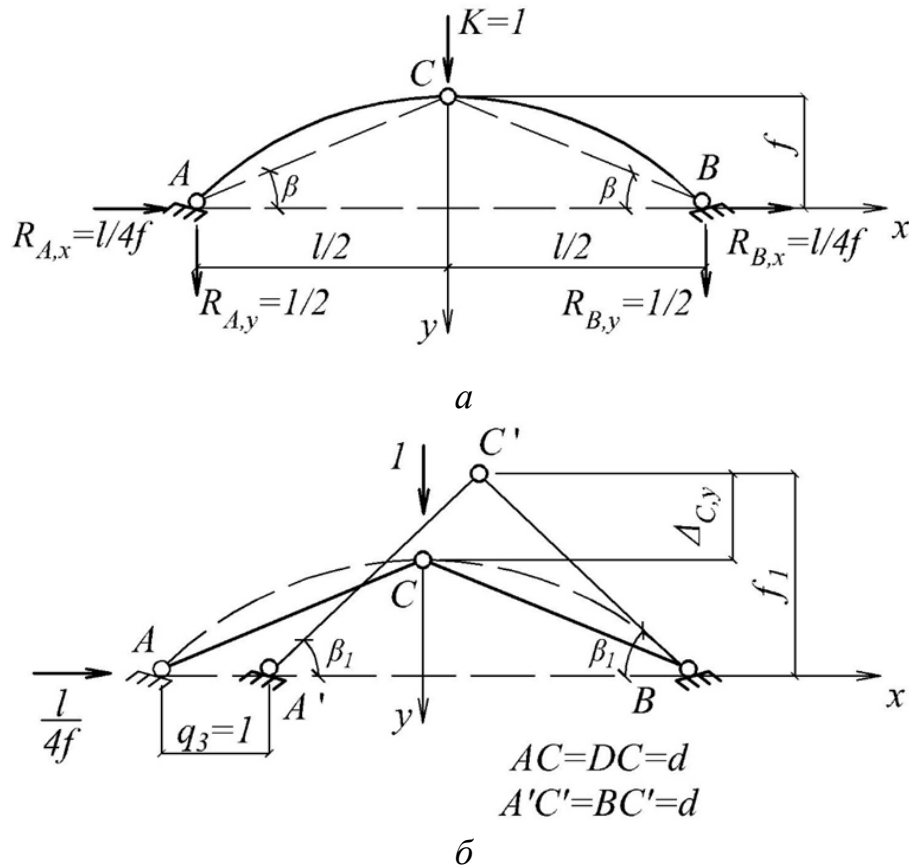


Рисунок 2.6 – Конечный элемент кольцевого типа: а) действительное состояние  
б) возможное состояние

Изменение параметров геометрической конфигурации рассматриваемого КЭ в зависимости от кинематического воздействия  $q_3 = 1$  можно найти, используя принцип возможных перемещений. (В данном случае таким определяющим

параметром является угол наклона хорд при смещении левой опоры на величину  $q_3 = 1$ ).

Рассматривая состояние КЭ под нагрузкой  $K = 1$  (рисунок 2.6, а) как действительное, а состояние с измененной конфигурацией (рисунок 2.6 б) как возможное, найдем работу сил действительного состояния на возможных перемещениях от  $q_3 = 1$ :

$$R_{A,x} \cdot q_3 = K \cdot \Delta_{C,y}, \text{ т.е. } \frac{l}{4f} \cdot 1 = 1 \cdot \Delta_{C,y}.$$

Из геометрии КЭ следует:

$$l = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad f = R \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad \beta = \frac{\alpha}{4}, \quad (2.16)$$

$$f_1 = f + \Delta_{C,y}, \quad \sin \beta_1 = \frac{f_1}{d} = \sin(\beta + \delta\beta)$$

В развернутом виде:

$$\sin \beta_1 = \sin \beta \cos \delta\beta + \cos \beta \sin \delta\beta.$$

Так как, по определению, возможные перемещения являются малыми величинами, т.е.

$$\cos \delta\beta \cong 1, \quad \sin \delta\beta \cong \delta\beta,$$

$$\text{то } \sin \beta_1 \cong \sin \beta + (\delta\beta) \cos \beta = \frac{f_1}{d}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) находим

$$\delta\beta = \frac{1}{\cos \beta} (\sin \beta_1 - \sin \beta) = \frac{1}{2f}. \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$\tilde{\delta}_{7,3} = -\delta\beta, \quad \tilde{\delta}_{8,3} = \delta\beta, \quad \tilde{\delta}_{9,3} = -\delta\beta.$$

По аналогии находим

$$\tilde{\delta}_{7,6} = -\delta\beta, \quad \tilde{\delta}_{8,6} = \delta\beta, \quad \tilde{\delta}_{9,6} = -\delta\beta.$$

Из найденных выражений для элементов блоков  $[\tilde{r}]$ ,  $[\tilde{\delta}]$ ,  $[\delta]$  формируются соответствующие матрицы откликов для двух вариантов основной системы рассматриваемого конечного элемента.

### 2.2.3 Конечный элемент в виде двухслойной балки и конечный элемент пространственно-ориентированного конечного элемента-стержня

В выполненной под нашим руководством кандидатской диссертации В. В. Габовой [19] получены матрицы откликов сложного конечного элемента в виде двухслойной балки и пространственно-ориентированного конечного элемента-стержня.

С целью анализа эффективности различных видов основных систем для сложного конечного элемента в виде двухслойной балки (рисунок 2.7) рассмотрено построение соответствующих матриц откликов.

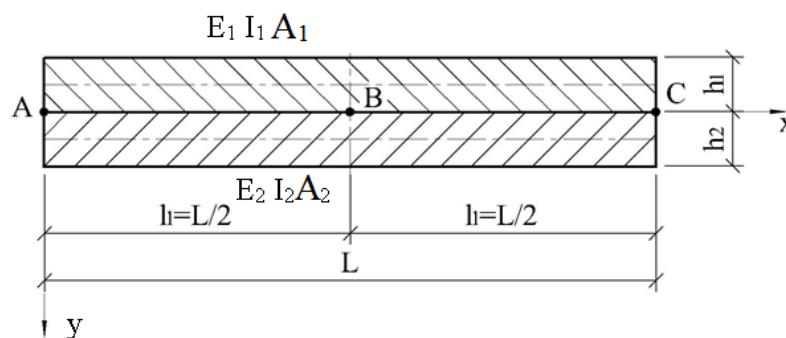


Рисунок 2.7 – Конечный элемент в виде двухслойной балки

Основная система конечного элемента зависит от принимаемой расчетной схемы. Самой простой является дискретная расчетная схема, изображенная на рисунке 2.8, в которой все силы взаимодействия слоев сосредоточены в расчетных точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  основных систем двух конечных элементов первого уровня, за которые принимаются слои балки (рисунок 2.9).

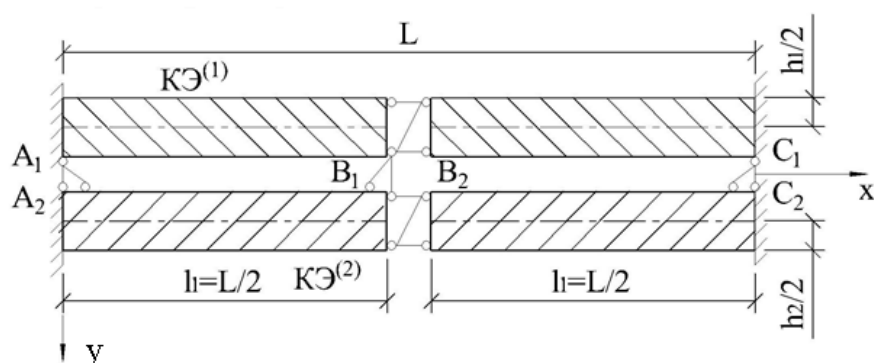


Рисунок 2.8 – Дискретная расчетная схема конечного элемента в виде двухслойной балки

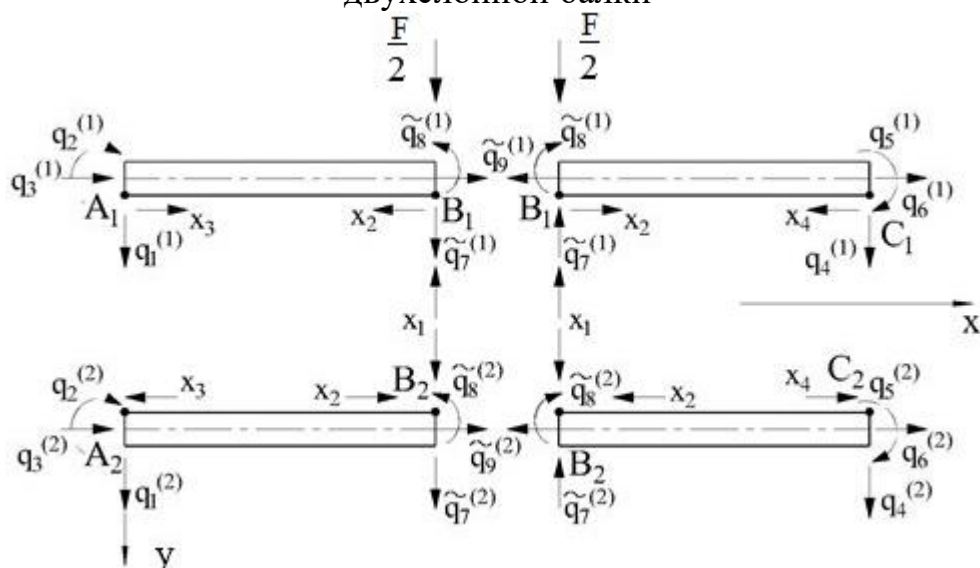


Рисунок 2.9 – Основные системы двух конечных элементов первого уровня для конечного элемента в виде двухслойной балки

Если допустить, что сдвигающие усилия  $T$  между слоями конечного элемента распределены по линейному закону, то получим второй вариант расчетной схемы (рисунок 2.10), основная система для которой показана на рисунке 2.11. Распределенный изгибающий момент и распределенную продольную нагрузку на конечный элемент первого уровня в такой основной системе создают распределенные сдвиговые обобщенные неизвестные  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

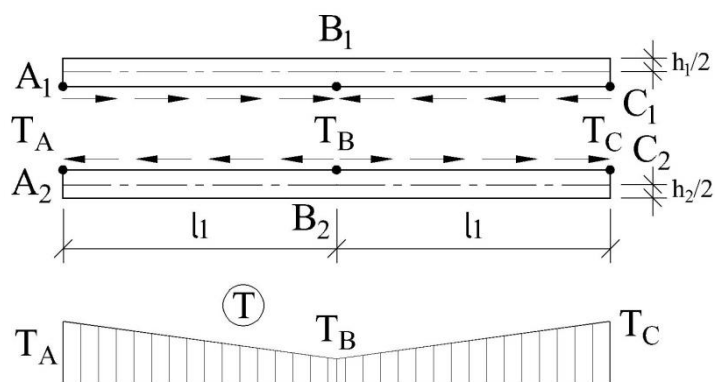


Рисунок 2.10 – Второй вариант расчетной схемы конечного элемента в виде двухслойной балки

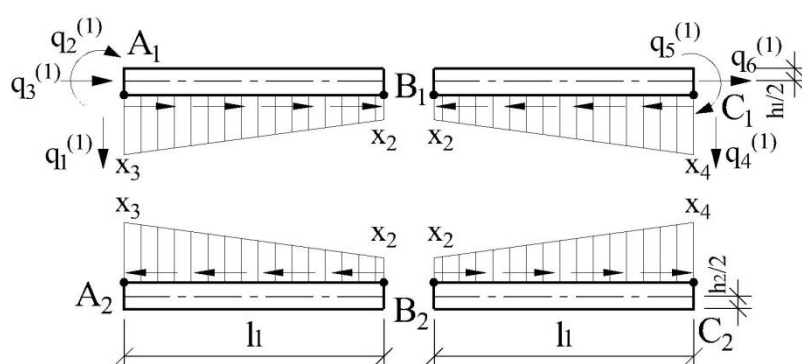


Рисунок 2.11 – Основная система для второго варианта расчетной схемы конечного элемента в виде двухслойной балки

Выражения для элементов соответствующих матриц откликов приведены в упомянутой выше диссертации В. В. Габовой [19].

Также в выполненной под нашим руководством диссертации В. В. Габовой [19], осуществлён вывод коэффициентов матрицы откликов для пространственного конечного элемента с началом в начале координат и концом в точке  $C$  – имеющей координаты  $x_C, y_C, z_C$ , имеющего 12 неизвестных перемещений (рисунок 2.12).

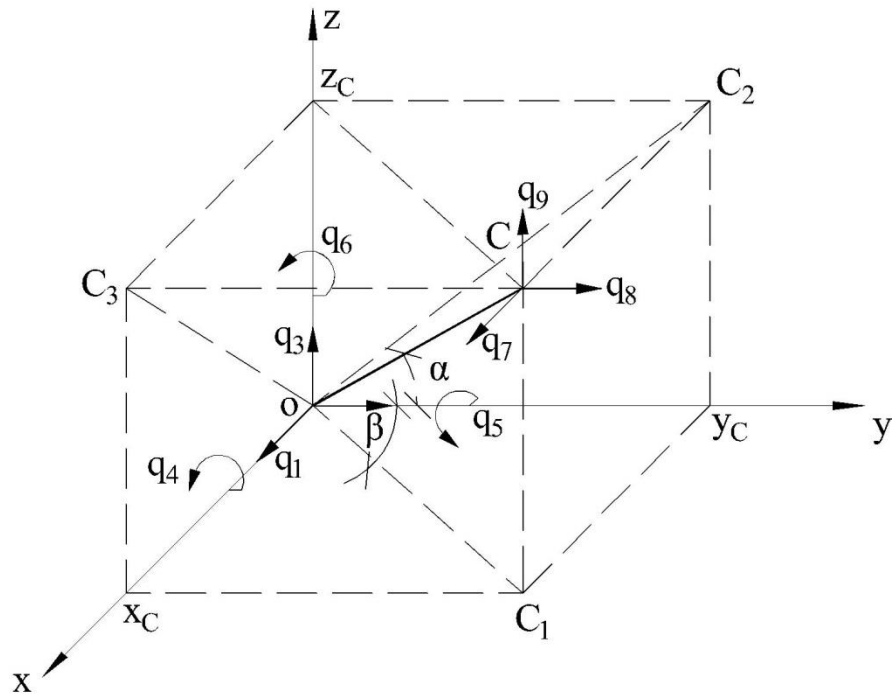


Рисунок 2.12 – Пространственно-ориентированный конечный элемент-стержень

#### 2.2.4 Вариант построения матрицы откликов конечного элемента преобразованием его матрицы жесткости

Представим матрицу жесткости КЭ в блочном виде, разделив неизвестные на две группы:  $q_r$  - линейные перемещения связей  $r$  в узлах КЭ и  $q_s$  - углы поворота связей  $s$  в узлах КЭ. В соответствии с этим разделение получаем два матричных уравнения:

$$\begin{aligned} 1. & K_{rr}q_r + K_{rs}q_s = R_r, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \\ 2. & K_{sr}q_r + K_{ss}q_s = M_s, \quad (s = n + 1, n + 2, \dots, n + m). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь  $R_r$  - реакции в  $r$  линейных связях,  $M_s$  - реактивные моменты в  $s$  узловых связях.

Поставим обратную задачу: при заданных перемещениях  $q_r$  и реакциях  $M_s$  в угловых связях найти соответствующую им матрицу реакций  $R_r^*$  и матрицу перемещений  $q_s^*$  угловых связей, т.е. построить матрицу откликов

$$[d] = \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{rs} \\ \delta_{sr} & \delta_{ss} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

и соответствующую ей систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. & R_{rr}q_r + R_{rs}M_s = R_r^*, \\ 2. & \delta_{sr}q_r + \delta_{ss}M_s = q_s^* = \Delta_s. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для выполнения перехода от (2.19) к (2.21) найдем из второго уравнения системы (2.19)

$$q_s^* = K_{ss}^{-1}(M_s - K_{sr}q_r). \quad (2.22)$$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (2.19), получим

$$K_{rr}q_r + K_{rs}K_{ss}^{-1}(M_s - K_{sr}q_r) = R_r^*. \quad (2.23)$$

Уравнения (2.22) и (2.23) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1. & (K_{rr} - K_{rs}K_{ss}^{-1}K_{sr})q_r + K_{rs}K_{ss}^{-1}M_s = R_r^*, \\ 2. & -K_{ss}^{-1}K_{sr}q_r + K_{ss}^{-1}M_s = q_s^*. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями системы (2.21), находим, что они идентичны, т.е.

$$\begin{aligned} R_{rr} &= K_{rr} - K_{rs}K_{ss}^{-1}K_{sr}, \\ R_{rs} &= K_{rs}K_{ss}^{-1}, \\ \delta_{sr} &= -K_{ss}^{-1}K_{sr} = -(R_{rs})^T, \\ \delta_{ss} &= K_{ss}^{-1}, \quad q_s^* = \Delta_s. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Точно так же возможен переход от матрицы откликов (2.20) к матрице жесткости конечного элемента.

Из второго уравнения системы (2.21) следует

$$M_s = \delta_{ss}^{-1}(q_s^* - \delta_{sr}q_r). \quad (2.26)$$

После подстановки в первое уравнение получаем следующее уравнение:

$$R_{rr}q_r + R_{rs}\delta_{ss}^{-1}(q_s^* - \delta_{sr}q_r) = R_r^*. \quad (2.27)$$

Совместно с уравнением (2.26) это уравнение является системой уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned} 1. R_{rr} q_r + R_{rs} \delta_{ss}^{-1} (q_s - \delta_{sr} q_r) &= R_r^*, \\ 2. M_s &= \delta_{ss}^{-1} (q_s^* - \delta_{sr} q_r). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Подставив в нее зависимости (2.25), приходим снова к системе уравнений (2.19), коэффициенты при неизвестных в которой являются элементами матрицы жесткости КЭ.

Необходимо отметить, что рассмотренный вариант получения матрицы откликов конечного элемента возможен только в том случае, когда количество неизвестных в узлах основных систем метода перемещений и смешанного метода одинаковое.

## 2.3 Формирование матриц откликов пластинчатых конечных элементов

### 2.3.1 Матрица откликов изгибаемого прямоугольного конечного элемента-пластинки с 16 степенями свободы

Рассмотрим процесс формирования матрицы откликов для прямоугольного конечного элемента, работающего на изгиб при действии поперечной нагрузки.

Впервые, как это отмечено в главе 1, такая основная система смешанного метода для КЭ-пластинки была введена А.М. Масленниковым [119, 120] для расчета изгибаемых пластинок. В этих работах не использовалось понятие “матрица откликов” и не рассматривались особенности и теория получения коэффициентов при неизвестных в разрешающих уравнениях.

Основная система смешанного метода такого КЭ (рисунок 2.13) будет статически неопределимой.

На этом же рисунке показаны обобщенные узловые неизвестные, за которые приняты вертикальные линейные смещения  $Z$ , по два изгибающих момента по направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$ , ( $M_x$  и  $M_y$ ) и крутящий момент ( $M_{xy} = M_{yx}$ ), и их положительные направления.

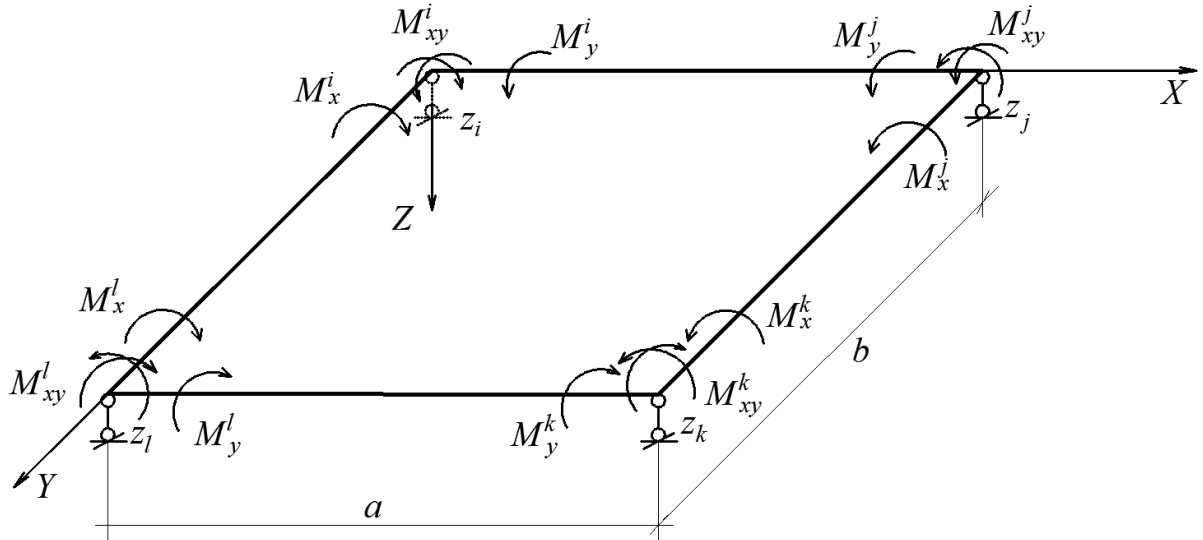


Рисунок 2.13 – Основная система смешанного метода для конечного элемента, работающего на изгиб при действии поперечной нагрузки

Обозначим эти неизвестные  $q_t$ , ( $t=1,2,\dots,16$ ). Вектор неизвестных имеет вид:  $\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \tilde{q}_5 \ \tilde{q}_6 \ \tilde{q}_7 \ \tilde{q}_8 \ \tilde{q}_9 \ \tilde{q}_{10} \ \tilde{q}_{11} \ \tilde{q}_{12} \ \tilde{q}_{13} \ \tilde{q}_{14} \ \tilde{q}_{15} \ \tilde{q}_{16}]^T$

В этом векторе компоненты  $q_t$ , ( $t=1,2,3,4$ ) относятся к неизвестным линейным смещениям:  $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [z_i, z_j, z_k, z_l]$ , а  $\tilde{q}_t$  ( $t=5,6,\dots,16$ ) к силовым неизвестным  $[\tilde{q}_5, \tilde{q}_6, \dots, \tilde{q}_{15}, \tilde{q}_{16}] = [M_x^i, M_y^i, M_x^j, M_y^j, M_x^k, M_y^k, M_x^l, M_y^l, M_{xy}^i, M_{xy}^j, M_{xy}^k, M_{xy}^l]$

Функцию прогибов конечного элемента  $z=w(x,y)$  примем, как и при расчете по МКЭ в перемещениях, в виде функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению изгиба ортотропной пластинки:

$$D_x \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = -q. \quad (2.29)$$

Здесь  $E_x, E_y, \mu_x, \mu_y, G$ , - модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений;  $h$  - толщина пластинки;

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}; D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}; D_{кр} = \frac{Gh^3}{12} \quad - \text{ жесткости изгиба и жесткость}$$

кручения для главных направлений;  $D_{xy} = D_x \mu_y + 2D_{кр} = D_y \mu_x + 2D_{кр}$ .

$$\text{Для изотропных пластин } E_x = E_y = E, \mu_x = \mu_y = \mu, G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

$$D_x = D_y = D_{xy} = D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Такой функцией, удовлетворяющей уравнению (2.29) является полный бикубический полином с произвольными коэффициентами:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \\ + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3$$

который может быть представлен в матричном виде

$$z = w(x, y) = [\Phi_1(x, y)] \{\alpha\}, \quad (2.30)$$

$$\text{где } [\Phi_1(x, y)] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3, x^2 y^2, x^3 y^2, x^2 y^3, x^3 y^3],$$

$$\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{16}]^T.$$

Вектор кривизн срединной поверхности КЭ определяется выражением

$$\{\chi\} = [B] \{\alpha\}, \quad (2.31)$$

здесь

$$\{\chi\} = [\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}, \chi_{yx}]^T,$$

$$[B] = \{\partial\} [\Phi_1(x, y)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2y & 0 & 6x & 0 & 6xy & 0 & 2y^2 & 6xy^2 & 2y^3 & 6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 0 & 6y & 0 & 6xy & 2x^2 & 2x^3 & 6x^2 y & 6x^3 y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 2y & 0 & 0 & 3x^2 & 3y^2 & 4xy & 6x^2 y & 6xy^2 & 9x^2 y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 2y & 0 & 0 & 3x^2 & 3y^2 & 4xy & 6x^2 y & 6xy^2 & 9x^2 y^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\partial\} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right]^T \quad - \text{ матрица-оператор дифференцирования}$$

Моменты  $M_x^{(y)}, M_y^{(x)}, M_{xy}$  могут быть найдены по формулам:

$$M_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); M_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); M_{xy} = M_{yx} = -2D_{\kappa\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Векторы усилий и деформаций связаны зависимостью:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = -[C]\{\chi\} = -[C][B]\{\alpha\}. \quad (2.32)$$

$$\text{Для ортотропного материала: } [C] = \begin{bmatrix} D_x & D_\mu & 0 \\ D_\mu & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 2D_k \\ 0 & 0 & 2D_k \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Вектор  $\{q\}$  может быть получен из выражений (2.30) и (2.32) путем подстановки координат узлов и связь между векторами  $\{q\}$  и  $\{\alpha\}$  определяется выражением:

$$\{q\} = [V_1]\{\alpha\}. \quad (2.34)$$

В выражении (2.34) приняты следующие обозначения:

$$[V_1] = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_i, y_i) \\ \Phi_2(x_i, y_i) \\ \Phi_3(x_i, y_i) \\ \Phi_4(x_i, y_i) \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \Phi_1(x_t, y_t) &= \begin{bmatrix} \Phi_1(x_i, y_i) \\ \Phi_1(x_j, y_j) \\ \Phi_1(x_k, y_k) \\ \Phi_1(x_l, y_l) \end{bmatrix}, \\ \Phi_4(x_t, y_t) &= \begin{bmatrix} \Phi_4(x_i, y_i) \\ \Phi_4(x_j, y_j) \\ \Phi_4(x_k, y_k) \\ \Phi_4(x_l, y_l) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \Phi_2(x_t, y_t) \\ \Phi_3(x_t, y_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_2(x_i, y_i) \\ \Phi_3(x_i, y_i) \\ \Phi_2(x_j, y_j) \\ \Phi_3(x_j, y_j) \\ \Phi_2(x_k, y_k) \\ \Phi_3(x_k, y_k) \\ \Phi_2(x_l, y_l) \\ \Phi_3(x_l, y_l) \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$$\text{где } \Phi_2(x, y) = -[D_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] + D_\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot [\Phi_1(x, y)]],$$

$$\Phi_3(x, y) = -[D_\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] + D_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot [\Phi_1(x, y)]],$$

$$\Phi_4(x, y) = -2D_k \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot [\Phi_1(x, y)].$$

Подставляя в (2.35) координаты соответствующих узлов, получаем коэффициенты матрицы  $[V_1]$ .

Из выражения (2.34) находим коэффициенты  $\{\alpha\}$  для прямоугольного КЭ изгибаемой пластинки с 16 неизвестными:

$$\{\alpha\} = [V_1]^{-1} \{q\}. \quad (2.36)$$

Подставляя выражение (2.36) в выражения (2.30)-(2.32), получаем:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= [u(x, y)] \{q\}, \\ \{\chi\} &= [B_1] \{q\}, \\ \{N\} &= [M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}]^T = -[C][B_1] \{q\}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\text{где } [B_1] = [B][V_1]^{-1}.$$

Алгоритм построения матрицы откликов КЭ аналогичен алгоритму построения матрицы жесткости.

В линейно-деформируемых системах вектор узловых откликов КЭ можно представить в виде:

$$\{F\} = [d] \{q\}. \quad (2.38)$$

Установим связь между вектором узловых воздействий и вектором узловых откликов, определяемую матрицей откликов  $[d]$ . Для этого применим к рассматриваемому элементу одновременно принцип возможных перемещений и принцип возможных изменений напряженного состояния, приняв в качестве возможных изменений вектора смешанных неизвестных вариации его действительных компонентов, а в качестве действительного состояния вектор узловых откликов.

Возможная работа внешних воздействий определяется выражением:

$$\delta A = [\delta \{q\}]^T \{F\} \quad (2.39)$$

Возможная работа внутренних сил по всей области элемента может быть представлена выражением:

$$\delta W = - \int_0^a \int_0^b [\delta \{ \chi \}]^T \{ N \} dx dy \quad (2.40)$$

Подставив в выражение (2.40) векторы кривизн  $\{ \chi \}$  и усилий  $\{ N \}$ , получим:

$$\delta W = - [\delta \{ q \}]^T \left( \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C] [B] dx dy \right) \{ q \} \quad (2.41)$$

Так как  $\delta A + \delta W = 0$ , то

$$\{ F \} = \left[ \left( \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C] [B] dx dy \right) \right] \{ q \} \quad (2.42)$$

Сравнивая это выражения с (2.38), получаем

$$d = \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C] [B] dx dy = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Подстановка матриц  $[B_1]$ ,  $[C]$  в это выражение и интегрирование по площади дает выражения для элементов матрицы откликов КЭ, относящиеся к блокам  $[r]$  и  $[\delta]$ .

Найти по этому же алгоритму элементы блоков  $[\tilde{\delta}]$  и  $[\tilde{r}]$  невозможно. Докажем это утверждение на примере задачи о нахождении элементов  $\tilde{r}_{3,5}$  и  $\tilde{\delta}_{3,5}$ .

Рассматривая соответственно единичное кинематическое воздействие  $q_3 = 1$  (рисунок 2.14, а) и единичное силовое воздействие  $\tilde{q}_5 = 1$  (рисунок 2.14, б), получим на основе принципа возможных перемещений следующее выражение:

$$1 \cdot \tilde{\delta}_{5,3} + \tilde{r}_{3,5} \cdot 1 = W_{5,3} = W_{3,5}.$$

Из этого уравнения найти  $\tilde{\delta}_{3,5}$  и  $\tilde{r}_{3,5}$  невозможно. Из него лишь следует, что на основании теоремы о взаимности работ внешних сил  $A_{3,5} = A_{5,3}$ , т.е.  $r_{3,3} \cdot 0 = 1 \cdot \tilde{\delta}_{5,3} + \tilde{r}_{3,5} \cdot 1$ . Это лишь подтверждает известную теорему о взаимности реакций и перемещений  $\tilde{r}_{3,5} = -\tilde{\delta}_{5,3}$ .

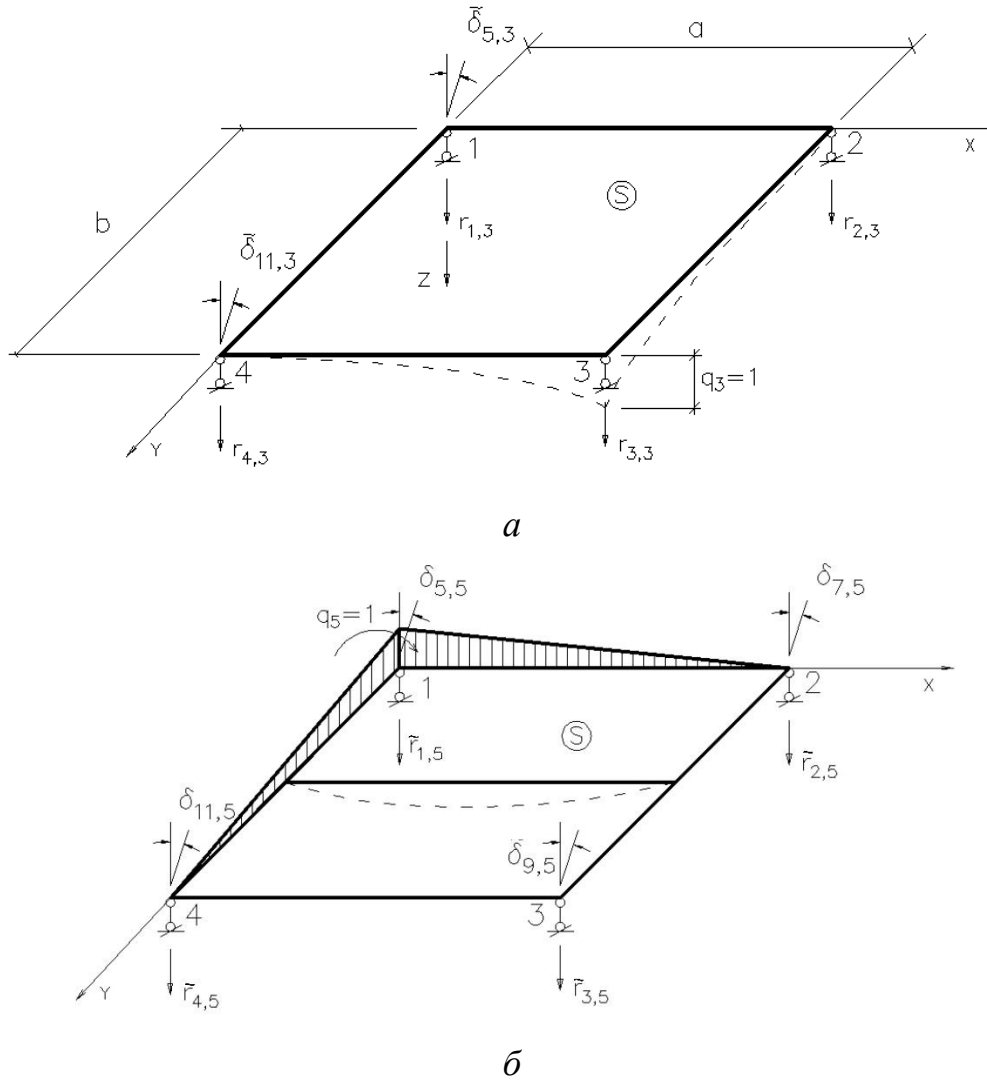


Рисунок 2.14 – Кинематические воздействия на основную систему КЭ:  
 а - линейное единичное смещение связи 3,  
 б - единичное усилие по направлению  $\tilde{q}_{11}$

В связи с доказанным утверждением в качестве возможных состояний для нахождения коэффициентов блоков  $[\tilde{\delta}]$  и  $[\tilde{r}]$  приняты функции формы на основе полинома Эрмита, используемые иногда в расчетах по МКЭ в перемещениях.

Полям перемещений  $\tilde{w}_t^*$  соответствуют поля кривизн:

$$\{\tilde{\chi}_t^*\} = [\tilde{B}_2^*] \{q\}$$

где  $[\tilde{B}_2^*] = \{\partial\} [\tilde{w}_t^*(x, y)]$ ,  $(t = 1, 2, 3, 4)$ .

В соответствии с этим выражением в выражение (2.43) вместо  $[B]$  следует подставить  $[\tilde{B}_2^*]$

$$[d] = \int_0^a \int_0^b [B_1]^T [C] [\tilde{B}_2^*] dx dy. \quad (2.44)$$

На основании теоремы о взаимности перемещений и реакций  $[\delta] = -[\tilde{r}]^T$ .

Итак, для изгибаемого прямоугольного конечного элемента-пластинки с 16 степенями свободы получены все коэффициенты матрицы откликов.

Если в рассмотренном конечном элементе уменьшить число неизвестных усилий в каждом из узлов основной системы до двух, убрав  $\tilde{q}_{13}, \tilde{q}_{14}, \tilde{q}_{15}, \tilde{q}_{16}$ , т.е. крутящие моменты, то получим матрицу откликов для прямоугольного изгибаемого конечного элемента с 12 степенями свободы, рассмотренного нами в работах [58, 70, 87, 89].

### 2.3.2 Вычисление элементов вектора откликов на внешнее силовое нагружение

Для получения вектора откликов на распределенную по области конечного элемента нагрузку  $F(x, y)$  необходимо выполнить приведение этой нагрузки к узловым воздействиям на основе смешанного вариационного принципа изменения напряженно-деформируемого состояния.

В соответствии с количеством степеней свободы КЭ введем вектор узловых воздействий от распределенной нагрузки

$$\{f\} = [f_1, f_2, \dots, f_{16}]^T = [r_{1,F}, r_{2,F}, r_{3,F}, r_{4,F}, \delta_{5,F}, \dots, \delta_{16,F}]^T \quad (2.45)$$

Возможная работа этих узловых воздействий

$$\delta A_{\text{узн}} = \{\delta(q)\}^m \{f\} \quad (2.46)$$

Возможная работа распределенной по области КЭ нагрузки  $F(x, y)$

$$\begin{aligned} \delta A_{распр} &= \int_0^a \int_0^b \delta \omega(x, y) F(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^b [\Phi_1(x, y)] [V_1]^{-1} \{\delta q\}^T F(x, y) dx dy = \\ &= \{\delta q\}^T \int_0^a \int_0^b [\Phi_1(x, y)] [V_1]^{-1} F(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (2.47)$$

Сравнивая (2.46) и (2.47) находим

$$\{f\} = \int_0^a \int_0^b [\Phi_1(x, y)] [V_1]^{-1} F(x, y) dx dy \quad (2.48)$$

Аналогично можно получить вектор воздействий для прямоугольного изгибаемого конечного элемента с 12 степенями свободы, рассмотренного нами в работах [58, 70, 87, 89].

### 2.3.3 Матрица откликов треугольного изгибаемого конечного элемента

При расчете пластинчатых систем со сложным или криволинейным контуром отдельных её пластин моделирование их ансамблем прямоугольных конечных элементов не даёт возможности сгущения конечно-элементной сетки без введения, значительно усложняющих расчет дополнительных узлов в основную систему для конечного элемента. Такое сгущение необходимо для более точного отображения в расчетной схеме реальной геометрии контура и реального НДС в так называемых “особых” точках и зонах – угловые точки вырезов и накладок, щели, отверстия, жесткие вставки и т. д. В этом случае необходимо использовать треугольные конечные элементы.

Наиболее подходящими из них для практического применения считаются простые трехузловые треугольные конечные элементы.

Для обеспечения совместности работы прямоугольных и треугольных КЭ в узловых точках они должны иметь одинаковое количество основных неизвестных в каждом из стыкуемых узлов – три или четыре.

На рисунке 2.15 показаны несколько возможных вариантов такого перехода от ортогональной конечно-элементной сетки прямоугольных КЭ к сетке треугольных КЭ и виды геометрических узлов, для которых составляются типовые разрешающие уравнения.

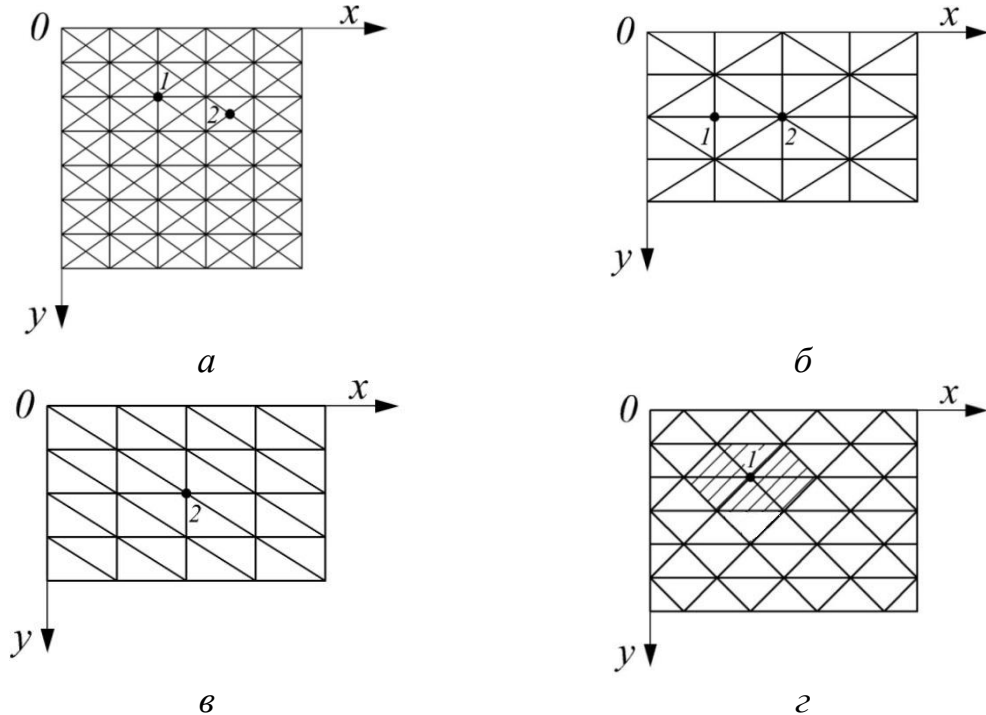


Рисунок 2.15 – Возможные варианты перехода от ортогональной конечно-элементной сетки прямоугольных КЭ к сетке треугольных КЭ и виды геометрических узлов, для которых составляются типовые разрешающие уравнения

На рисунке 2.16 показаны конечные элементы, сходящиеся в узле  $ij$  конечно-элементной сетки.

Все они имеют разную ориентацию относительно общей системы декартовых координат  $xOy$ . Единая система координат для всей конечно-элементной сетки прямоугольных и треугольных КЭ существенно упрощает как процесс моделирования матрицы откликов, так и формирования системы разрешающих уравнений.

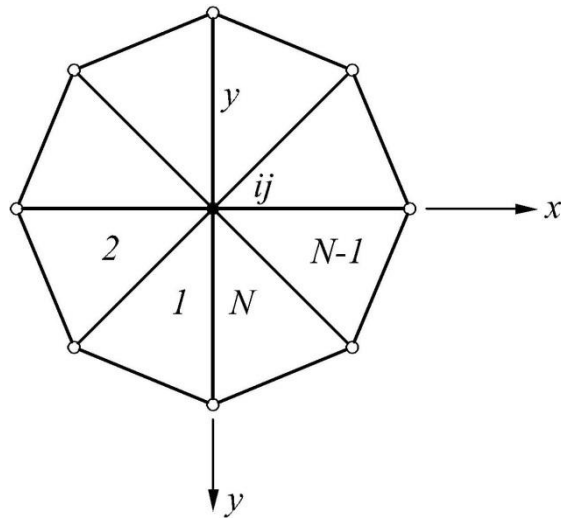


Рисунок 2.16 – Треугольные конечные элементы, сходящиеся в узле  $ij$  конечно-элементной сетки

Рассмотрим для примера построение математической модели матрицы откликов для основной системы треугольного конечного элемента с координатами узлов  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$  (рисунок 2.17) с девятью степенями свободы (три степени свободы в каждом узле – прогибом  $w$  и изгибающими моментами  $M_x, M_y$  по направлениям осей  $x$  и  $y$ , общими для всех конечных элементов, сходящихся в общем для них узле конечно-элементной сетки). Основная система для такого КЭ является статически определимой и будет обладать теми же свойствами, что и основная система КЭ-стержня.

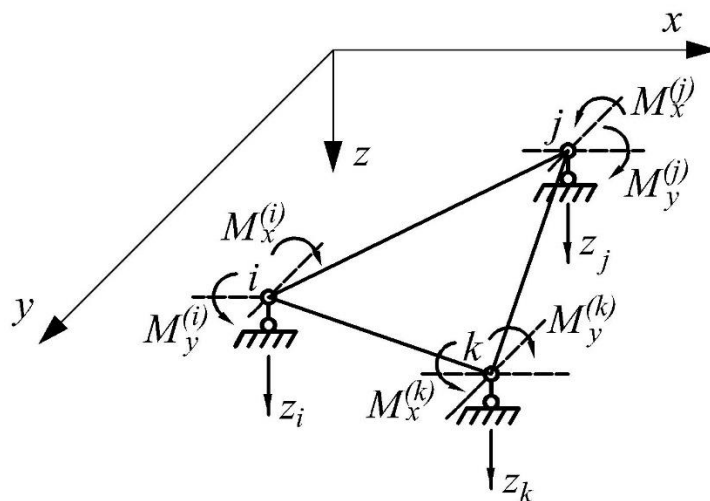


Рисунок 2.17 – Треугольный конечный элемент с девятью степенями свободы

Такой КЭ совместен с прямоугольным КЭ с 12 степенями свободы, рассмотренного нами в работах [87, 96, 113, 116], имеющим те же три степени свободы в каждом узле.

Моделирование матрицы откликов выполняется поблочно, как и в случае КЭ-стержня. Блок  $r$  будет также нулевым.

Элементы блока  $\tilde{r}$  так же находятся из условий статического равновесия.

Условия статического равновесия КЭ при воздействии  $\tilde{q}_4 = 1$ :

$$\begin{aligned}\sum M_{ox} &= \tilde{r}_{1,4}y_i + \tilde{r}_{2,4}y_j + \tilde{r}_{3,4}y_k = 0, \\ \sum M_{oy} &= 1 + \tilde{r}_{1,4}x_i + \tilde{r}_{2,4}x_j + \tilde{r}_{3,4}x_k = 0, \\ \sum Z &= \tilde{r}_{1,4} + \tilde{r}_{2,4} + \tilde{r}_{3,4} = 0.\end{aligned}\tag{2.49}$$

Решив эту систему уравнений, получаем:

$$\tilde{r}_{1,4} = \frac{D_1^{(4)}}{D}, \quad \tilde{r}_{2,4} = \frac{D_2^{(4)}}{D}, \quad \tilde{r}_{3,4} = \frac{D_3^{(4)}}{D}\tag{2.50}$$

Здесь:

$$D = \begin{vmatrix} y_i & y_j & y_k \\ x_i & x_j & x_k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_1^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & y_j & y_k \\ -1 & x_j & x_k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2^{(4)} = \begin{vmatrix} y_i & 0 & y_k \\ x_i & -1 & x_k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3^{(4)} = \begin{vmatrix} y_i & y_j & 0 \\ x_i & x_j & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрев единичные воздействия  $\tilde{q}_6 = 1$  и  $\tilde{q}_8 = 1$  получаем те же самые результаты, т. е.

$$\tilde{r}_{1,6} = \tilde{r}_{1,8} = \tilde{r}_{1,4}, \quad \tilde{r}_{2,6} = \tilde{r}_{2,8} = \tilde{r}_{2,4}, \quad \tilde{r}_{3,6} = \tilde{r}_{3,8} = \tilde{r}_{3,4}\tag{2.51}$$

Аналогично, рассмотрев единичные воздействия  $\tilde{q}_5 = 1$ ,  $\tilde{q}_7 = 1$ ,  $\tilde{q}_9 = 1$  и  $\tilde{q}_9 = 1$ , получаем:

$$\tilde{r}_{1,5} = \frac{D_1^{(5)}}{D}, \quad \tilde{r}_{2,5} = \frac{D_2^{(5)}}{D}, \quad \tilde{r}_{3,5} = \frac{D_3^{(5)}}{D}\tag{2.52}$$

Здесь:

$$D_1^{(5)} = \begin{vmatrix} -1 & y_j & y_k \\ 0 & x_j & x_k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2^{(5)} = \begin{vmatrix} y_i & -1 & y_k \\ x_i & 0 & x_k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3^{(5)} = \begin{vmatrix} y_i & y_j & -1 \\ x_i & x_j & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\tilde{r}_{1,7} = \tilde{r}_{1,9} = \tilde{r}_{1,5}, \quad \tilde{r}_{2,7} = \tilde{r}_{2,9} = \tilde{r}_{2,5}, \quad \tilde{r}_{3,7} = \tilde{r}_{3,9} = \tilde{r}_{3,5}\tag{2.53}$$

При использовании треугольного КЭ с 12 степенями свободы вводятся дополнительно три неизвестных:  $\tilde{q}_{10} = M_{xy}^{(i)}$ ,  $\tilde{q}_{11} = M_{xy}^{(j)}$ ,  $\tilde{q}_{12} = M_{xy}^{(k)}$ .

Для такого КЭ уравнения равновесия от загрузки единичными крутящими моментами (например, для  $\tilde{q}_{10} = 1$ ) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sum M_{ox} &= 1 + \tilde{r}_{1,10}y_i + \tilde{r}_{2,10}y_j + \tilde{r}_{3,10}y_k = 0, \\ \sum M_{oy} &= 1 + \tilde{r}_{1,10}x_i + \tilde{r}_{2,10}x_j + \tilde{r}_{3,10}x_k = 0, \\ \sum Z &= \tilde{r}_{1,10} + \tilde{r}_{2,10} + \tilde{r}_{3,10} = 0.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Решение этой системы уравнений даёт:

$$\tilde{r}_{1,10} = \tilde{r}_{1,11} = \tilde{r}_{1,12} = \frac{D_1^{(10)}}{D}, \quad \tilde{r}_{2,10} = \tilde{r}_{2,11} = \tilde{r}_{2,12} = \frac{D_2^{(10)}}{D}, \quad \tilde{r}_{3,10} = \tilde{r}_{3,11} = \tilde{r}_{3,12} = \frac{D_3^{(10)}}{D}\tag{2.55}$$

$$\text{Здесь } D_1^{(10)} = \begin{vmatrix} -1 & y_j & y_k \\ -1 & x_j & x_k \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_2^{(10)} = \begin{vmatrix} y_i & -1 & y_k \\ x_i & -1 & x_k \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3^{(10)} = \begin{vmatrix} y_i & y_j & -1 \\ x_i & x_j & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы блока  $[\delta]$  матрицы откликов КЭ определяются тем же выражением, что и для прямоугольного КЭ:

$$\delta_{s,t} = \int_{\Omega} \left[ M_x^{(t)}(x, y) \chi_x^{(s)}(x, y) + M_y^{(t)}(x, y) \chi_y^{(s)}(x, y) + 2M_{xy}^{(t)}(x, y) \chi_{xy}^{(s)}(x, y) \right] d\Omega \tag{2.56}$$

Здесь  $t = 4, 5, \dots, 12$ ,  $s = 4, \dots, 12$  - номера неизвестных.

### 2.3.4 Матрица откликов плосконапряженного треугольного конечного элемента

Основную систему МКЭ в форме классического смешанного метода, как было показано в нашей работе [79], получим из основной системы МКЭ в перемещениях путем удаления одной из двух линейных связей по направлениям глобальных осей координат в каждом из узлов сетки КЭ (рисунок 2.18) и заменим ее усилием.

При этом следует соблюдать выполнение условий кинематической неизменяемости каждого из КЭ в построенной основной системе, т.е., чтобы каждый из КЭ был закреплен тремя не пересекающимися в одной точке связями или не был закреплен тремя параллельными связями.

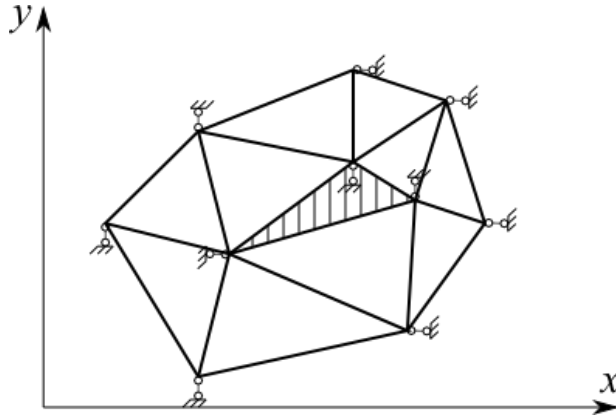


Рисунок 2.18 – Плосконапряженный конечный элемент

Рассмотрим изотропный треугольный конечный элемент, находящийся в плоском напряженном состоянии (рисунок 2.19).

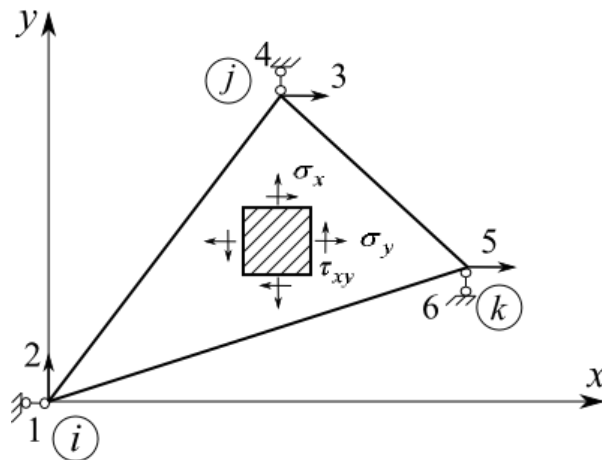


Рисунок 2.19 – Изотропный треугольный конечный элемент, находящийся в плосконапряженном состоянии

Для такого состояния аппроксимирующую функцию напряжений примем в виде

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 x^2 y + \alpha_4 x y^2 + \alpha_5 x^3 + \alpha_6 y^3, \quad (2.57)$$

удовлетворяющем условию совместности деформаций  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$ .

Функции аппроксимирующие перемещения любой точки КЭ примем в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= a_1x + a_2x^2 + a_3xy, \\ u_y(x, y) &= b_1y + b_2y^2 + b_3xy, \end{aligned} \quad (2.58)$$

Используя выражения (2.57), найдем величины напряжений и относительных деформаций КЭ.

Так как

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\tau_{xy}(1+\nu)}{E}, \end{aligned}$$

то после выполнения дифференцирования получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\alpha_2 + 2\alpha_4x + 6\alpha_6y, \\ \sigma_y &= 2\alpha_1 + 2\alpha_3y + 6\alpha_5x, \\ \tau_{xy} &= -(2\alpha_3x + 2\alpha_4y); \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{2}{E}[(\alpha_2 - \nu\alpha_1) + (\alpha_4 - 3\nu\alpha_5)x + (3\alpha_6 - \nu\alpha_3)y], \\ \varepsilon_y &= \frac{2}{E}[(\alpha_1 - \nu\alpha_2) + (3\alpha_5 - \nu\alpha_4)x + (\alpha_3 - 3\nu\alpha_6)y], \\ \gamma_{xy} &= -\frac{2}{G}[\alpha_3x + \alpha_4y] = -\frac{4(1+\nu)}{E}[\alpha_3x + \alpha_4y]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Точно так же, используя выражения (2.58) и зависимости

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \text{ находим} \\ \varepsilon_x &= a_1 + 2a_2x + a_3y, \\ \varepsilon_y &= b_1 + 2b_2y + b_3x, \\ \gamma_{xy} &= a_3x + b_3y. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Из сравнения выражений для относительных деформаций в (2.60) и (2.61) видно, что они имеют одинаковый вид линейных функций.

Выразим коэффициенты  $\alpha$  через напряжения в узловых точках, подставив в (2.59) координаты узлов:

$$\begin{aligned}\{\sigma_{x,t}\} &= [\Phi_1(x_t, y_t)]\{\alpha_{2n}\}, \\ \{\sigma_{y,t}\} &= [\Phi_2(x_t, y_t)]\{\alpha_{2n-1}\}, \quad (n=1,2,3; t=i,j,k).\end{aligned}\quad (2.62)$$

Здесь

$$\begin{aligned}[\Phi_1(x_t, y_t)] &= 2 \begin{bmatrix} 1 & x_i & 3y_i \\ 1 & x_j & 3y_j \\ 1 & x_k & 3y_k \end{bmatrix}, \quad [\Phi_2(x_t, y_t)] = 2 \begin{bmatrix} 1 & y_i & 3x_i \\ 1 & y_j & 3x_j \\ 1 & y_k & 3x_k \end{bmatrix}, \\ \{\alpha_{2n}\} &= [\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6]^T, \quad \{\alpha_{2n-1}\} = [\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5]^T.\end{aligned}$$

Из (2.62) следует:

$$\{\alpha_{2n}\} = [\Phi_1(x_t, y_t)]^{-1} \{\sigma_{x,t}\}, \quad \{\alpha_{2n-1}\} = [\Phi_2(x_t, y_t)]^{-1} \{\sigma_{y,t}\}, \quad (2.63)$$

Задаваясь последовательно в (2.63) единичными значениями основных неизвестных,  $\sigma_{y,i}$ ,  $\sigma_{x,j}$ ,  $\sigma_{x,k}$ , найдем соответствующие этим воздействиям значения коэффициентов  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}\{\alpha_{2n-1}^{(i)}\} &= [\Phi_2(x_t, y_t)]^{-1} [1, 0, 0]^T \text{ при } \sigma_{y,i} = 1, \\ \{\alpha_{2n}^{(j)}\} &= [\Phi_1(x_t, y_t)]^{-1} [0, 1, 0]^T \text{ при } \sigma_{x,j} = 1, \\ \{\alpha_{2n}^{(k)}\} &= [\Phi_1(x_t, y_t)]^{-1} [0, 0, 1]^T \text{ при } \sigma_{x,k} = 1.\end{aligned}\quad (2.64)$$

Подставив (2.64) в (2.59) и (2.60), находим соответствующие поля напряжений и относительных деформаций:

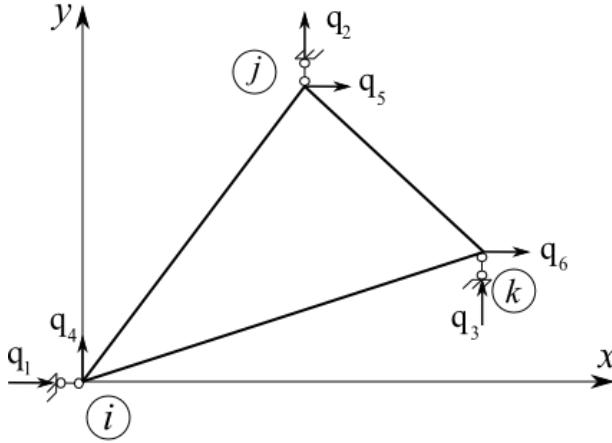
$$\begin{aligned}\tilde{q}_4 &= \tilde{\sigma}_{y,i} = 2[f_2(x, y)]\{\alpha_{2n-1}^{(i)}\}, \quad \tilde{\tau}_4 = \tilde{\tau}_{xy}^{(y,i)} = -2\alpha_3^{(i)}x, \\ \tilde{q}_5 &= \tilde{\sigma}_{x,j} = 2[f_1(x, y)]\{\alpha_{2n}^{(j)}\}, \quad \tilde{\tau}_5 = \tilde{\tau}_{xy}^{(x,j)} = -2\alpha_4^{(j)}y, \\ \tilde{q}_6 &= \tilde{\sigma}_{x,k} = 2[f_2(x, y)]\{\alpha_{2n}^{(k)}\}, \quad \tilde{\tau}_6 = \tilde{\tau}_{xy}^{(x,k)} = -2\alpha_4^{(k)}y.\end{aligned}\quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_4 &= \tilde{\varepsilon}_{y,i} = \frac{2}{E}[f_2(x, y)]\{\alpha_{2n-1}^{(i)}\}, \quad \tilde{\gamma}_4 = \gamma_{xy}^{(y,i)} = -\frac{4(1+\nu)}{E}\alpha_3^{(i)}x, \\ \tilde{\varepsilon}_5 &= \tilde{\varepsilon}_{x,j} = \frac{2}{E}2[f_1(x, y)]\{\alpha_{2n}^{(j)}\}, \quad \tilde{\gamma}_5 = \gamma_{xy}^{(x,j)} = -\frac{4(1+\nu)}{E}\alpha_4^{(j)}y, \\ \tilde{\varepsilon}_6 &= \tilde{\varepsilon}_{x,k} = \frac{2}{E}2[f_2(x, y)]\{\alpha_{2n}^{(k)}\}, \quad \tilde{\gamma}_6 = \gamma_{xy}^{(x,k)} = -\frac{4(1+\nu)}{E}\alpha_4^{(k)}y.\end{aligned}\quad (2.66)$$

Здесь  $[f_1(x, y)] = [1, x, 3y]$ ,  $[f_2(x, y)] = [1, y, 3x]$ .

С учетом переобозначений, показанных на рисунке 2.20 и в выражениях (2.65), элементы блока  $\delta$  матрицы откликов КЭ определяется на основании принципа возможных перемещений выражением

$$\delta_{s,t} = \int_{\Omega} (\tilde{q}_s \tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\tau}_s \tilde{\gamma}_t) d\Omega, \quad (s = 4, 5, 6; t = 4, 5, 6). \quad (2.67)$$



$$\begin{aligned} q_1 &= u_{x,i}, & q_4 &= \sigma_{y,i}, \\ q_2 &= u_{y,j}, & q_5 &= \sigma_{x,j}, \\ q_3 &= u_{x,k}, & q_6 &= \sigma_{y,k}. \end{aligned}$$

Рисунок 2.20 – Переобозначение неизвестных в изотропном треугольном конечном элементе, находящемся в плоском напряженном состоянии

При использовании второго варианта коэффициенты  $a$  и  $b$  в (2.58) выражаются через  $u_x$ ,  $u_y$  в узловых точках конечного элемента

$$\begin{aligned} \{u_{x,t}\} &= [\Phi_3(x_t, y_t)] \{a_n\}, \\ \{u_{y,t}\} &= [\Phi_4(x_t, y_t)] \{b_n\}, \quad (n = 1, 2, 3; t = i, j, k). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Здесь

$$\begin{aligned} [\Phi_3(x_t, y_t)] &= 2 \begin{bmatrix} x_i & x_i^2 & x_i y_i \\ x_j & x_j^2 & x_j y_j \\ x_k & x_k^2 & x_k y_k \end{bmatrix}, & [\Phi_4(x_t, y_t)] &= 2 \begin{bmatrix} y_i & y_i^2 & x_i y_i \\ y_j & y_j^2 & x_j y_j \\ y_k & y_k^2 & x_k y_k \end{bmatrix}, \\ \{a_n\} &= [a_1, a_2, a_3]^T, & \{b_n\} &= [b_1, b_2, b_3]^T. \end{aligned}$$

Из (2.68) следует

$$\{a_n\} = [\Phi_3(x_t, y_t)]^{-1} \{u_{x,t}\}, \quad \{b_n\} = [\Phi_4(x_t, y_t)]^{-1} \{u_{y,t}\}. \quad (2.69)$$

Задаваясь в (2.69) единичными значениями кинематических неизвестных ( $\tilde{u}_{x,i} = \tilde{q}_1 = 1, \tilde{u}_{y,j} = \tilde{q}_2 = 1, \tilde{u}_{y,k} = \tilde{q}_3 = 1$ ), найдем соответствующие этим единичным воздействиям векторы  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ :

$$\begin{aligned}\{\tilde{a}_{n,1}\} &= [\Phi_3(x_t, y_t)]^{-1} [1, 0, 0]^T, \\ \{\tilde{b}_{n,2}\} &= [\Phi_4(x_t, y_t)]^{-1} [0, 1, 0]^T, \\ \{\tilde{b}_{n,3}\} &= [\Phi_4(x_t, y_t)]^{-1} [0, 0, 1]^T.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Подставив эти результаты в (2.61), получим выражения для соответствующих деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_1 &= \tilde{\varepsilon}_{x,1} = [1, 2x, y] \{\tilde{a}_{n,1}\}, \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_{xy}^{(1)} = [0, 0, x] \{\tilde{a}_{n,1}\}, \\ \tilde{\varepsilon}_2 &= \tilde{\varepsilon}_{y,2} = [1, 2y, x] \{\tilde{b}_{n,2}\}, \quad \tilde{\gamma}_2 = \gamma_{xy}^{(2)} = [0, 0, y] \{\tilde{b}_{n,2}\}, \\ \tilde{\varepsilon}_3 &= \tilde{\varepsilon}_{y,3} = [1, 2y, x] \{\tilde{b}_{n,3}\}, \quad \tilde{\gamma}_3 = \gamma_{xy}^{(3)} = [0, 0, y] \{\tilde{b}_{n,3}\}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{x,1} &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \{\tilde{\varepsilon}_1\}, \quad \tilde{\tau}_1 = G\{\tilde{\gamma}_1\}, \\ \tilde{\sigma}_{y,2} &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \{\tilde{\varepsilon}_2\}, \quad \tilde{\tau}_2 = G\{\tilde{\gamma}_2\}, \\ \tilde{\sigma}_{y,3} &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \{\tilde{\varepsilon}_3\}, \quad \tilde{\tau}_3 = G\{\tilde{\gamma}_3\}.\end{aligned}\tag{2.72}$$

Используя выражения (2.65), (2.66) и (2.71), (2.72), находим:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{t,s} &= \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_s \tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\tau}_s \tilde{\gamma}_t) d\Omega, \\ \tilde{\delta}_{t,s} &= \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_t \tilde{\varepsilon}_s + \tilde{\tau}_t \tilde{\gamma}_s) d\Omega, \quad (s=1,2,3; t=4,5,6).\end{aligned}\tag{2.73}$$

Рассмотрим далее нахождение элементов вектора внешних нагрузок на конечный элемент. На рисунке 2.21 показана линейно распределенная по грани  $ij$  нагрузка

$$F_x = F_{x,i} \left(1 + k_1 \frac{y}{y_j}\right), \quad F_y = F_{y,i} \left(1 + k_2 \frac{x}{x_j}\right).\tag{2.74}$$

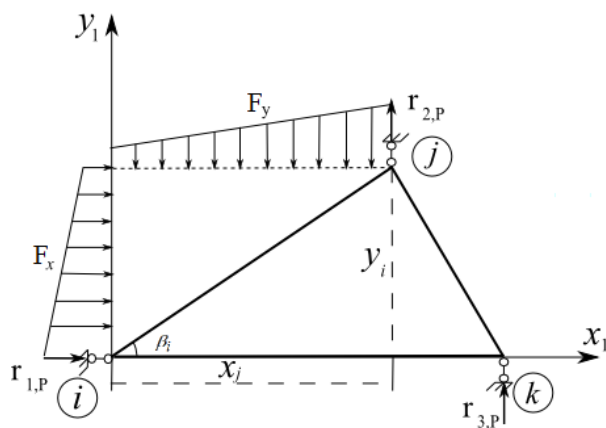


Рисунок 2.21 – Линейно нагрузка, распределенная по грани  $ij$  треугольного конечного элемента

Реакции в связях статически определимой основной системы от этой нагрузки находятся из условий равновесия конечного элемента:

$$\begin{aligned} r_{1,F} &= \frac{1}{2} F_{x,i} (2 + k_1) y_i, \\ r_{2,F} = -r_{3,F} &= \frac{1}{x_k - x_j} \left[ F_{x,i} y_j^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} k_1 \right) + F_{y,i} x_j^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} k_2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Из уравнений равновесия бесконечно малого элемента, прилегающего к наружной стороне  $ij$  контура КЭ (рисунок 2.22) следует:

$$F_x = -(\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{ctg} \beta_i), \quad F_y = -(\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \beta_i). \quad (2.76)$$

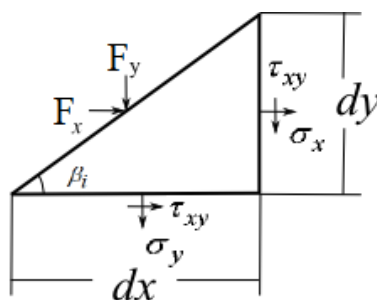


Рисунок 2.22 – Бесконечно малый элемент, прилегающий к наружной стороне  $ij$  контура КЭ

Подставив в эти выражения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  из (2.72), получаем:

$$\begin{aligned} F_x &= -[(2\alpha_2 + 2\alpha_4 x + 6\alpha_6 y) - (2\alpha_3 x + 2\alpha_4 y) \operatorname{ctg} \beta_i], \\ F_y &= -[(2\alpha_1 + 2\alpha_3 y + 6\alpha_5 x) - (2\alpha_3 x + 2\alpha_4 y) \operatorname{tg} \beta_i]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\text{где } \operatorname{ctg} \beta_i = \frac{x_j}{y_j}, \quad \operatorname{tg} \beta_i = \frac{y_j}{x_j}.$$

Значение коэффициентов  $\alpha_s$  в (2.77) найдем, используя граничные условия в узлах контура КЭ:

1. При  $x=0, y=0$ :  $F_x = F_{x,i}, F_y = F_{y,i}$ .
2. При  $x=j, y=j$ :  $F_x = F_{x,j} = F_{x,i}(1+k_1), F_y = F_{y,j} = F_{y,i}(1+k_2)$ .
3. При  $x=k, y=k$ :  $F_x = F_{x,k} = 0, F_y = F_{y,k} = 0$ .

Выражения (2.77) при выполнении этих условий приводят к системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} F_{x,i} &= -2\alpha_2, \\ F_{y,i} &= -2\alpha_1, \\ F_{x,j} &= F_{x,i}(1+k_1) F_x = -[(2\alpha_2 + 2\alpha_4 x_j + 6\alpha_6 y_j) - (2\alpha_3 x_j + 2\alpha_4 y_j) \frac{x_j}{y_j}], \\ F_{y,j} &= F_{y,i}(1+k_2) = -[(2\alpha_1 + 2\alpha_3 y_j + 6\alpha_5 x_j) - (2\alpha_3 x_j + 2\alpha_4 y_j) \frac{y_j}{x_j}], \\ F_{x,k} &= 0 = -[(2\alpha_2 + 2\alpha_4 x_k + 6\alpha_6 y_k) - (2\alpha_3 x_k + 2\alpha_4 y_k) \frac{x_j}{y_j}], \\ F_{y,k} &= 0 = -[(2\alpha_1 + 2\alpha_3 y_k + 6\alpha_5 x_k) - (2\alpha_3 x_k + 2\alpha_4 y_k) \frac{y_j}{x_j}]. \end{aligned} \right.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2} F_{y,i}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} F_{x,i}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2y_i(1+\frac{y_j^2}{x_j^2})} [F_{x,i}(1+k_1 \frac{y_j}{x_j x_k}) - F_{y,i}(1-\frac{x_j}{x_k})], \\ \alpha_4 &= \frac{F_{x,i}}{2x_k} + \alpha_3 \frac{x_j}{y_j}, \quad \alpha_5 = \frac{1}{3} (\frac{F_{y,i}}{2x_k} + \alpha_3 \frac{y_j}{x_j}), \quad \alpha_6 = -\frac{F_{x,i}}{6y_j} (k_1 + \frac{x_j}{x_k}) + \alpha_3 \frac{x_j^2}{3y_j}. \end{aligned}$$

По известным  $\alpha_s$  получаем выражения для полей напряжений и относительных деформаций  $\sigma_{x,F}, \sigma_{y,F}, \tau_{xy,F}, \varepsilon_{x,F}, \varepsilon_{y,F}, \gamma_{xy,F}$ .

$$\text{Тогда } \delta_{s,F} = \int_{\Omega} (\sigma_{x,F} \tilde{\varepsilon}_{x,s} + \sigma_{y,F} \tilde{\varepsilon}_{y,s} + \tau_{xy,F} \tilde{\gamma}_{xy,s}) d\Omega, (s = 4, 5, 6).$$

### 2.3.5 Объемный конечный элемент

Рассмотрим объемный конечный элемент в виде параллелепипеда (прямоугольного гексаэдра). Нумерация угловых точек, размеры КЭ и локальная система координат показаны на рисунке 2.23.

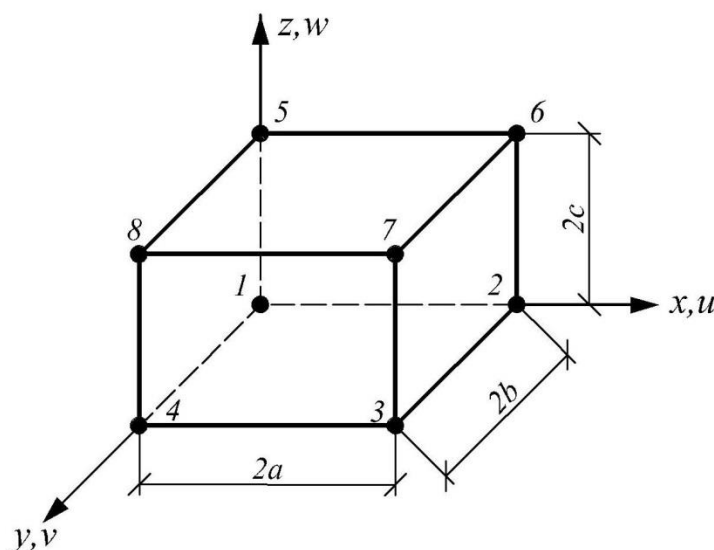


Рисунок 2.23 – Основная система объемного конечного элемента в виде параллелепипеда

Исходя из линейного закона распределения усилий (напряжений) и перемещений (деформаций) в области конечного элемента, примем функцию, аппроксимирующую распределение напряжений (усилий), в виде трилинейного полинома

$$\Phi_{\sigma}(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz + \alpha_7 yz + \alpha_8 xyz. \quad (2.78)$$

В матричной форме

$$\Phi_{\sigma}(x, y, z) = [\Phi] \{\alpha\}. \quad (2.78, a)$$

Коэффициенты этого полинома, как и в двумерном КЭ, выражаются через величины усилий (напряженной) в восьми угловых точках по направлениям координатных осей, т.е. через  $\Phi_{\sigma}(x_i, y_i, z_i)$ :

$$\{\alpha_i^{(t)}\} = [V_{\sigma}]^{-1} \{q_i^{(t)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.79)$$

Здесь индекс  $(t)$  обозначает ось, по которой направлено напряжение (усилие), т.е.  $x, y, z$ ,

$$[V_{\sigma}] = \begin{bmatrix} [\Phi_1] \\ [\Phi_2] \\ \cdot \\ \cdot \\ [\Phi_8] \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица координат угловых точек } i,$$

$\{\alpha_i^{(t)}\} = [\alpha_1^{(t)}, \alpha_2^{(t)}, \dots, \alpha_8^{(t)}]^T$  - вектор коэффициентов аппроксимирующей функции напряжений по направлению оси  $t$ ,

$\{q_i^{(t)}\} = [q_1^{(t)}, q_2^{(t)}, \dots, q_8^{(t)}]^T$  - вектор усилий (напряжений) в угловых точках КЭ по направлению  $t$ , т.е.  $\{q_i^{(t)}\} = [q_i^{(x)}, q_i^{(y)}, q_i^{(z)}]^T = [\sigma_{x,i}, \sigma_{y,i}, \sigma_{z,i}]^T$ .

Подставив выражение (2.79) в (2.78, a), получим выражение для поля напряжений (усилий) рассматриваемого КЭ:

$$\Phi_{\sigma}(x, y, z) = [\Phi] [V_{\sigma}]^{-1} [\tilde{q}_i^{(t)}], \quad (2.80)$$

$$\text{где } \begin{bmatrix} \tilde{q}_i^{(t)} \end{bmatrix}_{(i=1, 2, \dots, 8)} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1^{(x)} & \tilde{q}_1^{(y)} & \tilde{q}_1^{(z)} \\ \tilde{q}_2^{(x)} & \tilde{q}_2^{(y)} & \tilde{q}_2^{(z)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{q}_8^{(x)} & \tilde{q}_8^{(y)} & \tilde{q}_8^{(z)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{q}_i^{(x)} = \sigma_i^{(x)}, \quad \tilde{q}_i^{(y)} = \sigma_i^{(y)}, \quad \tilde{q}_i^{(z)} = \sigma_i^{(z)}. \quad (2.81)$$

По тому же алгоритму получается выражение для поля перемещений (деформаций) КЭ.

В этом случае вместо выражения (2.78, а) принимаем

$$\Phi_\varepsilon(x, y, z) = [\Phi] \{\beta\}. \quad (2.82)$$

Здесь  $\{\beta_j^{(t)}\} = [V_\varepsilon]^{-1} \{q_j^{(t)}\}$ . Индексы  $j$  относятся к узлам основной системы, в которых за основные неизвестные примем деформации (перемещения) в узлах на серединах рёбер и напряжения (усилия) по направлениям координатных осей. Эти узлы, расположенные на серединах всех горизонтальных ребер КЭ, показаны на рисунке 2.24:  $j = 9, 10, \dots, 20$ .

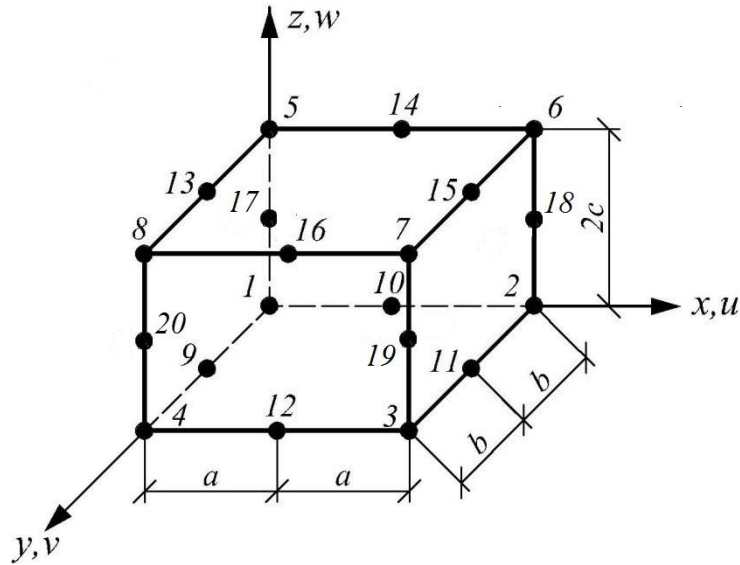


Рисунок 2.24 – Основная система объемного конечного элемента в виде параллелепипеда с дополнительными узлами

Установим далее аналитическую взаимосвязь между полями перемещений-деформаций и усилий-напряжений для рассматриваемого КЭ.

Выражение для поля перемещений (деформаций) имеет следующий вид:

$$\Phi_\varepsilon(x, y, z) = [\Phi] [V_\varepsilon]^{-1} [q_j^{(t)}], \quad (2.83)$$

где:

$$\begin{bmatrix} q_j^{(t)} \end{bmatrix}_{(j=9, 10, \dots, 20)} = \begin{bmatrix} q_9^{(x)} & q_9^{(y)} & q_9^{(z)} \\ q_{10}^{(x)} & q_{10}^{(y)} & q_{10}^{(z)} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{20}^{(x)} & q_{20}^{(y)} & q_{20}^{(z)} \end{bmatrix}, \quad q_j^{(x)} = u_j^{(x)}, \quad q_j^{(y)} = v_j^{(y)}, \quad q_j^{(z)} = w_j^{(z)} \quad (2.84)$$

Поля напряжений и деформаций связаны между собой прямыми и обратными соотношениями закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right], \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right], \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda\theta, \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda\theta, \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda\theta, \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

$$\lambda = \frac{2\mu G}{(1-2\mu)}, \theta = \left( \frac{1-2\mu}{E} \right) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Выражения (2.85) и (2.86) имеют следующий вид в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \quad (2.87)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.88)$$

$$\text{где } [C] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{array} \right], \quad D = C^{-1}.$$

Связь деформаций с перемещениями некоторой точки М в области КЭ определяется формулами Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.89}$$

В матричной форме эта связь имеет следующий вид:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{W\},\tag{2.90}$$

где

$\{\varepsilon\} = \left[ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx} \right]^T$  - вектор деформаций,

$\{W\} = \left[ u, v, w \right]^T$  - вектор, элементы которого являются компонентами перемещений по направлениям координатных осей,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ - матрица-оператор дифференцирования.}$$

Для того, чтобы получить поля напряжений (усилий) и деформаций (перемещений) от единичных воздействий  $\tilde{q}_i^{(t)} = 1$  или  $q_j^{(t)} = 1$ , необходимо в матрицах  $\left[ \tilde{q}_i^{(t)} \right]$  и  $\left[ q_j^{(t)} \right]$ , входящих в выражения (2.80) или (2.83) для полей

напряжений и перемещений, подставить значение соответствующего воздействия  $\tilde{q}_i^{(t)} = 1$  или  $q_j^{(t)} = 1$ , обнулив все остальные элементы матриц (2.81) или (2.84).

Получающийся в результате выражения для полей напряжения и деформаций представим в следующем виде:

- от нагружения в узлах  $j$  основной системы (рисунок 2.25) единичными перемещениями  $q_{x,j} = \varepsilon_{x,j} = 1$ ,  $q_{y,j} = \varepsilon_{y,j} = 1$ ,  $q_{z,j} = \varepsilon_{z,j} = 1$ , ( $j=9, \dots, 20$ ) получаем поля деформаций по всему объёму конечного элемента  $\bar{\phi}_{\varepsilon,j}(x, y, z)$  и поля напряжений

$$\bar{\phi}_{\sigma(\varepsilon,j)}(x, y, z) = [D][\phi_{\varepsilon,j}(x, y, z)]; \quad (2.91)$$

От нагружений в узлах  $i$  основной системы единичными усилиями  $\tilde{q}_{x,i} = \sigma_{x,i} = 1$ ,  $\tilde{q}_{y,i} = \sigma_{y,i} = 1$ ,  $\tilde{q}_{z,i} = \sigma_{z,i} = 1$  получаем поле усилий по всему объёму КЭ  $\bar{\phi}_{\sigma,i}(x, y, z)$  и поля деформаций

$$\bar{\phi}_{\varepsilon(\sigma,i)} = [C][\phi_{\sigma,i}(x, y, z)], \quad (i=1, 2, \dots, 8). \quad (2.92)$$

Коэффициенты матрицы откликов конечного элемента с учетом выражений (2.91) и (2.92) могут быть записаны в компактной форме:

$$\begin{aligned} r_{j,j'} &= \int_V [D][\bar{\phi}_{\varepsilon,j}(x, y, z)][\phi_{\varepsilon,j'}(x, y, z)] dV, \\ \tilde{r}_{j,i} &= \int_V [D][\bar{\phi}_{\varepsilon,j}(x, y, z)][C][\phi_{\sigma,i}(x, y, z)] dV, \\ (j=9, 10, \dots, 20), (j'=9, 10, \dots, 20), (i=1, 2, \dots, 8). \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{j,j} &= \int_V [\bar{\phi}_{\sigma,i}(x, y, z)][\phi_{\varepsilon,j}(x, y, z)] dV, \\ \delta_{i,i'} &= \int_V [\phi_{\sigma,i}(x, y, z)][C][\phi_{\sigma,i'}(x, y, z)] dV, \\ (j=9, 10, \dots, 20), (i=1, 2, \dots, 8), (i'=1, 2, \dots, 8). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Формирование матрицы откликов для конструкции, представленной ансамблем объемных конечных элементов, выполняется по тому же алгоритму, что и в двумерном случае, т.е. суммированием компонентов матриц откликов

конечных элементов в узлах пространственной конечно-элементной сетки (рисунок 2.25), т.е. являющихся общими для них.

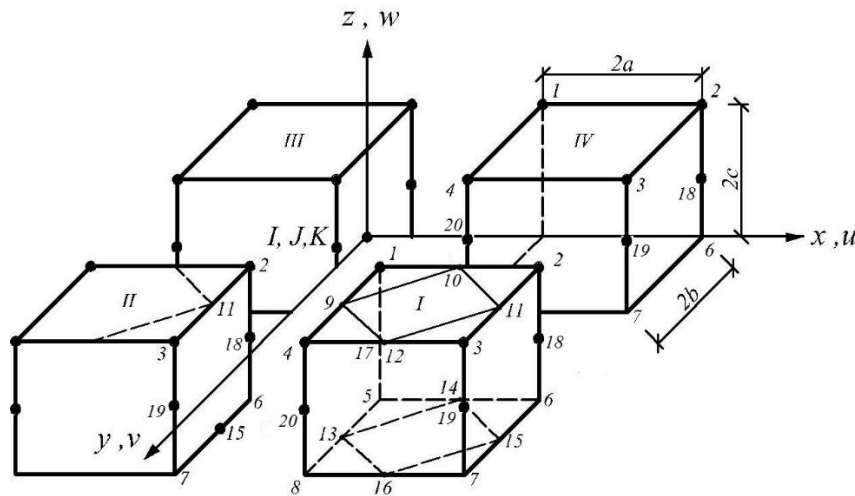


Рисунок 2.25 – Формирование матрицы откликов для конструкции, представленной ансамблем объемных конечных элементов

## 2.4 Формирование глобальной матрицы откликов и разрешающей системы уравнений

Формирование системы разрешающих уравнений по МКЭ в форме классического смешанного метода выполняется по тому же алгоритму, что и в методе конечных элементов в перемещениях. Однако эти уравнения имеют разный физический смысл.

Для иллюстрации на рисунках 2.16 и 2.26 показаны два типа конечно-элементной сетки и конечные элементы, сходящиеся в общем для них узле  $ij$ .

Для изгибаемой пластинки, представленной этими двумя вариантами ансамбля конечных элементов, разрешающие уравнения метода перемещений имеют смысл равенства нулю реакций во введенных в основную систему связей, т.е. уравнений равновесия.

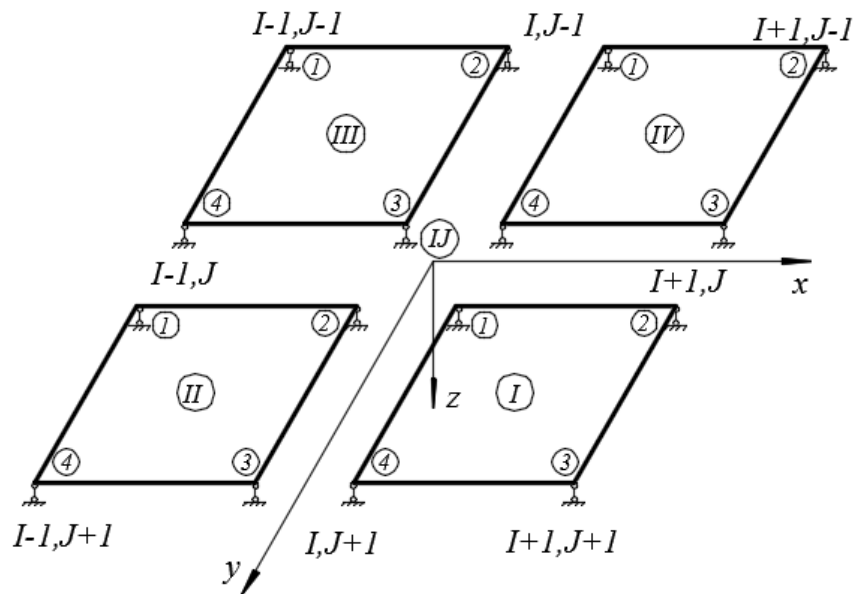


Рисунок 2.26 – Прямоугольные конечные элементы, сходящиеся в узле  $ij$  конечно-элементной сетки

В смешанном методе разрешающие уравнения состоят из двух групп:

- уравнения равновесия, имеющие физический смысл равенства нулю реакций во введенных в основную систему связей;
- уравнения совместности перемещений (деформаций) конечных элементов, сходящихся в общем для них узле  $ij$ , т.е. равенство нулю разрыва углов поворота в узле  $ij$  нормалей к плоскости пластинки смежных конечных элементов.

При одинаковом числе неизвестных в узле  $ij$  в основной системе двух форм МКЭ результатом расчета по МКЭ в форме метода перемещений будут только линейные и угловые перемещения узлов, а при расчете по МКЭ в форме классического смешанного метода – линейные перемещения и усилия в узлах.

Проблема эффективного формирования разрешающей системы алгебраических уравнений для всей конструкции является важной при конечно-элементном расчете.

Наиболее эффективным, как отмечалось нами в работе [83] является подход, который заключается в поблочном формировании глобальной матрицы откликов и вектора воздействий путем их прямого построения с использованием индексных матриц, аналогичных индексной матрице, в алгоритме формирования матрицы жесткости в методе конечных элементов в перемещениях [145, 146].

Однако в отличие от этого алгоритма, для формирования глобальной матрицы откликов и вектора воздействий, используется две индексных матрицы: матрица соответствия неизвестных локальных перемещений глобальным, и матрица соответствия неизвестных локальных усилий глобальным.

Подробное описание процедуры использования индексных матриц приведено в нашей работе [83].

Следует отметить, что нумерация узлов системы выполняется таким образом, чтобы достичь минимальной ширины ленты коэффициентов в блоках матрицы откликов.

Для регулярных стержневых систем разрешающая система уравнений получается значительно проще из рассмотрения условий равновесия одного типового узла и условий совместности деформаций в разрезах стержней соединяющих типовой узел с соседними узлами [41].

Полученную глобальную систему разрешающих уравнений можно преобразовать к виду:

$$\left[ \begin{array}{c|c} r & \tilde{r} \\ \hline \tilde{\delta} & \delta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} q \\ \tilde{q} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} R_F \\ \Delta_F \end{array} \right\} = \{0\}, \quad (2.95)$$

где  $q$  - кинематические неизвестные,  $\tilde{q}$  - силовые неизвестные.

Необходимо при этом отметить следующее обстоятельство. Исходная система (2.95) имеет матрицу окликов, не имеющую положительной определенности, с кососимметричными блоками ( $\tilde{\delta} = -\tilde{r}^T$ ). Это приводит в некоторых случаях к затруднениям при решении систем линейных алгебраических систем уравнений (СЛАУ) больших порядков, так как имеющиеся программные комплексы ориентированы на решение СЛАУ с симметричной положительно определенной матрицей при неизвестных.

В развернутом виде система уравнений (2.95) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} 1) & \quad r q + \tilde{r} \tilde{q} + R_F = 0, \\ 2) & \quad \tilde{\delta} q + \delta \tilde{q} + \Delta_F = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Преобразуем систему уравнений (2.96) к системе уравнений метода перемещений, используя процедуру блочного исключения неизвестных по Гауссу.

Из уравнения 2 в (2.96) следует

$$\tilde{q} = -\delta^{-1}(\tilde{\delta}q + \Delta_F).$$

Подставив это выражение для  $\tilde{q}$  в уравнение 1 из (2.96) получаем:

$$(r - \tilde{r}\delta^{-1}\tilde{\delta})q - (\tilde{r}\delta^{-1}\Delta_F - R_F) = 0. \quad (2.97)$$

Эта система уравнений содержит только кинематические неизвестные, т.е. является системой уравнений метода перемещений.

В краткой форме система уравнений (2.97) может быть записана в виде:

$$[K]\{q\} + \{\tilde{R}_F\} = 0, \quad (2.98)$$

где  $[K]$  - глобальная матрица жесткости, полученная для основной системы метода перемещений, имеющей в качестве неизвестных только линейные перемещения  $q$ .

При рассмотренном выше переходе к разрешающим уравнениям метода перемещений (2.98) глобальная матрица жесткости  $[K]$  является симметричной и положительно определенной и поэтому при решении этой системы уравнений затруднений не возникает.

## 2.5 Проблема сгущения сетки для повышения точности решения

Так как эта проблема до сих пор не получила удовлетворительного решения, рассмотрим ее более подробно.

При сгущении сетки конечных элементов возникает вопрос: “Насколько малым может быть конечный элемент?”

При предельном переходе система разрешающих конечно-элементных уравнений преобразуется к системе дифференциальных уравнений.

На примере стержня можно видеть, что достаточно мелкое его членение на участки никак не сказывается на виде разрешающих уравнений.

Однако, хотя вид разрешающей системы алгебраических уравнений не меняется в зависимости от густоты сетки, качество системы меняется.

Для сравнения приведём эти уравнения для  $i$ -го узла регулярной конечно-элементной сетки многопролётной балки (рисунок 2.27, а), в которой за конечный элемент принят пролёт балки между узлами  $i-1$  и  $i$ .

Основные системы метода перемещений и смешанного метода изображены на рисунках 2.27, б и 2.27, в, соответственно.

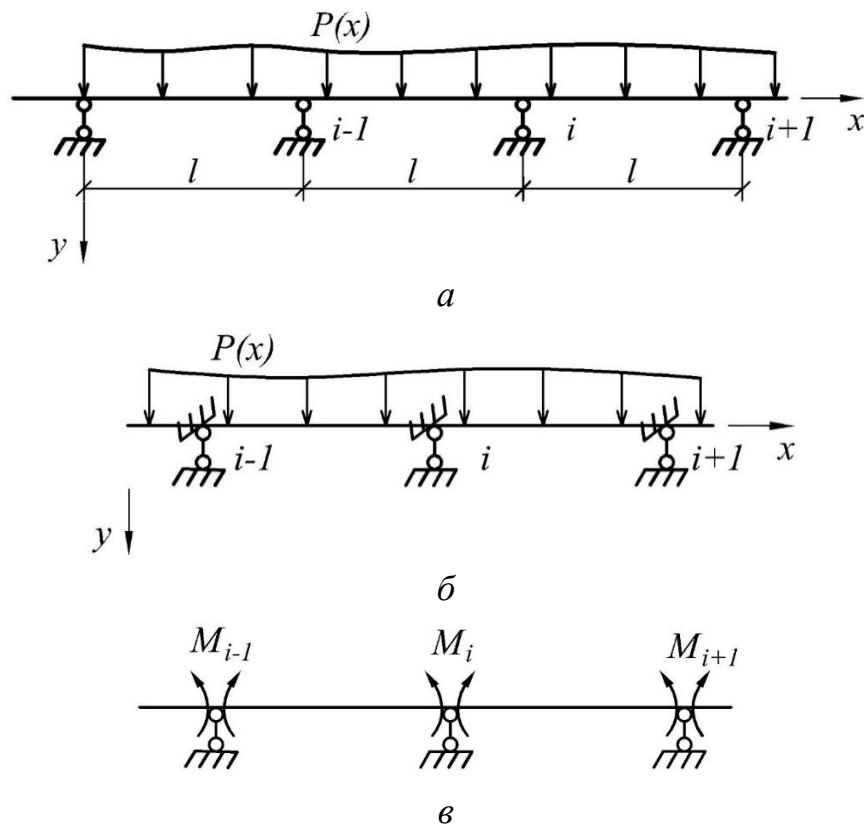


Рисунок 2.27 – Фрагмент многопролётной балки

Обозначения кинематических неизвестных  $q_i$  и силовых  $\tilde{q}_i$  заменим на обычные обозначения основных неизвестных в расчетах стержневых систем:

$y_i$ ,  $\varphi_i$  - кинематические неизвестные в основной системе метода перемещений,

$y_i$ ,  $M_i$  - в основной системе смешанного метода.

Для случая  $P(x) = \text{const} = p$  система разрешающих уравнений метода перемещений представляет собой по физическому смыслу условия равновесия узла  $i$ :

$$\begin{aligned} R_{i,y} &= \frac{12EI}{l^3}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{6EI}{l^2}(\varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) + pl = 0, \\ R_{i,\varphi} &= \frac{6EI}{l^2}(y_{i-1} - y_{i+1}) + \frac{2EI}{l}(\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}) = 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

В пределе (при  $l \rightarrow dx$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow dx} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{2l^2} &= y_i'', \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2l} = \varphi_i', \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{pl^2}{12EI} = 0, \\ \lim_{l \rightarrow dx} \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2l} &= y_i', \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}}{6} = \varphi_i. \end{aligned} \quad (2.100)$$

система разрешающих уравнений (2.99) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_i'' &= \varphi_i', \\ y_i' &= \varphi_i. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Оба этих уравнения тождественны, так как одно вытекает из другого. Вырождение системы алгебраических уравнений (2.99) при предельном переходе в одно дифференциальное уравнение приводит к неустойчивости счета и к ухудшению сходимости численного решения к точному решению при сгущении сетки конечных элементов, что впервые было замечено В.С. Чувиловским [190].

Вполне очевидно, что подобный эффект будет и в двумерных системах.

Разрешающие уравнения смешанного метода имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + \frac{1}{6EI}(M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}) &= 0, \\ \frac{1}{l^2}(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) - p &= 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

При предельном переходе  $l \rightarrow dx$  получим следующие выражения:

$$\lim_{l \rightarrow dx} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{l^2} = y_i'', \lim_{l \rightarrow dx} \frac{M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}}{6} = M_i, \lim_{l \rightarrow dx} \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{l^2} = M_i'',$$

и система уравнений (2.102) преобразуется к системе дифференциальных уравнений, которая будет разрешима:

$$\begin{aligned} M + Ely'' &= 0, \\ M'' + p &= 0. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Следовательно, что при предельном переходе система алгебраических уравнений (2.102) не вырождается и при сгущении сетки конечных элементов счет будет устойчивым, обеспечивая сходимость к точному решению.

Вполне очевидно, что те же свойства будут проявляться и в двумерных системах.

Из структуры разрешающих уравнений (2.102) смешанного метода видно, разрешимы и при наличии в них бесконечно жестких конечных элементов или бесконечно жестких участков в поле КЭ. В то же время система уравнений метода перемещений становится неразрешимой при такой же жесткости КЭ.

На примере расчёта консольной балки (рисунок 2.28) рассмотрим случай, когда при реализации алгоритма расчета по МКЭ в перемещениях, возникает ситуация, связанная с неустойчивостью счета.

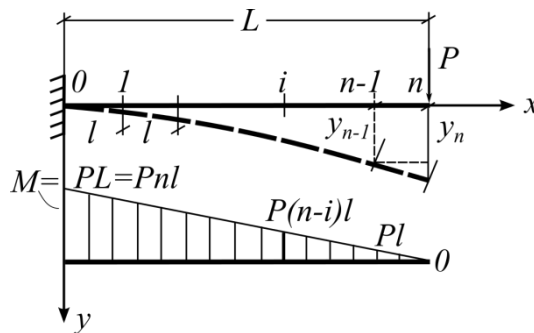


Рисунок 2.28 – Консольная балка, представленная  $n$  конечными элементами

Для того, чтобы получить при использовании стандартной матрицы жесткости конечного элемента его смещения как жесткого целого, необходимо просуммировать эффекты от смещений его концевых сечений.

На рисунке 2.29 показан для наглядности последний  $n$ -ый конечный элемент и его смещения.

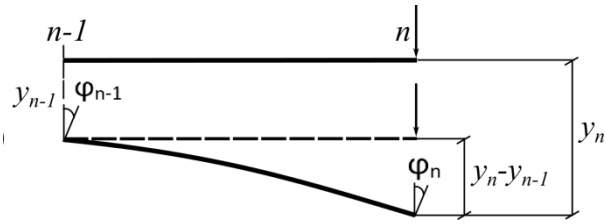


Рисунок 2.29 – Смещения конечных сечений  $n$ -го конечного элемента

Из этого рисунка видно, что напряженно-деформированное состояние  $n$ -го конечного элемента зависит только от разности линейных смещений его концов, т.е.  $(y_n - y_{n-1})$  и разности углов поворота его конечных сечений, т.е.  $(\varphi_n - \varphi_{n-1})$ . Величины  $y_{n-1}$  и  $\varphi_{n-1}$  являются параметрами, определяющими смещение КЭ как жесткого целого без деформаций. Однако в разрешающие уравнения классического МКЭ в перемещениях они входят вместе с  $y_n$  и  $\varphi_n$ . Чем меньше будет конечный элемент, тем меньше будут соотношения:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{y_n} \rightarrow 0, \quad \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\varphi_n} \rightarrow 0.$$

Это означает, что при сгущении сетки конечных элементов исключить перемещения КЭ как жесткого целого невозможно и погрешность результатов расчета будет только возрастать.

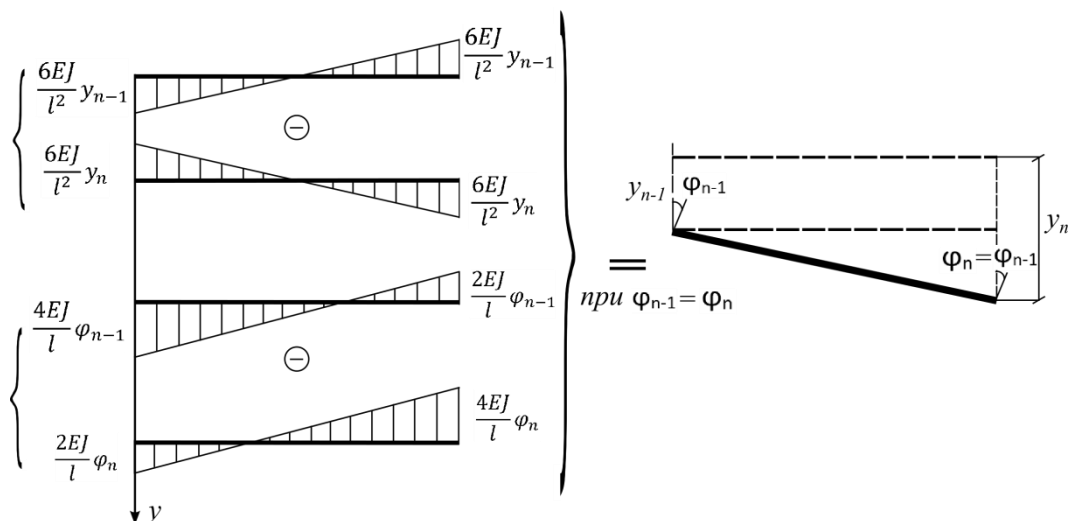


Рисунок 2.30 – Значение изгибающего момента  $M_n$  при найденных в расчете величинах  $y_n$  и  $\varphi_n$

Как видно из рисунка 2.30, значение изгибающего момента  $M_n$  определяется при найденных в расчете величинах  $y_n$  и  $\varphi_n$  выражением

$$M_n = -\frac{6EI}{l^2} y_{n-1} + \frac{6EI}{l^2} y_n + \frac{2EI}{l} \varphi_{n-1} - \frac{4EI}{l} \varphi_n = \frac{6EI}{l^2} (y_n - y_{n-1}) - \frac{2EI}{l} \varphi_n - \frac{2EI}{l} (\varphi_n - \varphi_{n-1}).$$

При сгущении сетки  $(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \rightarrow 0$ , а  $(y_n - y_{n-1}) \rightarrow 0$ , получается как разность больших и близких чисел, поэтому  $M_n \approx -\frac{2EI}{l} \varphi_n$ , т.е. вместо  $M_n = 0$  будем иметь погрешность, доходящую до  $\frac{2EI}{l} \varphi_n$ .

В МКЭ в форме классического смешанного метода проблема вырождения системы разрешающих уравнений при сгущении сетки отсутствует, как это показано выше.

Проблема удовлетворения одновременно условий равновесия и условий неразрывности деформаций решается в классическом МКЭ и в других его известных вариантах: в интегральной (осредненной форме) с использованием дополнительных специальных приемов (множителей Лагранжа, независимых полей аппроксимации и т.д.).

В МКЭ в форме классического смешанного метода эта проблема отсутствует, так как разрешающая система уравнений содержит как условия равновесия, так и условия неразрывности деформаций и перемещений.

Решение этой проблемы обеспечения совместности деформаций, перемещений и усилий на границах смежных конечных элементов в МКЭ в форме классического смешанного метода заложено, как отмечено выше, в самой системе разрешающих уравнений.

Все отмеченные выше особенности расчета по МКЭ в форме КСМ имеют место и для треугольных КЭ, для которых основная система также статически определима. Пример такой основной системы для изгибаемого треугольного КЭ-пластинки был приведен выше (рисунок 2.17).

Эта особенность МКЭ в форме классического смешанного метода относится к его преимуществам по отношению к МКЭ в перемещениях.

## 2.6 Выводы по главе 2

1. Принципиальное отличие методов линейной строительной механики от методов механики упругой среды состоит в том, что первые изначально ориентированы на дискретные расчетные схемы различных конструктивных элементов или конструкций, имеющих определенную геометрию и форму, а вторые рассматривают обладающий определенными физико-механическими характеристиками континуум, из которого выделяется соответствующий определенному конструктивному элементу объем и наделяется геометрией и граничными условиями.

2. В механике упругой среды на основе различных вариационных принципов составляют соответствующие энергетические функционалы, которые затем дискретизируются в области выделенного конструктивного конечного элемента или всего объема конструкции. Из условий экстремума этого функционала в задаваемой сетке расчетных точек находят коэффициенты при неизвестных и свободные члены в разрешающих уравнениях, имеющих форму различных методов строительной механики.

Для нахождения коэффициентов канонических уравнений в строительной механике более простым и эффективным является использование принципа возможных изменений состояний системы, исходя из физического смысла метода:

- неразрывность деформаций в расчетных точках (метод сил);
- равновесие сил в расчетных узлах (точках) (метод перемещений);
- одновременное выполнение этих двух условий в расчетных точках (смешанный метод).

3. Введение нового термина-понятия «матрица откликов» позволяет с единой позиции рассматривать все три метода строительной механики:

- смешанный (обобщающий) метод;
- метод сил и метод перемещений как частные случаи.

4. Последовательность операций в алгоритме построения систем разрешающих уравнений в МКЭ в форме классического смешанного метода полностью совпадает с последовательностью операций в МКЭ в перемещениях. Это позволяет разрабатывать программное обеспечение МКЭ в форме КСМ по аналогии с программным обеспечением, реализующим МКЭ в перемещениях.

5. Система разрешающих уравнений МКЭ в форме КСМ легко преобразуется к системе уравнений метода перемещений. В этом случае матрица коэффициентов при неизвестных в разрешающих уравнениях является положительно определенной и хорошо обусловленной.

6. При одинаковом количестве неизвестных в разрешающих уравнениях МКЭ в перемещениях и МКЭ в форме КСМ, последний имеет преимущество, так как результатом решения является одновременное получение как перемещений, так и усилий в узлах конечно-элементной сетки.

7. Так как система разрешающих уравнений МКЭ в форме КСМ состоит из двух групп – уравнений равновесия узлов и неразрывности деформаций в узлах конечно-элементной сетки, то получаемые решения не требуют дополнительной проверки на выполнение условий равновесия или неразрывности деформаций.

### Глава 3

## Исследование эффективности метода конечных элементов в форме классического смешанного метода в задачах статики

Для иллюстрации практических возможностей и особенностей применения развиваемой формы метода конечных элементов рассмотрим примеры статических расчетов некоторых видов конструкций.

Основные результаты, изложенные в данной главе, ранее опубликованы в наших работах [56- 58, 61, 63-65, 70, 71, 78, 81, 82].

### 3.1 Расчет плоских стержневых конструкций

При использовании МКЭ в форме КСФ, как и использовании МКЭ в перемещениях, при формировании системы разрешающих линейных алгебраических уравнений возникают проблемы минимизации ширины ленты матрицы коэффициентов при неизвестных, связанные со стыковкой конечных элементов и нумерацией элементов и стыковочных узлов.

Все эти проблемы решены в программных комплексах, реализующих метод конечных элементов в перемещениях. Эти решения полностью соответствуют проблемам реализации метода конечных элементов в форме классического смешанного метода и были учтены при разработке программ расчета плоских стержневых систем по этой форме МКЭ [165, 168, 169].

На примере этой простейшей конструкции (рисунок 3.1, *а*) можно наглядно показать возможности и преимущества МКЭ в форме смешанного классического метода при решении задач, связанных с проблемой исключения из расчета смещений конечного элемента как жесткого целого.

Схема нумерации узлов и элементов приведена на рисунке 3.1, *б*.

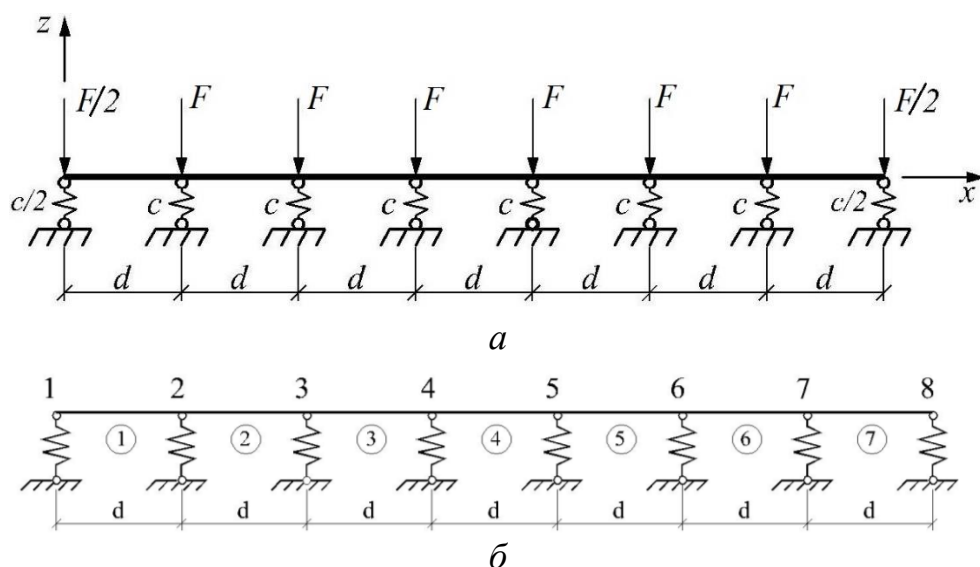


Рисунок 3.1 – Балка на эквидистантно расположенных упруго-податливых опорах

Следует обратить внимание на тот факт, что в данном случае (при  $F_i = F = const$ ,  $c_0 = c_n = \frac{c}{2}$ ) вся конструкция смещается как жесткое целое.

Необходимо отметить, что при использовании метода конечных элементов в перемещениях перемещение по отдельности любой связи вызывает внутренние усилия в конечном элементе. При подсчете этих усилий выполняется ряд операций, которые могут привести к накоплению погрешности машинного счета или к неустойчивости решения при измельчении сетки конечных элементов. В конечном итоге для данной задачи достигаем при измельчении сетки тех же нулевых значений углов поворота и одинаковых смещений упругих опор, но в пределах точности машинного счета.

Тест-расчёты многопролетной балки с регулярно расположенными упругоподатливыми опорными связями и различными вариантами нагрузок в пролетах на линейные и угловые смещения рассмотрены в, выполненной под нашим руководством, диссертации В.В. Габовой [19], показали, что при расчете по МКЭ в форме КСМ, точное решение как по усилиям, так и по перемещениям, может быть получено, даже если за конечный элемент принять пролет между опорами.

В работе [19] также выполнены расчеты плоских стержневых систем, как с шарнирным, так и с жестким соединением стержней, с использованием разработанных нами алгоритмов и программ.

Расчет плоской стержневой системы-рамы (рисунок 3.2, а) ( $F_1 = 20m$ ,  $F_2 = 15m$ ,  $F_3 = 10m$ ,  $EI = const$ ,  $E = 3 \cdot 10^6 m / m^2$ , размеры прямоугольного сечения  $b = 0.15m$ ,  $h = 0.15m$ ), когда за конечный элемент принят стержень между двумя узлами системы, выполнен как для случая с жестким, так и с шарнирным соединением стержней.

Схема нумерации узлов и элементов приведена на рисунке 3.2, б.

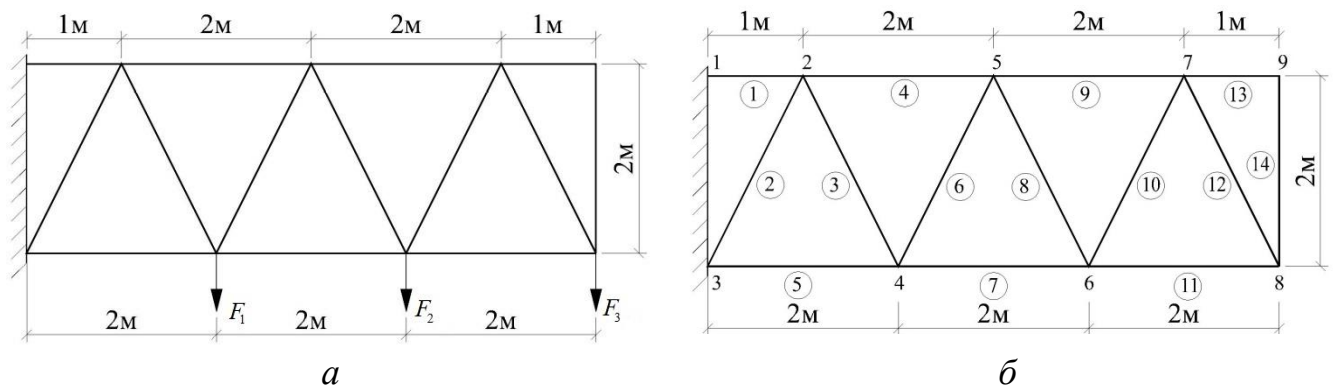


Рисунок 3.2 – Плоская стержневая система - ферма

Результаты расчета этой конструкции (продольные усилия в стержнях) как рамы и как шарнирно-стержневой системы, представленные таблице 3.1, совпадают с расчетами, выполненными по ПК ЛИРА.

Таблица 3.1

№ стержня	Продольное усилие (т) (жесткие узлы)	Продольное усилие (т) (шарнирно-стержневая система)	№ стержня	Продольное усилие (т) (жесткие узлы)	Продольное усилие (т) (шарнирно-стержневая система)
1	79,074	80	8	27,709	27,7508
2	-48,029	-50,3115	9	10,017	10
3	49,659	50,3115	10	-11,023	-11,1803
4	35,027	35	11	-5,005	-5
5	-57,485	-57,5	12	10,962	11,1803
6	-27,702	-27,951	13	0,067	0
7	-22,481	-22,5	14	0,142	0

Сопоставление двух вариантов расчетных схем показывает, что изгибающие моменты малы по сравнению с продольными усилиями, т.е. конструкция работает как шарнирно-стержневая ферма, и при расчете удобнее использовать второй вариант основной системы.

Рассмотрим, выполненный нами в работах [63, 65], расчет регулярных плоских ферм с решетками разной сложности, алгоритм получения аналитического решения для которых предложен в работах М.Н. Кирсанова [97-103].

Ферма с самым простым типом решетки изображена на рисунке 3.3.

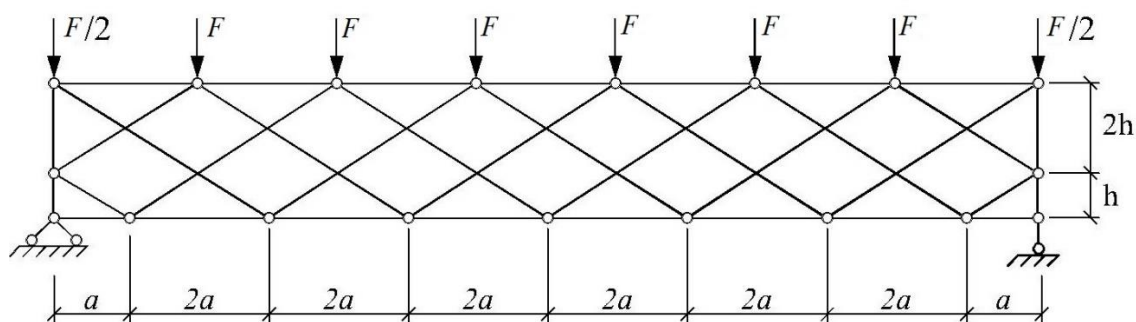


Рисунок 3.3 – Регулярная плоская ферма

Для рассматриваемой фермы уравнения для опорных узлов и узлов на торцах фермы играют роль граничных условий в глобальной системе разрешающих уравнений.

Её расчет был выполнен с использованием разработанной нами программы, реализующей МКЭ в форме КСМ для стержневых систем [165, 169], при разном числе панелей и разных вариантах загрузки – с одинаковой и не одинаковой узловой нагрузкой.

Результаты расчетов, полностью представленные в нашей работе [63], показали, что при  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=4$  и  $n=5$  ферма является геометрически неизменяемой, а при  $n=3$ ,  $n=6$  и  $n=9$  (т.е. при  $n$  кратном трём) - мгновенно изменяемой.

Аналогичные расчеты выполнены для фермы с другим типом решетки, рассмотренной в [99] (рисунок 3.4).

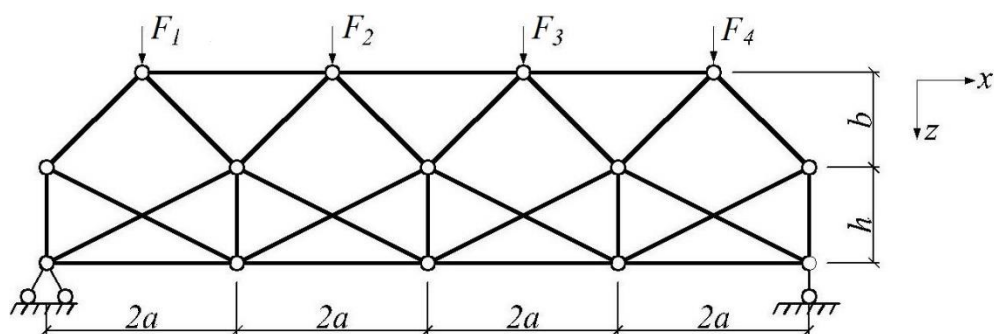


Рисунок 3.4 – Регулярная ферма с треугольной решеткой

Для ответа на вопрос, является ли ферма с таким типом решетки изменяемой или неизменяемой, нужно дополнительное исследование. Ответ этот может быть получен без численного эксперимента, если учесть особенности геометрии решетки.

Используя метод вырезания узлов, приходим к выводу, что при нечетном числе панелей  $n$  ферма с данным типом решетки геометрически неизменяемая, а при четном числе панелей – мгновенно изменяемая.

Выполним дополнительный численный анализ. Ниже приведена таблица 3.2 с результатами анализа фермы при различных значениях  $n$ , подтверждающими данный вывод.

Таблица 3.2

Число панелей ( $n$ )	Число обусловленности матрицы разрешающей системы уравнений МКЭ в форме КСМ	Определитель матрицы разрешающей системы уравнений МКЭ в форме КСМ	Лири-САПР 2013 R5
1	3.1505944	0.64	
2	5.522D+16	3.550D-33	Геометрически изменяемая система (при несимметричной нагрузке)
3	11.666871	0.746496	
4	1.657D+16	0	Геометрически изменяемая система (при несимметричной нагрузке)
5	24.963953	0.2687386	
6	1.730D+16	0	Геометрически изменяемая система (при несимметричной нагрузке)

При этом следует отметить, что в силу полной симметрии рассматриваемой конструкции, при симметричной нагрузке расчет возможен даже при четном числе панелей.

Такой же анализ может быть выполнен и для других типов ферм со сложными решетками, рассмотренных в работах [97-103].

### 3.2 Расчет балки составного сечения

Расчет балок составного сечения представляет большой практический интерес из-за их широкого применения в строительстве и других областях техники. В принципе алгоритм расчета таких балок по методу конечных элементов в перемещениях разработан. Однако его реализация осложняется учетом свойств шва, объединяющего ветви составного стержня. Поэтому обычно используются упрощающие гипотезы. Чаще всего используется гипотеза плоских сечений для всего пакета объединяемых ветвей составного стержня, хотя ее применение может привести к очень грубым результатам.

В данном разделе иллюстрируются возможности применения метода конечных элементов в форме КСМ к расчету балок составного сечения.

В наших работах выполнен тест-расчет шарнирно опертой балки составного сечения, изображенной на рисунке 3.5.

Исходные данные:

$$E_1 = E_2 = 3 \cdot 10^6 \text{ т / м}^2, I_1 = I_2, b = 0.15 \text{ м}, h_1 = h_2 = 0.15 \text{ м}, L = 10 \text{ м}, F = 20 \text{ т}.$$

Рассмотрены два варианта расчетных схем, приведенных в главе 2.

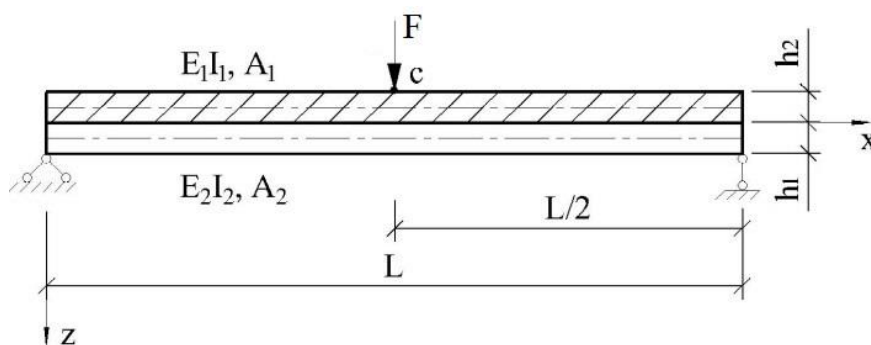


Рисунок 3.5 – Шарнирно опертая балка составного сечения

Структура матрицы откликов для данной задачи приведена в выполненной под нашим руководством диссертации [19].

Сходимость решения к точному при увеличении числа конечных элементов для первого варианта расчетной схемы показана на графике (рисунок 3.6).

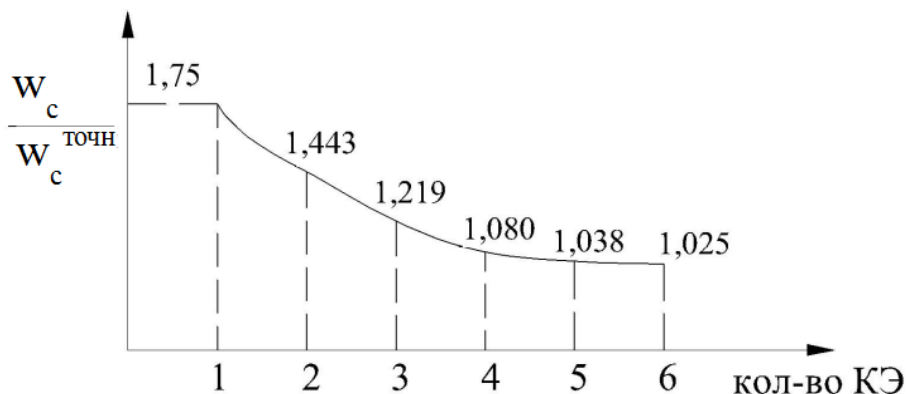


Рисунок 3.6 – Сходимость решения к точному при увеличении числа конечных элементов

При использовании второго варианта расчетной схемы, в которой распределение сдвигающих усилий между слоями конечного элемента аппроксимируется линейным законом, сходимость улучшается, но алгоритм его реализации сложнее.

### 3.3 Расчет систем перекрестных балок

Выполнено также тестирование разработанного алгоритма на примере расчета двумерных стержневых систем.

Рассмотрена прямоугольная в плане регулярная система перекрестных балок (РСПБ) шарнирно опертая по контуру (рисунок 3.7).

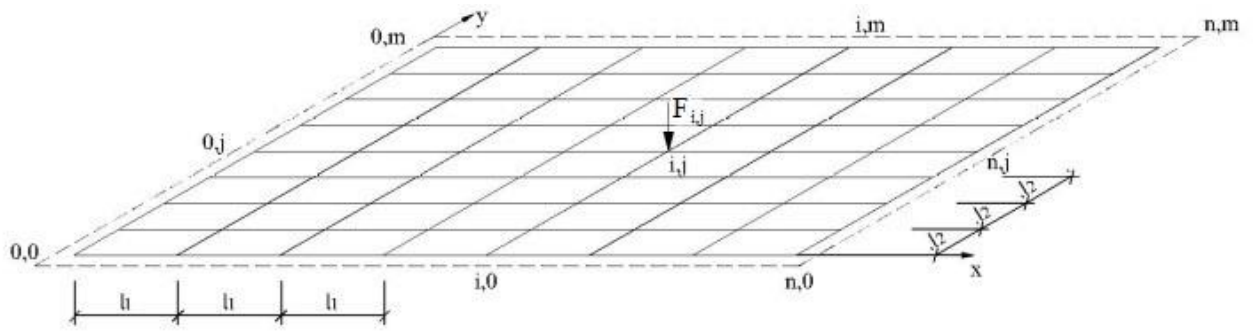


Рисунок 3.7 – Прямоугольная в плане, шарнирно опертая по контуру РСПБ

Фрагмент основной системы смешанного метода для нее изображен на рисунке 3.8.

Для частного случая  $F_{i,j} = F = \text{const} = 0,05m$ ,  $l_1 = l_2 = l = 2m$ ,  $EI_1 = EI_2 = EI = 126,5625 \text{ т} \cdot \text{м}^2$  прогибы в узлах системы перекрестных балок приведены в таблице 3.3.

Эти результаты полностью совпадают с полученными для этого частного случая в [21].

Аналогично может быть выполнен расчет системы перекрестных балок с учетом кручения и сдвига.

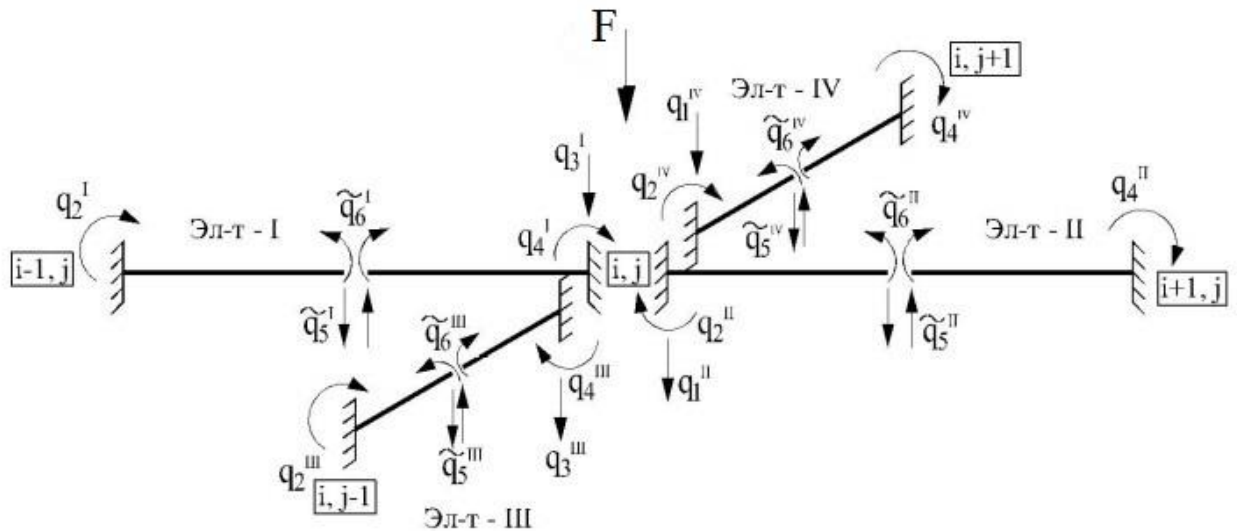


Рисунок 3.8 – Фрагмент основной системы смешанного метода для РСПБ

Таблица 3.3

№ узла	Перемещение (мм)	№ узла	Перемещение (мм)
2	-0,003058	9	-0,003058
4	-0,00428	13	-0,00428
5	-0,00428	14	-0,00428
7	-0,003058	18	-0,003058
8	-0,006		

### **3.4 Расчет стержневых систем, содержащих бесконечно жесткие элементы или элементы большой, или бесконечно большой жесткости**

Как уже отмечено выше, одним из основных затруднений в методе конечных элементов в перемещениях является учет влияния конечных элементов с очень большой изгибной жесткостью.

Для расчета стержневых систем по методу перемещений в работе [177] предложен способ, который позволяет “решать задачи с бесконечно жесткими элементами” и достичь “значительного сокращения числа канонических уравнений”. Однако этот способ может быть использован только для задач с небольшим числом неизвестных и не может быть формализован и алгоритмизирован.

При расчете стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода эта проблема не возникает.

В нашей работе [82] выполнен расчет простейшей системы, для которой разрешающая система уравнений метода перемещений является плохо обусловленной, а при наличии в конструкции бесконечно жесткого элемента решение невозможно [175, с. 273] (рисунок 3.9).

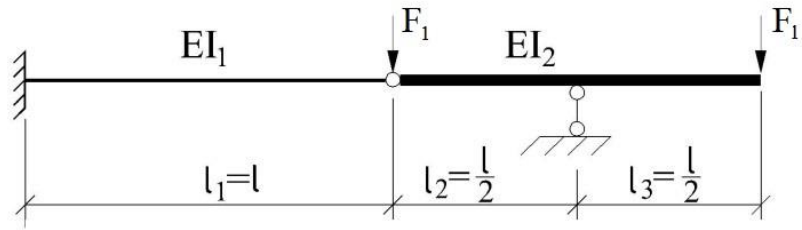


Рисунок 3.9 – Конструкция из двух балок с разной изгибной жесткостью

Схема нумерации узлов и элементов приведена на рисунке 3.10 а. Основная система смешанного метода представлена на рисунке 3.10 б.

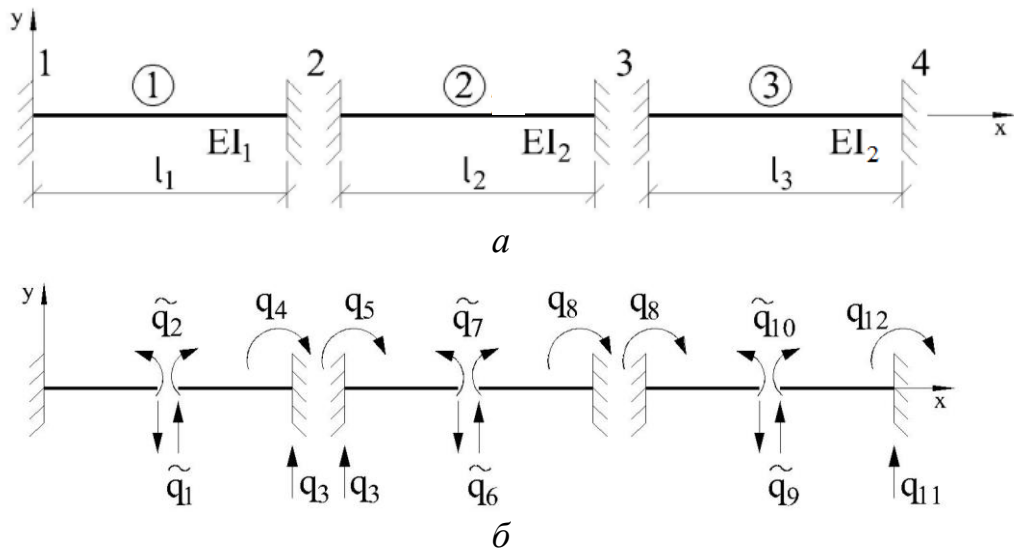


Рисунок 3.10 – Схема нумерации узлов и элементов, и основная система смешанного метода для конструкции из двух балок с разной изгибной жесткостью

Приняты следующие исходные данные:  $F_1 = 1m$ ,  $F_2 = 0,5m$ ,

$E_1 = 3 \cdot 10^6 m / m^2$ ,  $\frac{EI_2}{EI_1} = k$ , где  $0 \leq k \leq \infty$ , размеры прямоугольного сечения

балки:  $b = 0.15m$ ,  $h = 0.15m$ ,  $l = 4m$ .

В таблице 3.4 приведены величины прогибов и углов поворотов сечений конструкции из двух балок с разной изгибной жесткостью для различных вариантов соотношения жесткостей (результаты приведены в  $m$ ).  $0 \leq k \leq \infty$

Таблица 3.4

	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^{-3}$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^{-2}$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^{-1}$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^2$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^3$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^6$	$\frac{EI_2}{EI_1} = 10^{100}$
$w_A = q_3$	-0,08428	-0,08428	-0,08428	-0,08428	-0,08428	-0,08428	-0,08428
$\varphi_B = q_8$	5,2253	0,48461	0,01054	-0,04209	-0,04213	-0,04214	-0,04214
$\omega_C = q_{11}$	-20,9857	-2,02272	-0,12642	0,08407	0,08426	0,08428	0,08428
$\varphi_C = q_{12}$	13,1266	1,27473	0,08955	-0,04201	-0,04213	-0,04214	-0,04214

Следует заметить, что система разрешающих уравнений МКЭ в форме КСМ для задач такого типа остается хорошо обусловленной при увеличении жесткости до бесконечности любого из конечных элементов рассматриваемой конструкции, так как величины  $EI_i$  находятся в знаменателях коэффициентов при неизвестных.

При расчете этой конструкции с использованием ПК Лира, реализующей метод перемещений, при  $EI_2 = kEI_1$  и  $k > 10^6$  возникает сбой и счет прекращается из-за плохой обусловленности разрешающей системы уравнений метода перемещений.

Приведенные в работе [177] примеры расчета рам с бесконечно жесткими элементами (рисунок 3.11, а, б) легко могут быть выполнены на основе МКЭ в форме КСМ так, как это показано в приведенном примере.

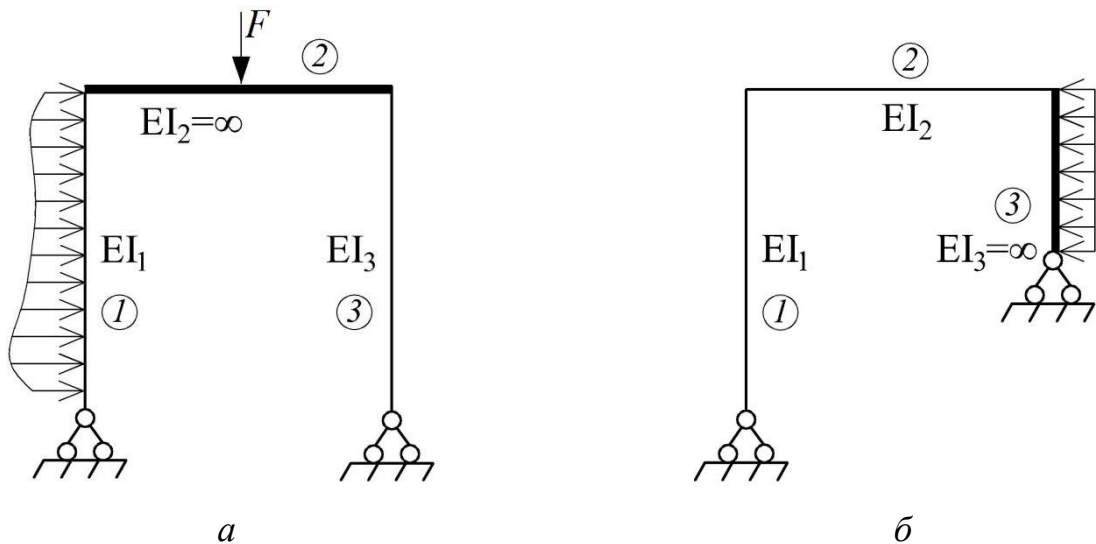


Рисунок 3.11 – Рамы с бесконечно жесткими элементами

При этом не возникает никакой необходимости преобразований эпюр изгибающих моментов и других приемов, невозможность формализации которых волне очевидна.

Следует отметить, что возможно одновременное использование для различных конечных элементов стержневой системы основных систем метода перемещений и смешанного метода. Так для КЭ-3 на рис 3.19 б можно использовать основную систему смешанного метода, а для КЭ-1 и КЭ-2 основные системы метода перемещений. Стыковка матриц жесткости и матриц откликов конечных элементов ничем не отличается от стыковки их матриц жесткостей.

При наличии в стержневой системе одновременно элементов с очень малой изгибной или сдвиговой жесткостью и элементов с очень большой изгибной жесткостью все проблемы с плохой обусловленностью разрешающей системы уравнений решаются при использовании основной системы метода перемещений для КЭ с очень малой жесткостью и основной системы смешанного метода для КЭ с очень большой изгибной жесткостью, т.е. при использовании так называемого комбинированного МКЭ.

### **3.5 Расчет тонких пластин**

#### **3.5.1 Расчет шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластины**

Для анализа эффективности разработанного нами алгоритма расчета тонких пластин [56, 61, 64, 70], найдём величины вертикального перемещения  $w$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  в центре квадратной шарнирно опертой по контуру пластины ( $a = b = 1.0$  м;  $h = 0.01$  м;  $E = 1.092 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>;  $\mu = 0.3$ ) от воздействия поперечной равномерно распределенной нагрузки  $F = 1.0$  Н/м<sup>2</sup>.

В таблице 3.5 и на рисунках 3.12, 3.13 приведено сравнение результатов расчета этой пластинки по МКЭ в форме классического смешанного метода и по МКЭ в перемещениях с использованием ПК ЛИРА-САПР с аналитическим решением, принимаемым за точное [150].

Таблица 3.5

	2x2	4x4	6x6	8x8	10x10	16x16	Точное решение
МКЭ в форме КСМ							
$w_{\max}$	0,003794	0,0040902	0,0040813	0,004075	0,0040706	0,004066	0,004062
$\Delta w_{\max} (\%)$	-6,60	0,69	0,48	0,31	0,21	0,09	
$M_x \max = M_y \max$	0,0529609	0,0490842	0,0483826	0,0481658	0,0480662	0,047958	0,04789
$\Delta M_x \max (\%)$	10,59	2,49	1,03	0,58	0,37	0,14	
ПК ЛИРА-САПР							
$w_{\max}$	0,00505	0,00432	0,00417	0,00412	0,0041	0,00407	0,004062
$\Delta w_{\max} (\%)$	24,3	6,35	2,66	1,43	0,94	0,2	
$M_x \max = M_y \max$	0,025996	0,041836	0,04519	0,04637	0,046916	0,047507	0,04789
$\Delta M_x \max (\%)$	-45,72	-12,64	-5,64	-3,17	-2,03	-0,8	

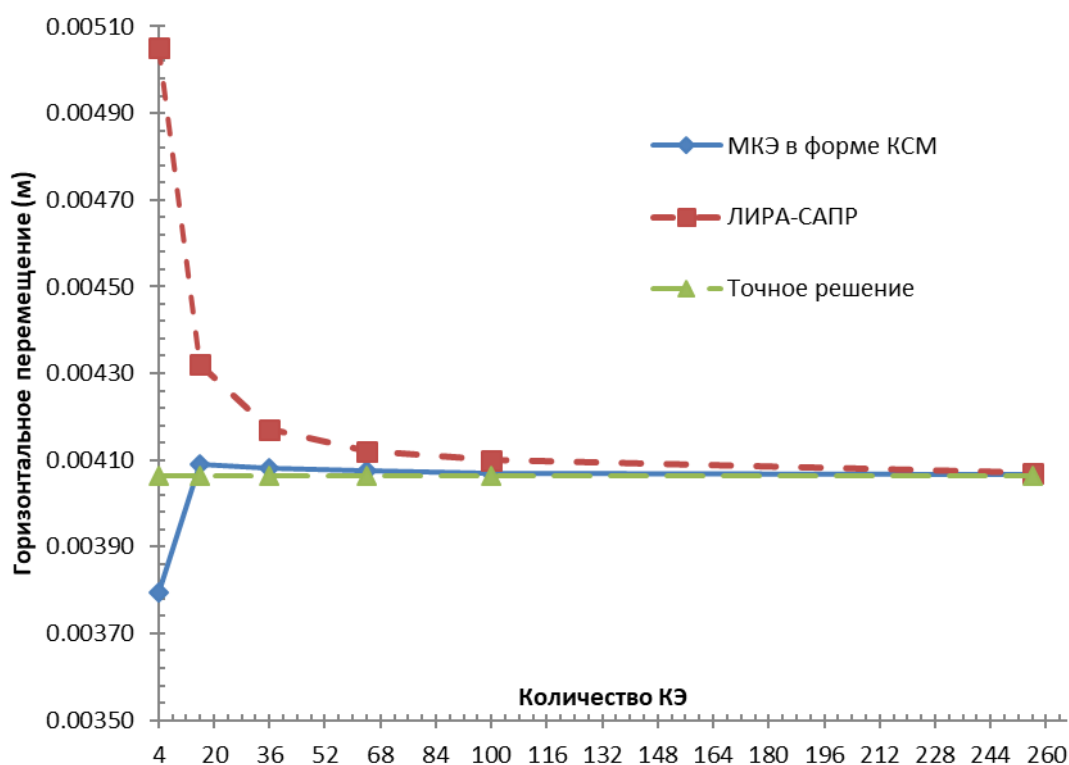


Рисунок 3.12 – Прогиб  $w$  в центре пластины, в зависимости от числа конечных элементов

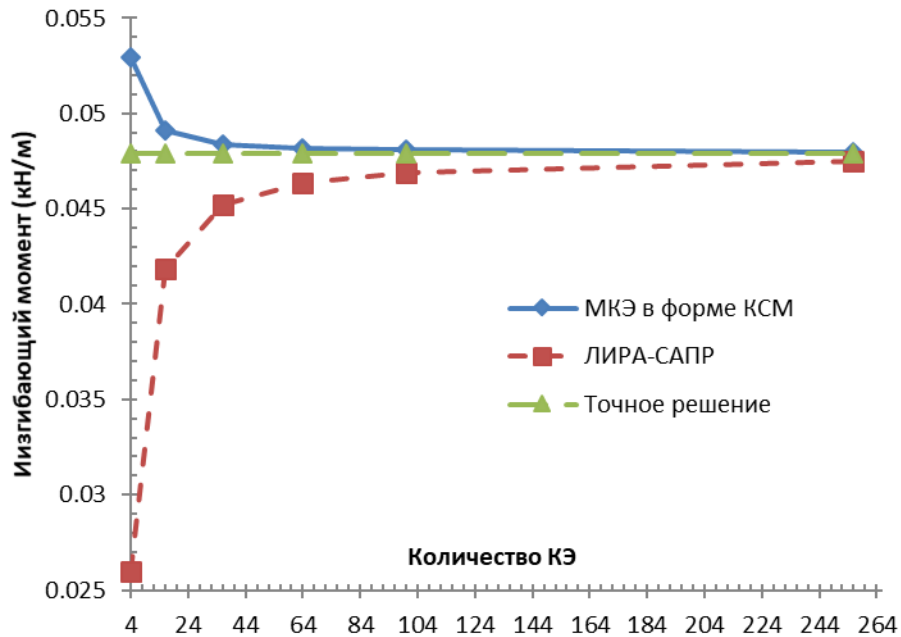


Рисунок 3.13 – Изгибающий момент  $M_x$  в центре пластины, в зависимости от числа конечных элементов

Сравнение результатов расчета позволяет сделать вывод о том, что МКЭ в форме классического смешанного метода показывает большую скорость сходимости к точному решению (как по прогибам, так и по моментам) по сравнению с МКЭ в перемещениях.

### 3.5.2 Расчет тонких пластин с исключением перемещений конечных элементов как жесткого целого

МКЭ в перемещениях присуща проблема исключения из разрешающей системы уравнений перемещений КЭ как жесткого целого [141].

Для стержневых конечных элементов и треугольных КЭ-пластинок со статически определимой основной системой, когда конечный элемент при смещениях опорных связей работает кинематически как механизм, не деформируясь, используемых в рамках метода конечных элементов в форме классического смешанного метода, эта проблема снимается автоматически.

В прямоугольных изгибаемых конечных элементах со статически неопределимой основной системой, при смещениях связей в основной системе происходит его деформация. Но и в этом случае без затруднения может быть реализован алгоритм исключения из разрешающих уравнений перемещений конечных элементов как жесткого целого, подробно изложенный в нашей работе [61].

Геометрия смещенного положения конечного элемента как жесткого целого, показанного на рисунке 3.14, определяется тремя степенями свободы: перемещением  $q_1$  и двумя углами поворота тела относительно осей  $OX$  и  $OY$ , или же тремя линейными перемещениями  $q_1, q_2, q_4$ .

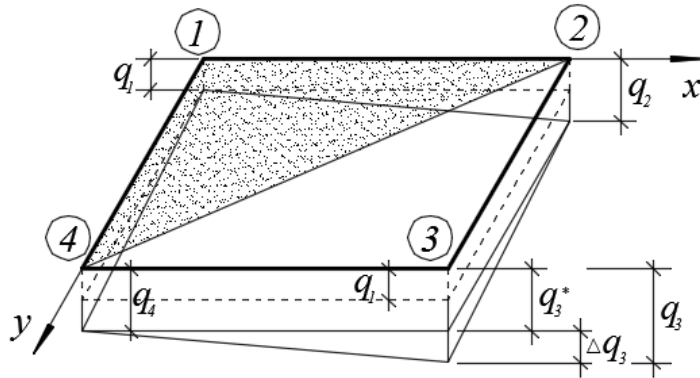


Рисунок 3.14 – Смещение прямоугольного изгибаемого конечного элемента как жесткого целого

Перемещение  $q_3$  соответствующего узла может быть представлено в виде суммы смещений КЭ как жесткого целого и дополнительного смещения, вызывающего изгиб конечного элемента:

$$q_3 = q_1 + \varphi_1^{(y)} a + \varphi_1^{(x)} b + \Delta q_3. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta q_3 &= q_3 - (q_1 + \varphi_1^{(y)} a + \varphi_1^{(x)} b) = \\ &= q_3 - \left( q_1 + \frac{q_2 - q_1}{a} \cdot a + \frac{q_4 - q_1}{b} \cdot b \right) = (q_3 + q_1) - (q_2 + q_4). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая, что реакции в кинематических связях во всех узлах 1, 2, 3, 4 конечного элемента от смещений  $q_1, q_2, q_4$  и  $(q_3 - \Delta q_3)$  равны нулю, а изгиб

конечного элемента от смещения третьей связи на величину  $\Delta q_3$  вызывает реакции во всех кинематических связях основной системы, получим

$$R_1^{(N)} = (r_{13}\Delta q_3)^{(N)}, \quad R_2^{(N)} = (r_{23}\Delta q_3)^{(N)}, \quad R_3^{(N)} = (r_{33}\Delta q_3)^{(N)}, \quad R_4^{(N)} = (r_{43}\Delta q_3)^{(N)},$$

где  $N$  – номера КЭ, сходящихся в узле  $I, J$  конечно-элементной сетки.

Блок  $[r]$  и вектор кинематических неизвестных матрицы откликов конечного элемента принимают следующий вид:

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{13} & & & \\ & -r_{23} & 0 & \\ 0 & & r_{33} & \\ & & & -r_{43} \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} \Delta q_3 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_3 \end{Bmatrix}, \quad [r]^{(N)} \{q\}^{(N)} = \begin{Bmatrix} r_{13} \Delta q_3 \\ -r_{23} \Delta q_3 \\ r_{33} \Delta q_3 \\ -r_{43} \Delta q_3 \end{Bmatrix}^{(N)} \quad (3.3)$$

На рисунке 3.15 показаны конечные элементы, примыкающие к произвольному узлу  $I, J$  конечно-элементной сетки и номера кинематических неизвестных в узлах конечных элементов, относящихся к этому узлу.

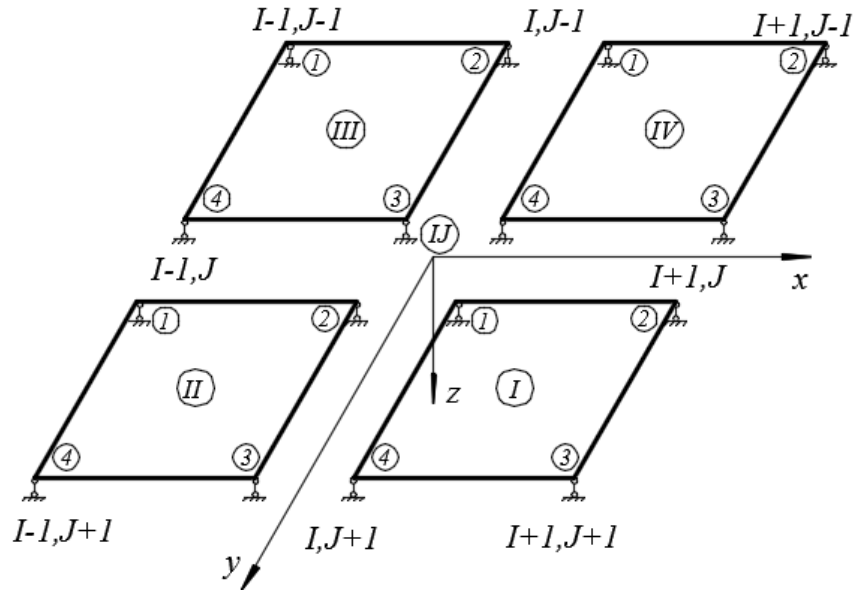


Рисунок 3.15 – Конечные элементы, примыкающие к произвольному узлу  $I, J$  конечно-элементной сетки и номера кинематических неизвестных в узлах конечных элементов, относящихся к этому узлу

Рассмотрим алгоритм исключения смещений конечного элемента как жесткого целого из системы разрешающих уравнений, составленных для узла  $I, J$  конечно-элементной сетки (рисунок 3.16).

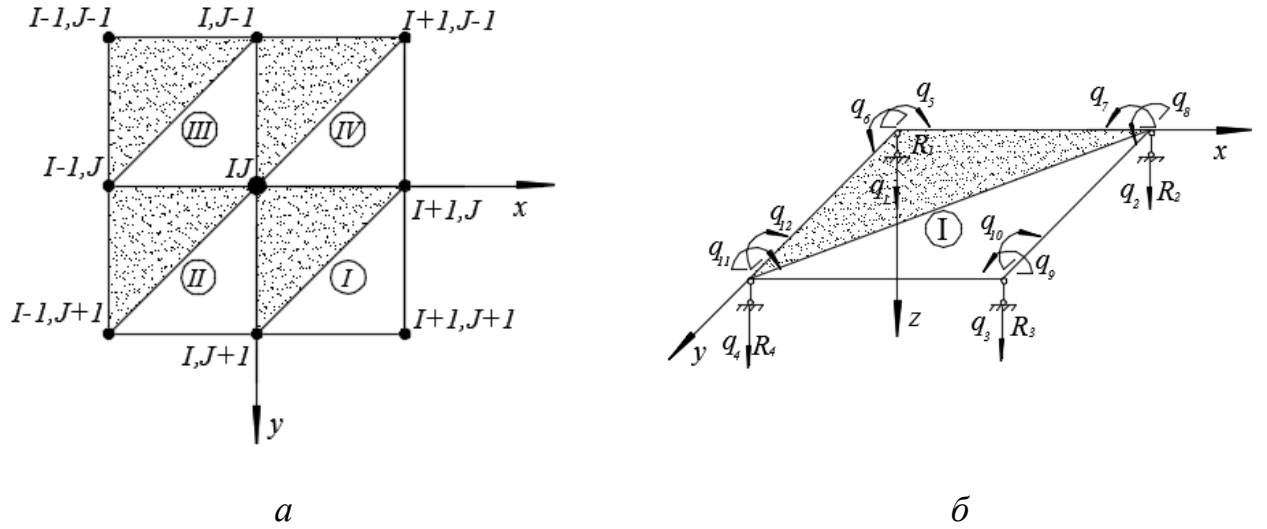


Рисунок 3.16 – Смещения конечного элемента как жесткого целого относительно узла  $I, J$

Эта система уравнений состоит из двух групп:

$$R_{IJ} = R_1^I + R_2^{II} + R_3^{III} + R_4^{IV} = 0, \quad - \text{уравнения равновесия,}$$

$$\varphi_{IJ}^{(y)} = (\delta_5^I + \delta_7^{II}) + (\delta_9^{III} + \delta_{11}^{IV}) = 0, \quad - \text{уравнения совместности деформаций} \quad (3.4)$$

$$\varphi_{IJ}^{(x)} = (\delta_6^I + \delta_{12}^{IV}) + (\delta_8^{II} + \delta_{10}^{III}) = 0. \quad \text{КЭ, сходящихся в узле } I, J.$$

С учетом (3.3), уравнения равновесия, в которых смещения КЭ как жесткого целого содержатся только в первых трех слагаемых, имеют следующий вид:

$$R_{IJ} = (r_{1,3}\Delta q_3)^I + (r_{2,3}\Delta q_3)^{II} + (r_{3,3}\Delta q_3)^{III} + (r_{4,3}\Delta q_3)^{IV} + \sum_{(N)} \left[ \sum_{j=5}^{12} \tilde{r}_{ij} \tilde{q}_j + r_{i,F} \right]^{(N)} = 0, \quad (3.5)$$

$$(N = I, II, III, IV).$$

Подставив выражения (3.2) для  $\Delta q_3$  в первые три слагаемых уравнения (3.5), получим:

$$\sum_{(N)} [r_{13}(q_1 - q_2 + q_3 - q_4)]^{(N)} + \left[ \sum_{j=5}^{12} \tilde{r}_{ij} \tilde{q}_j + r_{i,F} \right]^{(N)} = 0, \quad (N = I, II, III, IV). \quad (3.6)$$

С учетом того, что в узле  $I, J$   $q_1^I = q_2^II = q_3^III = q_4^{IV} = q_{IJ}$ , первая сумма в (3.6) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & r_{13}^I (q_{I,J} - q_{I+1,J} + q_{I+1,J+1} - q_{I,J+1}) - r_{23}^{II} (q_{I-1,J} - q_{I,J} + q_{I,J+1} - q_{I-1,J+1}) + \\
 & + r_{33}^{III} (q_{I-1,J-1} - q_{I,J-1} + q_{I,J} - q_{I-1,J}) - r_{43}^{IV} (q_{I,J-1} - q_{I+1,J-1} + q_{I+1,J} - q_{I,J}) = \\
 & = (r_{13}^I - r_{23}^{II} + r_{33}^{III} - r_{43}^{IV}) q_{I,J} + (-r_{13}^I - r_{43}^{IV}) q_{I+1,J} + (-r_{23}^{II} - r_{33}^{III}) q_{I-1,J} + \\
 & + r_{13}^I q_{I+1,J+1} - r_{23}^{II} q_{I-1,J+1} - r_{23}^{II} q_{I,J+1} + r_{43}^{IV} q_{I+1,J-1}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для проверки корректности разработанного алгоритма, нами на сетке КЭ  $4 \times 4$  выполнен расчет квадратной консольной пластинки, изображенной на рисунке 3.17, со следующими параметрами:  $F_{16} = F_{20} = F = 1.0 \text{ Н} / \text{м}^2$ , модуль упругости  $E = 1.092 \cdot 10^7 \text{ Н} / \text{м}^2$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0.3$ , толщина пластины  $h = 0.01 \text{ м}$ .

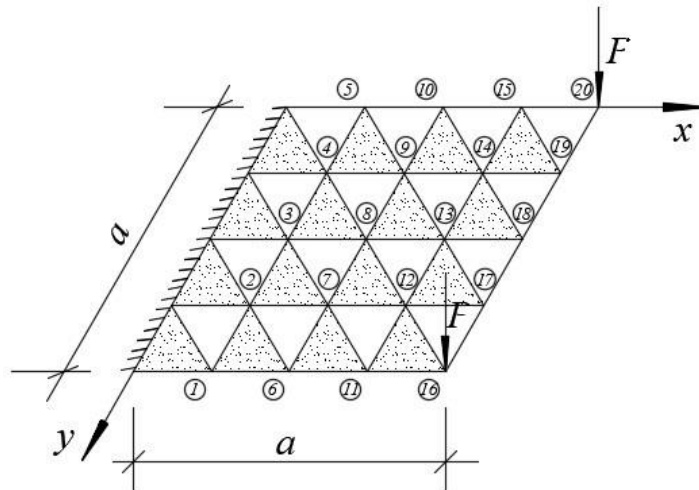


Рисунок 3.17 – Квадратная консольная пластинка

На рисунке 3.18  $a, б$  приведены эпюры прогибов в узлах сетки и эпюры изгибающих моментов  $M_x, M_y$  в различных сечениях.

Выполненные сравнительные расчеты показали полное совпадение результатов решения с использованием алгоритма исключения перемещений КЭ как жесткого целого и решения без исключения этих перемещений.

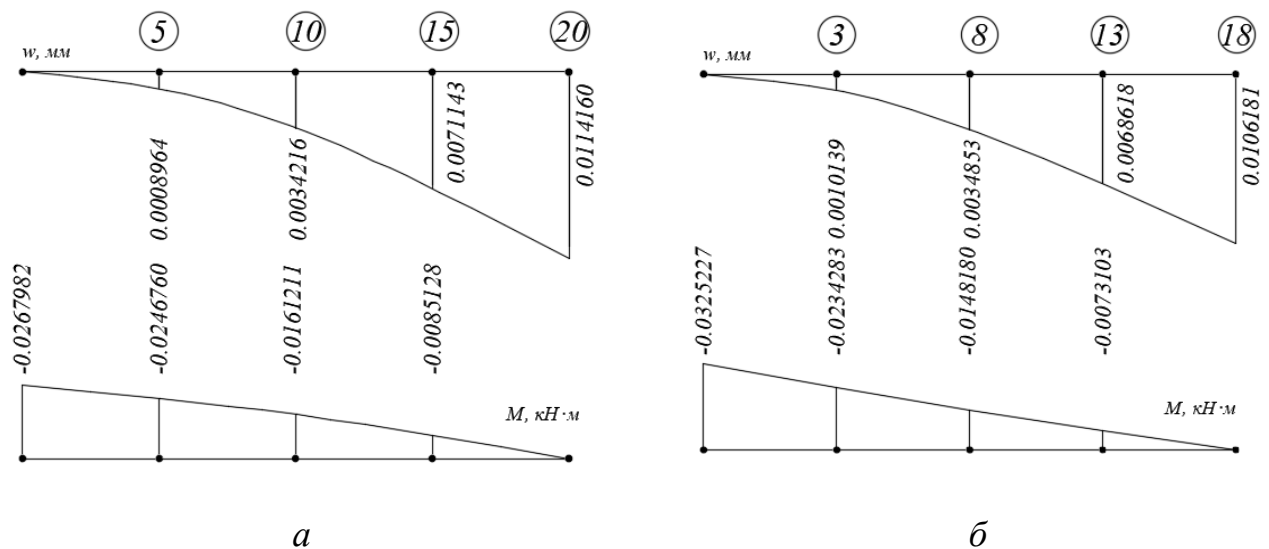


Рисунок 3.18 – эпюры прогибов и изгибающих моментов в узлах сетки

Разработанный алгоритм исключения перемещений КЭ как жесткого целого позволяет устранить вырожденность блока реакций  $[r]$  – субматрицы жесткости в матрице откликов и избежать накопления больших погрешностей счета при выполнении вычислительных операций.

Данный алгоритм может быть применен и для других типов конечных элементов.

### 3.5.3 Расчет изгибаемых пластинок, имеющих жесткие включения

Для иллюстрации эффективности предлагаемого алгоритма исключения перемещений КЭ как жесткого, в нашей работе [64] выполнен расчет шарнирно опертой по контуру пластинки с жестким включением прямоугольной формы со сторонами, параллельными сторонам пластинки (рисунок 3.19, а).

На рисунке 3.19 б показана нумерация узлов на контуре жесткого включения, привязанная к нумерации узлов конечно-элементной сетки.

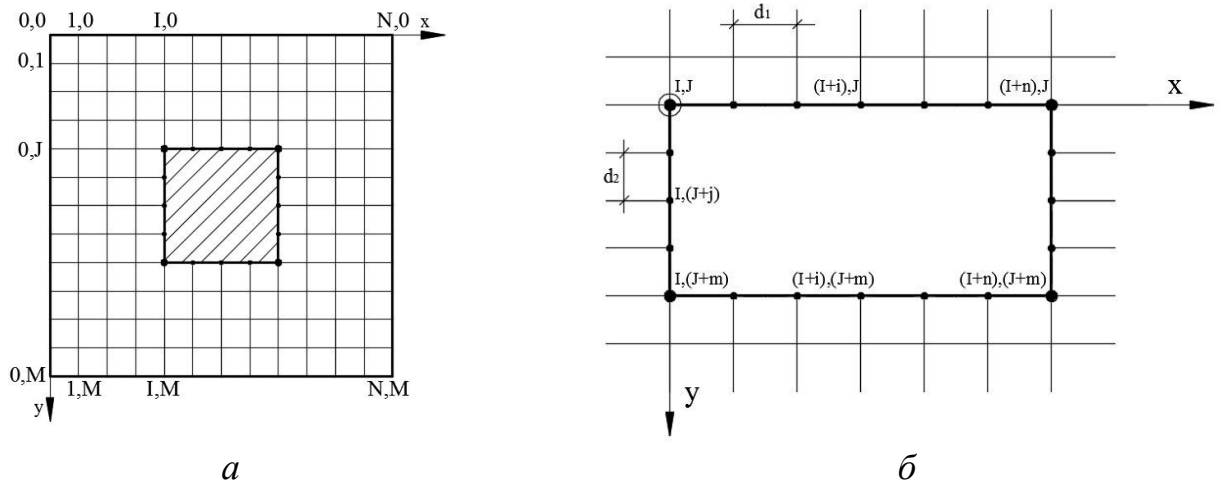


Рисунок 3.19 – Изгибаемая пластинка с жестким включением

Для абсолютно жесткого включения в качестве граничных условий используются условия на контуре включения, выражающие перемещения узлов на контуре через три перемещения включения как абсолютно жесткого тела.

На рисунке 3.20 приведены графики изменения прогибов и изгибающих моментов в угловых точках жесткого включения (вставки) в зависимости от коэффициентов увеличения жесткости конечных элементов включения.

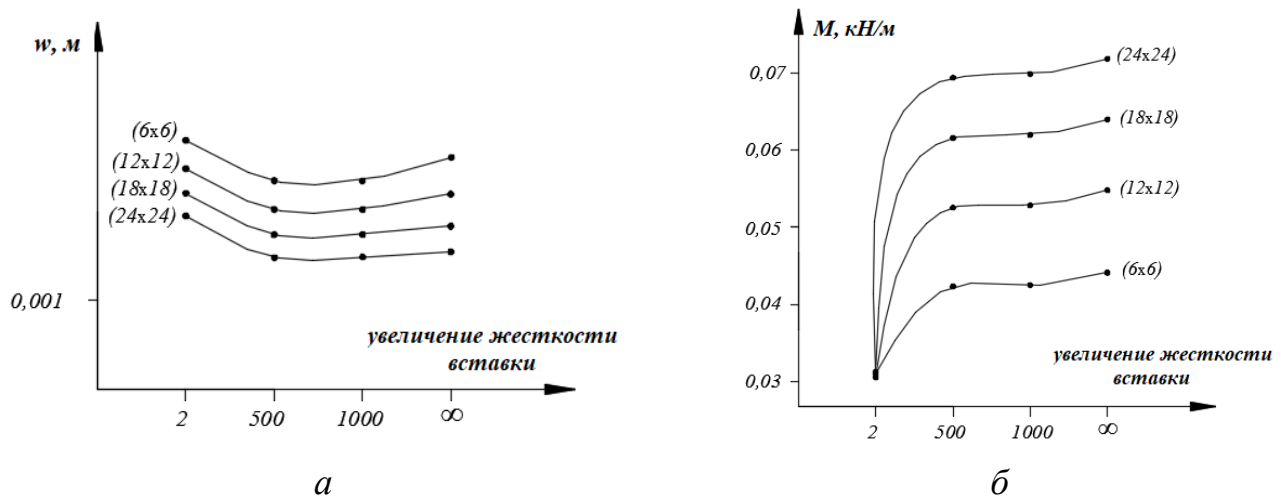


Рисунок 3.20 – Графики изменения прогибов и изгибающих моментов в угловых точках жесткого включения (вставки) в зависимости от коэффициентов увеличения жесткости конечных элементов включения

В таблице 3.6 приведены значения моментов  $M_x/M_y$  в узлах на кромке жесткого квадратного симметричного включения.



### 3.5.4 Расчет изгибаемых пластинок, имеющих отверстия

По алгоритму, изложенному в главе 2, может быть выполнен расчет пластинок, ослабленных прямоугольными отверстиями или щелями.

Расчет пластинки с прямоугольным отверстием в середине с размером  $1/3$  от её размера (рисунок 3.21), выполнен в нашей работе [64].

В общих уравнениях в качестве граничных условий используется равенство нулю основных силовых неизвестных  $\tilde{q}$ , относящихся к конечному элементу, имеющему нулевую изгибную жесткость.

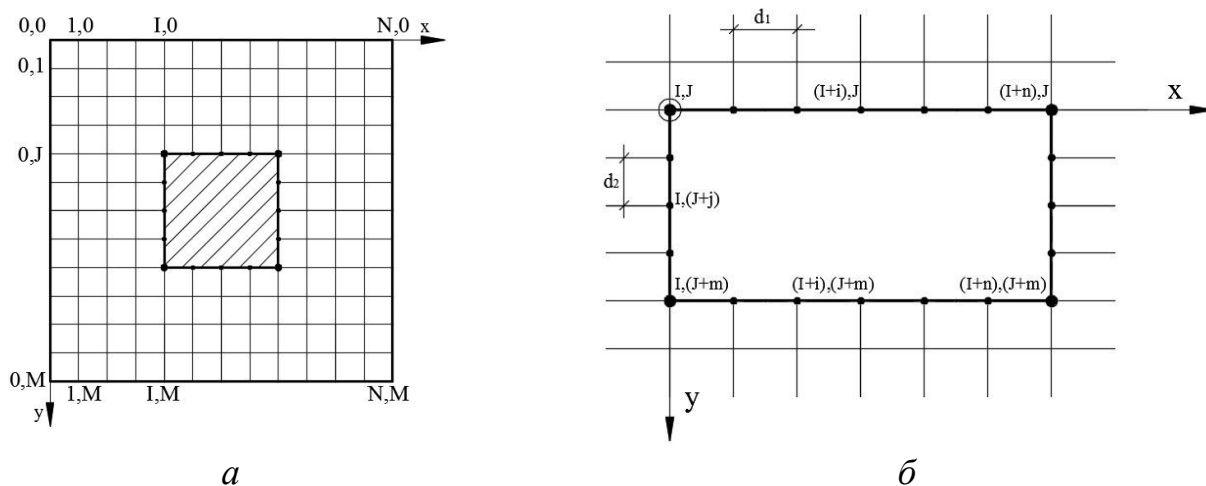
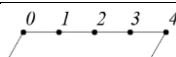


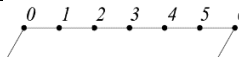
Рисунок 3.21 – Изгибаемая пластинка с одним отверстием

В таблице 3.8 и на рисунке 3.22 приведены результаты расчета пластинки с прямоугольным отверстием в середине с размером  $1/3$  от размера сторон пластинки, при разбиении сеткой  $12 \times 12$  и  $18 \times 18$  КЭ, по МКЭ в форме классического смешанного метода и по традиционному МКЭ в перемещениях с использованием ПК ЛИРА-САПР.

Таблица 3.8

Сетка 12x12, схема расположения узлов на кромке отверстия:						
		Номер узла				
		0	1	2	3	4
$w$	a)	0.0038559	0.0043859	0.0045534	0.0043859	0.0038559
	б)	0.00374746	0.00428764	0.00445995	0.00428764	0.00374746
$M_x$	a)	0.0557388	0.0414707	0.041163	0.0414707	0.0557388
	б)	0.0281528	0.0459029	0.0410237	0.0459029	0.0281528

Сетка 18x18, схема расположения узлов на кромке отверстия:								
		Номер узла						
		0	1	2	3	4	5	6
$w$	a)	0.0038289	0.0042267	0.0044534	0.004528	0.0044534	0.0042267	0.0038289
	б)	0.00376506	0.00416942	0.00440017	0.0044757	0.00440017	0.00416942	0.00376506
$M_x$	a)	0.0618897	0.0444113	0.0427939	0.0418117	0.0427939	0.0444113	0.0618897
	б)	0.0308483	0.0503841	0.0437953	0.0419085	0.0437953	0.0503841	0.0308483

a) - КСМ МКЭ; б) - ПК ЛИРА-САПР

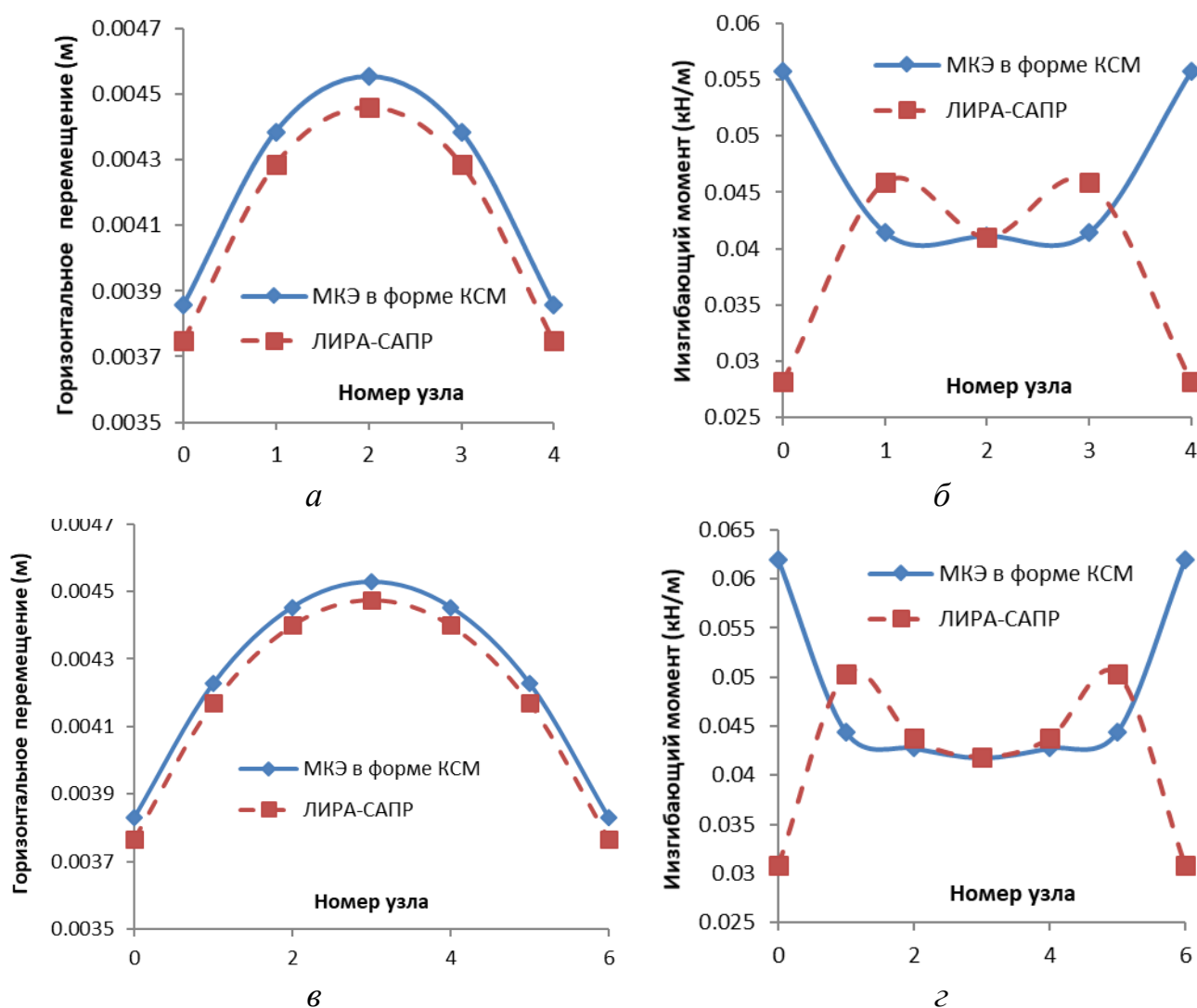


Рисунок 3.22 – Графики изменения прогибов и изгибающих моментов при разбиении сеткой 12x12 (а, б) и 18x18 (в, г) КЭ

Анализ результатов расчетов, выполненных по МКЭ в форме классического смешанного метода и по МКЭ в перемещениях с использованием ПК ЛИРА-САПР, как для пластинок с жесткими включениями, так и с отверстиями, позволяют сделать вывод, что они практически совпадают по прогибам и существенно отличаются по моментам в угловых зонах жестких включений или отверстий. При этом МКЭ в перемещениях не обеспечивает получение достоверной оценки НДС в угловых зонах пластинки.

### 3.5.5 Расчет изгибаемых тонких пластин с использованием конечного элемента в виде прямоугольного треугольника

Рассмотрим расчет пластинки, представленной ансамблем треугольных конечных элементов с сеткой узлов, совпадающей с ортогональной сеткой узлов прямоугольных конечных элементов (рисунок 3.23).

Такие элементы очень удобны для адекватного учета криволинейности контура пластинки в математической модели разрешающих уравнений.

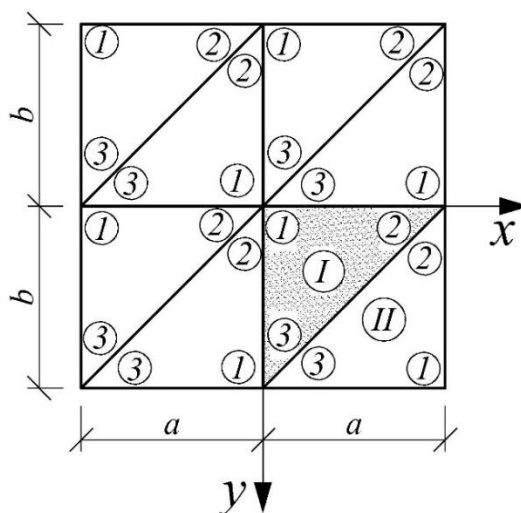


Рисунок 3.23 – Ортогональная сетка узлов треугольных конечных элементов

На примере конечного элемента в виде прямоугольного треугольника, катеты которого совпадают с осями  $Ox$  и  $Oy$  (рисунок 3.24, а), рассмотрим алгоритм построения математической модели матрицы откликов треугольного конечного элемента с тремя смешанными неизвестными в основной системе для каждого из трех углов, являющихся узлами конечно-элементной сетки для пластинки, - прогибом  $w$  и изгибающими моментами  $M_x$ ,  $M_y$  по направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$  (рисунок 3.24, б).

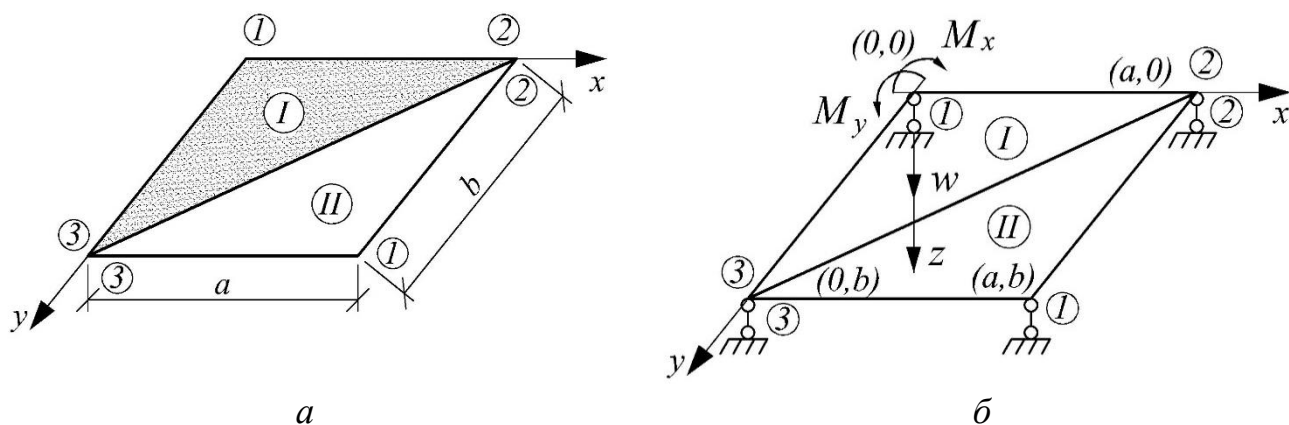


Рисунок 3.24 – Конечный элемент в виде прямоугольного треугольника

Оси принимаются общими для всех конечных элементов, сходящихся в узле  $ij$  конечно-элементной сетки (рисунок 3.25).

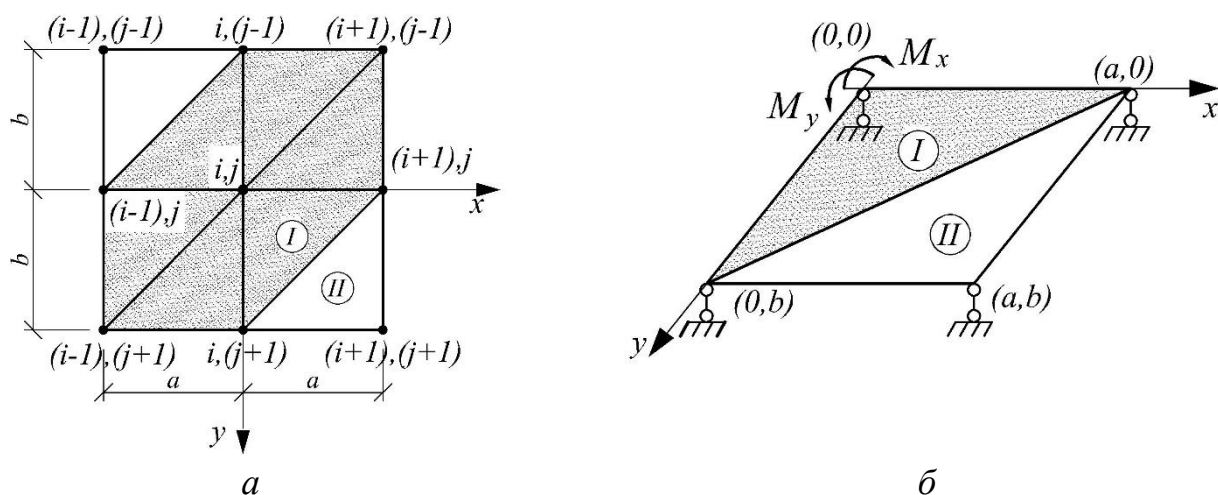


Рисунок 3.25 – Узел  $ij$  конечно-элементной сетки треугольных конечных элементов

Такой КЭ совместен с прямоугольным КЭ, имеющим те же три степени свободы в каждом узле.

На рисунке 3.25, *а* показаны конечные элементы, сходящиеся в узле  $ij$  конечно-элементной сетки, и удобная для дальнейшего использования нумерация этих конечных элементов. Все они имеют разную ориентацию относительно общей системы декартовых координат  $xOy$ . Единая система координат для всей конечно-элементной сетки прямоугольных и треугольных КЭ существенно упрощает как процесс моделирования матрицы откликов, так и формирования системы разрешающих уравнений.

Введем для кинематических воздействий в узлах 1, 2, 3 конечного элемента I (рисунок 3.25, *б*) обозначения  $q_1^I, q_2^I, q_3^I$ , соответственно, а для силовых воздействий  $M_x, M_y$  в тех же узлах -  $\tilde{q}_4^I, \tilde{q}_5^I, \tilde{q}_6^I, \tilde{q}_7^I, \tilde{q}_8^I, \tilde{q}_9^I$ .

Аналогичные обозначения с индексом (II) введем для конечного элемента II.

Типовой узел  $ij$  конечно-элементной сетки узлов для пластинки показан на рисунке 3.25, *а*.

Нумерация узлов КЭ-I и КЭ-II в общей для них локальной системе координат и нумерация основных неизвестных показаны на рисунке 3.26.

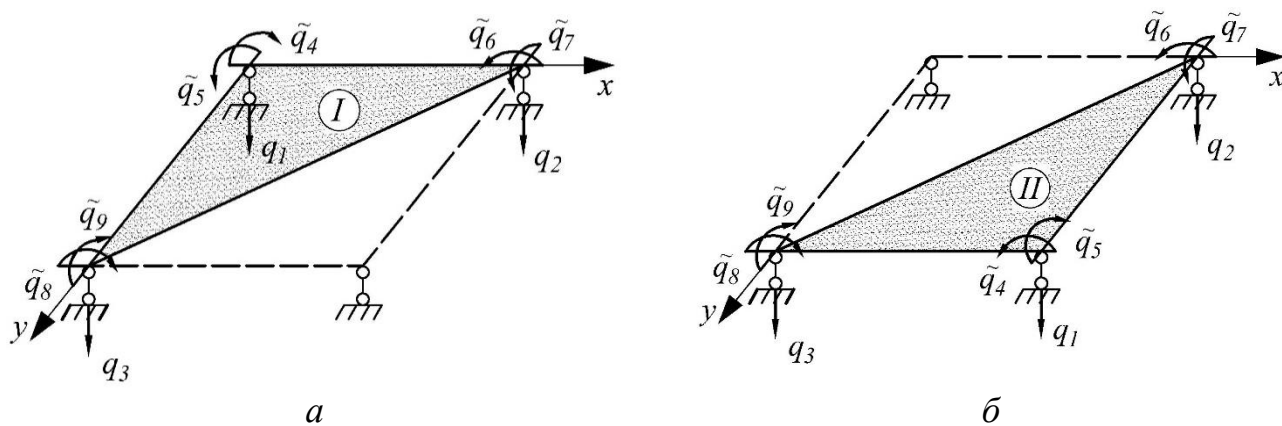


Рисунок 3.26 – Нумерация узлов и всех неизвестных в основной системе КЭ-I и КЭ-II

Для этих двух вариантов расположения конечных элементов в локальной системе координат с центром в узле  $ij$  получим выражения для элементов матриц откликов.

В соответствии с алгоритмом их нахождения, изложенном в п.п. 2.3.3 получим сначала выражения для коэффициентов  $\alpha_i^{(t)}$  в функциях, аппроксимирующих прогибы КЭ от единичного воздействия  $q^{(t)} = 1, (t = 1, 2, \dots, 9)$ .

От единичных воздействий  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 1$  определяются поворотами треугольного КЭ как абсолютно жесткого тела относительно соответствующих осей, как это показано в п.п. 2.3.3:

$${}^I w^{(1)}(x, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{a}\right); \quad {}^I w^{(2)}(x, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x}{a}; \quad {}^I w^{(3)}(x, y) = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right);$$

$${}^{II} w^{(1)}(x, y) = \frac{x}{a} \frac{y}{b}; \quad {}^{II} w^{(2)}(x, y) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{x}{a}; \quad {}^{II} w^{(3)}(x, y) = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

В соответствии с полученными выражениями для функций полей прогибов для каждого из единичных воздействий строятся функции полей кривизн и полей моментов.

Весь дальнейший ход алгоритма расчета покажем на простейшем примере консольной пластинки, представленной всего двумя треугольным конечными элементами (рисунок 3.27).

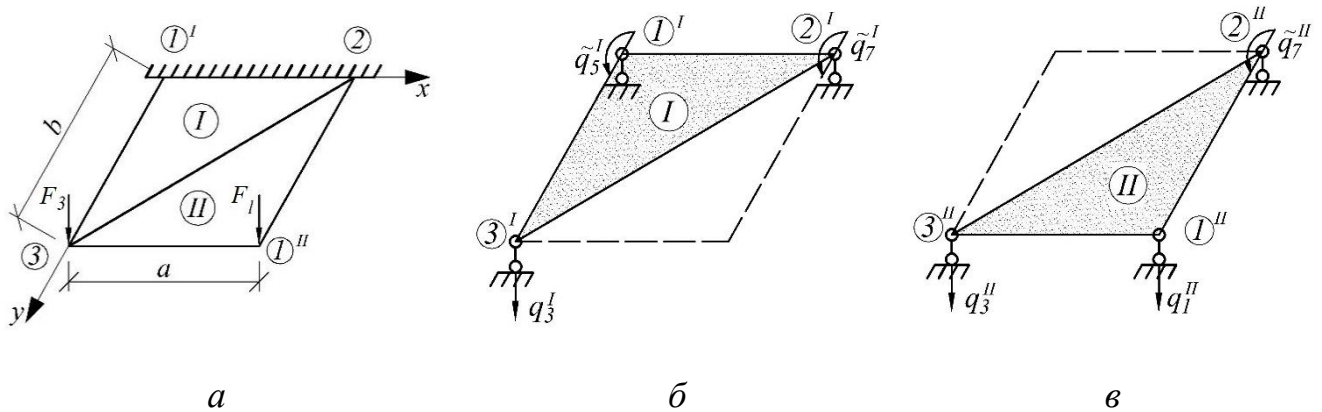


Рисунок 3.27 – Консольная пластинка, представленная прямоугольными треугольниками КЭ-I и КЭ-II

На рисунке 3.27 б, в показаны основные системы и обозначения для основных неизвестных в них. Их физической модели пластинки, представляемой конечными моделями I и II следует:  $\tilde{q}_7^I = \tilde{q}_7^{II}$ ,  $q_3^I = q_3^{II}$ .

Поэтому в разрешающей системе уравнений будет всего четыре смешанных неизвестных -  $\tilde{q}_5^I, \tilde{q}_7^I, q_1^I, q_3^I$ :

$$\begin{aligned}
 1. \quad R_3 &= R_3^I + R_3^{II} = 0, & \text{-уравнения равновесия} \\
 2. \quad R_1^{II} &= 0, \\
 3. \quad \varphi_{y1}^I &= 0, & \text{- уравнения совместности (непрерывности) углов} \\
 4. \quad \varphi_{x2}^I &= \varphi_{x2}^{II} = 0. & \text{поворота КЭ-I и КЭ-II в направлении } Oy \text{ в общих} \\
 & & \text{узлах 1 и 2}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

В развернутой форме эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 1. \quad R_3 &= \left( \tilde{r}_{3,5} \tilde{q}_5 + \tilde{r}_{3,7} \tilde{q}_7 + r_{3,F} \right)^I + \left( \tilde{r}_{3,7} \tilde{q}_7 \right)^{II} = 0, \\
 2. \quad R_1^{II} &= \left( \tilde{r}_{1,7} \tilde{q}_7 + r_{1,F} \right)^{II} = 0, \\
 3. \quad \varphi_{y1}^I &= \left( \tilde{\delta}_{5,3} q_3 + \delta_{5,5} \tilde{q}_5 + \delta_{5,7} \tilde{q}_7 \right)^I = 0, \\
 4. \quad \varphi_{y2}^I + \varphi_{y2}^{II} &= \left( \delta_{7,3} q_3 + \delta_{7,5} \tilde{q}_5 + \delta_{7,7} \tilde{q}_7 \right)^I + \left( \tilde{\delta}_{7,1} q_1 + \tilde{\delta}_{7,3} q_3 + \delta_{7,7} \tilde{q}_7 \right)^{II} = 0
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Коэффициенты при неизвестных в этой системе уравнений являются элементами матриц откликов КЭ- I и КЭ-II.

Элементы блоков  $[\tilde{r}^I]$  и  $[\tilde{r}^{II}]$  этих матриц находятся из кинематических условий как углы поворота КЭ как жесткого тела по направлениям осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\frac{\partial w^I}{\partial x} = \varphi_x^I, \quad \frac{\partial w^I}{\partial y} = \varphi_y^I, \quad \frac{\partial w^{II}}{\partial x} = \varphi_x^{II}, \quad \frac{\partial w^{II}}{\partial y} = \varphi_y^{II}. \tag{3.10}$$

В рассматриваемом случае, используя выражения для  $w^I$  и  $w^{II}$  находим:

$$\begin{aligned}
 r_{3,5}^I &= -\frac{1}{b}, & \tilde{r}_{3,7}^I &= -\frac{1}{b}, & r_{3,F}^I &= -F_3; \\
 \tilde{r}_{1,7}^{II} &= -\frac{1}{b}, & r_{1,F}^{II} &= -F_1
 \end{aligned}$$

Выражения для элементов блоков  $[\tilde{\delta}^I]$  и  $[\tilde{\delta}^{II}]$  находятся из условий равновесия статически определимых основных систем для КЭ-I и КЭ-II от единичных силовых воздействий  $\tilde{q}$ :

$$\tilde{\delta}_{5,3}^I = \frac{1}{b}, \quad \tilde{\delta}_{7,3}^I = \frac{1}{b}, \quad \tilde{\delta}_{7,1}^{II} = \frac{1}{b}.$$

Из сравнения выражений для  $\tilde{\delta}_{ij}$  и  $\tilde{r}_{ji}$  видно, что  $[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T$ .

Выполнение этого соотношения является проверкой правильности вычисления элементов блоков  $[\tilde{\delta}]$  и  $[\tilde{r}]$ .

Элементы блоков  $[\delta_{ij}]$  матриц откликов КЭ-I и КЭ-II находятся как и в прямоугольных КЭ:

$$\delta_{ij} = \iint_{\Omega} \left[ M_x^{(i)}(x, y) \chi_x^{(j)}(x, y) + M_y^{(i)}(x, y) \chi_y^{(j)}(x, y) + 2M_{xy}^{(i)}(x, y) \chi_{xy}^{(j)}(x, y) \right] dx dy \quad (3.11)$$

Интегрирование выполняется по треугольным областям КЭ-I и КЭ-II.

После подстановки в 3.11 соответствующих выражений для моментов и кривизн получаем:

$$\begin{aligned} \delta_{55}^I &= -\frac{1}{D_y \nu} \iint_{\Omega^I} \left[ -\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - \frac{2D_k}{D_y \nu} \left(\frac{y}{a} - \frac{x\mu_x}{b}\right)^2 \right] dx dy, \\ \delta_{77}^I &= -\frac{1}{D_y \nu a^2} \iint_{\Omega^I} \left[ x^2 + \left(\frac{2D_k}{D_y \nu}\right) y^2 \right] dx dy, \\ \delta_{75}^I &= \delta_{57}^I = -\iint_{\Omega^I} \left[ -\frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) + \left(\frac{2D_k}{D_y^2 a \nu^2}\right) y \left(\frac{y}{a} - x \frac{\mu_x}{b}\right) \right] dx dy, \\ \delta_{77}^{II} &= -\left(\frac{1}{b^2 D_y \nu}\right) \iint_{\Omega^{II}} \left[ -y^2 - \left(\frac{2D_k \mu_x^2}{D_y \nu}\right) x^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Сравнение результатов расчета рассматриваемой консольной пластинки, представляемой одним прямоугольным КЭ по варианту с исключением смещений КЭ или жесткого целого и представляемой двумя треугольными КЭ, показало их полное совпадение.

### 3.6 Выводы по главе 3

1. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода позволяет решить проблему исключения из разрешающей системы уравнений перемещений КЭ как жесткого целого и устранить связанную с этим плохую обусловленность разрешающей системы уравнений и возможность накопления ошибок машинного счета.

2. При расчете стержневых систем по предлагаемой форме МКЭ, точное решение как по прогибам, так и по изгибающим моментам, продольным и поперечным силам, получается если за конечный элемент принять стержень между конструктивными узлами рамы или фермы.

3. Выполненные тестовые примеры расчета показали полное совпадение результатов расчета с расчетами, выполненными с использованием классических методов. Достоверность расчетов по методу конечных элементов в смешанной форме и их полное совпадение с расчетами-тестами по классическим методам предопределены использованием одних и тех же допущений, и положений, принятых в строительной механике.

4. Представление прямоугольного КЭ двумя треугольными КЭ, т.е. переход от ортогональной сетки узлов прямоугольных КЭ к той же сетке узлов с треугольными КЭ, приводит к исключению из разрешающих уравнений перемещения КЭ как жесткого целого. При этом количество разрешающих уравнений остается таким же.

5. Разработанные для этой предлагаемой формы МКЭ алгоритмы статического расчета стержневых систем и пластин, а также реализующие их программные средства, предоставляют возможность более глубокого сравнительного анализа результатов расчета, полученных другими численными методами.

**Моделирование задач динамики дискретных и дискретизированных систем на основе МКЭ в форме классического смешанного метода (алгебраическая проблема собственных значений и собственных векторов)**

В настоящее время наиболее часто используемым численным методом исследования динамики конструкций и сооружений является МКЭ в перемещениях.

Для формирования матрицы масс конечного элемента при динамическом расчете по МКЭ используются различные подходы [127, 176, 193, 227, 250], приводящие к согласованной или диагональной матрице масс.

В работах [92, 147 и др.] отмечается, что применение, для упрощения расчетов стержневых систем, диагональной матрицы масс требует для достижения приемлемого уровня точности, увеличения числа конечных элементов в системе по сравнению с использованием согласованной матрицы масс.

В большинстве случаев применение диагональной матрицы масс даст заниженные по отношению к точным решениям результаты, а согласованных матриц – к завышенным результатам. Упрощение построения матрицы масс основано на том, что влиянием инерции вращения масс, распределенных по длине конечного элемента-стержня или конечного элемента-пластинки обычно пренебрегают из-за его малости.

Традиционно в литературе по МКЭ используется, так называемая, динамическая матрица жесткости (матрица жесткости КЭ, объединенная с матрицей масс) [269]:  $K_{дин} = K - \omega^2 M$ , где  $\omega$  – собственная частота колебаний или частота внешнего гармонического воздействия.

При этом не учитывается, что элементы этой матрицы зависят от изменений кинематических параметров в узловых точках, то есть усилия в узловых точках конечного элемента определяются перемещениями в этих же узлах – формами

собственных колебаний КЭ и соответствующими им собственными частотами. Попытки учесть этот фактор для уточнения значений элементов динамической матрицы жесткости предпринимались в ряде работ [30, 42, 147, 269, 311, 312].

При выполнении динамического анализа конструкций повышение точности расчета может быть достигнуто при использовании МКЭ в перемещениях двумя способами: более точным описанием динамического поведения выбранной для расчета модели конечного элемента или увеличением числа конечных элементов.

Эффективность функций форм определяется точностью описания реальных колебательных форм элементов, зависящих от частоты колебаний [202-208, 217, 273]. В последнее время был предложен целый ряд новых функций форм для решения задач динамики [176, 193].

Получение динамической матрицы масс, получаемой на основе точного интегрирования дифференциальных уравнений динамики базисного конечного элемента, дает теоретическую возможность увеличения размеров конечного элемента, то есть уменьшения числа конечных элементов и числа степеней свободы в конечно-элементной модели конструкции и снижения трудоемкости расчета. При использовании точной функции формы результаты расчета получаются также точными, то есть погрешность в определении, например, собственных частот будет зависеть только от используемых численных методов решения частотного уравнения, т.е. от методов решения алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов, к которой сводятся как задачи определения собственных частот колебаний, так и задачи устойчивости конструкций. Однако получение такой матрицы связано со значительными математическими трудностями и возрастанием трудоемкости расчета. Это объясняется тем, что частотные уравнения, получаемые при использовании динамических матриц масс, являются трансцендентными и нелинейными. Практически этот вариант расчета с использованием динамической матрицы масс реализован только для плоских стержневых систем [30, 42, 92, 147, 189, 269].

Сравнительный анализ использования точных функций форм и МКЭ со статическими функциями форм выполнен в работах [42, 189]. В них

утверждается, что такие аппроксимирующие функции форм в динамике менее эффективны, чем в статических задачах. Такое же утверждение, без ссылки на сравнительный анализ, содержится в работе [92].

С ростом номера тона свободных колебаний число конечных элементов, необходимых для получения решения с требуемой степенью точности возрастает. Трудоемкость расчета также возрастает пропорционально величине  $n^2$ , где  $n$  – число конечных элементов.

Необходимо при этом заметить, что сложность алгоритмов, использующих в расчетах точные (трансцендентные) функции формы, зависящие от частоты собственных колебаний, и численная реализация этих алгоритмов делают их теоретические преимущества по точности расчета минимальными по сравнению с обычной дискретизацией по МКЭ. Поэтому обычно используются алгоритмы, основанные на предварительном определении месторасположения в частотном спектре искомой частоты [30, 42, 147].

В ряде случаев удастся построить достаточно простой и эффективный алгоритм численного решения динамических задач, при использовании тех же аппроксимирующих функций в динамических задачах, что и в статических.

Рассмотрим построение математических моделей динамической матрицы откликов на основе МКЭ в форме классического смешанного метода для различных типов конечных элементов.

Основные результаты, изложенные в данной главе, ранее опубликованы в наших работах [58, 62, 88, 89, 164, 166, 169].

#### 4.1 Формирование динамических матриц откликов стержневых конечных элементов

При решении задач динамики по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода необходимо выполнить приведение масс к местам введения дополнительных связей в основной системе, являющихся узлами сетки конечных элементов рассматриваемой конструкции.

Число степеней свободы каждой из приведенных масс зависит от типа массы (для точечной массы  $m$  оно равно двум, а для объемной массы, обладающей инерцией вращения, – трем).

При гармонических колебаниях по закону  $y(t) = A_y \sin \theta t$ , где  $y$  – направление колебаний, максимальное значение инерционной силы для точечной массы, совершающей колебательные движения по направлению оси  $Y$ , определяется выражением  $\max I_y = m\theta^2 A_y$ , а максимальный инерционный момент объемной массы, соответствующий ее вращательному движению, выражением  $\max I_\varphi = I_\rho \theta^2 A_\varphi$ .

В этом случае в матрицу откликов конечного элемента должны быть включены отклики основной системы на единичные воздействия инерционных сил.

Возможны различные варианты получения динамической матрицы откликов стержневого конечного элемента, соответствующей различным вариантам приведения масс к узлам.

### 4.1.1 Формирование матрицы узловых масс

Найдем для конечного элемента в виде изгибаемой балки переменного сечения и с переменными по длине моментом инерции сечения и распределенной массой эквивалентные узловые точечные массы  $M$  и узловые объемные (с инерцией вращения) массы  $M_p$  (рисунок 4.1).

В соответствии с известным алгоритмом решения этой задачи, функция перемещений конечного элемента в процессе свободных колебаний представляется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от линейных координат  $s$ , а другая только от времени  $t$ :

$$u(s, t) = u(s)q(t). \quad (4.1)$$

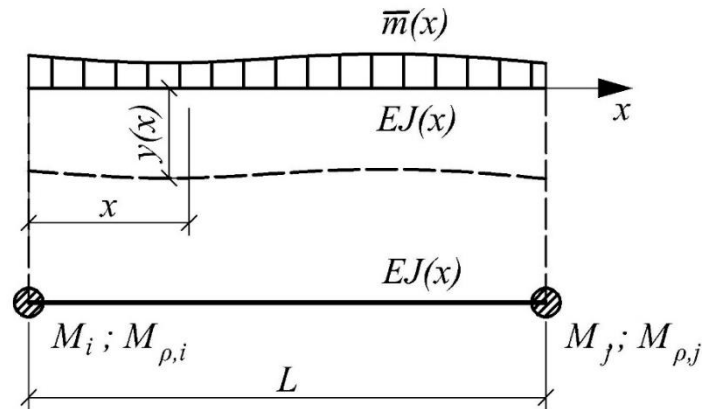


Рисунок 4.1 – Изгибаемый стержневой конечный элемент в виде балки переменного сечения

Действующая на элементарную массу  $dm_s = \bar{m}ds$  с координатой  $s$  инерционная сила, также может быть представлена в виде произведения двух функций:

$$dF_s = -dm_s \frac{d^2 u(s, t)}{dt^2} = -\bar{m}(s)ds \cdot u(s) \frac{d^2 q(t)}{dt^2}. \quad (4.2)$$

Аналогично на эквивалентные сосредоточенные массы в узлах  $i$  и  $j$  по концам конечного элемента действуют инерционные силы:

$$F_j = -M_j q_j \frac{d^2 q(t)}{dt^2}, \quad (4.3)$$

где  $q_i, q_j$  – перемещения (линейные координаты) масс  $\mathbf{M}_i$  и  $\mathbf{M}_j$ .

Матрица приведенных (эквивалентных) узловых масс находится из условия равенства возможных работ внешних (инерционных) и внутренних сил от распределенной массы и от эквивалентных масс (рисунок 4.1) на перемещениях в области конечного элемента.

За возможные перемещения примем те же функции формы, что и при растяжении-сжатии, изгибе конечного элемента, т.е.:

$$\{u(x)\} = \begin{Bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \end{Bmatrix} \{\alpha\} = [\Phi(x)] \{\alpha\},$$

где  $u_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = [\Phi_1(x)] \{\alpha\}$ ,  $u_2(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 = [\Phi_2(x)] \{\alpha\}$ ,

$u_3(x) = u_2'(x) = 0 + \alpha_4 + 2\alpha_5 x + 3\alpha_6 x^2 = [\Phi_3(x)] \{\alpha\}$  – функции соответственно продольных, поперечных и угловых перемещений произвольного поперечного сечения конечного элемента,

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix},$$

$$\{\alpha\} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^T.$$

Выражение для полного вектора смещений концевых узлов конечного элемента имеет следующий вид:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \\ u_{3,i} \\ u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_1(x_i) \\ \Phi_2(x_i) \\ \Phi_3(x_i) \\ \Phi_1(x_j) \\ \Phi_2(x_j) \\ \Phi_3(x_j) \end{Bmatrix} \{\alpha\} = [V] \{\alpha\}, \quad (4.4)$$

$$\text{где } [V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}.$$

Из (4.4) находим:

$$\{\alpha\} = [V]^{-1} \{q\}, \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.4) выражаем возможные перемещения поля конечного элемента через перемещения его узлов:

$$\{u(x)\} = [\Phi(x)][V]^{-1} \{q\} = [U_x] \{q\}, \quad (4.6)$$

где  $[\Phi(x)][V]^{-1} = [U_x]$ .

Найдем далее возможную работу распределенных инерционных сил (с учетом инерции вращения) по всей области конечного элемента:

$$\begin{aligned} A_p = & \int_0^l dF(x)u_1(x) + \int_0^l dF(x)u_2(x) + \int_0^l d\mathbf{M}(x)u_3(x) = - \int_0^l \bar{\mathbf{m}}(x)u_1^2(x)dx \frac{d^2 q(t)}{dt^2} - \\ & - \int_0^l \bar{\mathbf{m}}(x)u_2^2(x)dx \frac{d^2 q(t)}{dt^2} - \int_0^l \rho I_y(x)u_3^2(x)dx \frac{d^2 q(t)}{dt^2}. \end{aligned}$$

Запишем эти выражения в матричной форме:

$$A_p = - \frac{d^2 q(t)}{dt^2} \{q\}^T \int_0^l [U_x]^T [\mathbf{m}] [U_x] dx \{q\}, \quad (4.7)$$

$$\text{где } [\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{m}}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{m}}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_y(x) \end{bmatrix}.$$

В этих выражениях  $\rho$  – плотность материала конечного элемента,  $I_y(x)$  – момент инерции поперечного сечения конечного элемента.

Выражение для возможной работы эквивалентных узловых инерционных сил в матричной форме имеет следующий вид:

$$A_c = -\frac{d^2 q(t)}{dt^2} \{q\}^T [\mathbf{M}] \{q\}. \quad (4.8)$$

Приравнявая выражения (4.7) и (4.8), находим,

$$[\mathbf{M}] = \int_0^l [U_x]^T [\mathbf{m}] [U_x] dx \quad (4.9)$$

Матрица масс (4.9) симметричная и называется «согласованной», так как для ее вычисления используются те же функции формы (аппроксимирующие функции), что и при вычислении матрицы жесткости.

Матрица масс (4.9), с учетом (4.6) и принятой ранее последовательности нумерации неизвестных, имеет следующий вид:

$$[\mathbf{M}] = \rho A \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & 0 & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} & 0 \\ & \frac{l^3}{105} & 0 & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & 0 \\ & & \frac{l}{3} & 0 & 0 & \frac{l}{6} \\ & \text{Симметрично} & & \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} & 0 \\ & & & & \frac{l^3}{105} & 0 \\ & & & & & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Полученный вид матрицы совпадает с матрицами, полученными С.И. Трушиным [182].

При наличии в пределах конечного элемента точечных и объемных масс соответствующие интегралы в (4.7) и (4.9) заменяются суммами.

Матрица масс конечного элемента может быть получена простым статическим способом сведения массы конечного элемента к его узлам. В отличие от «согласованной» она диагональная и более удобна для расчета, но и

одновременно менее точно отражает динамические характеристики распределенной по длине конечного элемента массы.

Эта матрица для рассматриваемого стержневого конечного элемента с основной системой, изображенной на рисунке 4.2, имеет следующий вид:

$$[\mathbf{M}] = \begin{Bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\rho,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{m}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\rho,5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{m}_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь  $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_{i-1} = \mathbf{m}_3$ ,  $I_{\rho,2} = \frac{1}{2}I_{\rho,i-1}$ ,  $\mathbf{m}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_6$ ,  $I_{\rho,5} = \frac{1}{2}I_{\rho,i}$ .

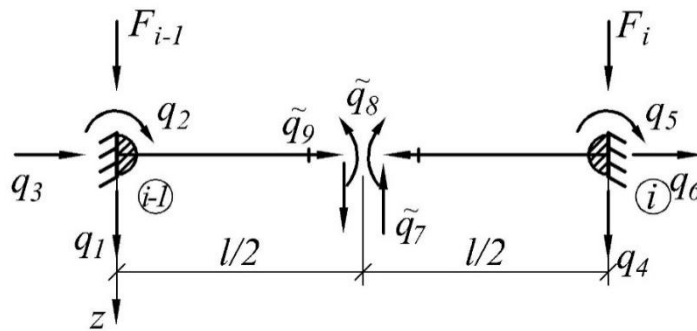


Рисунок 4.2 – Изгибаемый стержневой конечный элемент с узловыми массами

Применение в целях упрощения расчета диагональной матрицы масс, для получения результата с приемлемой точностью, требует, как это отмечается в работах [92, 147 и др.], увеличенного по сравнению с согласованной матрицей масс числа конечных элементов в расчетной схеме.

#### 4.1.2 Формирование динамической матрицы откликов

Матрица воздействий инерционных сил определяется в соответствии со структурой матриц масс матриц (4.10) и (4.11) выражением:

$$\{F^{(дин)}\} = \omega^2 [\mathbf{M}]\{q\}, \quad (4.12)$$

где  $\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_9]$

Динамическая матрица откликов строится также на основе матриц масс (4.10) и (4.11):

$$[D] = [D_{ст} - \lambda M_{дин}], \quad (4.13)$$

где  $[D_{ст}] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$  – статическая матрица откликов;

$[M_{дин}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  – динамическая матрица масс;  $\lambda = \omega^2$ .

Система разрешающих уравнений при использовании динамической матрицы откликов КЭ имеет в блочно-матричной форме следующий вид:

$$\begin{aligned} [r - \lambda \mathbf{M}]\{q\} + [\tilde{r}]\{\tilde{q}\} &= 0, \\ [\tilde{\delta}]\{q\} + [\delta]\{\tilde{q}\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $\{q\}$  – вектор амплитуд неизвестных перемещений по направлениям введенных в основную систему связей,

$\{\tilde{q}\}$  – вектор неизвестных усилий, заменяющих устраненные в исходной системе связи, и т.д.

Все матрицы, входящие в эти уравнения, относятся ко всей конструкции, т.е. ко всему ансамблю конечных элементов, представляющему ее.

Частотное уравнение, соответствующее уравнению (4.14), имеет вид

$$[D] = [D_{ст} - \lambda M_{дин}] = 0.$$

Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров из [19].

Пример 4.1. Найдём частоты свободных изгибных колебаний жестко заземленной по концам балки прямоугольного поперечного сечения (рисунок 4.3) с учетом только равномерно распределенной по длине балки собственной массы.

Параметры балки:

$$L = 8\text{ м}, EI = \text{const}, E = 3 \cdot 10^6 \text{ м / м}^2, b = 0.15\text{ м}, h = 0.15\text{ м}, \rho = 2.75\text{ м / м}^3$$

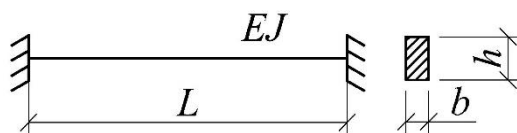


Рисунок 4.3 – Балка прямоугольного поперечного сечения

В таблице 4.1 приведены относительные погрешности (%) первых трех собственных частот вычисленные с использованием согласованной матрицы масс (СММ) (4.10), диагональной матрицы масс (ДММ) (4.11) и по методу конечных элементов в перемещениях с использованием ПК Лира, по отношению к их точным значениям [96], при различном числе конечных элементов (все результаты приведены в Гц). Результаты показывают, что использование матрицы масс (4.10) дает результаты близкие к точному решению при 4 КЭ, матрицы масс (4.11) - при 6 КЭ, при расчете по МКЭ в перемещениях - при 6 КЭ, что демонстрирует явное превосходство МКЭ в форме КСМ перед МКЭ в перемещениях по точности результатов.

Таблица 4.1

	4 КЭ	6 КЭ	8 КЭ	10 КЭ	12 КЭ	14 КЭ	16 КЭ	Точное решение (Гц)
$\Delta\omega_1$								15.810
СММ	0.13%	0.03%	0.01%	0.006%	0.006%	0.006%	0.00%	
ДММ	-0.32%	-0.04%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	
ПК ЛИРА	-3.6%	-2.4%	-1.87%	-1.48%	-1.35%	-1.22%	-1.09%	
$\Delta\omega_2$								43.582
СММ	0.92%	0.20%	0.06%	0.025%	0.013%	0.01%	0.004%	
ДММ	-4.08%	-0.45%	-0.11%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.00%	
ПК ЛИРА	-13.6%	-8.14%	-6.14%	-4.97%	-4.21%	-3.62%	-3.22%	
$\Delta\omega_3$								85.444
СММ	2.13%	0.71%	0.23%	0.09%	0.04%	0.02%	0.01%	
КСФ МКЭ	-24.1%	-2.45%	-0.52%	-0.18%	-0.08%	-0.04%	-0.02%	
ДММ	-24.1%	-2.45%	-0.52%	-0.18%	-0.08%	-0.04%	-0.02%	
ПК ЛИРА	-27.5%	-16.9%	-13.1%	-10.2%	-8.62%	-7.45%	-6.56%	

Пример 4.2. [19] Выполним анализ влияния типа матрицы откликов и числа конечных элементов в расчетной модели на результат вычислений частот свободных колебаний.

Рассмотрим это на примере свободных колебаний рамы с элементами прямоугольного поперечного сечения (рисунок 4.4) с учетом только собственной массы, приведенной к узлам конечного элемента (матрица масс принята по (4.10)).

Параметры рамы:

$$L = 3\text{ м}, H = 3\text{ м}, EI = \text{const}, E = 3 \cdot 10^6 \text{ т} / \text{м}^2, b = 0.15\text{ м}, h = 0.15\text{ м}, \rho = 2.75\text{ т} / \text{м}^3.$$

Для сравнения рассмотрим три варианта сетки конечных элементов: 12, 24 и 36 конечных элементов, т.е. каждый стержень рамы представлен одним, двумя и тремя КЭ соответственно.

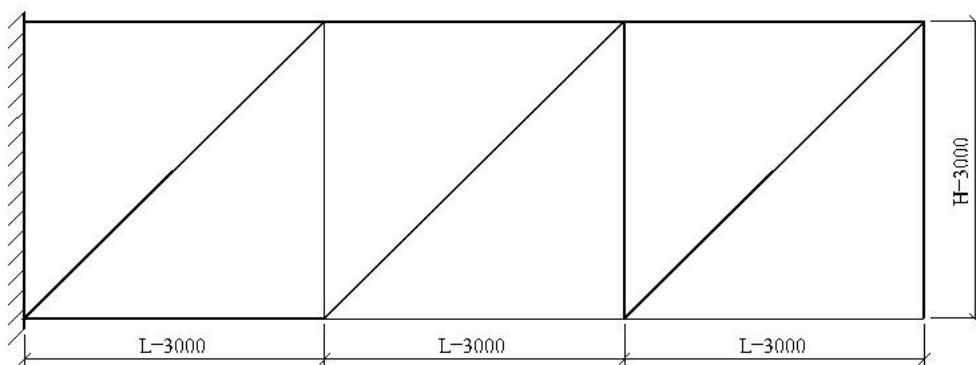


Рисунок 4.4 – Рама с элементами прямоугольного поперечного сечения

Величины частот, найденные на основе метода конечных элементов в форме КСМ и ПК ЛИРА-САПР, приведены в сравнительной таблице 4.2 (все результаты приведены в Гц).

По результатам сравнения можно сделать следующие выводы: при сгущении сетки КЭ результаты по первым двум вариантам асимптотически сближаются, а по ЛИРА-САПР погрешность расчета, по сравнению с результатами по первому варианту, принимаемым за точное, не снижается.

Другие примеры нахождения частот колебаний рам приведены в нашей работе [89].

Таблица 4.2

		12 КЭ	24 КЭ	36 КЭ
$\omega_1$	СММ	14,605	14,294	14,148
	ДММ	14,57	14,16	14,15
	ПК ЛИРА-САПР	14,44	14,09	14,08
$\omega_2$	СММ	29,403	23,217	21,795
	ДММ	44,63	20,23	21,36
	ПК ЛИРА-САПР	21,69	19,43	20,19
$\omega_3$	СММ	33,819	26,173	25,090
	ДММ	61,83	22,34	24,09
	ПК ЛИРА-САПР	22,87	21,62	22,66
$\omega_4$	СММ	34,909	26,921	26,659
	ДММ	78,17	22,60	24,45
	ПК ЛИРА-САПР	25,18	21,92	23,05

Пример 4.3. Найдем частоты свободных колебаний прямоугольной в плане шарнирно опертой по контуру регулярной системы перекрестных балок с точечными массами, приведенными к узлам (рисунок 4.5).

На рисунке 4.6 изображен фрагмент основной системы для нее.

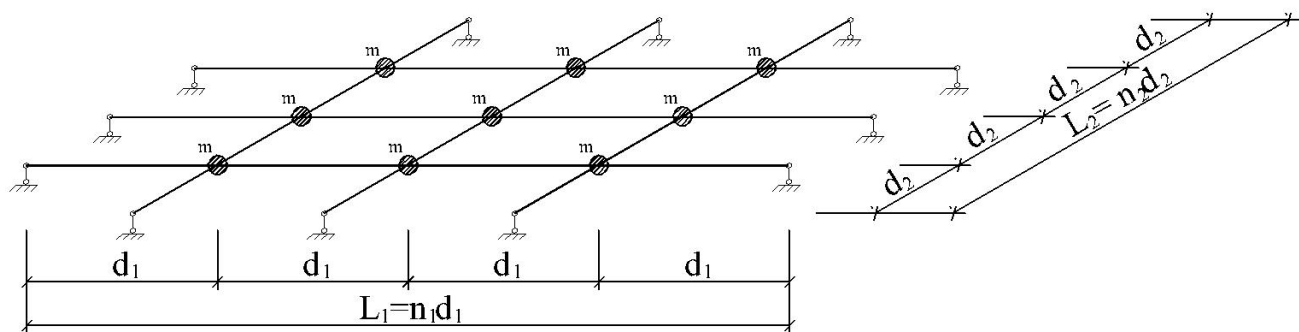


Рисунок 4.5 – Прямоугольная в плане шарнирно опертая по контуру регулярная система перекрестных балок с точечными массами, приведенными к узлам

Для частного случая ( $F_{i,j} = F = \text{const} = 0,05m$ ,  $d_1 = d_2 = l = 2m$ ,  $m = 0,061875m$ ,  $EI_1 = EI_2 = EI = 126,5625m / m^2$ ,  $A = 0,15 \times 0,15 = 0,0225m^2$ ,  $n_1 = n_2 = 4$ ) получены следующие значения для частот свободных колебаний (результаты приведены в Гц):  $\omega_{1,1}^2 = 0,4074$ ,  $\omega_{1,2}^2 = \omega_{2,1}^2 = 1,2049$ ,  $\omega_{2,2}^2 = 1,7895$ ,  $\omega_{1,3}^2 = \omega_{3,1}^2 = 2,3912$ ,  $\omega_{2,3}^2 = \omega_{3,2}^2 = 2,8085$ ,  $\omega_{3,3}^2 = 3,282$ .

Индексы  $i, j$  при  $\omega_{i,j}^2$  соответствуют номерам гармоник.

Эти результаты полностью совпадают с полученными для этого частного случая в [21].

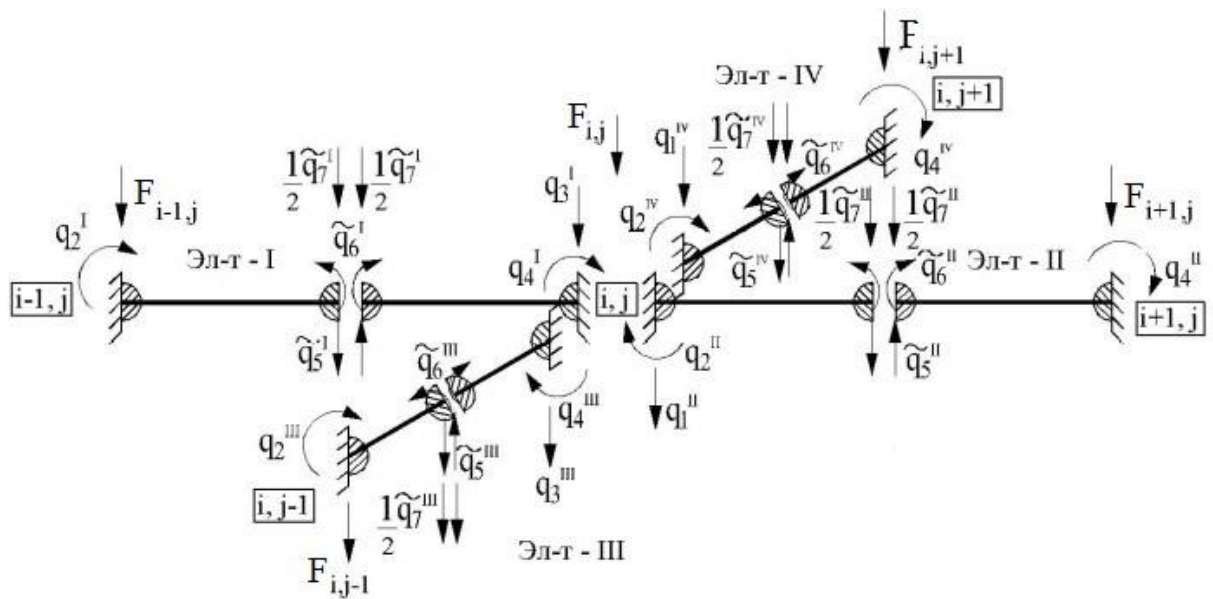


Рисунок 4.6 – Фрагмент основной системы для прямоугольной в плане регулярной системы перекрестных балок

#### 4.2 Формирование динамической матрицы откликов продольно-сжатого конечного элемента-стержня

Как и в задачах статики, рассмотрим два основных типа конечных элементов, используемых для расчета плоских стержневых систем: прямолинейный стержень, шарнирно закрепленный по концам (рисунок 4.7, а) и прямолинейный стержень, жестко закрепленный по концам (рисунок 4.7, б). Массы полагаем приведенными к узлам конечного элемента.

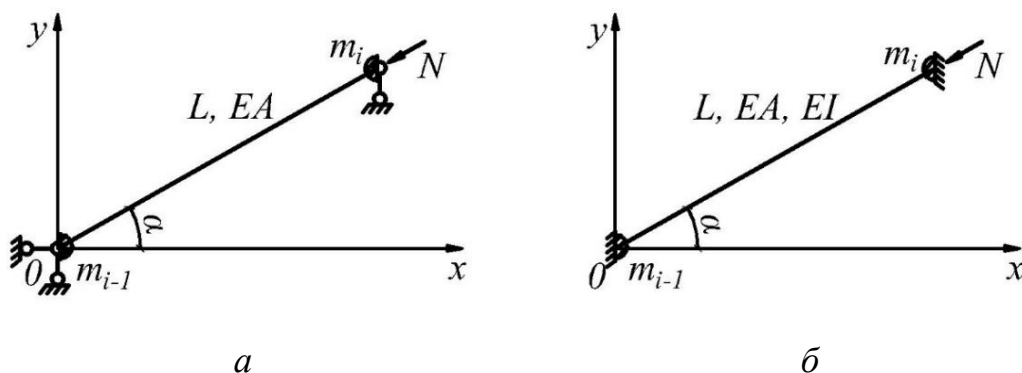


Рисунок 4.7 – Прямолинейный стержень, шарнирно закрепленный по концам и прямолинейный стержень, жестко закрепленный по концам

Основные системы смешанного метода для этих конечных элементов изображены на рисунке 4.8.

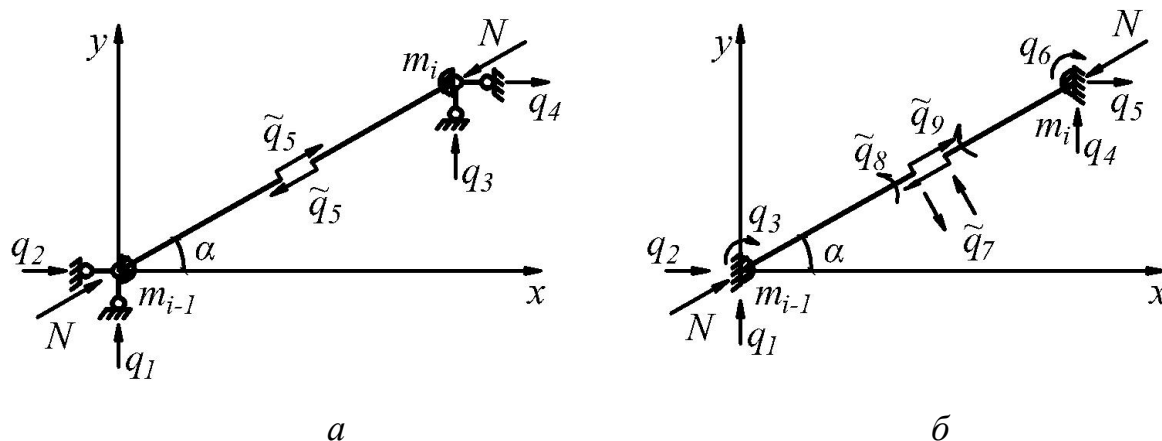


Рисунок 4.8 – Основные системы для прямолинейного стержня, шарнирно закрепленного по концам и прямолинейного стержня, жестко закрепленного по концам

#### 4.2.1 Динамическая матрица откликов продольно сжатого конечного элемента-стержня с шарнирным опиранием по концам

Рассмотрим процесс формирования блоков матрицы откликов конечного элемента.

Задача нахождения элементов этих блоков не отличается от рассмотренных выше задач статики и динамики, поэтому, не повторяя выкладки, рассмотрим только возникающие особенности.

Рассмотрим сначала случаи, когда единичное перемещение получает связь 4 (рисунок 4.9, а), а затем связь 3 (рисунок 4.9, б).

Из геометрических соотношений и условий равновесия следует:

$$r_{1,4} = r_{4,1} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad r_{2,4} = r_{4,2} = -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{3,4} = r_{4,3} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$r_{1,3} = r_{3,1} = \frac{N}{l} \cos^2 \alpha, \quad r_{2,3} = r_{3,2} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$r_{4,4} = -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha + m_i \omega^2, \quad r_{3,3} = -\frac{N}{l} \cos^2 \alpha + m_i \omega^2.$$

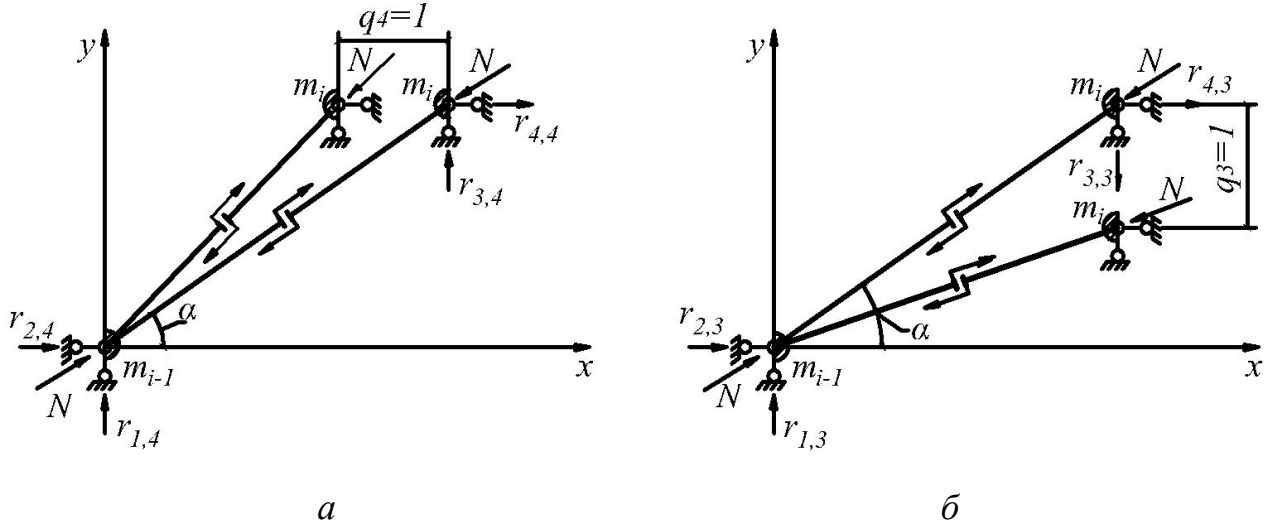


Рисунок 4.9 – Единичные перемещения связей

Аналогично, когда перемещения получают связи 1 и 2:

$$r_{1,1} = -\frac{N}{l} \cos^2 \alpha + m_{i-1} \omega^2, \quad r_{1,2} = r_{2,1} = \frac{N}{l} \sin \alpha \cdot \cos \alpha, \quad r_{2,2} = -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha + m_{i-1} \omega^2.$$

При отсутствии масс, т.е. отсутствии сил инерции, выражение для коэффициентов матрицы откликов совпадают с приведенными в главе 2 для случая продольно сжатого конечного элемента, шарнирно опертого по концам.

При отсутствии продольной силы выражение для коэффициентов матрицы откликов соответствуют приведенным в главе 2 при  $\alpha = 0$ .

Для иллюстрации рассмотрим классическую задачу о динамической устойчивости фермы Мизеса (рисунок 4.10, а), решение которой выполнялось нами в работе [37]. Основная система смешанного метода показана на рисунке 4.10, б.

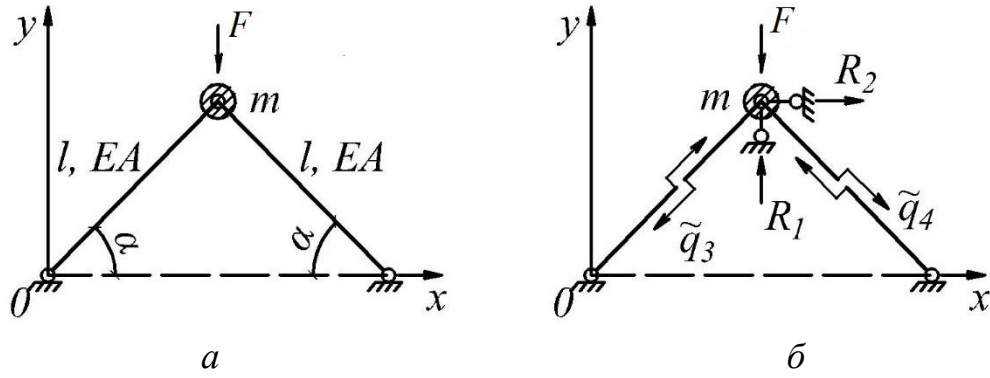


Рисунок 4.10 – Ферма Мизеса

Матрица коэффициентов канонической системы уравнений смешанного метода (глобальная матрица откликов системы) в данном случае имеет следующий вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{14} \\ r_{21} & r_{22} & \tilde{r}_{23} & \tilde{r}_{24} \\ \tilde{\delta}_{31} & \tilde{\delta}_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \tilde{\delta}_{41} & \tilde{\delta}_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Здесь с учетом симметрии системы и того, что в глобальной системе координат  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ , где  $\alpha_1$  – угол наклона к оси  $x$  левого стержня,

$$\begin{aligned} r_{11} &= -2 \frac{N}{l} \sin^2 \alpha - m\omega^2, \quad r_{12} = r_{21} = 0, \quad r_{22} = -2 \frac{N}{l} \cos^2 \alpha - m\omega^2, \\ \tilde{r}_{13} &= -\tilde{\delta}_{31} = \cos \alpha, \quad \tilde{r}_{23} = -\tilde{\delta}_{32} = \sin \alpha, \quad \tilde{r}_{24} = -\tilde{\delta}_{42} = \sin \alpha, \quad \tilde{r}_{14} = -\tilde{\delta}_{41} = -\cos \alpha, \\ \delta_{33} &= \delta_{44} = \frac{l}{EA}, \quad \delta_{43} = \delta_{34} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Система канонических уравнений, соответствующая матрице откликов (4.15) с коэффициентами (4.16), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} r_{11}q_1 - r_{12}q_2 + \tilde{r}_{13}q_3 + \tilde{r}_{14}q_4 &= 0, \\ r_{21}q_1 - r_{22}q_2 + \tilde{r}_{23}q_3 + \tilde{r}_{24}q_4 &= 0, \\ \tilde{\delta}_{31}q_1 - \tilde{\delta}_{32}q_2 + \delta_{33}\tilde{q}_3 + \delta_{34}\tilde{q}_4 &= 0, \\ \tilde{\delta}_{41}q_1 - \tilde{\delta}_{42}q_2 + \delta_{43}\tilde{q}_3 + \delta_{44}\tilde{q}_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Найдя из последних двух уравнений  $\tilde{q}_3$  и  $\tilde{q}_4$  и подставив их в третье и четвертое уравнения, получаем после преобразований два независимых уравнения относительно неизвестных  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\begin{aligned} q_1 \left[ r_{11} - \frac{r_{13}\delta_{31}}{\delta_{33}} - \frac{r_{14}\delta_{41}}{\delta_{44}} \right] &= 0, \\ q_2 \left[ r_{22} - \frac{r_{23}\delta_{32}}{\delta_{33}} - \frac{r_{24}\delta_{42}}{\delta_{44}} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Так как  $q_1$  и  $q_2$  не равны нулю, то

$$\begin{aligned} \left[ -2\frac{N}{l}\sin^2\alpha - m\omega^2 + \frac{(\cos^2\alpha)EA}{l} + \frac{(\cos^2\alpha)EA}{l} \right] &= 0, \\ \left[ -2\frac{N}{l}\cos^2\alpha + m\omega^2 + \frac{(\sin^2\alpha)EA}{l} + \frac{(\sin^2\alpha)EA}{l} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В частном случае, когда  $m=0$ , получаем два критических условия, соответствующие двум возможным формам потери устойчивости:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{2N}{l}\sin^2\alpha + 2\frac{EA}{l}\cos^2\alpha \right) &= 0, \\ \left( -\frac{2N}{l}\cos^2\alpha + 2\frac{EA}{l}\sin^2\alpha \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Отсюда получаем два критических условия, соответствующие двум возможным формам потери устойчивости:

$$N_{1,кр} = \frac{EA\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad N_{2,кр} = \frac{EA\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Так как  $N = \frac{F}{2\sin\alpha}$ , то

$$F_{1,кр} = \frac{2EA\cos^2\alpha}{\sin\alpha}, \quad F_{2,кр} = \frac{2EA\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}. \quad (4.21)$$

Этот результат совпадает с решением, приведенным в [41]. Меняя в этих выражениях значение угла  $\alpha$ , можно установить, какая из форм потери устойчивости будет наиболее опасна.

В другом частном случае, когда отсутствует продольная сила  $N$ , получаем из (4.19) частотные уравнения, из которых могут быть найдены частоты свободных колебаний для прямосимметричной и обратносимметричной форм колебаний

$$\omega_1^2 = \left( \frac{EA}{ml} \right) 2 \cos^2 \alpha, \quad \omega_2^2 = \left( \frac{EA}{ml} \right) 2 \sin^2 \alpha. \quad (4.22)$$

Задаваясь в (4.19) определенным значением  $N$  можно найти значение частоты свободных колебаний  $\omega$  формы при такой нагрузке. Такие графики зависимости  $\omega$  от  $N$  для первой и второй форм колебаний приведены в выполненной под нашим руководством диссертации В.В. Габовой [19].

Задаваясь в (4.19) определенной частотой возмущающих установившихся колебаний, можно найти то значение нагрузки  $N$ , при которой произойдет потеря устойчивости. Соответствующие зависимости также приведены в виде графиков в [19].

#### 4.2.2 Динамическая матрица откликов

##### конечного элемента-стержня с жестким закреплением по концам

Обобщим, изложенный выше, алгоритм получения динамической матрицы откликов на случай одновременного действия инерционных сил и продольной силы (рисунок 4.11, а). Основная система для этого случая изображена на рисунке 4.11, б.

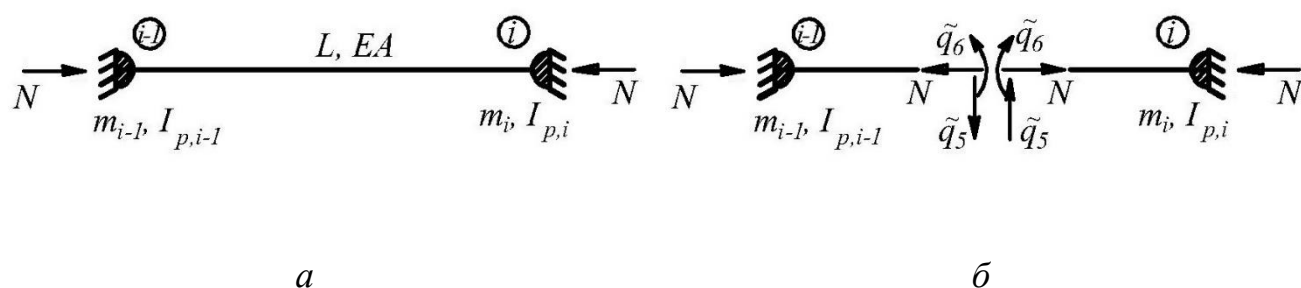


Рисунок 4.11 – Конечный элемент-стержень с жестким закреплением по концам

Применяя формулу Мора для продольно сжатого стержня и учитывая симметрию деформаций левой и правой половин конечного элемента (рисунок 4.12, а, б, в), получаем:

$$\delta_{5,5} = \frac{L^3}{12EI} \theta_1(\nu), \quad \delta_{6,6} = \frac{L}{3EI} [\theta_1(\nu) + \theta_2(\nu) + \theta_3(\nu)],$$

$$\tilde{\delta}_{5,6} = \frac{L^2}{24EI} [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] - \frac{L^2}{24EI} [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] = 0,$$

где  $\nu = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}}, \quad \theta_1(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left( \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} - 1 \right), \quad \theta_2(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left( \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} + \nu \cdot \operatorname{tg} \nu - \frac{2}{\cos \nu} + 1 \right),$

$$\theta_3(\nu) = \frac{6}{\nu^2} \left( \frac{1}{\cos \nu} - \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \right).$$

Коэффициенты матрицы откликов получим из условий статического равновесия.

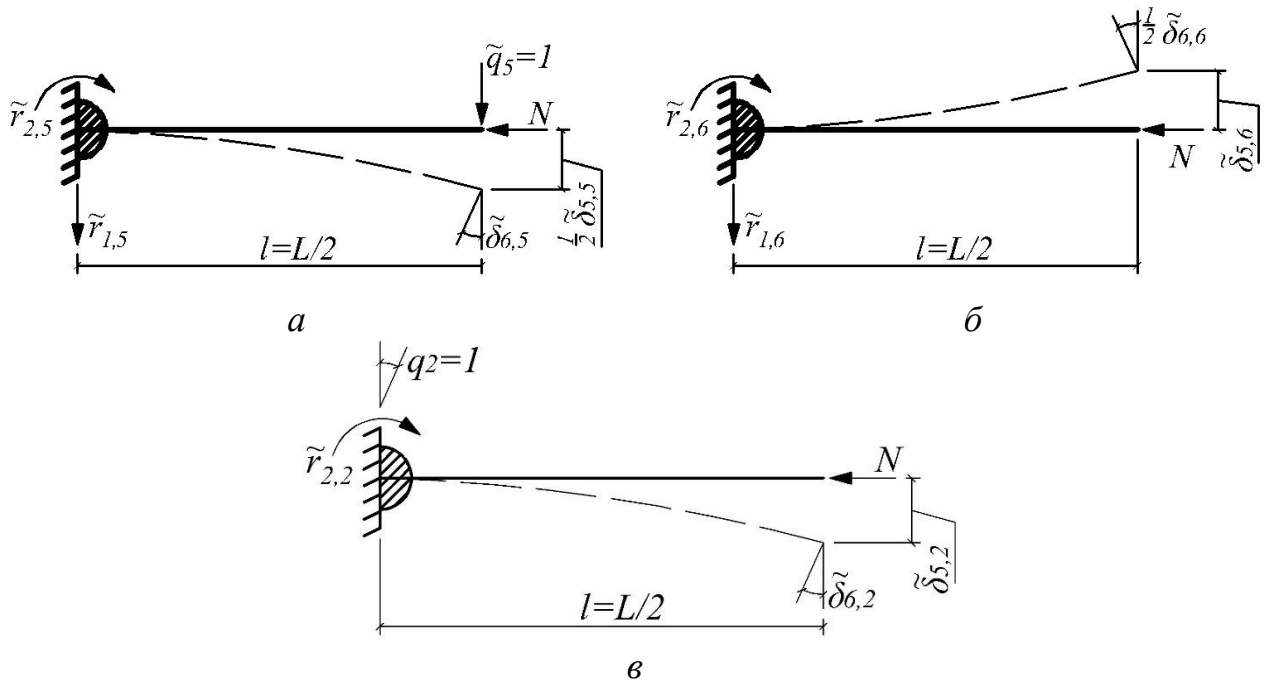


Рисунок 4.12 – Единичные воздействия на левую часть конечного элемента-стержня с жестким закреплением по концам

В окончательном виде блоки матрицы откликов имеют следующий вид:

$$[r] = \begin{bmatrix} -m_{i-1}\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\rho,i-1}\omega^2 - \frac{2EI}{L}v \cdot \operatorname{tg} v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_i\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{\rho,i}\omega^2 - \frac{2EI}{L}v \cdot \operatorname{tg} v \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{r}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{L}{6}(3+v^2\theta_1(v)) & 1+\frac{v^2}{6}(2\theta_1(v)+\theta_3(v)) \\ -1 & 0 \\ \frac{L}{6}(3+v^2\theta_1(v)) & -\left[1+\frac{v^2}{6}(2\theta_1(v)+\theta_3(v))\right] \end{bmatrix}, \quad \delta = -[\tilde{r}]^T,$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI}\theta_1(v) & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI}[\theta_1(v)+\theta_2(v)+\theta_3(v)] \end{bmatrix}.$$

Полученные матрицы откликов позволяют по описанному в предыдущих разделах алгоритму выполнить расчет стержневой системы на совместное воздействие динамической возмущающей нагрузки и продольного сжатия.

### 4.3 Вынужденные колебания

Расчет конструкции на вынужденные колебания выполняется с целью определения действующих на систему при ее колебаниях максимальных сил инерции.

Рассмотрим случай, когда на систему в  $j$ -м узле действуют только силовые и кинематические вибрационные нагрузки, изменяющиеся по одному и тому же гармоническому закону:  $F_j(t) = F_j \sin \theta t$ ,  $M_j(t) = M_j \sin \theta t$ ,  $\Delta_j(t) = Y_j \sin \theta t$ , где  $\theta$  - круговая частота.

Через некоторый промежуток времени вибрационная нагрузка подчинит себе систему, и она начнет совершать установившиеся колебания по закону  $y_i(t) = A_i \sin(\theta t + \lambda)$ , где  $A_i$  - амплитуда колебаний  $i$ -го узла.

В случае, когда на систему действует произвольная периодическая нагрузка, разложив ее в ряд Фурье, перейдем к простейшим гармоническим нагрузкам:

$$F(t) = F_1 \sin(\theta_1 t + \lambda_1) + F_2 \sin(\theta_2 t + \lambda_2) + \dots + F_n \sin(\theta_n t + \lambda_n).$$

Определив, возникающие в системе от действия каждой из нагрузок, максимальные усилия, на основе принципа независимости действия сил найдем максимальные усилия при суммарном воздействии этих нагрузок.

Рассмотрим, например, балку с точечными массами  $m_1, m_2, \dots, m_i, m_j, \dots, m_n$ . Пусть на нее действует одна нагрузка  $F \sin \theta t$  в  $j$ -м узле. Каждая узловая точечная масса имеет в данном случае изгибных колебаний одну степень свободы. Тогда максимальные инерционные силы определяются выражением:

$$I_i = m_i \theta^2 y_i. \quad (4.23)$$

Система разрешающих уравнений смешанного метода в развернутом виде с учетом (4.32), имеет вид:

$$\begin{aligned} R_i &= r_{i,1} q_1 + r_{i,2} q_2 + \dots + (r_{i,i} - m_i \theta^2) q_i + r_{i,i+1} q_{i+1} + \dots + r_{i,n} q_n + \\ &+ \tilde{r}_{i,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \tilde{r}_{i,n+m} \tilde{q}_{n+m} - R_{i,F} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \\ \Delta_{n+t} &= \tilde{\delta}_{n+t,1} q_1 + \tilde{\delta}_{n+t,2} q_2 + \dots + \tilde{\delta}_{n+t,n} q_n + \\ &+ \delta_{n+t,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \delta_{n+t,n+m} \tilde{q}_{n+m} - \Delta_{n+t,F} = 0, \quad (t = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Здесь  $q_i = y_i$  - неизвестные амплитуды колебаний масс  $m_i$ ;

$\tilde{q}_{n+t}$  - неизвестные усилия в отброшенных связях основной системы.

В матричной форме эта система уравнений имеет вид:

$$\begin{bmatrix} r^* & \tilde{r} \\ \delta & \delta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R_F \\ \Delta_F \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.24)$$

Здесь подматрица  $r^*$ , является суммой двух матриц:  $r^* = r + r_\theta$ , где  $r_\theta$  - подматрица откликов на воздействие инерционных сил.

Значения коэффициентов матриц  $\delta$ ,  $\delta$ ,  $r$ ,  $\tilde{r}$  и вектора воздействий  $R_F$ ,  $\Delta_F$  аналогичны статическому расчету и приведены в главе 2.

Для рассматриваемого случая с точечными массами, матрица откликов на воздействие инерционных сил имеет вид:

$$[r_\theta] = \begin{bmatrix} -m_1\theta^2 & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & -m_i\theta^2 & \\ & & & \dots \\ 0 & & & & -m_n\theta^2 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Вектор реакций:  $\{R_F\} = [0, 0, \dots, R_{j,F}, 0, \dots, 0]^T$ .

При наличии объемных масс каждая из них будет иметь две степени свободы.

Решая уравнение (4.33), находим компоненты вектора неизвестных  $[q \ \tilde{q}]^T$ .

Для иллюстрации представленного выше алгоритма расчета определим максимальные инерционные силы при вынужденных колебаниях статически определимой рамы (рисунок 4.13, а). Принятая для расчета основная система представлена на рисунке 4.13, б.

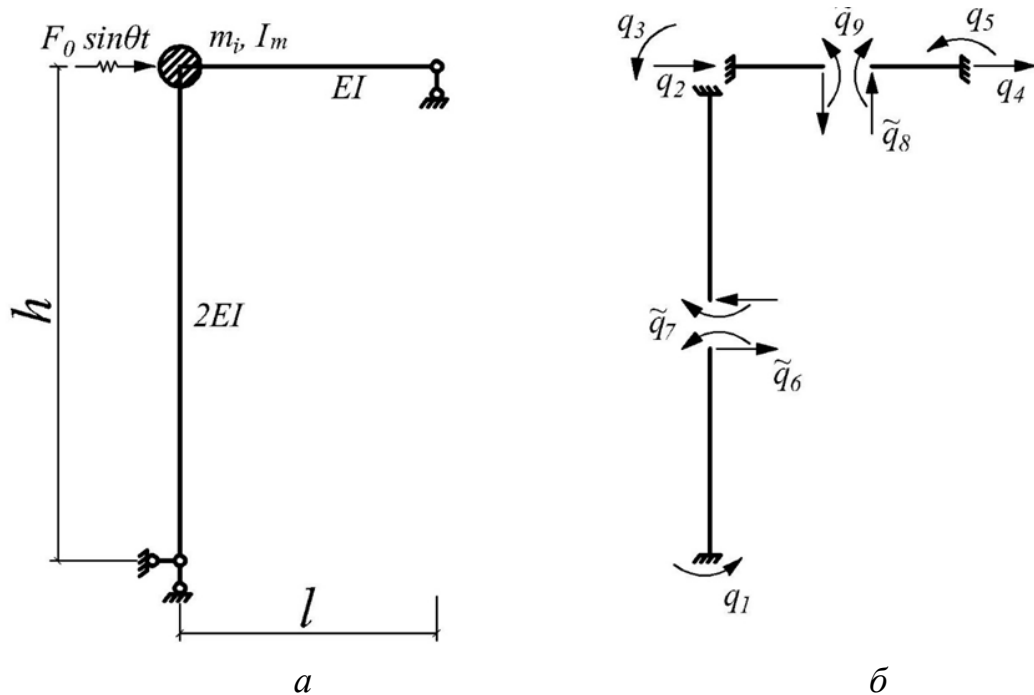


Рисунок 4.13 – а) рама под воздействием гармонической нагрузки  $F \sin(\theta t)$ ;  
б) основная система

Исходные данные:

$$l = 1,5 \text{ м}, h = 3 \text{ м}, m = 500 \text{ кг}, I_m = 200 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, EI = 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2, F_o = 200 \text{ Н}, \theta = 10 \frac{1}{\text{с}}.$$

Для рассматриваемого случая коэффициенты матриц  $\delta$ ,  $\tilde{\delta}$ ,  $r$ ,  $\tilde{r}$  аналогичны статическому расчету. Вектор перемещений  $[\Delta_F]$  нулевой. Вектор реакций имеет вид:  $\{R_F\} = [0 \quad -F_o \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ .

Матрица откликов на воздействие инерционных сил имеет порядок (5x5), все ее коэффициенты нулевые, за исключением:  $r_{\theta 2,2} = -m_i \theta^2$ ,  $r_{\theta 3,3} = -I_m \theta^2$ .

После решения системы уравнений (4.33) из выражения (4.32), получаем значения максимальных сил инерции:  $I_1 = -256,75 \text{ Н}$ ,  $I_2 = -17,95 \text{ Н}$ .

Этот результат совпадает с приведенным в [50].

#### 4.4 Формирование динамической матрицы масс для изгибаемого конечного элемента - пластинки

Возможны несколько вариантов динамической матрицы откликов конечного элемента. Эти варианты для стержневого КЭ рассмотрены выше в разделах 4.1-4.2.

Рассмотрим построение динамической матрицы масс, используемой для формулирования динамического частотного уравнения в расчете тонких пластин, на примере изгибаемого прямоугольного элемента с 12 степенями свободы, впервые изложенное в нашей работе [52]. Основная система МКЭ в форме КСФ для него и нумерация основных неизвестных в узлах конечного элемента показаны на рисунке 4.14.

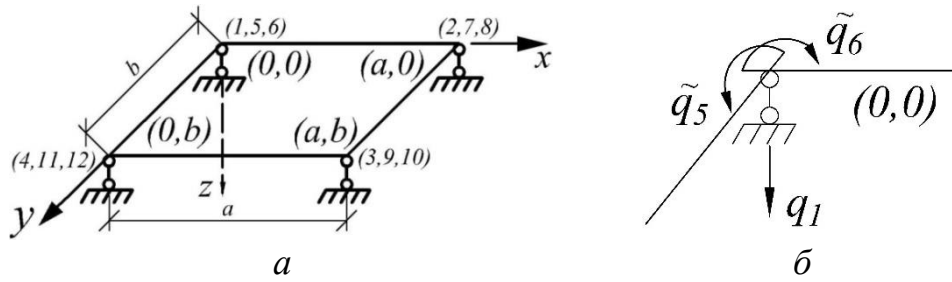


Рисунок 4.14 – Основная система смешанного метода для изгибаемого прямоугольного элемента с 12 степенями свободы и нумерация основных неизвестных в узлах конечного элемента

Частотное уравнение для этой рассматриваемой задачи состоит из статической матрицы откликов и динамической матрицы масс:

$$([D_{\text{ст}}] - \lambda [\mathbf{m}])\{q\} = 0, \quad (4.26)$$

где  $D_{\text{ст}}$  – статическая матрица откликов,  $[\mathbf{m}]$  – динамическая матрица масс,  $\{q\}$  – вектор основных неизвестных в основной системе КЭ в форме смешанного метода.

Определитель этого уравнения

$$\|c\| = \|D - \lambda m\| = 0.$$

$\lambda = \omega^2$ ,  $\omega$  – частота свободных колебаний.

Функция прогибов КЭ-пластинки аппроксимируется, как и для задач статики, неполным бикубическим полиномом:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{12} xy^3 = [\Phi_1(x, y)]\{\alpha\}, \quad (4.27)$$

где  $[\Phi_1(x, y)] = [1, x, y, x^2, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^3, y^3, x^3y, xy^3]$ ,

$$\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}]^T.$$

Тогда

$$M_x^{(y)} = L_1 [\Phi_1(x, y)]\{\alpha\}, \quad M_y^{(x)} = L_2 [\Phi_1(x, y)]\{\alpha\}, \quad (4.28)$$

где  $L_1 = -D_x \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ ,  $L_2 = -D_y \left( \mu_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ .

В матричной форме выражения (4.27) и (4.28) можно объединить в одно:

$$\begin{aligned} [q(x, y)] = \begin{bmatrix} w(x, y) \\ M_x(x, y) \\ M_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & L_1, & L_2, \end{bmatrix} \cdot [B(x, y)] \cdot \{\alpha\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$(1 \times 1) \qquad \qquad \qquad (3 \times 1) \qquad \qquad \qquad (3 \times 1) \qquad (12 \times 1)$   
 $(3 \times 1)$

$$\text{где } [B(x, y)] = \begin{bmatrix} \Phi_1(x, y) \\ \Phi_1(x, y) \\ \Phi_1(x, y) \end{bmatrix}.$$

Подставив в (4.38) координаты узлов КЭ, получим вектор основных неизвестных:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} \Phi_1(0,0) \\ L_1\Phi_1(0,0) \\ L_2\Phi_1(0,0) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_1(0,b) \\ L_1\Phi_1(0,b) \\ L_2\Phi_1(0,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} = [V] \cdot \{\alpha\}, \quad (4.30)$$

$(12 \times 1) \qquad (12 \times 12) \quad (12 \times 1)$   
 $(12 \times 12)$

$$\text{Отсюда следует } \{\alpha\} = [V]^{-1} \{q\}. \quad (4.31)$$

Подставив этот результат в (4.27) и (4.28), получим

$$\begin{aligned} w(x, y) &= [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \\ M_x^{(y)}(x, y) &= L_1 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \quad M_y^{(x)}(x, y) = L_2 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \\ M_{xy}(x, y) &= L_3 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\text{где } L_3 = -D_k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

Необходимые для дальнейших расчетов выражения для кривизн конечного элемента имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\chi_x(x, y) &= L_4 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \\ \chi_y(x, y) &= L_5 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \\ \chi_{xy}(x, y) &= L_6 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\},\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\text{где } L_4 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_5 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_6 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

Углы поворота нормали к плоскости пластины в точке  $(x, y)$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\varphi_x^{(y)}(x, y) &= \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = L_7 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}, \\ \varphi_y^{(y)}(x, y) &= \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = L_8 [\Phi_1(x, y)] [V]^{-1} \{q\}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Тогда вектор  $\{\bar{q}_1\}$  линейных и угловых перемещений в узлах КЭ определяется в соответствии с (4.43) следующим выражением:

$$\{\bar{q}_1\} = \begin{bmatrix} w(0,0) \\ \varphi_x(0,0) \\ \varphi_y(0,0) \\ \dots\dots\dots \\ w(0,b) \\ \varphi_x(0,b) \\ \varphi_y(0,b) \end{bmatrix}_{(12 \times 1)} = \begin{bmatrix} \Phi_1(0,0) \\ L_7 \Phi_1(0,0) \\ L_8 \Phi_1(0,0) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_1(0,b) \\ L_7 \Phi_1(0,b) \\ L_8 \Phi_1(0,b) \end{bmatrix}_{(12 \times 12)} \cdot \begin{bmatrix} V \end{bmatrix}_{(12 \times 12)}^{-1} \cdot \{q\}_{(12 \times 1)},\tag{4.35}$$

Таким образом, вектор  $\{\bar{q}_1\}$  выражен через вектор  $\{q\}$  основных неизвестных смешанного метода.

Рассмотрим далее алгоритм формирования матрицы масс конечного элемента как функции от вектора основных неизвестных смешанного метода.

На рисунке 4.15 показан элементарный объем пластинки.

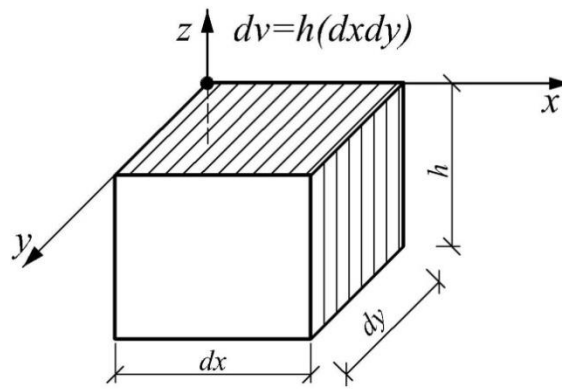


Рисунок 4.15 – Элементарный объем пластинки

Элементарная масса этого объема  $d\bar{m} = (\bar{m})(dxdy)$ , где  $\bar{m}$  - масса, приходящаяся на единицу объема.

Введем следующие обозначения:

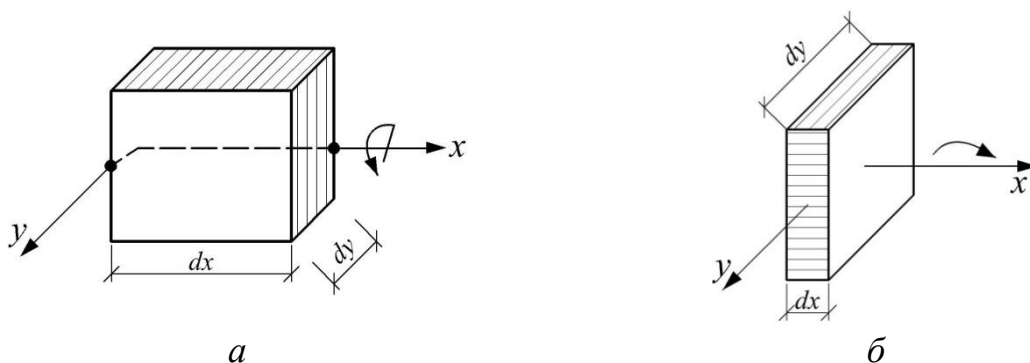
$I_x^{(y)}$  - момент инерции поперечного сечения элементарного конечного элемента  $dv$  относительно оси  $y$  (рис. 4.16, а),

$I_x^{(y)}$  - момент инерции поперечного сечения относительно оси  $x$  (рис. 4.16, б),

$(\rho I_x^{(y)})dxdy$  - элементарный момент инерции массы, создающий поворот вокруг оси  $y$  и изгиб в плоскости  $xoz$ ,

$(\rho I_y^{(x)})dxdy$  - элементарный момент инерции массы, создающий поворот относительно оси  $x$  и изгиб в плоскости  $yoz$ ,

$\rho$  - плотность материала пластинки.

Рисунок 4.16 – Моменты инерции поперечного сечения элементарного конечного элемента  $dv$ 

Величины узловых масс (согласованную матрицу масс) получим по тому же алгоритму, который используется при приведении распределенной по

площади КЭ нагрузки к узловой, т.е. приравнивая возможные работы распределенных нагрузок и возможные работы узловых инерционных нагрузок.

Рассматривая свободные колебания пластинки, представим функцию её возможных вертикальных перемещений в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координат  $x, y$  и аппроксимируется той же функцией, что и при статическом изгибе КЭ, а другая зависит только от времени:

$$w(x, y, t) = w(x, y) f(t). \quad (4.36)$$

В этом случае элементарная инерционная сила в направлении оси  $z$

$$dF_z = -(\bar{\mathbf{m}} \cdot dx \cdot dy) w(x, y) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}. \quad (4.37)$$

Аналогично

$$dF_{\rho, x} = -(\rho I_x^{(y)} dx dy) \varphi_x^{(y)}(x, y) \frac{d^2 f(t)}{dt^2},$$

$$dF_{\rho, y} = -(\rho I_y^{(x)} dx dy) \varphi_y^{(x)}(x, y) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}.$$

Тогда возможная работа этих элементарных инерционных сил по всей площади конечного элемента:

$$\begin{aligned} \delta A_{распр} &= - \int_0^a \int_0^b (dF_z \cdot w(x, y) + dF_{\rho, x} \varphi_x^{(y)} + dF_{\rho, y} \varphi_y^{(x)}) dx dy \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \\ &= - \int_0^a \int_0^b \left( \bar{\mathbf{m}} \cdot w^2(x, y) + \rho I_x^{(y)} \left( \varphi_x^{(y)} \right)^2(x, y) + \rho I_y^{(x)} \left( \varphi_y^{(x)} \right)^2(x, y) \right) dx dy \frac{d^2 f(t)}{dt^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставив в это выражение функций  $w(x, y)$ ,  $\varphi_x(x, y)$ ,  $\varphi_y(x, y)$ , получим:

$$\delta A_{распр} = - \{ \delta q \}^T \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_x & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_y \end{bmatrix} \cdot [\Phi]^T \cdot [\Phi] \cdot \{ q \} dx dy \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad (4.39)$$

$$\text{где} [\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi_1(x, y)] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_1(x, y)] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_1(x, y)] \end{bmatrix}.$$

Представим согласованную матрицу масс в соответствии с принятой для матрицы откликов нумерацией основных неизвестных в узлах конечного элемента (рисунок 4.17):

$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11} & \mathbf{m}_{12} & \dots & \mathbf{m}_{1,12} \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} & \dots & \mathbf{m}_{2,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{m}_{12,1} & \mathbf{m}_{12,2} & \dots & \mathbf{m}_{12,12} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Этим массам соответствуют линейные перемещения и углы поворота узлов конечного элемента:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \dots \\ \dots \\ \bar{q}_{10} \\ \bar{q}_{11} \\ \bar{q}_{12} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=1}^{12} w_1^{(k)}(0,0) \\ \sum_{k=1}^{12} \varphi_{x,5}^{(k)}(0,0) \\ \sum_{k=1}^{12} \varphi_{y,6}^{(k)}(0,0) \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{12} w_4^{(k)}(0,b) \\ \sum_{k=1}^{12} \varphi_{x,11}^{(k)}(0,b) \\ \sum_{k=1}^{12} \varphi_{y,12}^{(k)}(0,b) \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{12} \left[ \begin{array}{c} [\Phi_1^{(k)}(0,0)] \\ \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_1^{(k)}(0,0)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_1^{(k)}(0,0)] \\ \dots \\ \dots \\ [\Phi_1^{(k)}(0,b)] \\ \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_1^{(k)}(0,b)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [\Phi_1^{(k)}(0,b)] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} [\Phi_1^{(k)}(0,0)] \\ [\Phi_2^{(k)}(0,0)] \\ [\Phi_3^{(k)}(0,0)] \\ \dots \\ \dots \\ [\Phi_1^{(k)}(0,b)] \\ [\Phi_2^{(k)}(0,b)] \\ [\Phi_3^{(k)}(0,b)] \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ \tilde{q}_5 \\ \tilde{q}_6 \\ \dots \\ \dots \\ q_4 \\ \tilde{q}_{11} \\ \tilde{q}_{12} \end{array} \right\} \quad (4.41)$$

$$\text{где } \Phi_2(x, y) = - \left[ D_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] + D_\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] \right],$$

$$\Phi_3(x, y) = - \left[ D_\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] + D_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot [\Phi_1(x, y)] \right],$$

Здесь индекс  $(k)$  означает номер неизвестного в основной системе конечного элемента, от воздействия которого возникают отклики  $w^{(k)}$ ,  $\varphi_x^{(k)}$ ,  $\varphi_y^{(k)}$  во всех узлах КЭ.

Возможная работа узловых инерционных сил на соответствующих узловых перемещениях определяется выражением:

$$\delta[A_{\text{узл}}] = -[F] \cdot [q] \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad (4.42)$$

где

$$[F] = \delta [q]^T [m] \quad (4.43)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & q_{1,12} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \dots & q_{2,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{12,1} & q_{12,2} & \dots & q_{12,12} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$q_{1,i}$  - перемещение по направлению 1 (ось  $z$ ) от воздействий основных неизвестных с номером  $i$ : 1 -  $w_z(0,0)$ , 2 -  $w_z(a,0)$ , ..., 5 -  $M_x(0,0)$ , 6 -  $M_y(0,0)$  и т.д.

Подставив в (4.41) выражение (4.43), получаем:

$$\delta[A_{\text{узл}}] = - \delta [q]^T [m] [q] \frac{d^2 f(t)}{dt^2}. \quad (4.44)$$

Сравнивая выражения (4.44) и (4.39), находим:

$$[m] = \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} \bar{m} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_x & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_y \end{bmatrix} [\Phi]^T \cdot [\Phi] dx dy. \quad (4.45)$$

Формирование матрицы масс  $[m]$  всей конструкции выполняется по тому же алгоритму, что и формирование матрицы откликов  $[D]$  всей конструкции.

Из этого следует, что порядок системы уравнений для всей конструкции зависит от числа узлов конечно-элементной сетки. Переходя от редкой сетки к более густой, можно получить решение на последовательности сгущающихся сеток с использованием результатов на предыдущей сетке для их итерационного уточнения на последующей.

#### **4.5 Алгоритмы построения редуцированных частотных уравнений в форме неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов и ее решение**

Частотное уравнение, полученное на основе МКЭ, имеет для сложных конструкций, как правило, очень высокий порядок. Это обстоятельство делает практически невозможным его решение, как полной алгебраической проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ), из-за математических трудностей и значительных затрат машинного времени.

Даже при статическом расчете современных сооружений и конструкций с использованием мощных вычислительных комплексов, решение СЛАУ очень высоких порядков ( $10^6 - 10^7$ ) сталкивается с определенными затруднениями. Они возрастают многократно в пропорции  $\approx N^2$ , где  $N$  – порядок разрешающей СЛАУ. В то же время в большинстве практических задач достаточно знать не весь спектр СЗ и СВ, а только ограниченное число из этого спектра, как правило, наименьших СЗ и соответствующих им СВ. Поэтому представляли и представляют большой интерес методы, ориентированные на нахождение имеющих большое практическое значение собственных частот и форм нижней части спектра собственных значений частотного уравнения. Эти методы связаны с решением

неполной алгебраической проблемы собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ).

Следует отметить, что из-за высоких порядков матриц традиционные итерационные методы [211, 240, 243, 244, 294, 310, 314] для решения проблемы СЗ оказываются неэффективными. Поэтому для решения больших задач используются методы, учитывающие разреженность и симметричность матриц.

В работе [314] выполнена классификация и проведен детальный обзор большинства существующих методов редуцирования.

Все эти методы получения редуцированного частотного уравнения и его решения можно разделить на две основные группы. К первой из них относятся те, которые основаны на имеющемся исходном частотном уравнении в форме полной алгебраической проблемы СЗ и СВ и чисто математическом (алгебраическом) его преобразовании к редуцированной форме с помощью матриц перехода [272], статической конденсации [214, 228, 249], динамической конденсации, [38, 272, 298].

Ко второй группе относятся методы, основанные на использовании физических моделей редуцирования: метод суперэлементов (подконструкций) [10, 17, 18, 187, 229], интерполяционные методы (метод разреженных сеток, сплайн-методы) [45, 46, 91, 259], метод покомпонентного синтеза форм (модального синтеза) [11, 12, 213, 218, 238, 239, 256, 258, 266-268, 270, 293, 299] и их математическое моделирование на последовательности сгущающихся конечно-элементных сеток или узлов конденсации. Решению неполной алгебраической проблемы СЗ и СВ на основе методов частотно-динамической конденсации посвящены работы [42, 44, 47-49, 163]. Большой обзор работ по этим методам выполнен в [43].

Таким образом, проблема сводится к получению редуцированного частотного уравнения и его решения как неполной алгебраической проблемы собственных значений и собственных векторов.

Рассмотрим основные варианты получения редуцированных частотных уравнений.

#### **4.5.1 Построение редуцированного частотного уравнения на основе сплайн - коллокационного алгоритма для областей с гладкой функцией прогибов**

Рассмотрим разработанный нами алгоритм получения редуцированных частотных уравнений для систем с большим числом степеней свободы на основе МКЭ в форме классического смешанного метода и сплайн-аппроксимаций.

Основная задача, решаемая с помощью редуционных методов, заключается в построении матрицы перехода от частотного уравнения высокого порядка на исходной конечно-элементной сетке узлов к редуцированному частотному уравнению заданного порядка на разреженной сетке узлов коллокации.

Понижение порядка частотных уравнений, т.е. переход к редуцированной системе этих уравнений (конденсация) выполняется с помощью аппроксимации дискретных функций основных неизвестных сплайн-функциями в интервалах между выбранными на конечно-элементной сетке узлами (точками) коллокации.

При этом значительно упрощается построение матриц перехода (преобразования) в процедурах конденсации на последовательности сгущающихся сеток узлов коллокации (конденсации) и исключаются операции обращения матриц высоких порядков.

Алгоритм построения такой матрицы перехода на основе сплайн-аппроксимации (преобразования) при использовании традиционного МКЭ в перемещениях описан в работах [45, 46, 259].

В этих работах матрица перехода строится на основе сплайн-аппроксимации функции перемещений узлов конечно-элементной сетки.

В данной работе для построения матрицы перехода и получения редуцированной динамической матрицы масс и соответствующего частотного уравнения используется МКЭ в форме классического смешанного метода.

При использовании МКЭ в форме классического смешанного метода неизвестными в разрешающих уравнениях являются как перемещения узлов конечно-элементной сетки, так и усилия в узловых точках сетки. Поэтому для перехода к разреженной сетке узлов необходимо использовать разные типы сплайнов для перемещений и усилий. Так, например, для узловых прогибов изгибаемой пластинки наиболее обоснованным представляется использование, как и в традиционном МКЭ, двумерных кубических сплайнов, а для усилий в узлах – билинейных сплайнов. [45, 46, 259]. В зависимости от мерности рассматриваемой конструкции эти сплайны могут быть одномерными, двумерными или трехмерными.

Алгоритм построения матрицы перехода от частотного уравнения высокого порядка к редуцированному частотному уравнению на разреженной сетке узлов коллокации остается тем же самым, что и в МКЭ в перемещениях.

- построение матрицы откликов суперэлемента (подобласти конструкции) на разреженной сетке узлов рассматриваемой конструкции;
- построение матрицы масс суперэлемента на разреженной сетке узлов и соответствующей матрицы инерционных силовых воздействий;
- построение редуцированного вектора основных неизвестных.

Рассмотрим предлагаемый алгоритма решения задачи на примере двумерной конструкции (рисунок 4.17) с конечно – элементной сеткой узлов  $IJ$ . За суперэлемент примем область, ограниченную координатными линиями, проходящими через узлы  $(I-1, J) - (I, J)$ ,  $(I-1, J-1) - (I, J-1)$ ,  $(I-1, J) - (I-1, J-1)$ ,  $(I, J) - (I, J-1)$  (рисунок 4.17 б).

Для аппроксимации перемещений в области занимаемой суперэлементом  $IJ$  примем двумерный сплайн  $S(z_{ij})_{IJ}$  в виде неполного бикубического полинома:

$$z_{ij} = S(z_{ij})_{IJ} = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 i^2 + \alpha_5 j^2 + \alpha_6 ij + \alpha_7 i^2 j + \alpha_8 i j^2 + \alpha_9 i^2 j^2 + \alpha_{10} j^3 + \alpha_{11} i^3 j + \alpha_{12} i j^3. \quad (4.46)$$

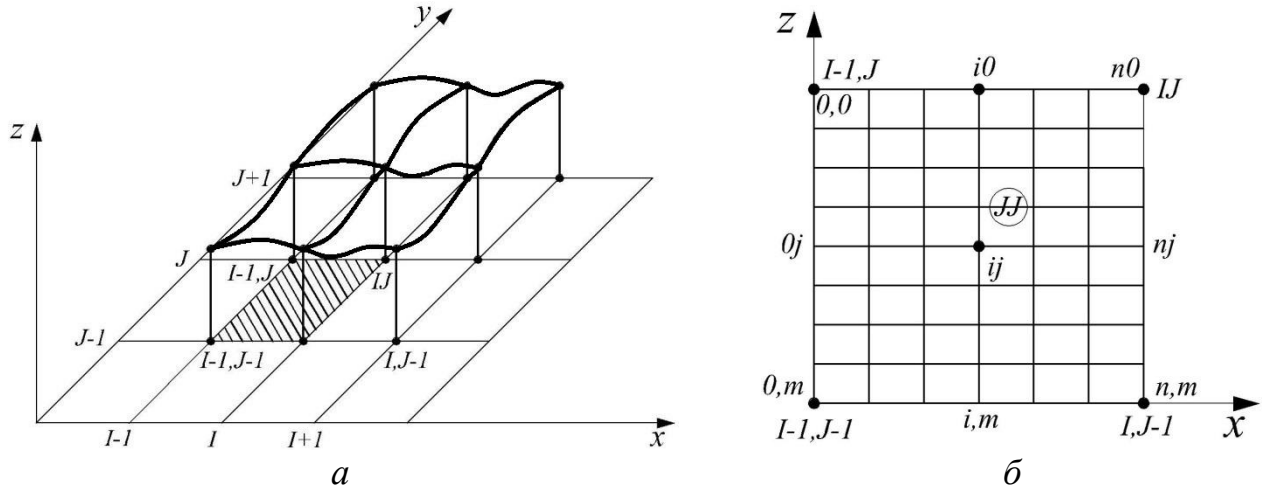


Рисунок 4.17 – Суперэлемент двумерной конструкции

Аппроксимирующий сплайн и его первые производные позволяют выразить все перемещения  $z_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}^{(x)}$ ,  $\varphi_{ij}^{(y)}$ , связанные с второстепенными степенями свободы, через перемещения  $z_{ij}$ ,  $\varphi_{IJ}^{(x)}$ ,  $\varphi_{IJ}^{(y)}$  в узлах конденсации, связанных с главными степенями свободы.

Представим для двумерной задачи выражения (4.46) для перемещений и углов поворота узловых сечений элемента  $IJ$  в матричной форме:

$$S(z_{ij})_{IJ} = [\Phi_1(i, j)] \{\alpha_k\}, \quad (k = 1, 2, \dots, 12).$$

$$\frac{\partial S(z_{ij})_{IJ}}{\partial i} = \varphi_{IJ}^{(x)} = \frac{\partial}{\partial i} [\Phi_1(i, j)]_{IJ} \{\alpha_k\}_{IJ} = L_1 [\phi_1(i, j)]_{IJ} \{\alpha_k\}_{IJ}, \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial S(z_{ij})_{IJ}}{\partial j} = \varphi_{IJ}^{(y)} = \frac{\partial}{\partial j} [\Phi_1(i, j)]_{IJ} \{\alpha_k\}_{IJ} = L_2 [\phi_1(i, j)]_{IJ} \{\alpha_k\}.$$

Здесь

$$[\Phi_1(i, j)]_{IJ} = [1, i, j, i^2, j^2, ij, i^2j, ij^2, i^3, j^3, i^3j, ij^3]_{IJ},$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial i}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial j}, \quad \{\alpha_k\}_{IJ} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}]_{IJ}^T.$$

Для узлов в углах  $IJ$  – го суперэлемента из (4.47) следует:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{l} \Phi_1(i=0, j=0) \\ L_1 \Phi_1(i=0, j=0) \\ L_2 \Phi_1(i=0, j=0) \\ \hline \Phi_1(i=n, j=0) \\ L_1 \Phi_1(i=n, j=0) \\ L_2 \Phi_1(i=n, j=0) \\ \hline \Phi_1(i=n, j=m) \\ L_1 \Phi_1(i=n, j=m) \\ L_2 \Phi_1(i=n, j=m) \\ \hline \Phi_1(i=0, j=m) \\ L_1 \Phi_1(i=0, j=m) \\ L_2 \Phi_1(i=0, j=m) \end{array} \right] \cdot \{\alpha_k'\} = \left\{ \begin{array}{l} z_{I-1,J}, \\ \varphi_{I-1,J}^{(x)}, \\ \varphi_{I-1,J}^{(y)}, \\ \hline z_{IJ}, \\ \varphi_{IJ}^{(x)}, \\ \varphi_{IJ}^{(y)}, \\ \hline z_{I,J-1}, \\ \varphi_{I,J-1}^{(x)}, \\ \varphi_{I,J-1}^{(y)}, \\ \hline z_{I-1,J-2}, \\ \varphi_{I-1,J-1}^{(x)}, \\ \varphi_{I-1,J-1}^{(y)} \end{array} \right\} = [V]_{IJ} \cdot \{\alpha_k\}_{IJ} = \left\{ \begin{array}{l} z \\ \varphi^x \\ \varphi^y \end{array} \right\} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Из (4.48) получаем:

$$\{\alpha_k\}_{IJ} = [V]_{IJ}^{-1} \{q\}_{IJ} \cdot \left\{ \begin{array}{l} z_{ij} \\ \varphi_{ij}^{(x)} \\ \varphi_{ij}^{(y)} \end{array} \right\}_{IJ} = \left[ \begin{array}{l} \Phi_1(i,j) \\ L_1 \Phi_1(i,j) \\ L_2 \Phi_1(i,j) \end{array} \right] \cdot [V]_{IJ}^{-1} \{q\}_{IJ} = [A_1]_{IJ} \{q\}_{IJ}. \quad (4.49)$$

Здесь  $[A_1]_{IJ} = [V]_{IJ}^{-1}$  - матрица перехода (преобразований) от линейных и угловых перемещений во второстепенных  $ij$  узлах ( $IJ$ ) - го суперэлемента к линейным и угловым перемещениям его главных узлов  $IJ$ :

$$\{q\}_{IJ} = \left[ y_{(I-1)J}, \varphi_{(I-1),J}^{(x)}, \varphi_{(I-1),J}^{(y)}, \dots, y_{(I-1)(J-1)}, \varphi_{(I-1,J-1)}^{(x)}, \varphi_{(I-1,J-1)}^{(y)} \right]^T.$$

Изгибающие и крутящие моменты во второстепенных узлах  $(IJ)$  – го суперэлемента определяются выражениями:

$$[M_{ij}] = \begin{Bmatrix} M_{ij}^{(x)} \\ M_{ij}^{(y)} \\ M_{ij}^{(xy)} \end{Bmatrix}_{IJ} = -[C]\{\partial\}[\Phi_1(i, j)]_{IJ} \{\alpha_k\}_{IJ}, \quad (4.50)$$

$$\text{где } [C] = \begin{bmatrix} D_x & D_m & 0 \\ D_m & D_y & 0 \\ 0 & 0 & 2D_k \end{bmatrix} - \text{матрица упругих свойств материала,}$$

$$\{\partial\} = \left[ \frac{\partial}{\partial i^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial j^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} \right]^T - \text{матрица операторов дифференцирования функции дискретного аргумента } w(i, j).$$

Подставив в (4.50) выражение для  $\{\alpha_k\}$  по (4.49), получим:

$$\begin{bmatrix} M_{x,ij} \\ M_{y,ij} \\ M_{xy,ij} \end{bmatrix} = [M_{ij}] = -[C]\{\partial_1\}[\Phi_1(i, j)][V]_{IJ}^{-1}\{q_{IJ}\} = [A_2]_{IJ}\{q\}_{IJ} \quad (4.51)$$

$$\text{где } \{\partial_1\} = [L_3, L_4, L_5]^T$$

$$L_3 = -D_x \left( \frac{\partial^2}{\partial i^2} + \mu_y \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right), \quad L_4 = -D_y \left( \mu_x \frac{\partial^2}{\partial i^2} + \frac{\partial^2}{\partial j^2} \right), \quad L_5 = -D_k \frac{\partial^2}{\partial i \partial j}.$$

Объединив матрицы перехода (4.49) и (4.51) в единую матрицу перехода для  $(IJ)$  – го суперэлемента, а затем выполнив стыковку матриц перехода всех суперэлементов, получаем по тому же алгоритму, как и для одномерной системы, редуцированные матрицы откликов и масс.

С использованием предлагаемого алгоритма снова решим тестовую задачу из п. 4.1.2 и найдем частоты свободных изгибных колебаний балки прямоугольного поперечного сечения с учетом только равномерно распределенной по длине балки собственной массы.

Расчет выполним при разном количестве узлов коллокации.

В таблице 4.3 приведены вычисленные с использованием описанного алгоритма первые три частоты при различном числе точек коллокаций и их погрешность по отношению к значениям, вычисленными на сетке узлов  $i$ .

Таблица 4.3

	Число точек коллокаций							Аналитическое решение
	4	6	8	10	12	14	16	
$\omega_1$	15.760	15.803	15.808	15.809	15.809	15.808	15.808	15.810
	-0.32%	-0.044%	-0.013%	0.006%	0.006%	0.013%	0.013%	
$\omega_2$	41.869	43.379	43.525	43.553	43.559	43.560	43.559	43.582
	-4.08%	-0.47%	-0.13%	-0.067%	-0.052%	0.051%	-0.052%	
$\omega_3$	68.828	83.379	84.952	85.238	85.311	85.330	85.332	85.445
	-19.15%	-2.42%	-0.58%	-0.24%	-0.16%	-0.14%	-0.13%	

Из сравнения полученных результатов со значениями, приведенными в таблице 4.3 видно, что полностью совпадают, так как в данном случае число узлов коллокации совпадает с числом узлов конечно-элементной сетки в разделе 4.1.2.

#### 4.5.2 Построение редуцированного частотного уравнения на основе статической конденсации

Статическая конденсация является самым удобным и простым способом редуцирования частотных уравнений, получаемых на основе МКЭ в перемещениях [214, 228, 249 и др.].

Обобщим этот способ на частотные уравнения, получаемые на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.

Следуя основной идее этого способа, разделим все степени свободы на основные -  $r$  и второстепенные -  $s$ . Частотное уравнение, в соответствии с этим, примет вид:

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & \tilde{K}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{sr} & \delta_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \tilde{\mathbf{m}}_{rs} \\ \tilde{\mathbf{m}}_{sr} & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.52)$$

Здесь

$$\begin{bmatrix} K_{rr} & \tilde{K}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{sr} & \delta_{ss} \end{bmatrix} = [D_{cm}] - \text{статическая матрица откликов},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr} & \tilde{\mathbf{m}}_{rs} \\ \tilde{\mathbf{m}}_{sr} & \mathbf{m}_{ss} \end{bmatrix} - \text{согласованная матрица масс},$$

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} - \text{вектор основных неизвестных}.$$

Запишем уравнение (4.61) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} 1) & K_{rr} q_r + \tilde{K}_{rs} \tilde{q}_s - \lambda (\mathbf{m}_{rr} q_r + \mathbf{m}_{rs} \tilde{q}_s) = 0, \\ 2) & \tilde{\delta}_{sr} q_r + \delta_{ss} \tilde{q}_s - \lambda (\mathbf{m}_{sr} q_r + \mathbf{m}_{ss} \tilde{q}_s) = 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Вводя предположение о том, что силы инерции масс  $\mathbf{m}_{sr}$  и  $\mathbf{m}_{ss}$ , т.е. относящиеся второстепенным степеням свободы  $s$ , пренебрежительно малы по сравнению с силами инерции масс  $\mathbf{m}_{rr}$  и  $\mathbf{m}_{rs}$ , относящимся основным степеням свободы  $r$ , получаем из второго уравнения в (4.53) статическое уравнение совместности деформаций

$$\tilde{\delta}_{sr} q_r + \delta_{ss} \tilde{q}_s = 0, \quad (4.54)$$

из которого следует связь между основными и второстепенными неизвестными:

$$\tilde{q}_s = -\delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{sr} q_r, \quad (4.55)$$

С учетом этого и зависимости (4.55) первое уравнение (4.53) приводится к виду

$$(K_{rr}^* - \lambda \mathbf{m}_{rr}^*) q_r = 0, \quad (4.56)$$

где  $K_{rr}^* = K_{rr} - \tilde{K}_{rs} \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{sr}$  - статически конденсированная к основным степеням свободы матрица откликов, имеющая физический смысл матрицы жесткости,

$\mathbf{m}_{rr}^* = \mathbf{m}_{rr} - \mathbf{m}_{rs} \delta_{ss}^{-1} \tilde{\delta}_{sr}$  - конденсированная к основным степеням свободы матрица масс.

Основным недостатком статической конденсации является погрешность расчета, вытекающая из принятого выше допущения о малом влиянии инерционных сил во второстепенных степенях свободы. Однако сравнительно

высокая точность определения низшей частоты колебаний компенсирует этот недостаток.

Увеличивая на следующем этапе такого расчета число главных степеней свободы и используя СЗ и СВ предыдущего этапа в качестве приближений в итерационном их уточнении, можно получить уточненный и расширенный спектр СЗ и СВ.

#### **4.5.3 Построение редуцированного частотного уравнения на основе алгоритма частотно-динамической конденсации**

Одним из наиболее эффективных методов, применяемых для решения неполной проблемы СЗ и СВ высокого порядка является метод последовательной частотно-динамической конденсации (ЧДК) изложенный в [42, 47-49, 163 и др.], получивший развитие и применение в ряде публикаций. Во всех этих работах частотно-динамическая конденсация используется для редуцирования частотных уравнений, полученных на основе МКЭ в форме метода перемещений или метода сил.

В данной работе излагается разработанный нами и опубликованный в работах [53, 59] алгоритм ЧДК для частотного уравнения, полученного на основе МКЭ в форме классического смешанного метода, позволяющий получить не только спектр низших частот колебаний, но и соответствующие им формы колебаний и напряженно-деформированное состояние конструкции.

### 4.5.3.1 Предварительная статическая конденсация

С учетом того, что согласованная матрица масс, как было показано выше, не имеет преимуществ по сравнению с несогласованной матрицей масс в отношении точности результатов расчета, частотное уравнение МКЭ в форме КСМ может быть записано в виде:

$$\left[ D_{\text{ст}} - \mathbf{m}_{\text{дин}} \right] \{ \bar{q} \} = 0, \quad (4.57)$$

где  $\left[ D_{\text{ст}} \right] = \begin{bmatrix} r_{k,k} & \tilde{r}_{k,f} \\ \tilde{\delta}_{f,k} & \delta_{f,f} \end{bmatrix}$  - статическая матрица откликов,

$\left[ \mathbf{m}_{\text{дин}} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_k & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_f \end{bmatrix}$  - диагональная матрица масс,

$\{ \bar{q} \} = \begin{Bmatrix} q_k \\ \tilde{q}_f \end{Bmatrix}$  - вектор основных неизвестных (кинематических и силовых),

$k = 1, 2, \dots, n; f = n + 1, n + 2, \dots, n + m.$

Представим уравнение (4.57) в виде системы матричных уравнений

$$\begin{cases} (r_{k,k} - \lambda \mathbf{m}_k) q_k + \tilde{r}_{k,f} \tilde{q}_f = 0, \\ \tilde{\delta}_{f,k} q_k + (\delta_{f,f} - \lambda \mathbf{m}_f) \tilde{q}_f = 0. \end{cases} \quad (4.58)$$

Как показано в некоторых исследованиях, например [40], влияние объемных масс, полученным сведением к ним распределенных по площади масс конечных элементов, незначительно. Поэтому им можно пренебречь, то есть положить  $\mathbf{m}_f = 0$ . Тогда второе уравнение в (4.58) принимает вид

$$\tilde{\delta}_{f,k} q_k + \delta_{f,f} \tilde{q}_f = 0. \quad (4.59)$$

Из него следует

$$\tilde{q}_f = -\delta_{f,f}^{-1} \tilde{\delta}_{f,k} q_k. \quad (4.60)$$

Подставив (4.60) в первое уравнение в (4.58), получим частотное уравнение вида

$$\left[ D_{\text{ст}(k)} - \lambda \mathbf{m}_k \right] \{q_k\} = 0, \quad (4.61)$$

где  $D_{\text{ст}(k)} = \begin{pmatrix} r_{k,k} - \tilde{r}_{k,f} \delta_{f,f}^{-1} \tilde{\delta}_{f,k} \end{pmatrix}$  - преобразованная с помощью статической конденсации матрица откликов  $D_{\text{ст}}$  из (4.57).

#### 4.5.3.2 Последовательная частотно-динамическая конденсация

Выделим теперь из  $n$  узлов конечно-элементной сетки с расположенными в них точечными массами  $\mathbf{m}_k$   $N$  узлов конденсации, в которые должны быть приведены эти массы.

Тогда уравнение (4.70) можно представить в виде

$$\begin{cases} (r_{b,b} - \lambda \mathbf{m}_b) q_b + r_{b,s} q_s = 0, \\ r_{s,b} q_b + (r_{s,s} - \lambda \mathbf{m}_s) q_s = 0, \end{cases} \quad (4.62)$$

где  $b = 1, 2, \dots, N$  - основные степени свободы,  $s = N + 1, N + 2, \dots, n$  - второстепенные степени свободы.

Выполнив вновь статическую конденсацию к основным степеням свободы, получим новое редуцированное частотное уравнение:

$$\left[ D_{\text{ст}(b)} - \lambda \mathbf{m}_b \right] \{q_b\} = 0, \quad (4.63)$$

где  $D_{\text{ст}(b)} = \begin{pmatrix} r_{b,b} - r_{b,s} r_{s,s}^{-1} r_{s,b} \end{pmatrix}$ .

Разделим теперь все массы не находящиеся в узлах конденсации, называемых второстепенными, на отдельные группы, включающие  $M_i$  степеней свободы, по степени их близости к узлам конденсации.

Для каждой из этой групп, составляется парциальная система вида:

$$\begin{cases} (r_{\bar{b},\bar{b}} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{b}}) q_{\bar{b}} + r_{\bar{b},\bar{s}} q_{\bar{s}} = 0, \\ r_{\bar{s},\bar{b}} q_{\bar{b}} + (r_{\bar{s},\bar{s}} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{s}}) q_{\bar{s}} = 0, \end{cases} \quad (4.64)$$

где  $\bar{b} = 1, 2, \dots, N, N+1, N+2, \dots, N+M_i$ ,  $\bar{s} = N+M_i+1, N+M_i+2, \dots, n$ .

Для каждой парциальной системы выполним статическую конденсацию и получим расширенное редуцированное частотное уравнение:

$$[D_{\text{ст}(\bar{b})} - \lambda \mathbf{m}_{\bar{b}}] \{q_{\bar{b}}\} = 0, \quad (4.65)$$

где  $D_{\text{ст}(\bar{b})} = \begin{pmatrix} r_{\bar{b},\bar{b}} - r_{\bar{b},\bar{s}} r_{\bar{s},\bar{s}}^{-1} r_{\bar{s},\bar{b}} \end{pmatrix}$ .

Решив это уравнение, найдем для этой парциальной системы соответствующие СЗ и СВ.

Возвращаясь снова к частотному уравнению (4.63), найдем такую матрицу масс  $\mathbf{m}_b$ , при которой все  $N$  собственных значение и собственных векторов этого уравнения совпадали бы с  $N$  низшими собственными частотами и формами колебаний, найденными для уравнения (4.65).

Для этого, исходя из физического смысла задачи, заменим матрицу  $\mathbf{m}_b$  в (4.63) матрицей

$$\bar{\mathbf{m}}_b = \mathbf{m}_b + \Delta \mathbf{m}_b^{(i)}, \quad (4.66)$$

где  $\Delta \mathbf{m}_b^{(i)}$  - конденсационные добавки к имеющимся в узлах  $b$  массам от  $i$ -ой группы второстепенных масс, обеспечивающие равенство  $N$  собственных частот и форм колебаний уравнений (4.63) и (4.65).

Подставив в (4.72) вместо  $\mathbf{m}_b$  матрицу  $\bar{\mathbf{m}}_b$  и найденные для (4.65)  $N$  собственных значений  $\lambda_k^{(i)}$ , ( $k=1, 2, \dots, N$ ) и собственных векторов  $v_{jk}^{(i)}$ , получим следующее уравнение:

$$[D_{\text{ст}(b)}] - [\lambda_k^{(i)}] [\bar{\mathbf{m}}_b] [v^{(i)}] = 0, \quad (4.67)$$

где

$$[\lambda_k^{(i)}] = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(i)} & & & \\ & \lambda_2^{(i)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N^{(i)} \end{bmatrix} \quad - \text{диагональная матрица из } N \text{ собственных значений уравнения (4.74),}$$

$$[v^{(i)}] = \begin{bmatrix} v_{1,1}^{(i)} & v_{2,1}^{(i)} & \dots & v_{N,1}^{(i)} \\ v_{1,2}^{(i)} & v_{2,2}^{(i)} & \dots & v_{N,2}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1,j}^{(i)} & v_{2,j}^{(i)} & \dots & v_{N,j}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1,N}^{(i)} & v_{2,N}^{(i)} & \dots & v_{N,N}^{(i)} \end{bmatrix} \quad - \text{матрица из } N \text{ соответствующих собственных векторов.}$$

Решая уравнение (4.67), находим:

$$[\bar{\mathbf{m}}_b^{(i)}] = [\lambda_k^{(i)}]^{-1} [D_{\text{ст}(b)}]. \quad (4.68)$$

Матрица конденсационных добавок от  $i$ -ой группы второстепенных масс

$$\Delta \mathbf{m}_b^{(i)} = \bar{\mathbf{m}}_b^{(i)} - \mathbf{m}_b. \quad (4.69)$$

Суммируя добавки для всех парциальных систем, получим конденсированную к выбранным  $N$  узлам  $b$  редуцированную матрицу масс рассматриваемой конструкции:

$$\mathbf{m}_b^{(\text{ред})} = \mathbf{m}_b + \sum_{i=1}^T \Delta \mathbf{m}_b^{(i)}, \quad (4.70)$$

где  $T$  - число парциальных систем.

Подставив в (4.76) вместо  $\bar{\mathbf{m}}_b$  матрицу масс  $\mathbf{m}_b^{(\text{ред})}$  по (4.70), решим полученное редуцированное частотное уравнение

$$[[D_{\text{ст}(b)}] - [\lambda_k][\mathbf{m}_b^{(\text{ред})}]]\{q_b\} = 0. \quad (4.71)$$

В результате найдем редуцированный к выбранным узлам конденсации  $b$  спектр собственных значений СЗ и собственных векторов СВ, то есть  $\lambda_k$ ,  $v_{j,k}$ , где  $k=1, 2, \dots, N$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ .

#### 4.5.4 Анализ эффективности вариантов моделирования редуцированных частотных уравнений

Выполним расчет прямоугольной жестко заземленной по контуру пластинки размером  $8 \times 12$  м, толщиной  $h=0,06$  м, несущей равномерно распределенную массу  $m=1$  кг/см<sup>2</sup>. В таблице 4.4 приведены результаты нескольких вариантов расчета при разбиении пластинки КЭ-сеткой  $8 \times 12$ : с использованием полной системы уравнений (“точное решение”), с использованием статической конденсации, и частотно-динамической конденсации при двух вариантах количества подсистем (рисунок 4.18).

Таблица 4.4

СЗ	КЭ-сетка 8x12, n=231	СК n=15	$\Delta$ , %	ЧДК t = 4	$\Delta$ , %	ЧДК t = 6	$\Delta$ , %
$\lambda_1$	2,512	2,66	6	2,372	-5	2,370	-5
$\lambda_2$	1,030	1,49	30	1,060	-2	1,051	-2
$\lambda_3$	0,423	0,479	13	0,426	0,7	0,429	1
$\lambda_4$	0,412	0,432	4,5	0,395	4	0,398	4
$\lambda_5$	0,306	0,390	27,4	0,295	-3	0,291	-4
$\lambda_6$	0,190	0,212	11,6	0,192	1	0,188	-1
$\lambda_7$	0,182	0,197	8,2	0,178	-2	0,174	-4
$\lambda_8$	0,116	0,181	56,0	0,109	-6	0,112	-3
$\lambda_9$	0,110	0,154	40,0	0,104	-6	0,101	-8
$\lambda_{10}$	0,101	0,132	20,8	0,101	0	0,093	-8
$\lambda_{11}$	0,087	0,119	34,2	0,081	-7	0,085	-2,6
$\lambda_{12}$	0,080	0,103	26,3	0,074	-7	0,081	-1
$\lambda_{13}$	0,062	0,089	43,5	0,058	-7	0,058	-7
$\lambda_{14}$	0,058	0,081	40,0	0,046	-20	0,045	-21
$\lambda_{15}$	0,045	0,063	40,0	0,031	-32	0,029	-34

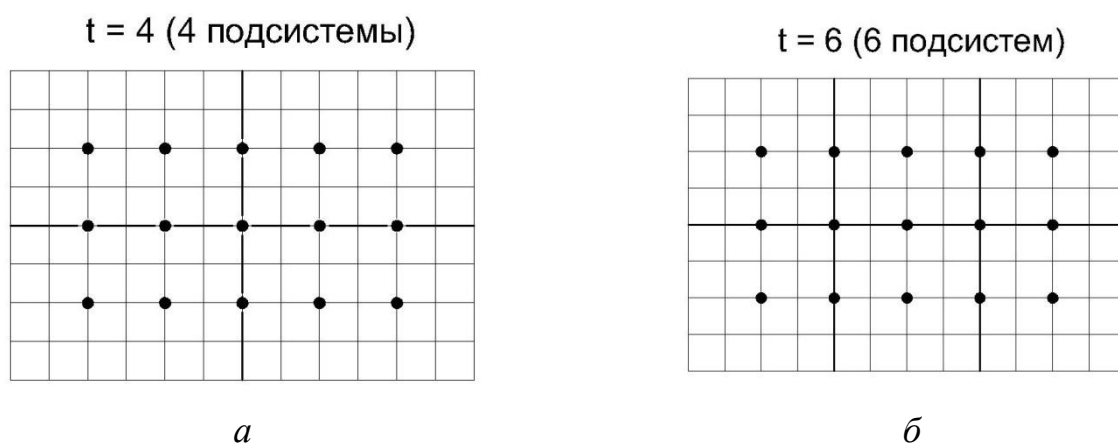


Рисунок 4.18 – Два варианта деления на подсистемы

По сравнению с методом статической конденсации, которая обеспечивает получение приемлемого результата только для минимальной собственной частоты, метод частотно-динамической конденсации позволяет получить результаты близкие к точным (с абсолютной погрешностью не более 7%) для 13-ти первых собственных частот.

Сравнение результатов, полученных при разном количестве подсистем, но с одинаковым числом расчетных узлов (основных степеней свободы) показывает, что они очень близки. Это косвенно подтверждает высказанное выше утверждение, что точность частотно-динамической конденсации определяется отношением  $n/N$ , а не количеством подсистем.

Сопоставление погрешностей первых двух вариантов с «точным» неконденсированным решением свидетельствует об их практически полном совпадении. Это подтверждает высказанный выше тезис о произвольности выбора (или построения) матриц откликов подсистем при решении частотного уравнения.

Метод статической конденсации в данном случае значительно уступает по точности обоим вариантам метода динамической конденсации.

При построении редуцированных подсистем по изложенному алгоритму необходимо, как и при использовании для их построения МКЭ в перемещениях [42], соблюдать следующую последовательность операций:

- найти полный спектр из  $N$  пар СЗ и СВ подсистемы;
- установить необходимое число основных степеней свободы  $n$  для редуцированной подсистемы;
- на основе анализа полного спектра  $N$  собственных векторов (форм собственных колебаний) расположить  $n$  точек (узлов конденсации) как можно ближе к амплитудным точкам соответствующих собственных форм колебаний из их полного числа  $N$ ;
- выполнить конденсацию подсистемы к этим  $n$  узлам.

#### 4.6 Выводы по главе 4

1. Изложенные в данной работе методы и алгоритмы редуцирования полученных на основе МКЭ в форме смешанного метода частотных уравнений высокого порядка являются обобщением и развитием известных методов на основе МКЭ в перемещениях (статическая конденсация, частотно-динамическая конденсация).

2. Сравнение результатов частотно-динамической конденсации с условным «точным» на исходной конечно-элементной сетке показывает их практически полное совпадение для 60% нижней части полного спектра СЗ.

3. Метод статической конденсации дает приемлемый по точности для практических целей результат лишь для минимальной собственной частоты.

4. Алгоритм построения редуцированного частотного уравнения на основе сплайн-коллокационной аппроксимации полей узловых перемещений для областей с гладкой функцией прогибов значительно упрощает построение матриц преобразования в процедурах конденсации на последовательности сгущающихся сеток узлов коллокации и исключает операции обращения матриц высоких порядков.

5. Достаточная точность вычисления нижней части спектра СЗ на основе сплайн-коллокационного алгоритма достигается уже при четырех точках коллокации на каждой из полуволн соответствующих форм колебаний (СВ).

6. При одинаковой сетке конечных элементов применение смешанной формы метода конечных элементов обеспечивает лучшую сходимость к точному решению по сравнению с методом конечных элементов в перемещениях при сгущении сетки конечных элементов.

7. Расчет стержневых систем по методу конечных элементов в форме КСМ с использованием несогласованной матрицы масс дает достаточно точные результаты даже при грубой сетке, когда за конечный элемент принимается стержень между узлами.

8. Использование динамической матрицы откликов с полностью заполненной матрицей масс при расчете балки прямоугольного поперечного сечения не дает преимуществ по точности определения частот по сравнению с динамической матрицей откликов, имеющей в своем составе диагональную матрицу масс.

9. Так как в математическом плане проблема нахождения спектра собственных частот (СЗ) и собственных форм колебаний (СВ) и проблема нахождения спектра критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости являются, по сути, одинаковыми, то разработанные алгоритмы применимы как для решения задач динамики, так и для задач устойчивости.

## **Построение математических моделей задач устойчивости упругих систем на основе МКЭ в форме классического смешанного метода**

До недавнего прошлого, задачи статической устойчивости любой упругой конструкции сводились в инженерной трактовке в основном к двум сценариям: потеря устойчивости “в малом” и потеря устойчивости “в большом”.

При потере устойчивости “в малом” поведение системы “обратимо”, т.е. её можно вернуть назад в докритическое равновесное состояние.

В отличие от потери устойчивости “в малом”, происходящей при бесконечно малом возмущении состояния равновесия системы, потеря устойчивости “в большом” происходит при воздействии на равновесную систему возмущения, позволяющего преодолеть энергетический барьер конечной величины.

Исследование устойчивости системы “в большом” предполагает наличие закритических форм равновесных состояний упругих систем. Исследование этих форм возможно лишь в геометрически нелинейной постановке с учетом больших перемещений.

Отсутствие четкого математического описания содержания понятий “устойчивость в малом” и “устойчивость в большом” вызывает затруднения в построении математических моделей задач устойчивости систем (конструкций).

К настоящему времени в научной литературе в теории устойчивости упругих систем сложилась более обоснованная в математическом отношении терминология [199, 275, 305].

Переход к этой терминологии, связанной с разделением теории устойчивости систем на теории первого, второго и третьего порядков, в зависимости от степени точности математического описания потери устойчивости, позволяет построить математические модели, соответствующие этим теориям.

## 5.1 Математические модели задач устойчивости стержневых систем

В данном разделе рассмотрены геометрически нелинейные теории идеально прямых стержней при статическом нагружении.

Уже эта постановка показывает, что необходимы и имеют смысл упрощающие допущения и гипотезы, чтобы достичь обозримости уравнений. Несмотря на это, решение этих уравнений в замкнутой аналитической форме возможно лишь в отдельных случаях и потому показываются на отдельных немногочисленных примерах.

Решение уравнений для сложных конструкций выполняется поэтому приближенно с помощью метода конечных элементов, как наиболее формализованного численного метода.

Для правильного применения геометрически нелинейных теорий стержня необходимо их упорядочивание в актуальной инженерно-строительной терминологии. В этой связи употребляются такие понятия, как малые, средние, большие или конечные углы поворота, продольные смещения, сдвиги и деформации так же часто, как и теории I, II и III-го порядков по терминологии используемой немецкими и другими исследователями [199, 275, 305 и др.]

По теории первого порядка условия равновесия составляются для недеформированной системы, т.е. для исходной ненагруженной, геометрически неизменяемой конфигурации. Влиянием изменения исходной конфигурации системы на состояние её равновесия пренебрегается. При расчете угловых перемещений наряду с параметром несовершенства  $\varphi_0$  учитываются только члены ряда, в которые  $\varphi_0$  входит только линейно. При применении закона Гука эта теория полностью линейна.

По теории второго порядка условия равновесия записываются для деформированной системы, т.е. для текущей (мгновенной) конфигурации. Влияние деформаций на состояние равновесия может при этом учитываться. С помощью этой теории становится возможным описание нелинейных соотношений

нагрузка-перемещение. В остальном остаются в силе записанные выше допущения (гипотезы).

В теории третьего порядка условия равновесия, как и в теории второго порядка, составляются для деформированной системы. Теория третьего порядка может быть разноуровневой в зависимости от величины параметров деформированности. Учет средних поворотов, при котором наряду с несовершенством  $\varphi_0$  учитываются все члены ряда до третьей степени  $\varphi$ , или больших поворотов с включением в расчет всех членной ряда до пятой степени  $\varphi$ , позволяет вывести соотношения нагрузка-перемещения в закритической области.

Если при определении функций углов поворота учитывается бесконечно большое число членов ряда, то решение по теории третьего порядка для больших поворотов переходит в точное решение для поворотов конечной величины.

С математических позиций эта терминология понятна, если для ее обоснования применить разложение тригонометрических функций в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\sin(\varphi + \varphi_0) &= \sin(\varphi_0) + \varphi \cdot \cos(\varphi_0) - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot \sin(\varphi_0) - \frac{\varphi^3}{3!} \cdot \cos(\varphi_0) + \dots = \\ &= \varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!} + \varphi \cdot \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2!}\right) + \frac{\varphi^2}{2!} \cdot \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) - \frac{\varphi^3}{3!} \cdot \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2!}\right) + \dots,\end{aligned}\quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}\cos(\varphi + \varphi_0) &= \cos(\varphi_0) - \varphi \cdot \sin(\varphi_0) - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot \cos(\varphi_0) + \frac{\varphi^3}{3!} \cdot \sin(\varphi_0) + \dots = \\ &= 1 - \frac{\varphi_0^2}{2!} - \varphi \cdot \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) - \frac{\varphi^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{2!}\right) + \frac{\varphi^3}{3!} \cdot \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_0^3}{3!}\right) + \dots\end{aligned}\quad (5.2)$$

В этих выражениях  $\varphi_0$  - максимальные умеренные углы поворота. В последующих разделах соответствующие обозначения углов поворота привязаны к понятиям теорий. Установлена следующая градация углов:

- малые повороты  $\varphi \leq 1^\circ$ ,
- средние повороты  $1^\circ < \varphi \leq 10^\circ$ ,
- большие повороты  $10^\circ < \varphi \leq 30^\circ$ .

В этой связи указывается на то, что количественное описание изменения формы содержит не только вызываемую напряжениями её часть. Изменение формы раскладывается на перемещения жесткого тела и деформации от напряжения. При этом учитывается разложение в ряды по аналогии с (5.1) и (5.2). В соответствии с принятыми допущениями, для вызванной напряжениями части деформаций предполагается линейная взаимозависимость между напряжениями и деформациями.

В инженерно-строительном деле при расчете пространственных стержневых систем применяются преимущественно теории первого и второго порядков.

Эти теории требуют введения дальнейших допущений. Делается различие между нагруженными преимущественно продольными силами стержнями, т.е. стержнями ферм, и преимущественно изгибно-нагруженными стержнями рам.

Исследование несовершенных систем с учетом, по меньшей мере, средних поворотов необходимо в первую очередь для правильной оценки уровня нагрузки по отношению к возможным критическим нагрузкам. Если поведение системы вблизи критической области представляет интерес, нужно проверить, является ли возникающие конфигурации деформированной системы убедительно возможными и представимыми для применённого в системе материала.

При построении математической модели задач устойчивости упругих систем необходимо учитывать положения и допущения теорий устойчивости.

## 5.2 Решение задач устойчивости стержневых систем по теории I-го порядка

### 5.2.1 Решение задач устойчивости шарнирно-стержневых систем

В нашей работе [58] подробно рассмотрено формирование матрицы откликов конечного элемента в виде наклонного шарнирно закрепленного по концам стержня, сжатого продольной силой  $N$  (рисунок 5.1, *а*). Основная система смешанного метода для него приведена на рисунке 5.1, *б*.

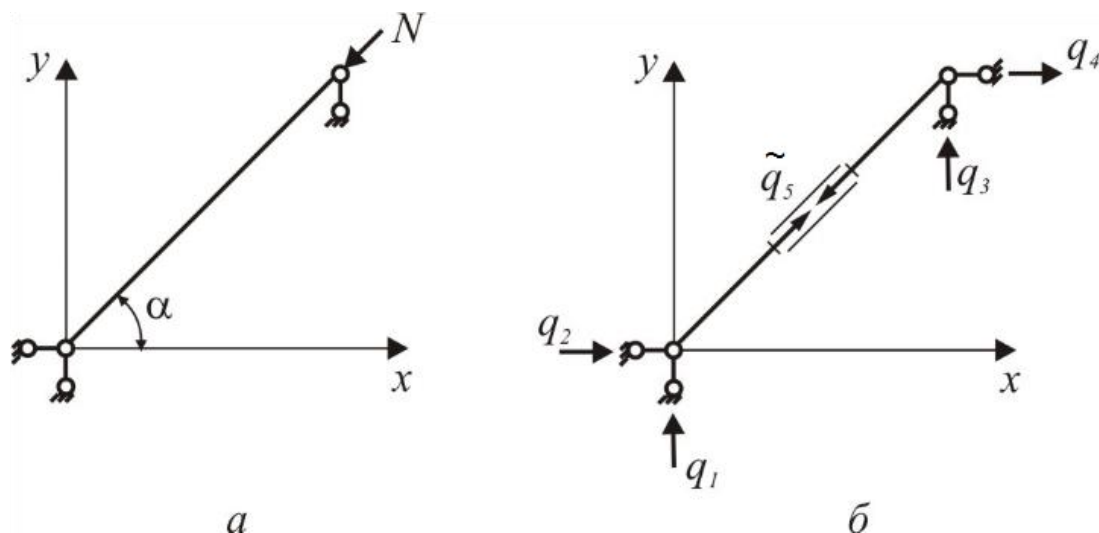


Рисунок 5.1 – Конечный элемент в виде наклонного шарнирно закрепленного по концам стержня, сжатого продольной силой

Формирование блоков  $[\delta]$ ,  $[\tilde{\delta}]$ ,  $[\tilde{r}]$  и не отличается от формирования этих блоков в задачах статики. Поэтому рассмотрено только нахождение элементов блока  $[r]$ .

В случае, когда единичное перемещение получает связь 4 (рисунок 5.2, *а*),  $\Delta_s = q_4 \sin \alpha = \sin \alpha$ .

При этом возникает реакция  $r = \frac{N\Delta_s}{l} = \frac{N \sin \alpha}{l}$ , проекции которой на оси  $x$  и  $y$  дают величины реакций в связях 3 и 4 основной системы:

$$r_{44} = -r \sin \alpha = -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{34} = r \cos \alpha = \frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5.3)$$

Соответственно в связях 1 и 2 возникнут реакции

$$r_{24} = \frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{14} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5.4)$$

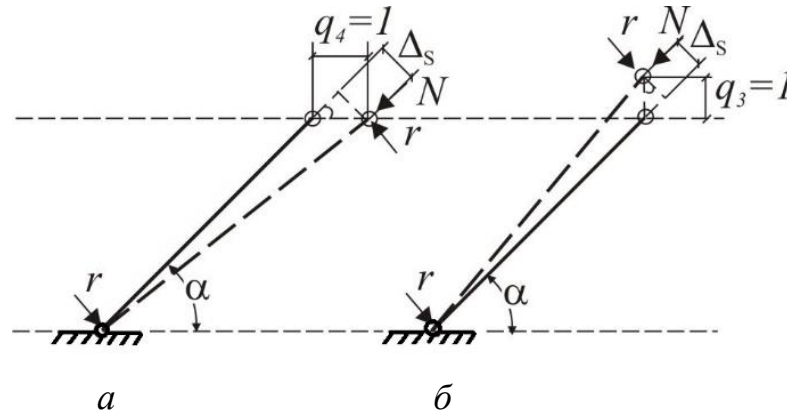


Рисунок 5.2 – Единичное смещение одной из связей конечного элемента в виде наклонного стержня, шарнирно закрепленного по концам и сжатого продольной силой

При единичном смещении связи 3 (рисунок 5.2, б) получаем аналогично:

$$\Delta_s = q_3 \cos \alpha = \cos \alpha, \quad r = \frac{N\Delta_s}{l} = \frac{N \cos \alpha}{l}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} r_{43} &= \frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha, & r_{33} &= -\frac{N}{l} \cos^2 \alpha, \\ r_{23} &= -\frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha, & r_{13} &= \frac{N}{l} \cos^2 \alpha. \end{aligned} \quad (5.5)$$

При единичном смещении связей 1 и 2 по аналогии получаем:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha, & r_{22} &= -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha, & r_{32} &= r_{23}, & r_{42} &= r_{24}, \\ r_{11} &= -\frac{N}{l} \cos^2 \alpha, & r_{21} &= r_{12}, & r_{31} &= r_{13}, & r_{41} &= r_{14}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, матрица откликов для КЭ, изображенного на рисунке 5.1, а, с учетом влияния продольной силы  $N$  имеет следующий вид:

$$[d] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \tilde{r}_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & \tilde{r}_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & \tilde{r}_{35} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & \tilde{r}_{45} \\ \tilde{\delta}_{51} & \tilde{\delta}_{52} & \tilde{\delta}_{53} & \tilde{\delta}_{54} & \delta_{55} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \delta_{55} &= \frac{l}{EA}, \quad \tilde{\delta}_{53} = -\tilde{r}_{35} = \sin \alpha, \quad \tilde{\delta}_{52} = -\tilde{r}_{25} = \cos \alpha, \\ \tilde{\delta}_{53} &= -\tilde{r}_{35} = -\sin \alpha, \quad \tilde{\delta}_{54} = -\tilde{r}_{45} = -\cos \alpha, \\ r_{11} &= r_{33} = \frac{N}{l} \cos^2 \alpha, \quad r_{12} = r_{21} = \frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha, \\ r_{13} &= r_{31} = \frac{N}{l} \cos^2 \alpha, \quad r_{14} = r_{41} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha, \\ r_{22} &= r_{44} = -\frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{23} = r_{32} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cos^2 \alpha, \\ r_{24} &= r_{42} = \frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{34} = r_{43} = -\frac{N}{l} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Для проверки правильности полученных результатов рассмотрена классическая задача об устойчивости фермы Мизеса (рисунок 5.3, а). Основная система смешанного метода для нее изображена на рисунке 5.3, б.

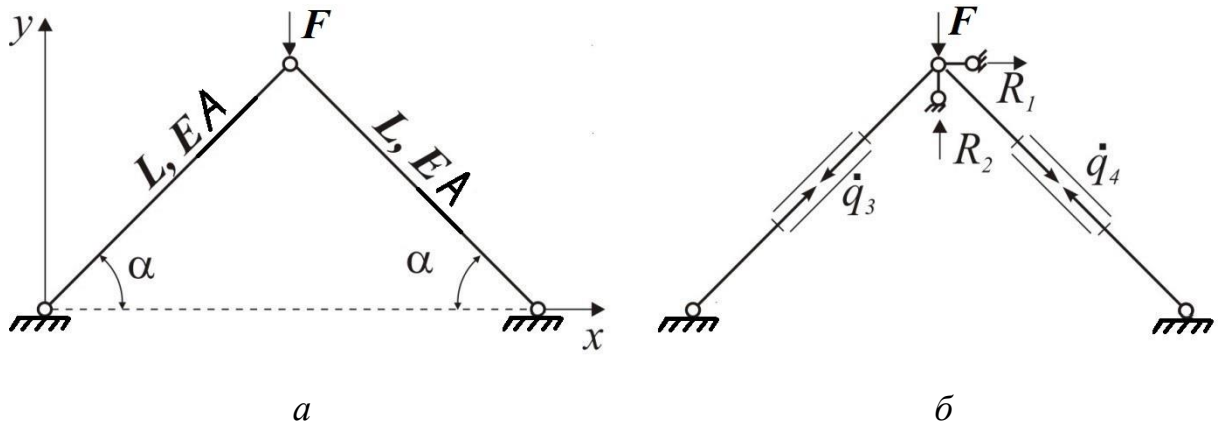


Рисунок 5.3 – Задача об устойчивости фермы Мизеса

Для этой фермы из решения статической задачи следует, что продольные усилия в стержнях одинаковы:  $N_1 = N_2 = N = \frac{F}{2 \sin \alpha}$ .

Матрица коэффициентов канонической системы уравнений смешанного метода (глобальная матрица откликов системы) имеет в данном случае вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{14} \\ r_{21} & r_{22} & \tilde{r}_{23} & \tilde{r}_{24} \\ \tilde{\delta}_{31} & \tilde{\delta}_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \tilde{\delta}_{41} & \tilde{\delta}_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Здесь с учетом симметрии системы и того, что в общей системе координат для правого стержня  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ , где  $\alpha_1$  - угол наклона левого стержня:

$$\begin{aligned} \delta_{33} = \delta_{44} &= \frac{l}{EA}, \quad \tilde{r}_{23} = -\tilde{\delta}_{32} = -\sin \alpha, \quad \tilde{r}_{24} = -\tilde{\delta}_{42} = -\sin \alpha, \\ \tilde{r}_{13} = -\tilde{\delta}_{31} &= \cos \alpha, \quad \tilde{r}_{14} = -\tilde{\delta}_{41} = -\cos \alpha, \\ r_{11} &= -2 \frac{N}{l} \cos^2 \alpha, \quad r_{22} = -2 \frac{N}{l} \sin^2 \alpha, \quad r_{12} = r_{21} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Система канонических уравнений, соответствующая матрице коэффициентов (5.9), может быть представлена виде:

$$\begin{aligned} r_{11}q_1 + r_{12}q_2 + \tilde{r}_{13}\tilde{q}_3 + \tilde{r}_{14}\tilde{q}_4 &= 0, \\ r_{21}q_1 + r_{22}q_2 + \tilde{r}_{23}\tilde{q}_3 + \tilde{r}_{24}\tilde{q}_4 &= 0, \\ \tilde{\delta}_{31}q_1 + \tilde{\delta}_{32}q_2 + \delta_{33}\tilde{q}_3 + \delta_{34}\tilde{q}_4 &= 0, \\ \tilde{\delta}_{41}q_1 + \tilde{\delta}_{42}q_2 + \delta_{43}\tilde{q}_3 + \delta_{44}\tilde{q}_4 &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда получены два критических условия, соответствующие двум возможным формам потери устойчивости:

$$\begin{aligned} 1. \quad 2 \frac{N}{l} \cos^2 \alpha - 2 \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha &= 0, \\ 2. \quad 2 \frac{N}{l} \sin^2 \alpha - 2 \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из них находим два значения критической нагрузки  $F$  с учетом того, что продольное усилие в стержнях  $N = \frac{F}{2\sin\alpha}$ :

$$\begin{aligned} F_{1,кр} &= \frac{2EA\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}, \\ F_{2,кр} &= \frac{2EA\cos^2\alpha}{\sin\alpha}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Эти результаты совпадают с решениями, приведенными в [107].

### 5.2.2 Решение задач устойчивости стержневых систем с жесткими узлами

В этих задачах в матрице откликов необходимо учесть влияние продольной силы на изгибные деформации КЭ.

Для конечного элемента в виде стержня, жестко защемленного по концам (рисунок 5.4, *а*), матрицу откликов можно получить, используя уравнение изгиба сжато-изогнутого стержня. Основная система смешанного метода для этого КЭ приведена на рисунке 5.4, *б*.

С учетом действия продольной силы получены следующие выражения для коэффициентов матрицы откликов конечного элемента:

$$\delta_{55} = \frac{L^3}{12EI}\theta_1(\nu), \delta_{66} = \frac{L}{3EI}[\theta_1(\nu) + \theta_2(\nu) + \theta_3(\nu)], \quad (5.14)$$

$$\delta_{56} = \delta_{65} = \tilde{\delta}_{56} + \tilde{\tilde{\delta}}_{56} = \frac{L^2}{24EI}[2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] - \frac{L^2}{24EI}[2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] = 0,$$

$$\tilde{r}_{15} = -\tilde{r}_{35} = 1, \tilde{r}_{25} = \tilde{r}_{45} = -\frac{L}{2} - N\frac{1}{2}\delta_{55} = -\frac{L}{2} - \frac{L}{6}\nu^2\theta_1(\nu),$$

$$\tilde{r}_{26} = -\tilde{r}_{46} = 1 + N\tilde{\delta}_{56} = 1 + \frac{1}{6}\nu^2[2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)], r_{22} = r_{44} = -N\tilde{\delta}_{56} = -\frac{2EI}{L}\nu\operatorname{tg}\nu, \quad (5.15)$$

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T.$$

где  $\nu = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}}$ ,  $\theta_1(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} - 1 \right]$ ,  $\theta_2(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} + \nu \operatorname{tg} \nu - \frac{2}{\cos \nu} + 1 \right]$ ,  
 $\theta_3(\nu) = \frac{6}{\nu^2} \left[ \frac{1}{\cos \nu} - \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \right]$ .

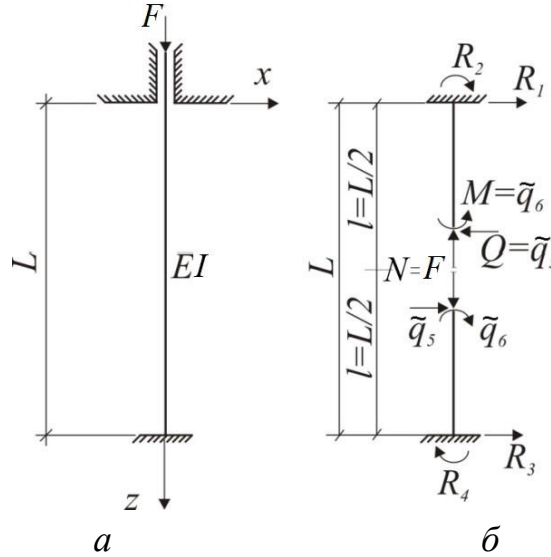


Рисунок 5.4 – Конечный элемент в виде стержня, жестко защемленного по концам

Для проверки правильности полученных результатов рассмотрена задача определения критической нагрузки для стержня: с двумя жестко заделанными концами и для стержня с шарнирным опиранием по концам (рисунок 5.5, а, б). Весь стержень принят за один конечный элемент.

Для стержня с защемленными концами находим только два неизвестных усилия, как и в методе сил. Система канонических уравнений задачи устойчивости имеет нетривиальное решение только при условии равенства нулю ее определителя, коэффициенты которого определяются выражением (5.14). При нахождении критического параметра методом последовательных проб, получаем

$$\text{решение, совпадающее с точным, т. е. } F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}.$$

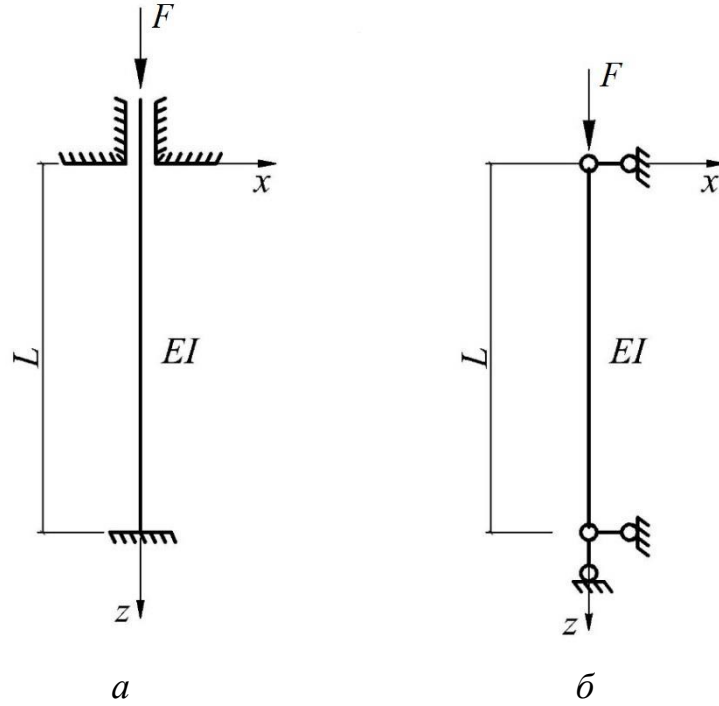


Рисунок 5.5 – Расчетная схема – один конечный элемент.

а) жесткое закрепление по концам б) шарнирное закрепление по концам

Для шарнирно опертого по концам стержня находим четыре смешанных неизвестных: два усилия и два перемещения (углы поворота). Коэффициенты в блоках матрицы откликов имеют следующий вид:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{12EI} \theta_1(\nu) & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI} [\theta_1(\nu) + \theta_2(\nu) + \theta_3(\nu)] \end{bmatrix}, [r] = \begin{bmatrix} -\frac{2EI}{L} \nu \operatorname{tg} \nu & 0 \\ 0 & -\frac{2EI}{L} \nu \operatorname{tg} \nu \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{\delta}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} + \frac{L}{6} \nu^2 \theta_1(\nu) & \frac{L}{2} + \frac{L}{6} \nu^2 \theta_1(\nu) \\ -1 - \frac{1}{6} \nu^2 [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] & 1 + \frac{1}{6} \nu^2 [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{r}] = -[\tilde{\delta}]^T = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} - \frac{L}{6} \nu^2 \theta_1(\nu) & 1 + \frac{1}{6} \nu^2 [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] \\ -\frac{L}{2} - \frac{L}{6} \nu^2 \theta_1(\nu) & -1 - \frac{1}{6} \nu^2 [2\theta_1(\nu) + \theta_3(\nu)] \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае из условия равенства нулю определителя  $|D| = \begin{vmatrix} r & \tilde{r} \\ \delta & \tilde{\delta} \end{vmatrix}$ , составленного из коэффициентов канонических уравнений (блоков матрицы откликов), найдем значение критического параметра  $F_{кр}$ .

Подставив в этот определитель известное точное решение  $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ , т.е.  $\nu = \sqrt{\frac{F_{кр} L^2}{EI}} = \pi, \operatorname{tg} \pi = 0, \sin \pi = 0$ , убеждаемся, что в этом случае  $|D| = 0$ . Это подтверждает правильность выражений для коэффициентов матрицы откликов и достоверность полученных на ее основе точных результатов расчета на устойчивость по теории I порядка.

Из этих примеров видно, что при точном расчете стержневых систем с большим числом степеней свободы на устойчивость, коэффициенты матрицы откликов КЭ являются трансцендентными функциями от критического параметра  $\nu$ . Как следствие этого система разрешающих уравнений устойчивости для всей системы будет нелинейной, поэтому она обычно решается или с применением, так называемых, “качественных методов” [116, 121, 125], или путем использования рядов устойчивости А. Пуанкаре [116, 121]. Применение алгоритма Пуанкаре подробно рассмотрено нами в работе [58].

При этом остается открытым вопрос о нахождении начального приближенного решения, задаться которым желательно в достаточной близости от искомого значения критического параметра. Наиболее эффективным является получение приближенного решения с использованием соответствующей матрицы откликов и итерационным уточнением этого решения.

### 5.2.3 Приближенное вычисление коэффициентов матрицы откликов продольно сжатого КЭ-стержня первого типа

Алгоритм приближенного вычисления коэффициентов матрицы откликов рассмотрим на примере продольно-сжатого КЭ-стержня первого типа (рисунок 5.6).

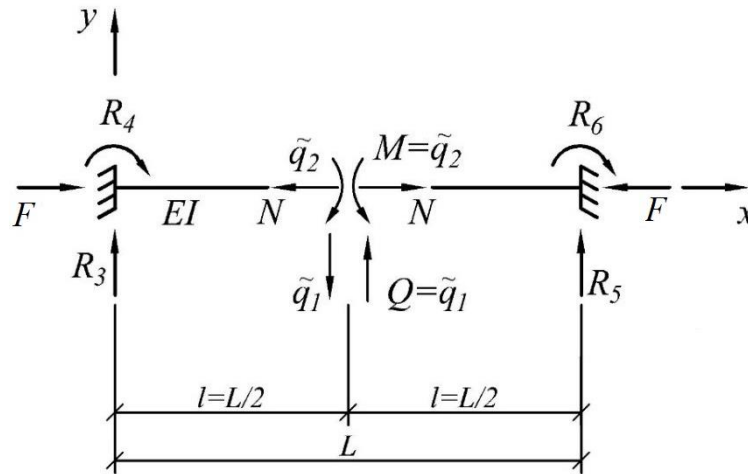


Рисунок 5.6 – КЭ в виде продольно сжатого стержня

Без учета влияния, вызванной воздействием нагрузки  $F$ , продольной силы  $N$  форма изгиба, соответствующая единичному значению неизвестного  $\tilde{q}_7$  (рисунок 5.7, а), определяется выражением

$$y = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right). \quad (5.16)$$

Для любой из половин основной системы составим уравнение принципа возможных перемещений (с учетом действия продольной сжимающей силы  $F$  и вызванной этим воздействием продольным усилием  $N$ ):

$$\frac{1}{2} \left( 1 \cdot \delta_{77}^N + N \delta_{97}^N - 2 \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} \right) = 0,$$

$$\text{или } 1 \cdot \delta_{77}^N + N \int_0^l (y')^2 dx - \frac{2}{EI} \int_0^l (EI y'')^2 dx = 0.$$

Отсюда с учетом (5.16) следует

$$\delta_{77}^N = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EI} \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{Fl^2}{EI} \right) = \delta_{77}^{CT} \left( 1 - \frac{2}{5} \frac{Fl^2}{EI} \right), \quad (5.17)$$

$$\text{или } \delta_{77}^N = \frac{L^3}{12EI} \left( 1 - \frac{FL^2}{10EI} \right) = \delta_{77}^{CT} \left( 1 - \frac{FL^2}{10EI} \right).$$

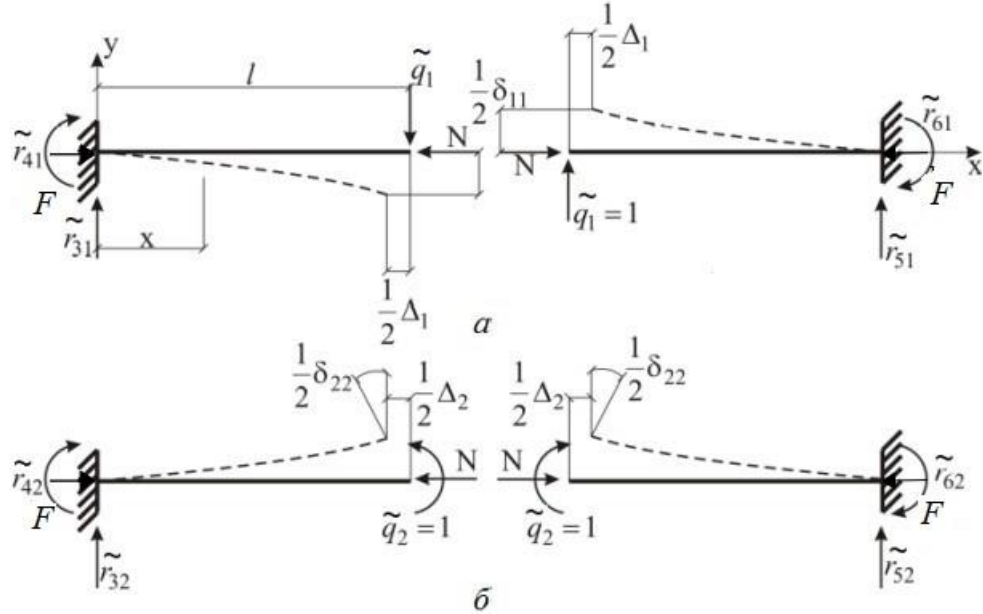


Рисунок 5.7 – Формы изгиба, соответствующие единичным значениям неизвестных усилий

Аналогично, рассматривая воздействие единичного неизвестного  $\tilde{q}_8$  (рисунок 5.7, б) и используя соответствующую ему форму изгиба  $y = \frac{x^2}{2EI}$ ,

$$\text{получаем } \frac{1}{2} \left( \delta_{88}^N + F \delta_{98} - 2 \int_0^l \frac{M_8^2 dx}{EI} \right) = \frac{1}{2} \left( \delta_{88}^N + F \int_0^l (y')^2 dx - \frac{2}{EI} \int_0^l (EI y'')^2 dx \right) = 0,$$

Отсюда следует

$$\delta_{88}^N = \frac{2l}{EI} \left( 1 - \frac{Fl^2}{3EI} \right) = \frac{L}{EI} \left( 1 - \frac{FL^2}{12EI} \right). \quad (5.18)$$

Из условий прямой и обратной симметрии следует

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_7 \cdot \bar{M}_8 dx}{EI} = 0.$$

Рассматривая единичное воздействие  $q_1$  (рисунок 5.8, а), находим из статических и геометрических условий:

$$r_{11} = 0, \quad r_{21} = 0, \quad \tilde{\delta}_{71} = 1 = -\tilde{r}_{17}, \quad \tilde{\delta}_{81} = 0 = -\tilde{r}_{18}.$$

Аналогично для единичного воздействия  $q_2$  (рисунок 5.8, б) находим:

$$r_{22} = -Fl, \quad r_{12} = r_{21} = 0, \quad \tilde{\delta}_{72} = -l = -\tilde{r}_{27}, \quad \tilde{\delta}_{82} = -1 = -\tilde{r}_{28}.$$

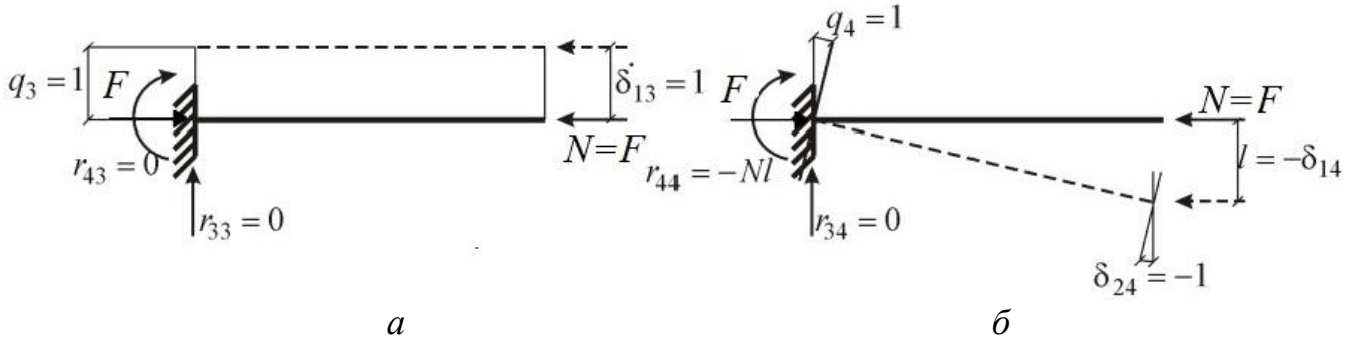


Рисунок 5.8 – Единичные воздействия по направлению неизвестных перемещений

Рассматривая правую половину КЭ, находим также не нулевые коэффициенты:  $r_{44} = -Fl$ ,  $\tilde{\delta}_{75} = l = -\tilde{r}_{57}$ ,  $\tilde{\delta}_{74} = 1 = -\tilde{r}_{47}$ .

Запишем все не нулевые коэффициенты блоков матрицы откликов КЭ:

$$\begin{aligned} r_{2,2}^N = r_{4,4}^N &= -\frac{FL}{2}, \quad \delta_{7,7}^N = \frac{L^3}{12EI} \left(1 - \frac{FL^2}{10EI}\right), \quad \delta_{8,8}^N = \frac{L}{EI} \left(1 - \frac{NL^2}{12EI}\right), \\ \tilde{\delta}_{7,1}^N = -\tilde{r}_{1,7}^N &= 1, \quad \tilde{\delta}_{7,2}^N = -\tilde{r}_{2,7}^N = \frac{L}{2}, \quad \tilde{\delta}_{7,3}^N = -\tilde{r}_{3,7}^N = -1, \quad \tilde{\delta}_{7,4}^N = -\tilde{r}_{4,7}^N = \frac{L}{2}, \\ \tilde{\delta}_{8,2}^N = -\tilde{r}_{2,8}^N &= -1, \quad \tilde{\delta}_{8,4}^N = -\tilde{r}_{4,8}^N = 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Отметим очень важное свойство полученной матрицы откликов. Из (5.19) видно, что она не вырождается и в случае бесконечно жесткого КЭ, т.е., при  $EI = \infty$ .

Для оценки точности решений, получаемых с использованием матрицы откликов стержневого КЭ с коэффициентами (5.19), рассмотрена задача устойчивости стержня, изображенного на рисунке 5.9, для которого известно точное значение критической нагрузки для первой формы потери устойчивости:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(0,5L)^2} = 39,48 \frac{EI}{L^2}.$$

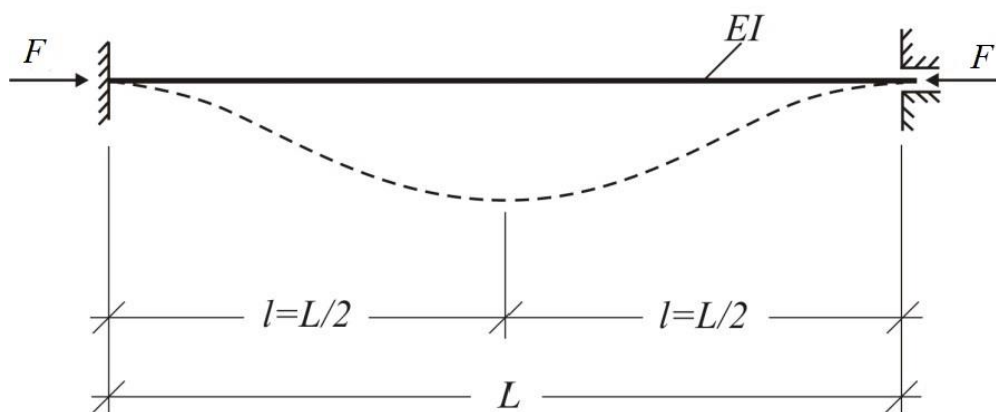


Рисунок 5.9 – Первая форма потери устойчивости стержня

В случае, когда стержень представлен одним конечным элементом, найдено

$$F_{кр} = \frac{12EI}{l^2} = \frac{48EI}{L^2}, \text{ что больше точного значения на } 22\%.$$

Разбиение этого стержня на большее число КЭ, при расчёте в разработанном нами программном средстве [167], дает значения  $F_{кр1}$  и их относительную погрешность по сравнению с точным значением, показанную в таблице 5.1. Для стержня, шарнирно опертого по концам, получены результаты, приведенные в таблице 5.2.

Таблица 5.1

Число КЭ	$F_{кр1}$	$\Delta\%$
4	40,57437	2,52
5	39,83987	0,92%
6	39,63674	0,4%

Таблица 5.2

Число КЭ	$F_{кр1}$	$\Delta\%$
2	10,1436	2,79
3	9,9092	0,401
4	9,8696	0,12%
5	9,8741	0,046
6	9,8718	0,0218%

Результаты сравнений приближенных решений, приведенные в таблицах 5.1 и 5.2 показывают их быструю сходимость к точному решению.

### 5.2.4 Формирование разрешающей системы уравнений для задачи устойчивости и ее решение

Для решения задачи устойчивости матрицу откликов системы нужно представить в виде разности двух матриц – матрицы, получаемой в статических задачах (статическая матрица откликов  $D_s$ ) и матрицы, состоящей из добавок от учета продольно-поперечного изгиба (матрица добавочных откликов на действие продольного сжатия  $D_F$ ):  $D = D_s - D_F$ . В случае приближенных выражений для матрицы откликов (т.е. без трансцендентных функций) разрешающие уравнения примут вид:

$$([D_s] - F[D_F]) \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

или

$$[C - \lambda E] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.21)$$

$$\text{где } [C] = [D_F][D_s]^{-1}, \quad \lambda = \frac{1}{F}.$$

Уравнение (5.21) имеет нетривиальное решение если:

$$|C - \lambda E| = 0. \quad (5.22)$$

Выражение (5.22) является стандартной записью алгебраической проблемы собственных векторов и собственных значений. Найдя любым из известных методов  $\lambda_{\max}$ , получим  $F_{кр, \min} = \frac{1}{\lambda_{\max}}$ .

Для иллюстрации алгоритма расчёта рассмотрим несколько примеров.

### 5.2.5 Примеры решения задач устойчивости стержневых систем по теории I порядка

Пример 5.1. Определим критическое значение силы  $F$ , действующей на плоскую ферму, изображенную на рис. 5.10 а. Основная система смешанного метода для нее изображена на рис. 5.10 б. Усилия в стержнях этой фермы находятся из условий статического равновесия:  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = F$ .

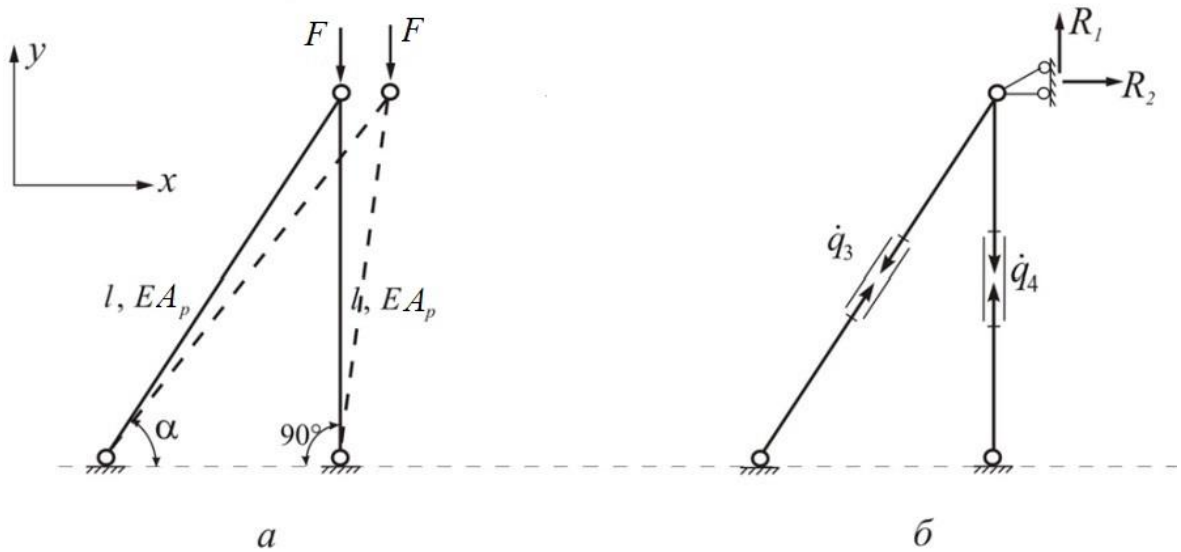


Рисунок 5.10 – Плоская ферма

Ненулевые коэффициенты системы канонических уравнений смешанного метода и в этом случае имеют следующие значения:

$$\delta_{33} = \frac{l_p}{EA_p}, \quad \delta_{44} = \frac{l}{EA}, \quad \tilde{\delta}_{31} = \tilde{r}_{13} = -\sin \alpha, \quad \tilde{\delta}_{14} = -\tilde{r}_{41} = -\cos \alpha, \\ -\tilde{\delta}_{41} = \tilde{r}_{14} = 1, \quad r_{22} = -\frac{N}{l}.$$

Преобразовывая систему уравнений с данными значениями коэффициентов к одному уравнению относительно неизвестного  $q_2$ , получаем:

$$q_2 \left[ \frac{N}{l \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{l_p}{EA_p} + \frac{P}{EA} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \right] = 0.$$

Так как  $q_2 \neq 0$ , то  $F \left( \frac{l_p}{l \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{1}{EA_p} + \frac{\sin^2 \alpha}{EA \cos \alpha} \right) - \cos \alpha = 0$ .

Отсюда  $F_{kp} = \frac{EA \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{K + \sin^3 \alpha}$ , где  $K = \frac{EA}{EA_p}$ .

Этот результат совпадает с приведенным в [161].

Пример 5.2. Определим критическое значение силы  $F$ , действующей на плоскую регулярную ферму с треугольной решеткой (рисунок 5.11, а). Фрагменты основной системы для нее показаны на рисунке 5.11, б.

Используя коэффициенты матрицы откликов (5.8) для шарнирно опертого по концам стержня, запишем в развернутой форме уравнения смешанного метода

для двух типовых узлов  $i$  и  $\left(i + \frac{1}{2}\right)$  этой фермы:

$$1. \Delta_{i+\frac{1}{2}, i+\frac{3}{2}} = \left( y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{3}{2}} \right) + \frac{l}{EA} N_{i+\frac{1}{2}, i+\frac{3}{2}} = 0,$$

$$2. \Delta_{i+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} = \left( y_{i-\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}} \right) + \frac{l}{EA} N_{i+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}} = 0,$$

$$3. \Delta_{i, i+1} = (y_i - y_{i+1}) + \frac{l}{EA} N_{i, i+1} = 0,$$

$$4. \Delta_{i, i-1} = (y_i - y_{i-1}) + \frac{l}{EA} N_{i, i-1} = 0,$$

$$5. \Delta_{i+\frac{1}{2}, i+1} = \left( y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i+1} \right) \sin \alpha + \left( x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i+1} \right) \cos \alpha + \frac{l}{EA} N_{i+\frac{1}{2}, i+1} = 0,$$

$$6. \Delta_{i+\frac{1}{2}, i} = \left( y_i - y_{i+\frac{1}{2}} \right) \sin \alpha + \left( x_i - x_{i+\frac{1}{2}} \right) \cos \alpha + \frac{l}{EA} N_{i+\frac{1}{2}, i} = 0,$$

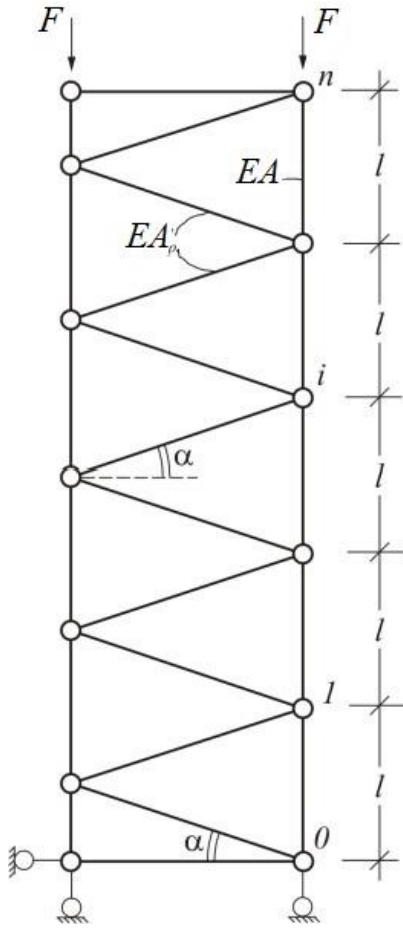
$$7. \Delta_{i-\frac{1}{2}, i} = \left( y_{i-\frac{1}{2}} - y_i \right) \sin \alpha + \left( x_{i-\frac{1}{2}} - x_i \right) \cos \alpha + \frac{l}{EA} N_{i-\frac{1}{2}, i} = 0,$$

$$8. R_{i+\frac{1}{2}}^{(x)} = (-\cos \alpha) \left( N_{i+\frac{1}{2}, i+1} + N_{i+\frac{1}{2}, i} \right) + \frac{F}{l} \left( x_{i+\frac{3}{2}} - 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

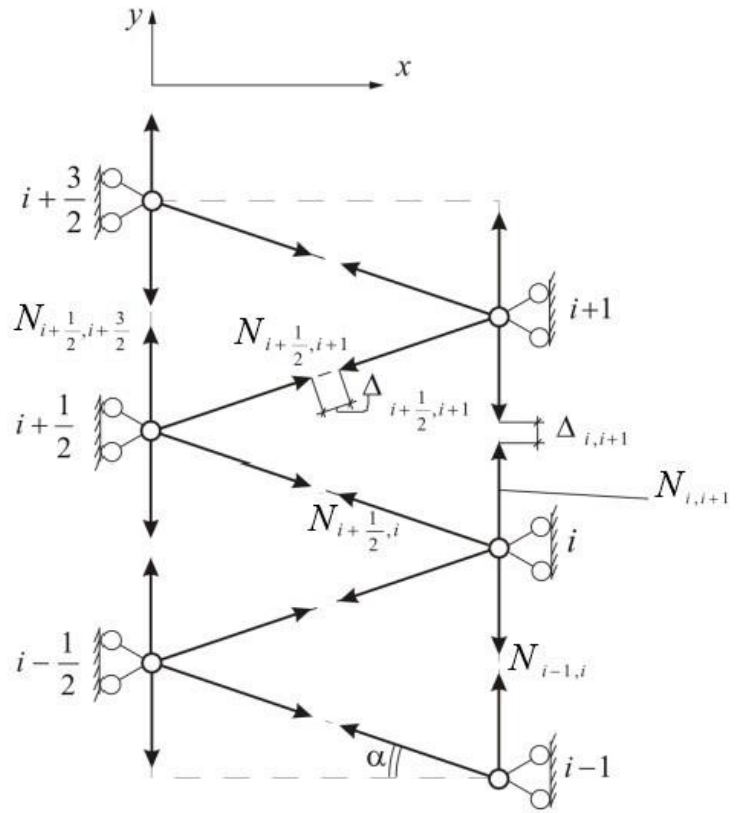
$$9. R_{i+\frac{1}{2}}^{(y)} = \left( N_{i-1, i+\frac{1}{2}} - N_{i+\frac{1}{2}, i+\frac{3}{2}} \right) + \left( N_{i+\frac{1}{2}, i} - N_{i+\frac{1}{2}, i+1} \right) \sin \alpha = 0,$$

$$10. R_i^{(x)} = \cos \alpha \left( N_{i+\frac{1}{2}, i} + N_{i-\frac{1}{2}, i} \right) + \frac{F}{l} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) = 0,$$

$$11. R_i^{(y)} = (N_{i, i-1} - N_{i, i+1}) + \left( N_{i-\frac{1}{2}, i} - N_{i+\frac{1}{2}, i} \right) \sin \alpha = 0.$$



a



б

Рисунок 5.11 – Регулярная ферма с треугольной решеткой

Выражая в первых семи уравнениях усилия  $N_{i+t}$  через узловые перемещения  $x_{i+p}$ ,  $y_{i+p}$ , приходим после преобразований к четырем уравнения относительно перемещений узлов левого и правого поясов фермы (т. е. с дробными и целыми индексами):

$$8. R_{i+\frac{1}{2}}^{(x)} = \frac{EA_p}{l_p} \left[ \sin \alpha \cos \alpha (y_i - y_{i+1}) - \cos^2 \alpha \left( x_i - 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i+1} \right) \right] + \\ + \frac{F}{l} \left( x_{i+\frac{3}{2}} - 2x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

$$9. R_{i+\frac{1}{2}}^{(y)} = \frac{EA_p}{l_p} \left[ \sin \alpha \cos \alpha (x_i - x_{i+1}) - \sin^2 \alpha \left( y_i - 2y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i+1} \right) \right] + \\ + \frac{EA}{l} \left( y_{i+\frac{3}{2}} - 2y_{i+\frac{1}{2}} + y_{i-\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

$$10. R_i^{(x)} = \frac{EA_p}{l_p} \left[ \sin \alpha \cos \alpha \left( y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \right) - \cos^2 \alpha \left( x_{i-\frac{1}{2}} - 2x_i + x_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] + \\ + \frac{N}{l} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) = 0,$$

$$11. R_i^{(y)} = \frac{EA_p}{l_p} \left[ \sin \alpha \cos \alpha \left( x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \right) - \sin^2 \alpha \left( y_{i-\frac{1}{2}} - 2y_i + y_{i+\frac{1}{2}} \right) \right] + \\ + \frac{EA}{l} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 0.$$

Аналогично могут быть получены уравнения для крайних узлов.

Матрица коэффициентов системы уравнений для всех узлов будет матрицей откликов (в данном случае глобальной матрицей) рассматриваемой фермы. Определитель этой матрицы, приравненный нулю, является критическим условием, из которого находится спектр критических нагрузок (собственных значений).

Для частного случая этих уравнений в [161], когда  $\alpha = 45^\circ$ ;  $A_p = 0,2A$ ;  $n = 5$ , получено  $F_{кр} = 0,00545EA$ .

Пример 5.3. Определим первые пять критических значений нагрузки  $F$  для многопролетной одноэтажной рамы, представленной на рисунке 5.12.

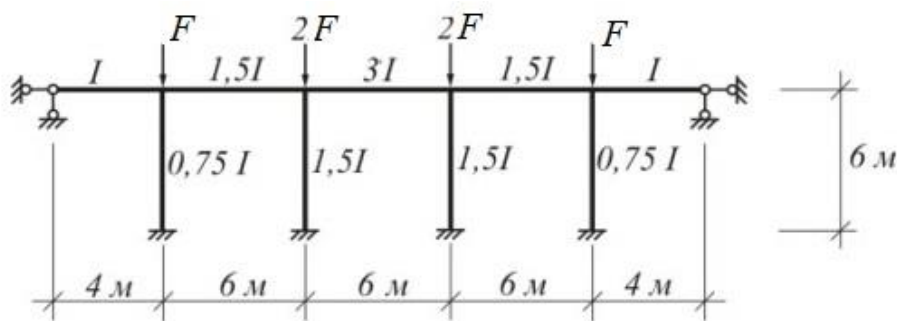


Рисунок 5.12 – Многопролетная одноэтажная рама

Представим систему ансамблем из КЭ второго типа. Решая систему уравнений смешанного метода, находим:

$$F_{кр,1} = 0,428 EI, \quad F_{кр,2} = 0,459 EI, \quad F_{кр,3} = 0,475 EI, \quad F_{кр,4} = 0,489 EI, \\ F_{кр,5} = 0,515 EI.$$

Полученные результаты совпадают с приведенными в [161] и свидетельствуют о высокой степени точности расчетов по МКЭ в форме классического смешанного метода.

В конечно-элементной модели стержневых систем с продольно сжатыми стержнями конечные элементы могут иметь различные жесткости, в том числе и абсолютно жесткие вставки [31, 34]. Их учет, как это следует из (5.19), при расчете по МКЭ в форме КСМ выполняется автоматически. В расчетной физической модели может быть учтён как собственный вес КЭ, так и различная продольная нагрузка в узлах конечно-элементной сетки [188], так и нагрузка, следящая за полюсом [129]. В работе Н. Ю. Дорогова [34] исследовалась устойчивость стержня при смещающейся, вследствие изгиба, точке приложения нагрузки, а в [33] рассматривалась устойчивость горизонтального стержня, лежащего на жестком основании и находящегося под действием собственного веса. Задача об устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса, исследовалась в [188]. В [32] предложен приближенный итерационный метод расчета стержней на устойчивость, позволяющий сравнительно просто, хотя и с невысокой точностью, определять

величину критической нагрузки. Все эти задачи решаются с меньшими вычислительными затратами и с большей степенью точности при использовании конечно-элементных математических моделей на основе МКЭ в форме КСМ.

### **5.3 Матрицы откликов продольно сжатого КЭ-стержня второго типа и сжато-изогнутого КЭ-пластинки**

В данном разделе излагается более эффективный вариант алгоритма расчета на устойчивость стержней и стержневых систем с использованием стержневого конечного элемента второго типа и включаемой в матрицу откликов в соответствии с (5.20) матрицы потенциала продольных нагрузок. Этот же алгоритм используется и для расчета на устойчивость пластинок по теории I порядка.

#### **5.3.1 Матрица откликов продольно сжатого конечного элемента-стержня второго типа. Алгоритм расчета стержней и стержневых систем на устойчивость**

Основная система смешанного метода для такого КЭ показана на рисунке 5.13. Она получается наложением жестких связей на узловые (конечные) сечения, т.е. связей по направлениям линейных смещений 1, 2, 4, 5 и поворотов 3, 6 и устранением связей путем введения шарниров и заменой связей усилиями в них. Расстояние от опор до места установки шарниров бесконечно мало по сравнению с длиной стержня.

За неизвестные приняты перемещения введенных в концевых узлах связей  $q_1, q_2, q_3$  и  $q_4, q_5, q_6$ , и усилия (моменты)  $\tilde{q}_7, \tilde{q}_8$ , заменяющие устраненные путем

введения шарниров связи.

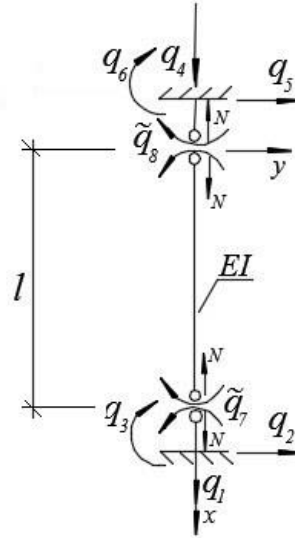


Рисунок 5.13 – Основная система смешанного метода КЭ второго типа

От неизвестных во введенных связях возникают реакции, а по направлениям устраненных связей – смещения.

Найдем зависимость возникающих реакций и смещений от единичных значений неизвестных с учетом влияния продольной силы  $N$ , т.е. сформируем матрицу откликов  $[d]$  конечного элемента – стержня.

Принципиально это может быть выполнено на основе принципа возможных перемещений

$$A_{ij} + W_{ij} = r_{ij} \cdot 1 + F \int_0^l (y_i' y_j') dx - \int_0^l EI (y_i'' y_j'') dx = 0. \quad (5.23)$$

Отсюда следует

$$r_{ij} = \int_0^l EI (y_i'' y_j'') dx - F \int_0^l (y_i' y_j') dx. \quad (5.24)$$

Здесь  $y_i(x)$ ,  $y_j(x)$  – функции соответствующей статической деформации от  $i$ -го и  $j$ -го единичных воздействий основных неизвестных.

Как показывает опыт расчетов, замена точных решений с использованием трансцендентных функций приближенными дает хорошие результаты в тех случаях, когда критическая сила для любого конечного элемента основной системы значительно выше критической силы для всей системы в целом.

Для иллюстрации рассмотрим модельную задачу о нахождении критической нагрузки для продольно сжатого стержня (рисунок 5.14, а). Основная система показана на рисунке 5.14, б.

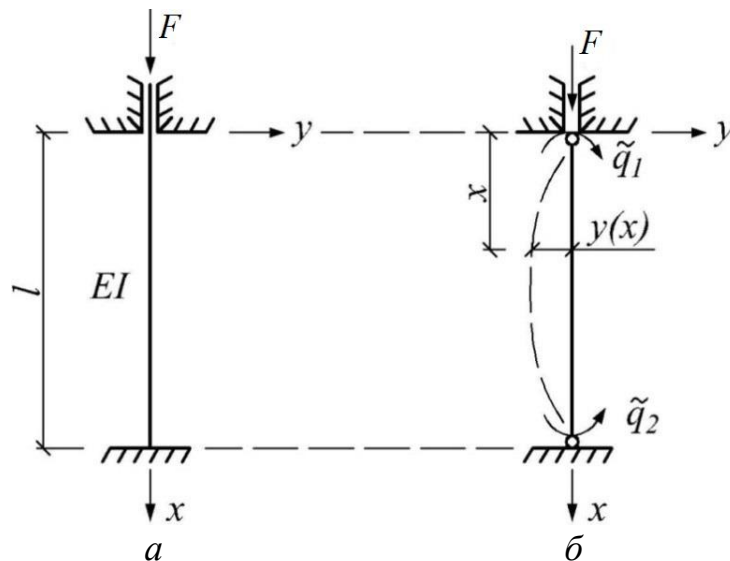


Рисунок 5.14 – Продольно сжатый стержень и основная система МКЭ в форме KCM

Функцию, аппроксимирующую прогибы в основной системе, принимаем, как и в задаче статического изгиба, в виде

$$y(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3. \quad (5.25)$$

Результаты расчета приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

Число КЭ	$F_{кр}$	$\Delta$ , %
4	40,57437	2,52
5	39,83987	0,92
6	39,63674	0,4

Аналогично для шарнирно опертого по концам стержня получены результаты, приведенные в таблице 5.4.

Таблица 5.4

Число КЭ	$F_{кр}$	$\Delta$ , %
2	10,1436	2,79
3	9,9092	0,401
4	9,8696	0,12
5	9,8741	0,046
6	9,8718	0,0218

Результаты сравнений приближенных решений, приведенные в таблицах 5.3 и 5.4, показывают хорошую сходимость к точным решениям.

Изложенные варианты решения задач устойчивости стержней и стержневых конструкций на основе МКЭ в форме КСМ, как это показано выше в п. 5.2.3, дают возможность решить отмечаемую во многих работах проблему наличия в расчетной конечно-элементной схеме очень жестких или бесконечно жестких элементов. При расчетах по МКЭ в традиционной форме их наличие приводит к ухудшению обусловленности матрицы жесткости и, как следствие, к существенным погрешностям решения, а иногда и к неверным результатам.

При использовании МКЭ в форме КСМ ухудшения обусловленности матрицы откликов КЭ не происходит. В этом не трудно убедиться, подставив бесконечную жесткость КЭ в блок  $\delta$  матрицы откликов (5.20). В результате получаем нулевые значения элементов этого блока. Это означает, что математическая модель продольно сжатого КЭ, используемого в расчете по МКЭ в форме КСМ, остается неизменной и при его бесконечной жесткости, что позволяет без затруднений решать задачи, отмечаемые в некоторых работах как проблемные [31, 34, 36, 134, 137]: задачи, связанные с переменностью сечения стержней; воздействие сил, следящих за полюсом; учет собственного веса и дополнительных продольных нагрузок в узлах; и т.д.

### **5.3.2 Матрица откликов продольно сжатого-изгнутого конечного элемента–пластинки**

На основе изложенного выше алгоритма, рассмотрим получение матрицы откликов продольно сжатого изгибаемого конечного элемента–пластинки (рисунок 5.15).

Учет влияния продольно-поперечного изгиба КЭ в виде прямоугольной пластинки на величины коэффициентов матрицы откликов производится, как и в

случае КЭ-стержня, на основе принципа возможных перемещений.

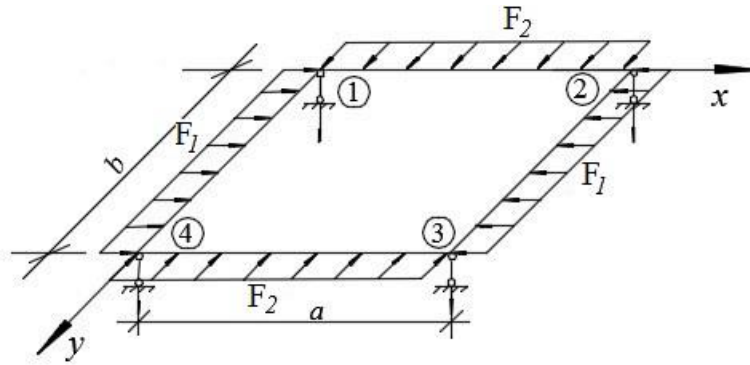


Рисунок 5.15 – Продольно сжатый изгибаемый конечный элемент–пластинка

Рассмотрим два деформированных состояния продольно сжатого КЭ: состояние  $s$  и состояние  $t$  (рисунок 5.16), соответствующим двум разным единичным воздействиям в основной системе смешанного метода.

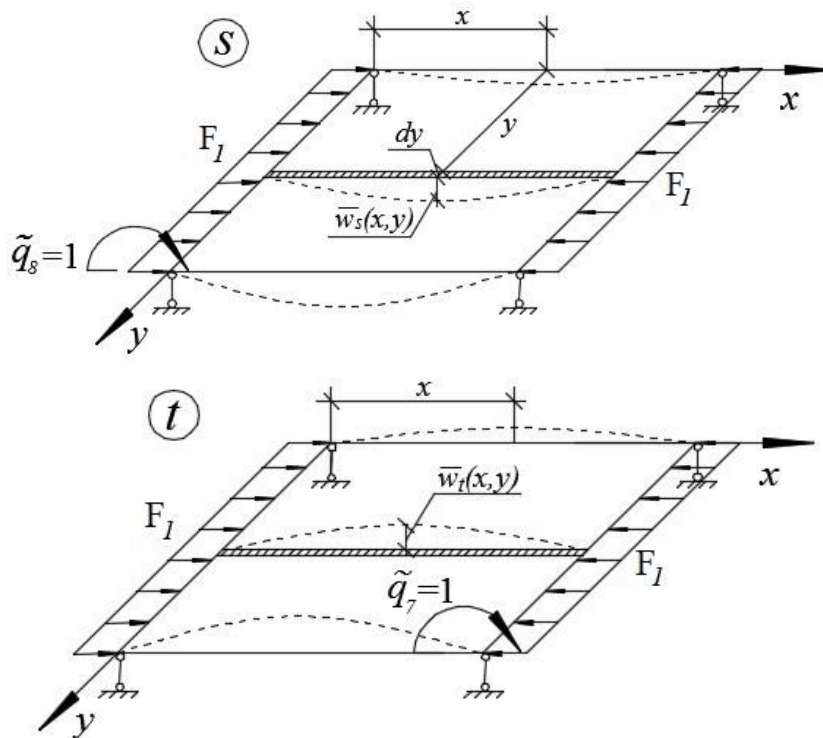


Рисунок 5.16 – Два деформированных состояния продольно сжатого КЭ-пластинки

Будем считать, что поверхности  $\bar{w}_s(x, y)$  и  $\bar{w}_t(x, y)$ , полученные ранее для изгибаемого КЭ без учета продольных сил и соответствующие единичным воздействиям  $q_s = 1$  и  $q_t = 1$ , остаются такими же и при действии продольных сил.

В этом, как и в случае стержневого КЭ, рассмотренного ранее, и заключается приближенность подхода. Очевидно, что, как и в случае стержня, результат будет тем точнее, чем меньше размеры КЭ, т.е. чем гуще сетка КЭ для рассматриваемой пластинки.

Основная система и функция формы для КЭ-пластинки принимаются в том же виде, что и для изгибаемого КЭ без продольного сжатия. Для КЭ с 12 стержнями свободы

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{12} xy^3. \quad w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{12} xy^3 \quad (5.26)$$

Поэтому остаются без изменений все выражения для моментов, кривизн и для коэффициентов  $\alpha_i$  в (5.26).

При вычислении коэффициентов  $r_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  в матрице откликов КЭ необходимо учесть сближение кромок КЭ от воздействия приложенных по кромкам сжимающих продольных сил  $F_1$  и  $F_2$ .

$$\Delta_x^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \left( \frac{dw^{(j)}(x, y)}{dx} \right)^2 dx, \quad (5.27)$$

$$\Delta_y^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{y=0}^b \left( \frac{dw^{(j)}(x, y)}{dy} \right)^2 dy,$$

где  $j$  – номер единичного воздействия, т.е. номер соответствующего неизвестного в основной системе конечного элемента.

С учетом (5.27) выражение для определения коэффициентов  $r_{ij}$  будет иметь следующий вид:

$$r_{ij} = \iint_{\Omega} \left[ M_x^{(i)}(x, y) \kappa_x^{(j)}(x, y) + M_y^{(i)}(x, y) \kappa_y^{(j)}(x, y) + 2M_{xy}^{(i)}(x, y) \kappa_{xy}^{(j)}(x, y) \right] dx dy - \Delta_x^{(j)} - \Delta_y^{(j)} \quad (5.28)$$

При вычислении коэффициентов  $\delta_{ij}$  в выражении (5.28) верхний индекс  $(j)$  при  $\Delta_x^{(j)}$  и  $\Delta_y^{(j)}$  заменяется на индекс  $(i)$ .

Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов и добавочной

матрицы откликов на действие продольного сжатия и соответствующей разрешающей системы уравнений устойчивости принципиально не отличаются от алгоритма для стержневых систем.

Решение задач устойчивости по теории I-го порядка могут использоваться как первое приближение в расчётах на устойчивость по нелинейным теориям, рассматриваемым в следующей главе.

## 5.4 Выводы по главе 5

1. Разработанные в данной главе математические модели задач устойчивости стержневых и пластинчатых систем по теории первого порядка на основе МКЭ в форме КСМ дают возможность решить отмечаемую во многих работах проблему наличия в расчетной конечно-элементной схеме очень жестких или бесконечно жестких элементов. При расчетах по МКЭ в перемещениях их наличие приводит к ухудшению обусловленности матрицы жесткости и, как следствие, к существенным погрешностям решения, а в некоторых случаях и к неверным результатам.

2. При использовании расширенного МКЭ в форме КСМ ухудшения обусловленности матрицы откликов КЭ не происходит. В этом можно убедиться, подставив бесконечную жесткость КЭ в блок матрицы откликов. В результате получаем нулевые значения элементов этого блока. Обращается в ноль при этом и добавочная матрица откликов на действие продольных нагрузок из-за отсутствия деформаций бесконечно жесткого КЭ. Это означает, что математическая модель продольно сжатого КЭ остается, как и в задачах статики, неизменной и при его бесконечно большой жесткости, что позволяет без затруднений решать задачи, отмечаемые в некоторых работах как проблемные.

3. Расчеты упругих систем на “устойчивость в малом”, соответствующие расчетам по теории первого порядка, позволяют найти, так называемую, “верхнюю” критическую нагрузку, представляющую не только практический инженерный интерес, но и использовать ее как первое приближение в расчетах по теориям II и III порядков.

4. Использование вместо “точной” матрицы откликов, коэффициенты которой выражаются через трансцендентные функции, приближенной матрицы откликов существенно упрощает расчет, но требует для достижения требуемой степени точности расчета сгущения конечно-элементной сетки не менее чем в

четыре раза. Это условие относится и к системам, представленным ансамблем пластинчатых КЭ.

**Физические и математические модели геометрически и конструктивно  
нелинейных задач**

**6.1 Нелинейная система разрешающих уравнений метода конечных  
элементов в форме классического смешанного метода.**

**Алгоритм решения**

Использование МКЭ в форме классического смешанного метода для дискретных или дискретизированных расчетных схем (физических моделей) приводит к получению разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно определяемых неизвестных параметров. Эта система может быть представлена в форме матричного уравнения

$$[D(q)]\{q\} - \{F\} = 0, \quad (6.1)$$

где  $\{q\} = [q_1, q_2, \dots, q_n, \tilde{q}_{n+1}, \tilde{q}_{n+2}, \dots, \tilde{q}_{n+m}]^T$  - вектор кинематических ( $q$ ) и силовых ( $\tilde{q}$ ) неизвестных в основной системе смешанного метода,

$\{F\} = [F_1, F_2, \dots, F_n, \tilde{F}_{n+1}, \tilde{F}_{n+2}, \dots, \tilde{F}_{n+m}]^T$  - вектор, элементами которого являются внешние воздействия ( $F$  - кинематические,  $\tilde{F}$  - силовые),

$[D(q)]$  - матрица откликов конструкции размером  $(n+m) \times (n+m)$ , элементы которой зависят не только от свойств материала и геометрии конструкции, но и от её напряженно-деформированного состояния, выражаемого через вектор  $\{q\}$ .

Система уравнений (6.1) является системой нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) относительно искомых перемещений и усилий.

Решение её выполняется инкрементальным методом (пошаговое нагружение) с уточнением решения после каждого шага нагружения по методу Ньютона-Рафсона.

Предположим, что после выполнения  $k$ -го шага догружения, т.е. при уровне нагрузки  $F^{(k)}$ , найдены значения искомых неизвестных:  $q_1^{(k)}, q_2^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$  - кинематических и  $\tilde{q}_{n+1}^{(k)}, \tilde{q}_{n+2}^{(k)}, \dots, \tilde{q}_{n+m}^{(k)}$  - силовых.

Эти значения неизвестных удовлетворяют СНАУ (6.1) при таком уровне нагрузок, т.е.

$$L_1[q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}, \tilde{q}_{n+1}^{(k)}, \dots, \tilde{q}_{n+m}^{(k)}, F^{(k)}] = 0. \quad (6.2)$$

При добавлении на  $(k+1)$ -ом шаге нагрузки  $\Delta F^{(k+1)}$  получаем СНАУ

$$L_2\left[\left(q_1^{(k)} + \Delta q_1^{(k+1)}\right), \dots, \left(q_n^{(k)} + \Delta q_n^{(k+1)}\right), \left(\tilde{q}_{n+1}^{(k)} + \Delta \tilde{q}_{n+1}^{(k+1)}\right), \dots, \right. \\ \left. \dots, \left(\tilde{q}_{n+m}^{(k)} + \Delta \tilde{q}_{n+m}^{(k+1)}\right), \left(F^{(k)} + \Delta F^{(k+1)}\right)\right] = 0. \quad (6.3)$$

Вычтя из оператора (6.3) оператор (6.2), получим СНАУ в приращениях параметров  $\Delta q^{(k+1)}, \Delta F^{(k+1)}$ :

$$L_2\left[\left(q^{(k)} + \Delta q^{(k+1)}\right), \left(F^{(k)} + \Delta F^{(k+1)}\right)\right] - L_1\left(q^{(k)}, F^{(k)}\right) = \\ = L_3\left[\Delta q^{(k+1)}, \Delta F^{(k+1)}\right] = 0. \quad (6.4)$$

Выполнив линеаризацию СНАУ (6.4), оставляя в ней только величины первого порядка малости, и решив полученную СЛАУ, найдем значения приращений искомых параметров  $\Delta q^{(k+1)}$  и по ним значения параметров  $q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k+1)}$  после  $(k+1)$ -го шага догружения.

Уточнение этого решения выполняется, как и в МКЭ в перемещениях, по методу Ньютона – Рафсона или его модификации.

В соответствии с алгоритмом этого метода найденное решение после  $(k+1)$ -го шага догружения  $q^{(k+1)} = \left(q^{(k)} + \Delta q^{(k+1)}\right)$  подставляется в СНАУ (6.3). Так как это решение является лишь нулевым (линейным) приближением, то в правой части этой СНАУ получим не нули, а вектор невязок в уравнениях равновесия и совместности деформаций (перемещений)

$$L_2\left({}^{(0)}q^{(k+1)}, F^{(k+1)}\right) = \left[\delta\left({}^{(0)}R^{(k+1)}\right), \delta\left({}^{(0)}\Delta^{(k+1)}\right)\right]^T. \quad (6.5)$$

Для получения первого приближения (уточнения) к точному решению подставим в (6.5) вместо  ${}^{(0)}q^{(k+1)}$  величину  ${}^{(0)}q^{(k+1)} = {}^{(0)}q^{(k+1)} + {}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$  и выполним линеаризацию полученного СНАУ.

$$L_2\left({}^{(0)}q^{(k+1)} + {}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}, F^{(k+1)}\right) = 0. \quad (6.6)$$

Решив полученное из (6.6) линеаризованное уравнение относительно поправок  ${}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$ , получим уточненное решение  ${}^{(1)}q^{(k+1)} = {}^{(0)}q^{(k+1)} + {}^{(1)}\Delta q^{(k+1)}$ .

Подставив это решение в (6.6), получим вектор невязок  $\left[\delta\left({}^{(1)}R^{(k+1)}\right), \delta\left({}^{(1)}\Delta^{(k+1)}\right)\right]^T$ .

Циклы итераций повторяются до достижения нужной степени приближения к нулю разницы невязок между двумя последовательными приближениями.

Излагаемый алгоритм является обобщением алгоритма, использованного в главе 3 для расчета линейно – деформируемых стержневых систем. Возможность учета различных видов нелинейностей в математических моделях упругих стержневых систем, основанных на МКЭ в форме классического смешанного метода, существенно расширяет область его применения.

Следует отметить также, что в разрешающей системе уравнений (6.1), не меняя ее структуру, можно менять местами часть искомых параметров и часть заданных параметров, что особенно важно при расчете конструктивно-нелинейных систем и при исследовании моделей геометрически или физически нелинейного поведения конструкций.

Смену параметров в ходе такого исследования принято называть сменой «жесткого» нагружения на «мягкое» или наоборот. Такой прием позволяет проследить «ветвление» решений в закритической области.

Результаты, полученные с использованием изложенного алгоритма ранее опубликованы в наших работах [54, 55, 68, 69, 72, 76, 77, 80, 124].

## **6.2 Анализ геометрически нелинейных задач устойчивости шарнирно-стержневых систем**

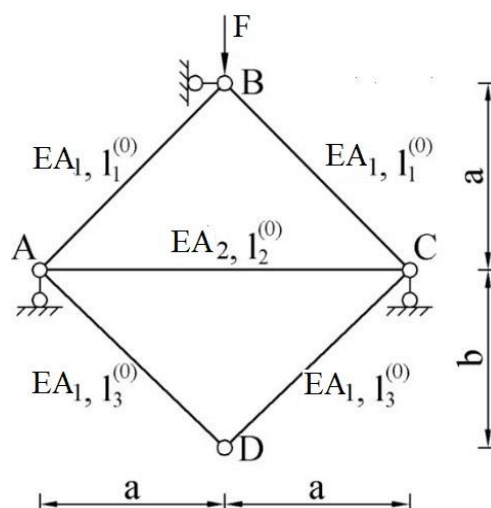
При решении геометрически нелинейных задач одному уровню внешних силовых или кинематических воздействий могут соответствовать различные конфигурации деформированной конструкции. «Дерево» нелинейных решений может быть очень сложным и содержать особые точки (предельные, бифуркационные), которые необходимо обнаружить. Поэтому необходимо детальное исследование траектории деформирования конструкции.

Проблема достоверности численного решения геометрически нелинейных задач деформирования стержневых конструкций (большие перемещения) до сих пор вызывает большой интерес. В частности, в ряде публикаций [122, 123 и др.] высказывалось и обосновывалось на ряде примеров расчета утверждение о том, что существующие программы конечно-элементного анализа несовершенны в решении геометрически нелинейных задач. Хотя в публикациях оппонентов, например, в [35, 110-112, 126, 180], и была показана некорректность в математических выкладках в исходных публикациях, полную достоверность решения можно подтвердить только совпадением результатов, полученных двумя различными способами или с экспериментом.

Одним из таких методов является расширенный метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, с использованием которого, на основе изложенного выше алгоритма, нами была решена, как задача, с которой началась упомянутая дискуссия [69], так и ряд других задач.

### 6.2.1 Статическое геометрически нелинейное деформирование плоской шарнирно-стержневой системы из линейно-упругих стержней

В нашей работе [68] получено решение геометрически нелинейной задачи о деформировании простой шарнирно-стержневой системы из пяти линейно-упругих стержней (рисунок 6.1), вызвавшей дискуссию, упомянутую выше.



$$a = 10 \text{ м}, b = 9.5 \text{ м}$$

$$EF_1 = 1000000 \text{ Н}, EF_2 = 1000 \text{ Н}$$

Рисунок 6.1 – Шарнирно-стержневая система из пяти линейно-упругих стержней

Кинематический анализ этой конструкции конструкции, как системы из жестких стержней показывает, что в исходном состоянии она является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Расчет выполнен на основе алгоритма численного решения геометрически нелинейных задач деформирования шарнирно-стержневых систем, изложенного в п. 6.1, с использованием процедуры пошагового догружения системы [138, 139]. Вычисления выполнять в режиме так называемого «мягкого» нагружения, когда вектор внешних сил известен. Основная система и система в деформированном состоянии показаны на рисунке 6.2.

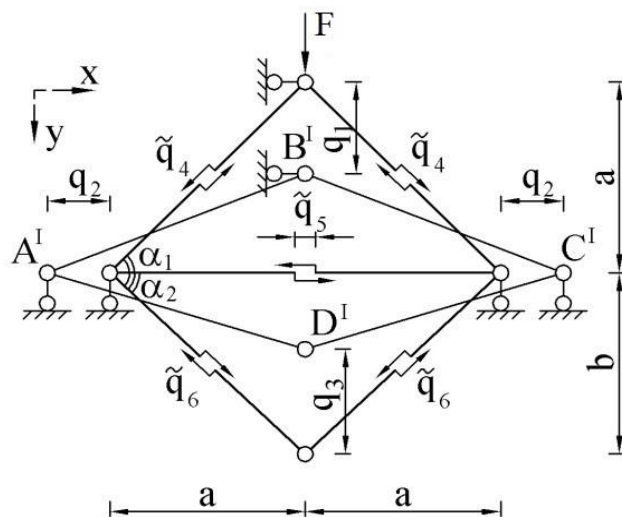


Рисунок 6.2 – Основная система и система в деформированном состоянии

На рисунке 6.3 представлен график зависимости вертикального перемещения  $q_1$  верхней опоры  $A$  стержневой системы (рисунок 6.1) от величины нагрузки  $F$  (на рисунке 6.3 для наглядности траектория деформирования показана для всех этапов нагружения). Заявленному уровню нагрузки  $300 \text{ Н}$  соответствуют три возможных конфигурации, каждая из которых является равновесной. При этом видно, что смена конфигураций шарнирно-стержневой системы без «прощелкиваний» возможна только при приложении компенсирующей (отрицательной по направлению) нагрузки, обеспечивающей разгрузку системы.

По предложенному алгоритму найдены все возможные равновесные состояния системы.

На рисунке 6.4 приведен график зависимости горизонтального смещения  $q_2$  опор  $A$  и  $C$  стержневой системы от величины нагрузки  $F$ . На рисунке 6.5 приведен график зависимости вертикального смещения  $q_3$  шарнира  $D$  стержневой системы от величины нагрузки  $F$ .

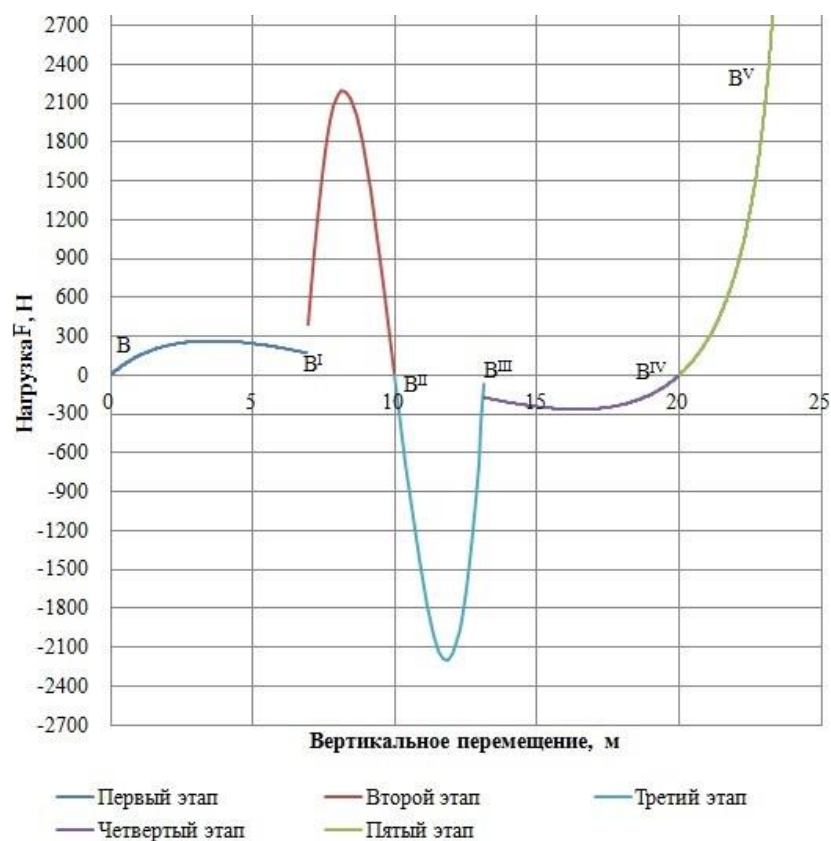


Рисунок 6.3 – График зависимости вертикального перемещения верхней опоры стержневой системы от величины нагрузки  $F$

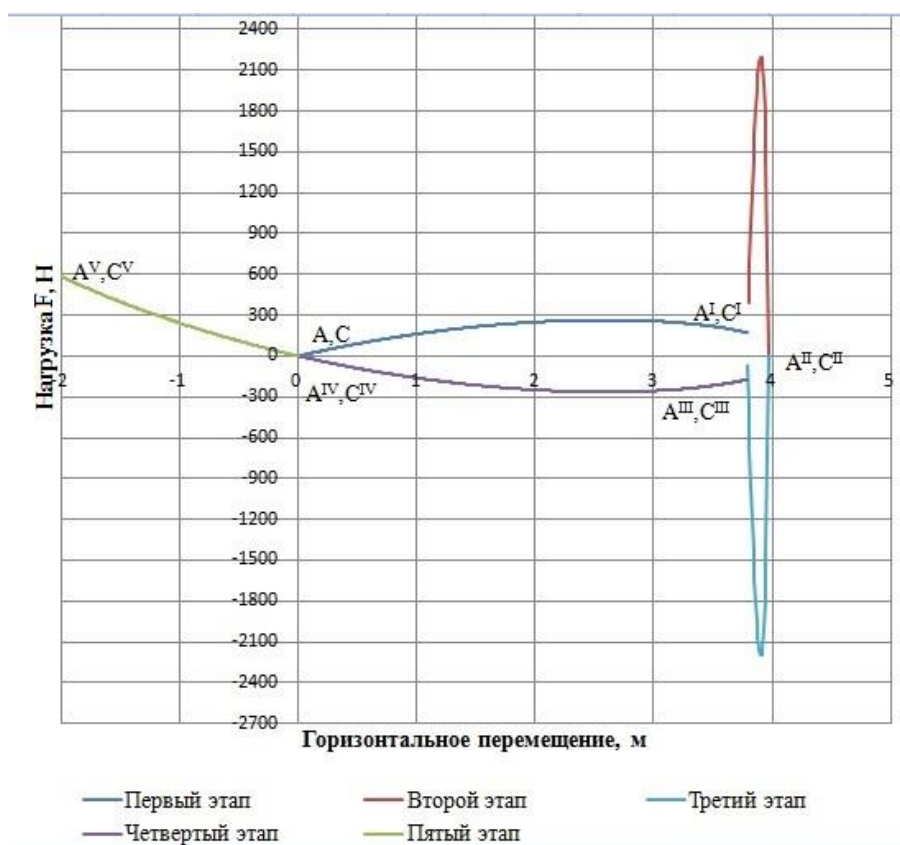


Рисунок 6.4 – График зависимости горизонтального перемещения опор стержневой системы от величины нагрузки  $F$

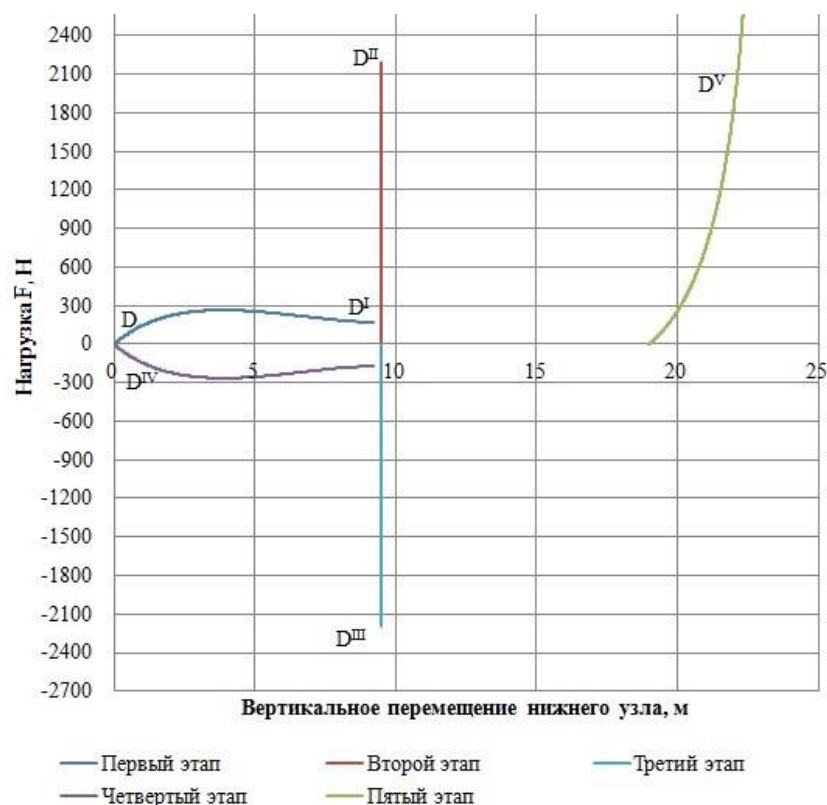


Рисунок 6.5 – График зависимости вертикального смещения шарнира стержневой системы от величины нагрузки  $F$

Правильность полученного решения можно проверить, используя вместо силового «мягкого» воздействия, «жесткое» кинематическое воздействие в виде управляемого перемещения узла. При этом задаются приращения смещений некоторых узлов и находятся соответствующие получаемой таким образом конфигурации системы значения внешней нагрузки. Алгоритм расчета по МКЭ в форме КСМ позволяет делать это на любом шаге нагружения изменением вида параметра нагружения (силового на кинематический или наоборот).

Наличие малого числа степеней свободы рассматриваемой системы позволяет записать для нее аналитическое решение и построить все ветви равновесных состояний конфигурации. На первом этапе «жесткого» нагружения (рисунок 6.6) усилия возникают только в стержнях  $AB, BC, AC$ .

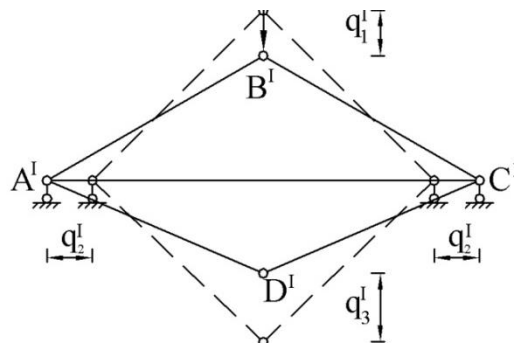


Рисунок 6.6 – Первый этап «жесткого» нагружения

Предельные значения величины нагрузки  $F$  и величины  $q_1$ , соответствующие достигнутой конфигурации являются, особыми точками на траектории нагружения.

Второй этап «жесткого» нагружения начинается от предельного значения  $q_1$  первого этапа нагружения и заканчивается достижением стержнями  $AB$  и  $BC$  горизонтального положения (рисунок 6.7).

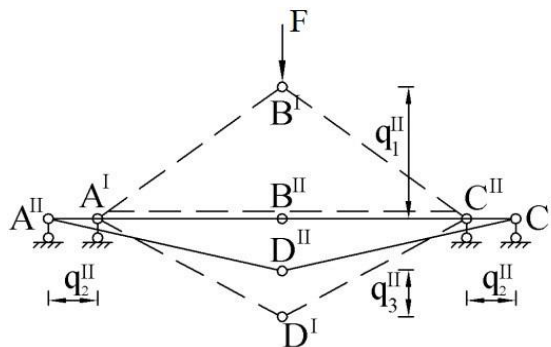


Рисунок 6.7 – Второй этап «жесткого» нагружения

После этого снова произойдет изменение расчетной схемы, так как система становится мгновенно изменяемой.

По найденным в предельных конфигурациях длинам стержней могут быть найдены удлинения стержней и усилия в них и сравнены с результатами расчета системы полученными по сценарию «мягкого» нагружения.

Выполненные расчеты шарнирно-стержневых систем показывают высокую эффективность МКЭ в форме классического смешанного метода и возможность использования его при анализе результатов, полученных с использованием МКЭ в перемещениях.

### **6.2.2 Исследование устойчивости и закритического поведения фермы Мизеса (модельная задача)**

Рассмотрим построение математической модели задачи устойчивости и закритического поведения простейшей симметричной двух-стержневой плоской шарнирно-стержневой системы, называемой фермой Мизеса, по имени первого исследователя, опубликовавшего фундаментальные работы по теории устойчивости.

Эта задача решалась позже многими авторами [114, 137 и др.] в различных постановках и различными методами. Как модельная и тестовая она используется и в настоящее время для анализа, отладки и тестирования алгоритмов и программного обеспечения решения геометрически нелинейных задач [129, 137 и др.] В данном случае задача решается методом конечных элементов в форме классического смешанного метода в геометрически нелинейной постановке.

Как показано в работах В.В.Галишниковой [22, 23], алгоритм известного программного комплекса, основанный на реализации МКЭ в перемещениях, не позволяет выявить критическую конфигурацию, соответствующую точке бифуркации, и продолжает следовать кривой равновесных состояний за точкой бифуркации при продолжении возрастания нагрузки. Создается ложное впечатление, что ферма устойчива, однако, на самом деле нагрузка после прохождения точки бифуркации снижается (ферма теряет устойчивость). Потеря устойчивости вследствие бифуркации алгоритмом не выявляется. Для решения этой проблемы может быть использован МКЭ в форме классического смешанного метода.

В главе 5 показано, что простейшая шарнирно-стержневая система в виде фермы Мизеса может терять устойчивость (при расчете ее по теории устойчивости первого порядка) как по прямосимметричной форме, так и по кососимметричной.

Рассмотрим математические модели задачи нелинейного расчета фермы Мизеса по нелинейной теории для двух возможных форм потери ее устойчивости - прямосимметричной и кососимметричной.

### 1. Прямосимметричная форма потери устойчивости

Исходная конфигурация фермы с геометрическими и физическими параметрами показана на рисунке 6.8 а. При данной форме потери устойчивости ферма сохраняет симметрию и в деформированном состоянии.

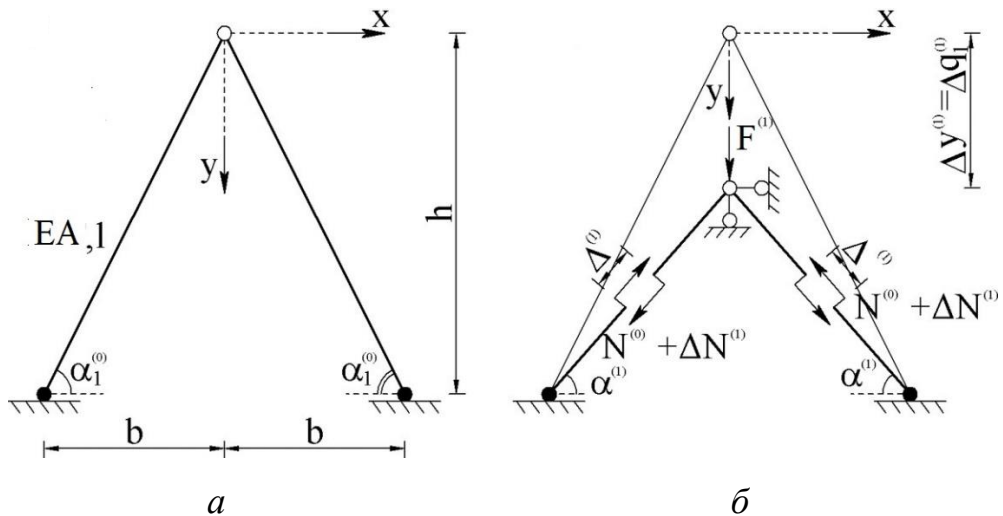


Рисунок 6.8 – Исходная конфигурация фермы с геометрическими и физическими параметрами и основная система смешанного метода при прямосимметричной форме потери устойчивости

Основная система смешанного метода показана на рисунке 6.8 б. Для исследования поведения системы при возрастании нагрузки используем процедуру пошагового догружения. Шаг нагрузки  $\Delta F = \frac{F}{n}$ , где  $n$  - число шагов. В случае необходимости шаг догружения может быть выбран переменным.

Рассмотрим численный пример анализа геометрически нелинейного поведения фермы Мизеса. Параметры системы: высота фермы  $h=1м$ , угол наклона переменный, продольная жесткость стержней  $EA=1000т$ .

Уточнение решения системы нелинейных уравнений после каждого шага нагружения выполняется итерационно. На начальном этапе расчета параметром шагового нагружения является нагрузка  $F$ .

При исследовании поведения системы под нагрузкой, близкой к критической, необходимо менять параметр шагового догружения, т.е. переходить к пошаговому изменению ведущего деформационного компонента вектора узловых перемещений.

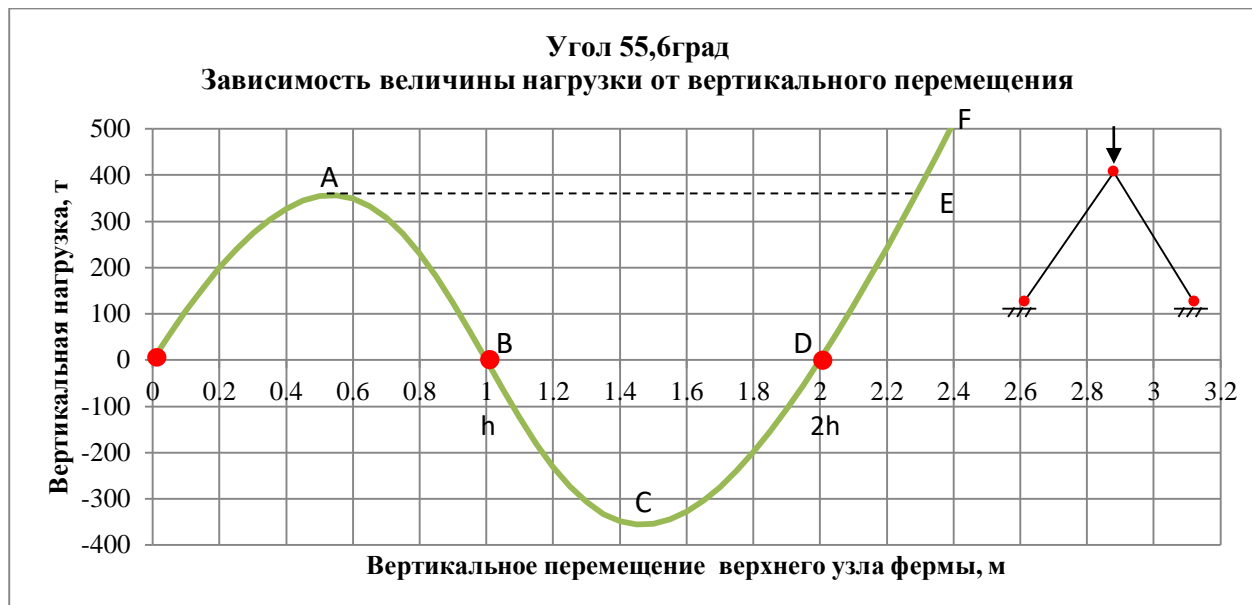


Рисунок 6.9 – Кривая равновесных состояний при прямосимметричной форме потери устойчивости

На рисунке 6.9 приведена кривая текущих деформированных состояний равновесия фермы с начальным углом наклона  $\alpha = 55.6^\circ$ . Рассматривая деформирование системы в зависимости от величины нагрузки можно получить только часть кривой деформирования  $0-A-E-F$ , на которой в точке A происходит «перескок» до точки E, т.е. деформирование происходит без изменения нагрузки. Поэтому итерационный процесс по заданной величине шага нагрузки выполняется только до достижения точки A. Всю кривую деформирования, необходимую для анализа поведения системы под нагрузкой получаем, меняя силовой параметр шага нагружения на деформационный. Уточнение решения на каждом шаге выполняется итерационно [124].

На рисунке 6.10 представлена зависимость нагрузки  $F_{кр}$  от начального угла наклона фермы при прямосимметричной ее деформации. Пунктиром показана эта же зависимость при расчете по недеформированной схеме.

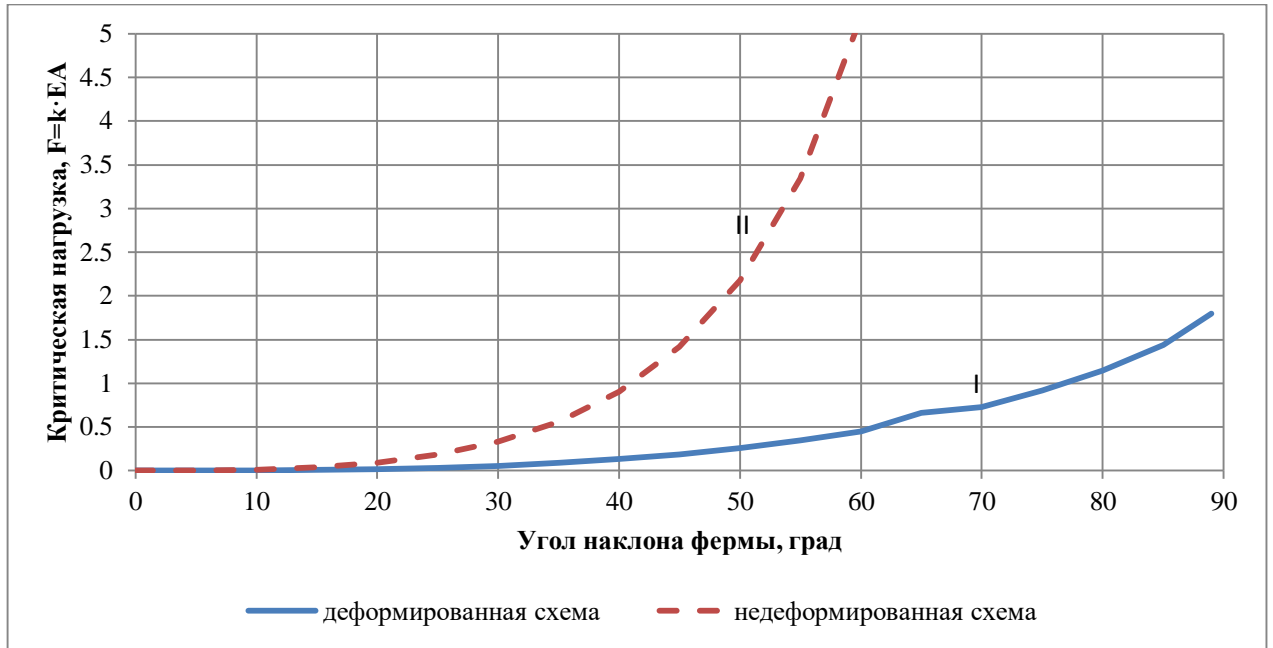


Рисунок 6.10 – Зависимость нагрузки  $F_{кр}$  от начального угла наклона фермы при прямосимметричной форме потери устойчивости

В переходной зоне  $62^\circ < \alpha < 70^\circ$  шаг нагружения принимается уменьшенным в 2 раза.

## 2. Обратносимметричная форма потери устойчивости фермы.

Теоретически эта форма потери устойчивости возможна лишь при малом возмущении нагрузкой в горизонтальном направлении или начальном несовершенстве.

Исходная конфигурация фермы с геометрическими и физическими параметрами показана на рисунке 6.11, а. В начальном положении при отсутствии нагрузки она симметрична:  $l_1^{(0)} = l_2^{(0)} = l$ ,  $\alpha_1^{(0)} = \alpha_2^{(0)} = \alpha$ .

Основная система смешанного метода показана на рисунке 6.11, б. Для исследования поведения системы при возрастании нагрузки используем процедуру пошагового догружения. Шаг нагрузки  $\Delta F = \frac{F}{n}$ , где  $n$  - число шагов. В случае необходимости шаг догружения может быть выбран переменным.

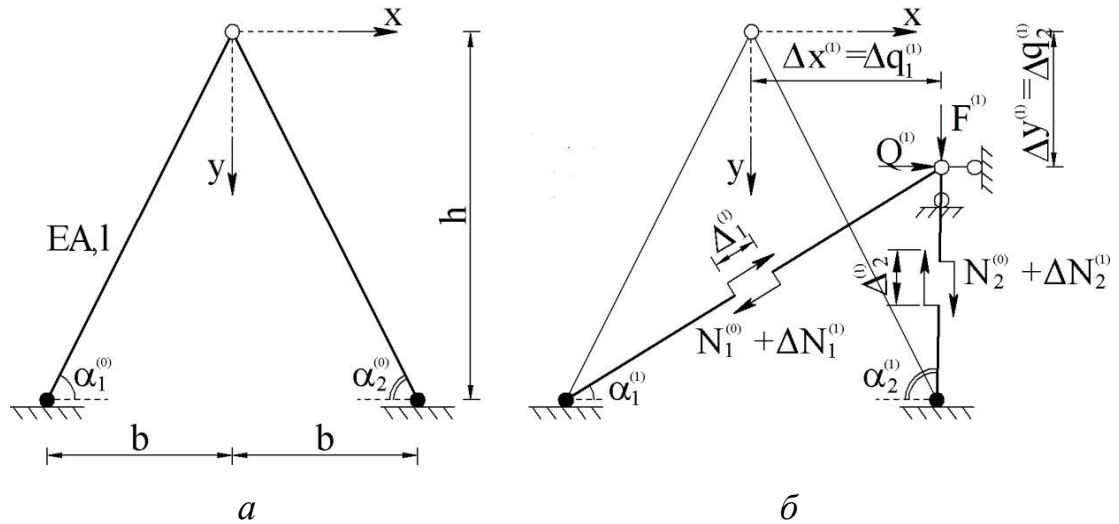


Рисунок 6.11 – Исходная конфигурация фермы с геометрическими и физическими параметрами и основная система смешанного метода при обратносимметричной форме потери устойчивости

Возмущающая нагрузка  $Q$  принимается очень малой по отношению к вертикальной нагрузке  $F$ . Например,  $Q = kF$ , где  $k = 10^{-3}$ .

Для примера рассмотрим ферму с начальным углом наклона  $75^\circ$  (с теми же параметрами, что и в предыдущем случае).

Траектория вертикального перемещения ее верхнего узла показана на рисунке 6.12 (кривая равновесных состояний).

На рисунках 6.13 и 6.14 представлены зависимости вертикального перемещения верхнего узла от нагрузки и горизонтального перемещения верхнего узла от нагрузки соответственно. На графиках представлены результаты расчета для нескольких начальных углов наклона стержней. Характерные точки обозначены на графике, соответствующем начальному углу наклона стержней  $75^\circ$ .

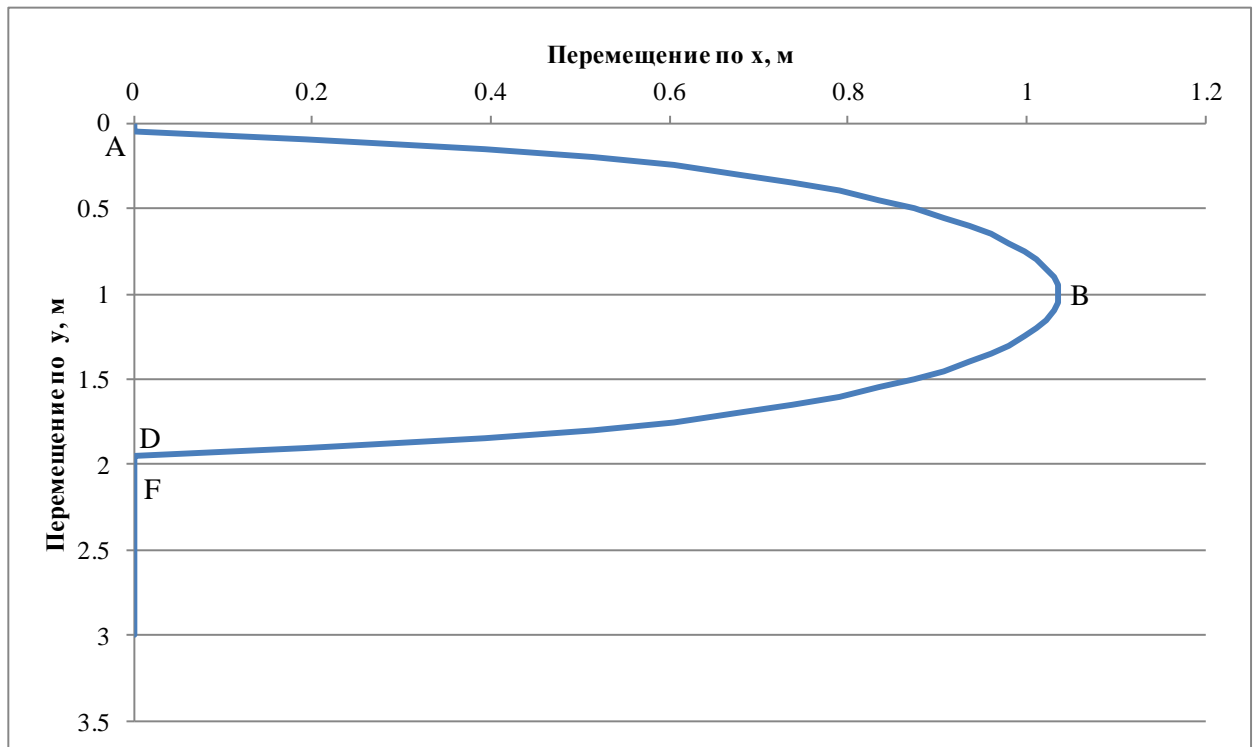


Рисунок 6.12 – Траектория вертикального перемещения верхнего узла

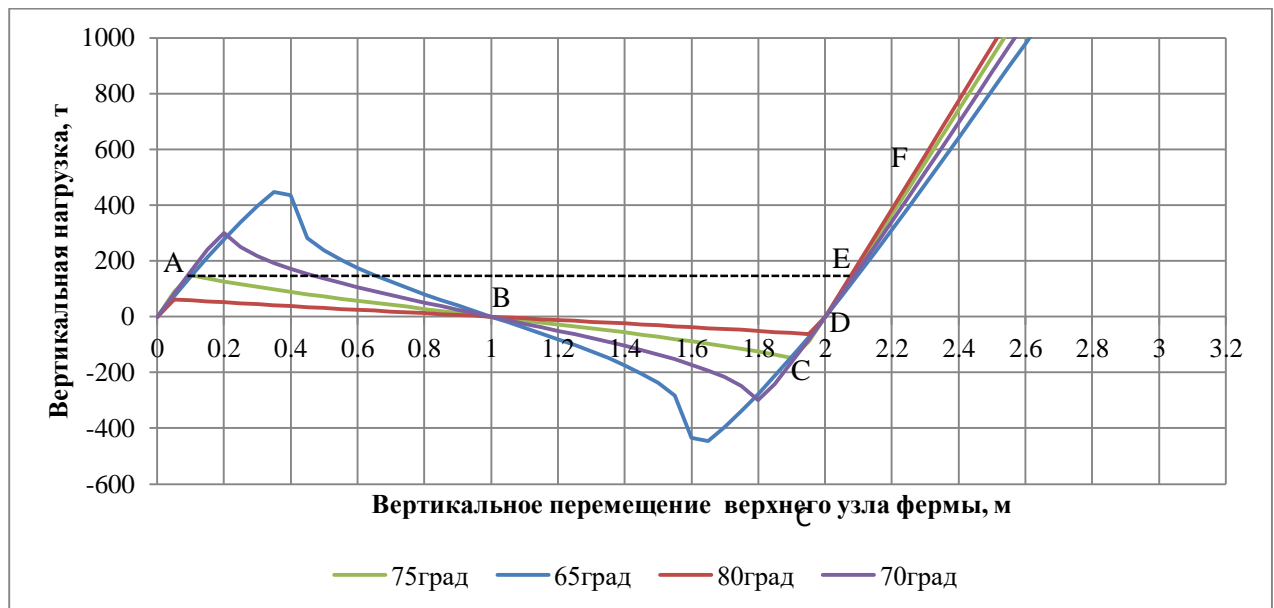


Рисунок 6.13 – Зависимость вертикального перемещения верхнего узла от нагрузки

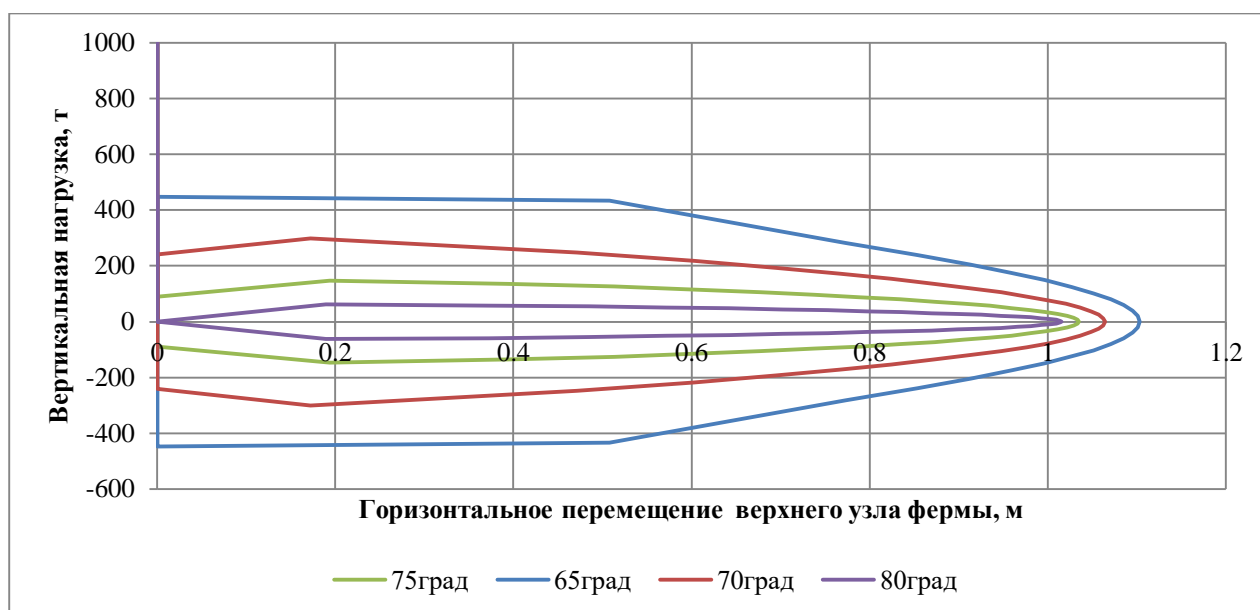


Рисунок 6.14 – Зависимость горизонтального перемещения верхнего узла от нагрузки

Итерационный процесс по заданной величине вертикальной нагрузки позволяет отследить поведение системы на участке 0 – А. Для построения полной кривой деформирования необходимо сменить параметр нагружения задаваясь пошаговым приращением величины вертикального перемещения.

Решение нелинейной системы уравнений на каждом шаге нагружения ведется по описанному выше алгоритму.

Как и в случае прямосимметричной формы потери устойчивости, кривая деформирования пересекает ось в двух точках  $E$  и  $C$ . Равновесие системы в них возможно при  $F = 0$ . При этом система имеет деформированную конфигурацию, отличающуюся от начальной.

На рисунке 6.15 приведены графики изменения величины нагрузки, соответствующей вертикальному перемещению верхнего узла фермы при различных значениях начального угла наклона стержней.

Выполнив расчет на различных начальных конфигурациях фермы, т.е. при разных значениях  $\alpha^{(0)}$ , найдем минимальное значение  $\alpha^{(0)} = 64,1^\circ$  из области  $90^\circ > \alpha^{(0)} \geq 64,1^\circ$  при котором возможна обратносимметричная форма потери устойчивости. Эта форма не выявляется в работах других исследователей.



Рисунок 6.15 – Графики изменения величины нагрузки, соответствующей вертикальному перемещению верхнего узла фермы при различных значениях начального угла наклона стержней

Для исследования поведения исследуемой фермы при обратносимметричной форме потери устойчивости наиболее эффективным оказывается включение в число неизвестных параметра приращения нагрузки  $\Delta F^{( )}$  на каждом шаге догружения и перевод в число задаваемых параметров приращение перемещения  $\Delta y^{( )}$  или  $\Delta x^{( )}$ .

### 6.3 Геометрически нелинейные задачи статики гибкой нити

#### 6.3.1 Гибкая нить, преднапряженная контргрузом на правом конце пролета

Рассмотрим гибкую нить ( $EI = 0$ ), преднапряженную подвешенным через блок на правом конце пролета  $AB$  грузом  $Q$  (рисунок 6.16, *а*). Её расчет впервые выполнен в нашей работе [76]. Предположим, что к этой нити приложены узловые нагрузки  $F_i$ , под действием которых связанные с ними жестко узлы  $i$  получают смещения по вертикали и горизонтали –  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  (рисунок 6.16, *б*), а подвешенный натягающий груз  $Q$  получает перемещение  $h$  [158, 178].

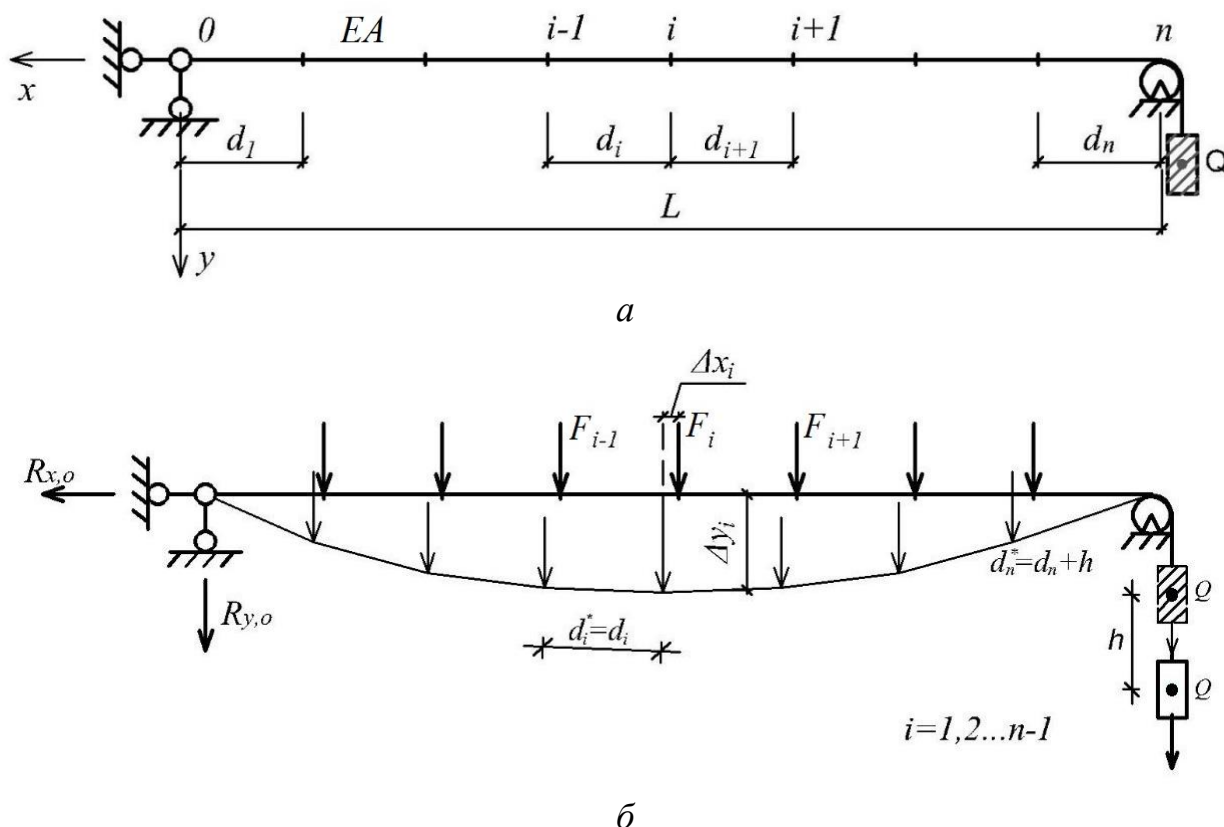


Рисунок 6.16 – Гибкая нить, растянутая контргрузом

Фрагмент основной системы смешанного метода для рассматриваемой задачи показан на рисунке 6.17, а. За неизвестные принимаются перемещения узлов  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ , перемещение груза  $h$ , и усилия в нити между узлами  $(i-1)$ ,  $i$  ( $i=1\dots n$ ).

На рисунке 6.17, б приведена конечно-элементная расчетная схема для данной задачи, на котором показан промежуточный узел  $i$  и примыкающие к нему конечные элементы.

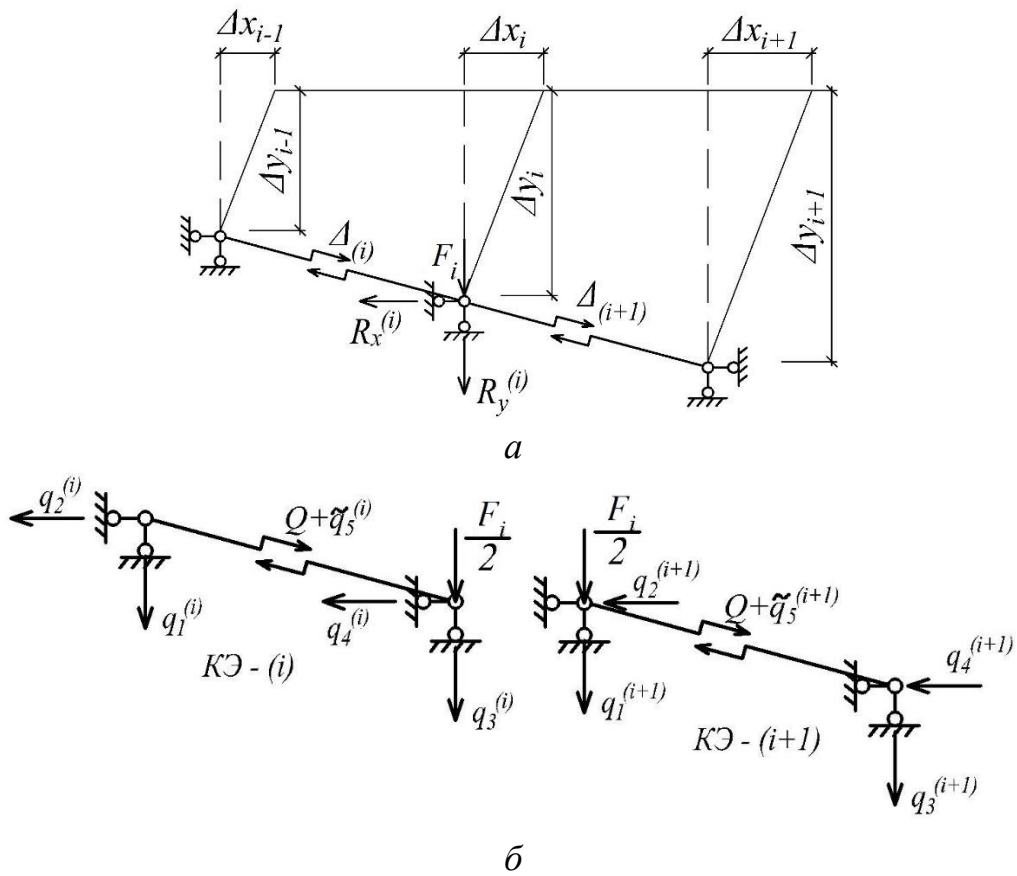


Рисунок 6.17 – Фрагмент основной системы смешанного метода для гибкой нити

Рассматриваемая система статически определимая (рисунок 6.18).

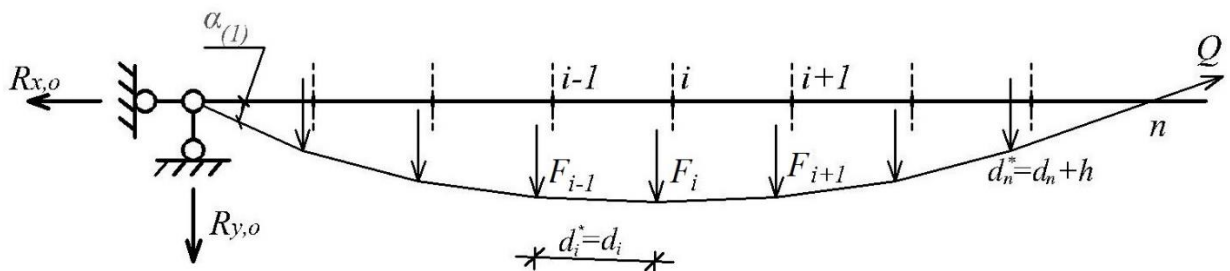


Рисунок 6.18 – Нить в равновесном состоянии

Усилие в нити на последнем (правом) участке равно  $Q$  (силе натяжения, создаваемой контргрузом  $Q$ ) (рисунок 6.19). Длина этого участка после нагружения будет равна  $(d_n + h)$ , то есть увеличивается по сравнению с исходным состоянием на величину подъема груза  $h$ .

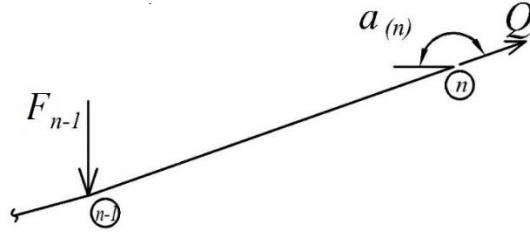


Рисунок 6.19 – Нить на последнем (правом) участке

Из условия равновесия системы следует:

$$\begin{aligned} R_{x,0} &= Q \cdot \cos \alpha_n, \\ R_{y,0} &= Q \cdot \sin \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} F_i. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из рассмотрения КЭ-1 (рисунок 6.20) получаем:

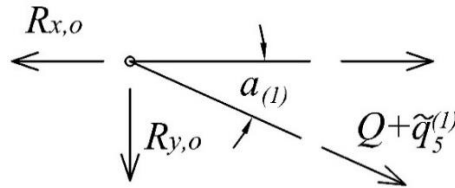


Рисунок 6.20 – КЭ-1 нити

$$R_{x,0} - (Q + \tilde{q}_5^{(1)}) \cos \alpha_1 = 0,$$

или

$$Q \cdot \cos \alpha_n - Q \cdot \cos \alpha_1 - \tilde{q}_5^{(1)} \cdot \cos \alpha_1 = 0,$$

т.е.

$$\tilde{q}_5^{(1)} = \frac{Q \cdot \cos \alpha_n - Q \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} = Q \cdot \left( \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_1} - 1 \right) \quad (6.8)$$

Из рисунка 6.18 видно, что на участке  $(n-1) - n$  усилие растяжения равно  $Q$ , т.е.  $Q + \tilde{q}_5^{(n)} = Q$ ;  $\tilde{q}_5^{(n)} = 0$ .

Из геометрии системы (рисунок 6.17, а):

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha_1 &= \frac{y_1}{^*d_1}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{d_1 - x_1}{^*d_1}, \\
 \sin \alpha_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{^*d_i}, \quad \cos \alpha_i = \frac{d_i + (x_{i-1} - x_i)}{^*d_i}, \\
 \sin \alpha_n &= \frac{y_{n-1}}{^*d_n}, \quad \cos \alpha_n = \frac{d_n}{^*d_n + h}, \\
 ^*d_i &= 1 + \frac{\tilde{q}_5^{(i)}}{EA_i}.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

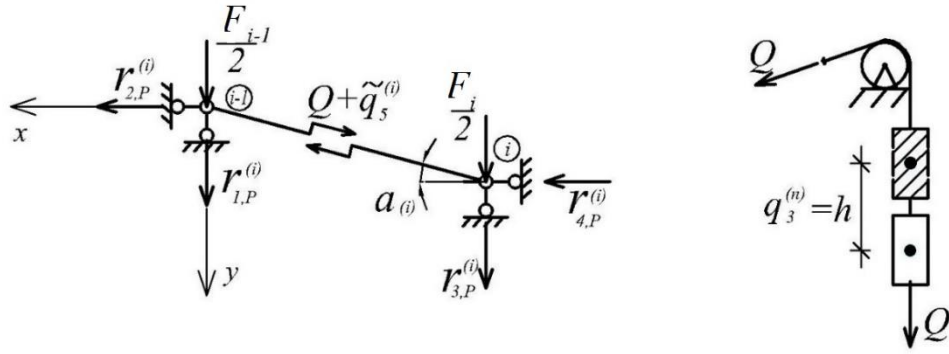
Для  $i$ -го КЭ элементы матрицы откликов определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{1,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,1}^{(i)} = -\sin \alpha_i; \quad \tilde{r}_{2,5}^{(i)} = -\tilde{\delta}_{5,2}^{(i)} = \cos \alpha_i; \\
 \tilde{r}_{3,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,3}^{(i)} = \sin \alpha_i; \quad \tilde{r}_{4,5}^{(i)} = -\tilde{\delta}_{5,4}^{(i)} = -\cos \alpha_i; \\
 r_{1,P}^{(i)} &= -\frac{1}{2} \cdot F_{i-1} - Q \cdot \sin \alpha_i; \quad r_{2,F}^{(i)} = Q \cdot \cos \alpha_i; \\
 r_{3,P}^{(i)} &= -\frac{1}{2} \cdot F_i + Q \cdot \sin \alpha_i; \quad r_{4,F}^{(i)} = -Q \cdot \cos \alpha_i; \\
 \delta_{5,5}^{(i)} &= \frac{d_i}{EF_i}.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Разрешающие уравнения смешанного метода имеют в данной задаче следующий физический смысл (рисунок 6.21):

$$\begin{aligned}
 R_x^{(1)} &= 0, \quad R_y^{(1)} = 0, \quad \Delta_5^{(1)} = 0 - \text{для узла 1 и КЭ-1 соответственно,} \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_x^{(i)} &= 0, \quad R_y^{(i)} = 0, \quad \Delta_5^{(i)} = 0 - \text{для узла } i \text{ и КЭ-}i \text{ соответственно,} \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_x^{(n-1)} &= 0, \quad R_y^{(n-1)} = 0, \quad \Delta_5^{(n-1)} = 0 - \text{для узла } (n-1) \text{ и КЭ-}(n-1) \text{ соответственно,} \\
 \Delta_5^{(n)} &= 0 - \text{для узла } n \text{ и КЭ-}n \text{ соответственно.}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Эти уравнения получаются объединением КЭ, примыкающих к общему для них узлу.

Рисунок 6.21 – КЭ- $i$  нити

Система нелинейных уравнений решается с учетом сформулированных выше граничных условий:

$$\tilde{q}_5^{(1)} = Q \cdot \left( \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_1} - 1 \right); \quad \tilde{q}_5^{(n)} = 0; \quad \tilde{q}_3^{(n)} = h; \quad d_n^* = d_n + h \quad (6.12)$$

Для иллюстрации алгоритма расчета и тестирования результатов рассмотрим случай, когда сосредоточенная нагрузка приложена только в середине пролета (рисунок 6.22).

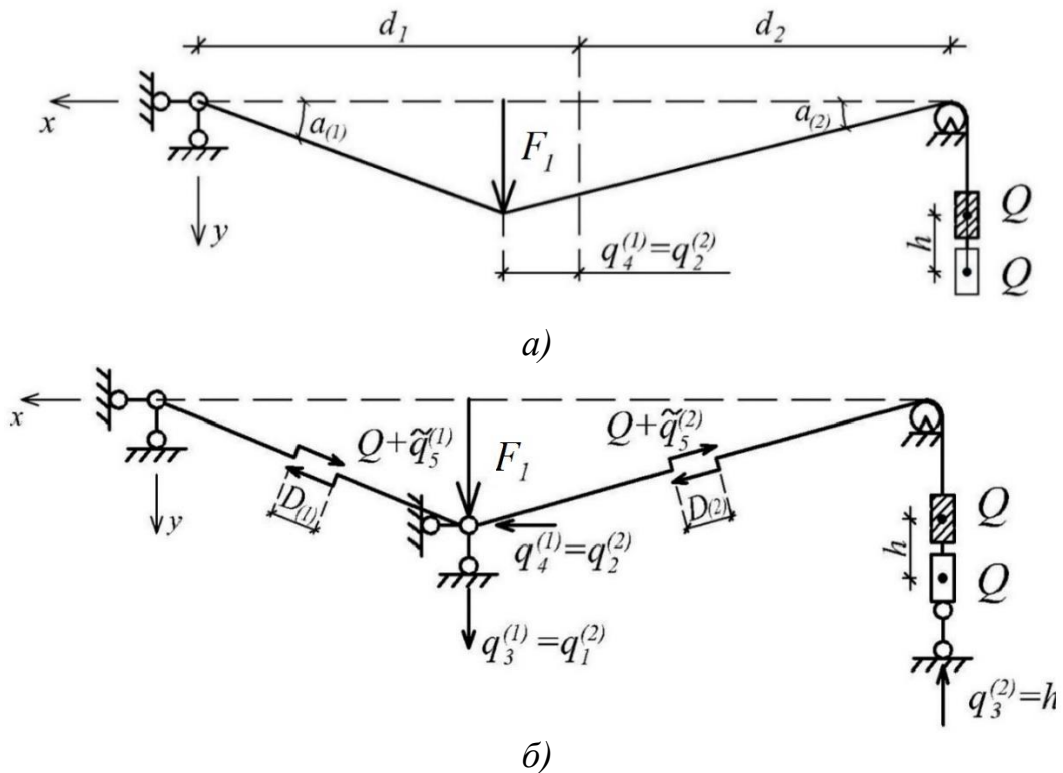


Рисунок 6.22 – Гибкая нить, растянутая грузом с сосредоточенной нагрузкой в середине пролета

Основная система изображена на рисунке 6.22, а. Для четырех неизвестных в основной системе имеем четыре разрешающих уравнения:

$$\begin{aligned}
 R_x^{(1)} &= \tilde{r}_{4,5}^{(1)} \cdot \tilde{q}_5^{(1)} + \tilde{r}_{2,5}^{(2)} \cdot \tilde{q}_5^{(2)} + r_{4,P}^{(1)} + r_{2,F}^{(2)} = 0, \\
 R_y^{(1)} &= \tilde{r}_{3,5}^{(1)} \cdot \tilde{q}_5^{(1)} + \tilde{r}_{1,5}^{(2)} \cdot \tilde{q}_5^{(2)} + r_{3,P}^{(1)} + r_{1,F}^{(2)} = 0, \\
 \Delta_5^{(1)} &= \tilde{\delta}_{5,3}^{(1)} \cdot q_3^{(1)} + \tilde{\delta}_{5,4}^{(1)} \cdot q_4^{(1)} = 0, \\
 \Delta_5^{(2)} &= \tilde{\delta}_{5,1}^{(2)} \cdot q_1^{(2)} + \tilde{\delta}_{5,2}^{(2)} \cdot q_2^{(2)} + \tilde{\delta}_{5,3}^{(2)} \cdot q_3^{(2)} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{4,5}^{(1)} &= -\tilde{\delta}_{5,4}^{(1)} = -\cos \alpha_{(1)}; \quad \tilde{r}_{2,5}^{(2)} = -\tilde{\delta}_{5,2}^{(2)} = \cos \alpha_{(2)}; \\
 \tilde{r}_{3,5}^{(1)} &= -\tilde{\delta}_{5,3}^{(1)} = \sin \alpha_{(1)}; \quad \tilde{r}_{1,5}^{(2)} = -\tilde{\delta}_{5,1}^{(2)} = \sin \alpha_{(2)}; \\
 \tilde{\delta}_{5,3}^{(2)} &= 1; \quad r_{4,F}^{(1)} = -Q \cdot \cos \alpha_{(1)}; \quad r_{2,F}^{(2)} = Q \cdot \cos \alpha_{(2)}; \\
 r_{3,F}^{(1)} &= -\frac{F_1}{2} + Q \cdot \sin \alpha_{(1)}; \quad r_{1,F}^{(2)} = -\frac{F_1}{2} + Q \cdot \sin \alpha_{(2)}; \\
 \sin \alpha_{(1)} &= \frac{q_3^{(1)}}{d_1}; \quad \sin \alpha_{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}}; \\
 \cos \alpha_{(1)} &= \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1}; \quad \cos \alpha_{(2)} = \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}}.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

После подстановки зависимостей (6.14) в систему уравнений (6.13), получаем систему четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно

неизвестных  $q_3^{(1)}, q_4^{(1)}, \tilde{q}_5^{(1)}, q_3^{(2)}$  (с учетом того, что

$$q_4^{(1)} = q_2^{(2)}; \quad q_3^{(1)} = q_1^{(2)}; \quad \tilde{q}_5^{(2)} = 0; \quad q_3^{(2)} = h);$$

$$\begin{aligned}
 R_x^{(1)} &= -\frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} \cdot q_5^{(1)} + Q \cdot \left( \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} - \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} \right) = 0, \\
 R_y^{(1)} &= \frac{q_3^{(1)}}{d_1} \cdot q_5^{(1)} - F + Q \cdot \left( \frac{q_3^{(1)}}{d_1} + \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} \right) = 0, \\
 \Delta_5^{(1)} &= -\frac{q_3^{(1)}}{d_1} \cdot q_3^{(1)} + \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} \cdot q_4^{(1)} = 0, \\
 \Delta_5^{(2)} &= -\frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} \cdot q_3^{(1)} - \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} \cdot q_4^{(1)} + q_3^{(2)} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Численное решение системы при  $d_1 = 5 \text{ м}$ ;  $d_2 = 5 \text{ м}$ ;  $Q = 10 \text{ т}$ ;  $EA = \infty$ ;  $\frac{F_1}{Q} = 0 \dots 15$  выполнено методом последовательного догружения с уточнением на каждом шаге догружения результатов с помощью метода Ньютона.

Результат решения задачи в виде изменения геометрии системы, при условии нерастяжимости нити, представлен на рисунке 6.23.

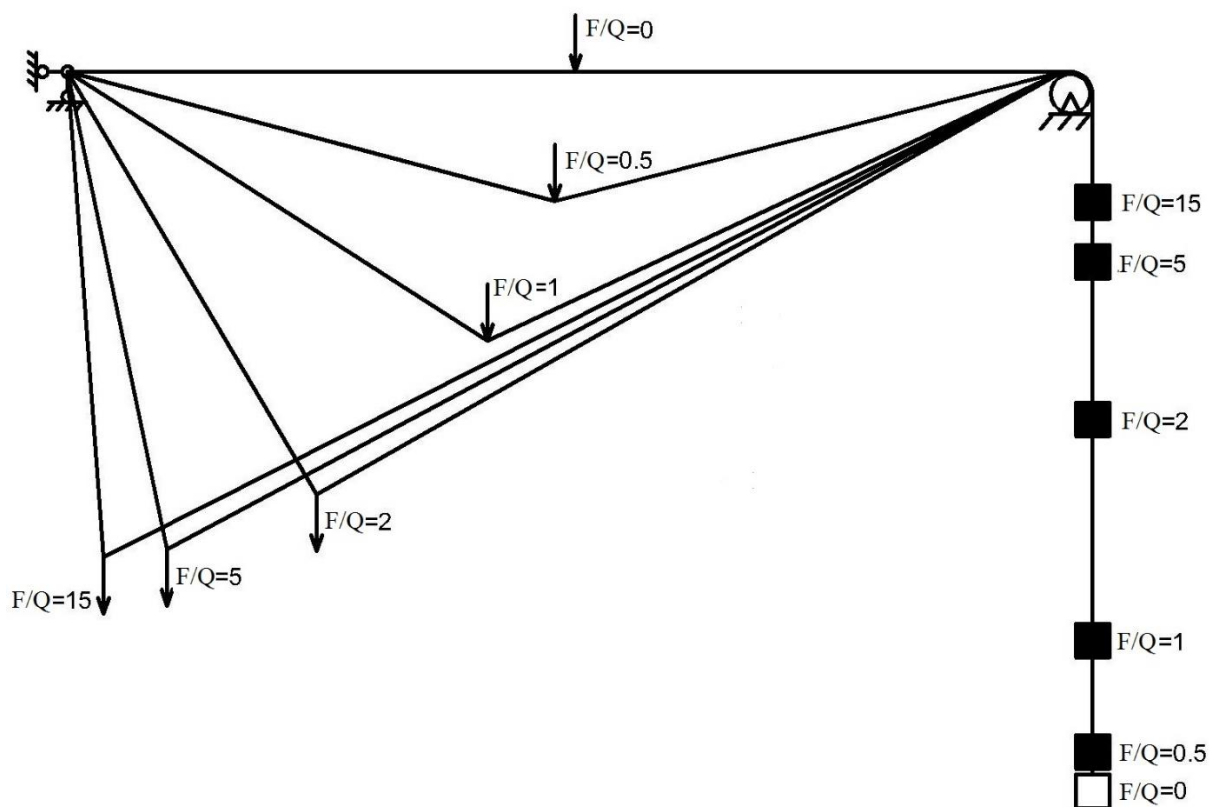


Рисунок 6.23 – Геометрия системы при условии нерастяжимости нити

Для оценки сходимости решения к точному выполним сравнение численного решения с аналитическим.

Зададимся углом наклона левого элемента в  $30^\circ$ . С учетом того, что нить нерастяжима, вертикальное перемещение точки приложения силы:

$$q_3^{(1)} = d_1 \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5 \text{ м}.$$

Горизонтальное перемещение точки приложения силы:

$$q_4^{(1)} = d_1 \cdot (1 - \cos 30^\circ) = 5 \cdot (1 - 0.866) = 0.6699 \text{ м}.$$

Перемещение контргруза составит:

$$q_3^{(2)} = \sqrt{\left(d_2 + q_4^{(1)}\right)^2 + q_3^{(1)^2}} - d_2 = \sqrt{(5 + 0.6699)^2 + 2.5^2} - 5 = 1.1966 \text{ м.}$$

Угол наклона правого элемента:

$$\sin \alpha_{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} = \frac{2.5}{5 + 1.1966} = 0.4034$$

$$\cos \alpha_{(2)} = \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} = \frac{5 + 0.6699}{5 + 1.1966} = 0.9150$$

Рассмотрим равновесие первого узла (левого):

$$\left(q_5^{(1)} + Q\right) \cdot \cos \alpha_{(1)} = Q \cdot \cos \alpha_{(2)}, \quad q_5^{(1)} \cdot \cos \alpha_{(1)} + Q \cdot \cos \alpha_{(1)} = Q \cdot \cos \alpha_{(2)},$$

$$q_5^{(1)} = Q \cdot \frac{\cos \alpha_{(2)}}{\cos \alpha_{(1)}} - Q, \quad F = \left(q_5^{(1)} + Q\right) \cdot \sin \alpha_{(1)} + Q \cdot \sin \alpha_{(2)},$$

$$F = \left(Q \cdot \frac{\cos \alpha_{(2)}}{\cos \alpha_{(1)}} - Q + Q\right) \cdot \sin \alpha_{(1)} + Q \cdot \sin \alpha_{(2)},$$

$$F = Q \cdot \cos \alpha_{(2)} \cdot \tan \alpha_{(1)} + Q \cdot \sin \alpha_{(2)}, \quad \frac{F}{Q} = \cos \alpha_{(2)} \cdot \tan \alpha_{(1)} + \sin \alpha_{(2)}.$$

После подстановки значений тригонометрических функций при заданном  $\alpha$ , получаем

$$\frac{F}{Q} = \cos \alpha_{(2)} \cdot \tan \alpha_{(1)} + \sin \alpha_{(2)} = 0.9150 \cdot \tan 30^\circ + 0.4034 = 0.9317$$

При соотношении  $\frac{F}{Q} = 0.9317$  при расчете системы методом конечных элементов с шагом догружения  $\frac{F}{Q} = 0.05$

$$q_3^{(1)} = 2.49916 \text{ м; } q_4^{(1)} = 0.712074 \text{ м; } q_3^{(2)} = 1.255625 \text{ м}$$

Относительная погрешность составляет:

$$\Delta q_3^{(1)} = \frac{2.5 - 2.49916}{2.5} \cdot 100 = 0.0336\%; \quad \Delta q_4^{(1)} = \frac{0.6699 - 0.712074}{0.6699} \cdot 100 = 6.29\%;$$

$$\Delta q_3^{(2)} = \frac{1.1966 - 1.255625}{1.1966} \cdot 100 = 4.93\%.$$

Так как относительная погрешность при вычислении одного из неизвестных превышает 5%, уменьшим шаг нагружения в 2 раза.

При соотношении  $F / Q = 0.9317$  при расчете системы методом конечных элементов с шагом нагружения  $F / Q = 0.025$

$$q_3^{(1)} = 2.499757 \text{ м}; \quad q_4^{(1)} = 0.699661 \text{ м}; \quad q_3^{(2)} = 1.239058 \text{ м}.$$

Относительная погрешность составляет:

$$\Delta q_3^{(1)} = \frac{2.5 - 2.499757}{2.5} \cdot 100 = 0.00972\%;$$

$$\Delta q_4^{(1)} = \frac{0.6699 - 0.699661}{0.6699} \cdot 100 = 4.44\%;$$

$$\Delta q_3^{(2)} = \frac{1.1966 - 1.239058}{1.1966} \cdot 100 = 3.55\%.$$

Проведенные расчеты тестовой системы показывают эффективность развиваемой формы МКЭ. Точность решения зависит от величины шага нагружения. Прямое решение данной задачи по МКЭ в перемещениях получить невозможно.

### 6.3.2 Нить, нагруженная в эквидистантных узловых точках

Рассмотрим нить с неподвижными опорами на концах пролета, изображенную на рисунке 6.24, а.

Заданные параметры нити:

общая длина нити (длина заготовки) -  $l$ , пролет  $L$ , припуск  $\Delta l = l - L$ , узловые нагрузки  $F_i$ .

Предполагается, что расстояния между точками приложения нагрузки  $F_i$  не зависят от конфигурации нити под нагрузкой и равны  $d$ .

За конечный элемент принимается участок между узлами  $(i-1)$  и  $(i)$  (рисунок 6.24, б).

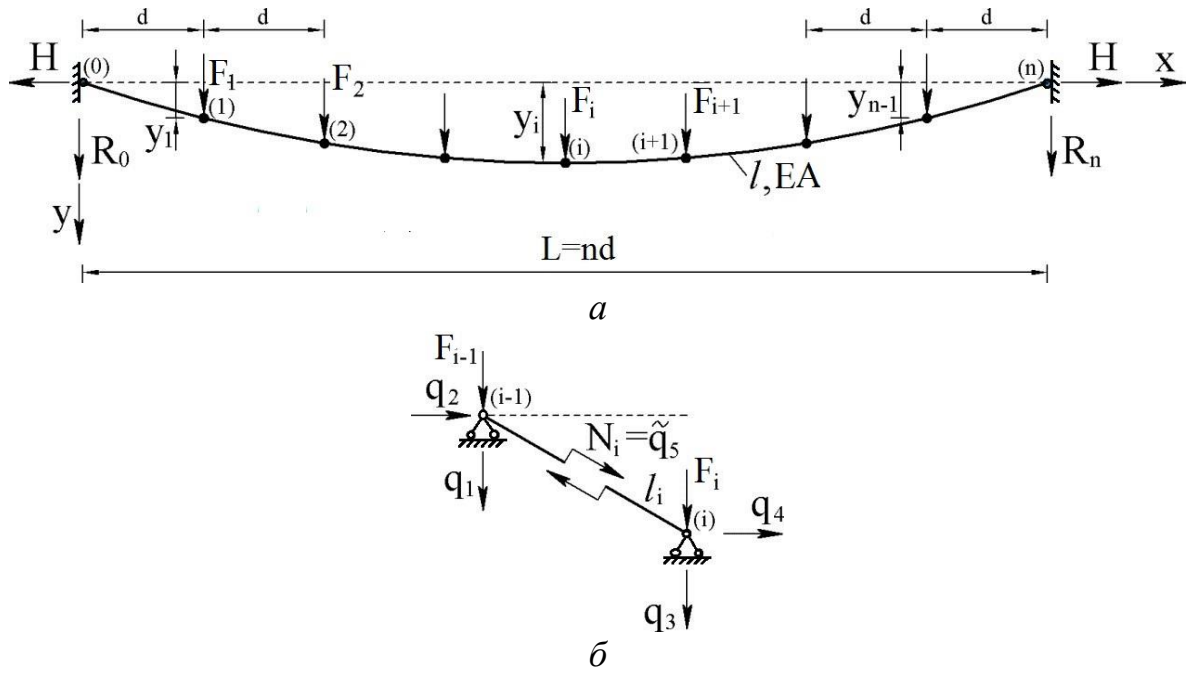


Рисунок 6.24 – Нить, нагруженная в эквидистантных узловых точках

Если нить нерастяжимая, то из условий равновесия узла  $i$  в основной системе смешанного метода (рисунок 6.25) следует:

1.  $R_{i,x} = -N_i \cdot \cos \alpha_i + N_{i+1} \cdot \cos \alpha_{i+1} = 0$ ,
  2.  $R_{i,y} = F_i - N_i \cdot \sin \alpha_i + N_{i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1} = 0$ .
- (6.16)
- $(i = 1, 2, \dots, n-1)$

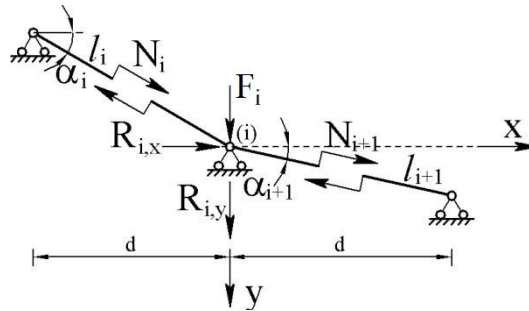


Рисунок 6.25 – Узел  $i$  в основной системе смешанного метода

Из-за отсутствия деформаций в нерастяжимой нити, в разрешающей системе уравнений смешанного метода вместо условий неразрывности деформаций в нитях, примыкающих к узлу  $i$ , следует использовать условие неизменности длины нити  $l$  при различных ее конфигурациях под нагрузкой:

3.  $\sum_{i=1}^n l_i \cdot \cos \alpha_i = L = n \cdot d$ .
- (6.17)

Неизвестными в уравнениях (6.16), (6.17) для всей нити являются  $n$  усилий  $N_i$ ,  $n$  углов наклона  $\alpha_i$  межузловых участков, величины реакций  $R_0$  и  $R_n$ , распора  $H$ , т.е. всего  $(2n+3)$  неизвестных. Для их нахождения имеем  $2(n-1)$  уравнений (6.16), одно уравнение (6.17) и уравнения, связывающие нагрузки  $F_i$ , реакции  $R_0$ ,  $R_n$  и распор  $H$  через «балочный изгибающий момент»:

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{n-i}{n} \right) \cdot F_i, \quad R_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{i}{n} \right) \cdot F_i, \quad (6.18)$$

$$M_i^{\bar{o}} = -R_0 \cdot (i \cdot d) + \sum_{j=1}^{i-1} F_j \cdot (i-j), \quad M_i^{\bar{o}} = H \cdot y_i. \quad (6.19)$$

Из (6.19) следует:

$$y_i = \frac{M_i^{\bar{o}}}{H} = \frac{1}{H} \cdot \left[ \sum_{j=1}^{i-1} F_j \cdot (i-j) \cdot d - i \cdot d \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{n-i}{n} \right) \cdot F_i \right] = \frac{l}{H} f(F_i). \quad (6.20)$$

Так как величины  $l$  и  $L$  заданы, т.е.

$$\Delta l = l - L = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d}{\cos \alpha_i} - d \right) = d \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\cos \alpha_i} - 1 \right), \quad (6.21)$$

где  $\cos \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{d}$ ,

получим

$$\Delta l = d \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{y_i - y_{i-1}}{d} \right)^2} - 1 \right]. \quad (6.22)$$

После преобразований с учетом (6.19-6.21) уравнение (6.22) получает следующий вид:

$$\Delta l = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{H^2 \cdot d^2 + [f(F_i)]^2 - [f(F_{i-1})]^2} - H \cdot d \right]. \quad (6.23)$$

Решив это нелинейное уравнение относительно распора  $H$ , найдем далее по (6.20) значения узловых перемещений при заданных узловых нагрузках  $F_i$ .

Выполним расчет нерастяжимой нити при следующих параметрах:

Длина нити  $l = 41$  м, пролет  $L = 40$  м, распределенная нагрузка  $q = 0.5$  т/м, жесткость нити  $EA = \infty$ .

В таблице 6.1 приведено сравнение величин распора и координат узлов конечно-элементной сетки, вычисленных по изложенному выше алгоритму с аналитическим решением [158, 178].

Таблица 6.1

	Величина распора $H$ , (м)	Координаты $y$ , (м) узлов						
		1	2	3	4	5	6	7
Аналитическое решение	13.33	1.233	2.349	3.231	3.761	3.822	3.297	2.069
Абсолютная погрешность (%) 8 КЭ	4.88	-4.94	-4.92	-4.88	-4.84	-4.78	-4.65	-4.23
Абсолютная погрешность (%) 16 КЭ	1.80	-1.65	-1.63	-1.60	-1.56	-1.50	-1.37	-0.96
Абсолютная погрешность (%) 32 КЭ	1.37	-1.20	-1.18	-1.15	-1.11	-1.05	-0.93	-0.52
Абсолютная погрешность (%) 64 КЭ	1.28	-1.12	-1.10	-1.06	-1.03	-0.97	-0.84	-0.43

Отличием расчета растяжимой нити является учет увеличения общей длины нити на величину  $\Delta l'$ . Соответственно, уравнение (6.34) примет вид

$$\Delta l + \Delta l' = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{H^2 \cdot d^2 + [f(F_i)]^2} - [f(F_{i-1})]^2 - H \cdot d \right]. \quad (6.24)$$

Величина  $\Delta l'$  может быть найдена только итерационно. За начальное приближение можем принять суммарное удлинение каждого участка нити от усилий  $N_i$ , определенных при условии нерастяжимости нити.

$$\Delta l'_{(0)} = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{EA}.$$

После первой итерации (решении при  $\Delta l'_{(0)}$ ) находим новое значение приращения длины и повторяем расчет. Расчет повторяем до тех пор, пока не будет достигнута заданная степень точности определения величины  $\Delta l'$ .

Выполним расчет растяжимой нити при следующих параметрах:

Длина нити  $l = 41 \text{ м}$ , пролет  $L = 40 \text{ м}$ , распределенная нагрузка  $q = 0.5 \text{ т / м}$ , материал нити – арматурная сталь периодического профиля  $\varnothing 25 \text{ мм}$  ( $A = 4.91 \text{ см}^2$ ), модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг / см}^2$ .

В таблице 6.2 приведено сравнение величин распора и координат узлов конечно-элементной сетки, вычисленных по изложенному алгоритму с аналитическим решением [158, 178].

Таблица 6.2

	Величина распора $H, (м)$	Координаты $y, (м)$ узлов						
		1	2	3	4	5	6	7
Аналитическое решение	12.98	1.267	2.413	3.318	3.862	3.925	3.386	2.125
Абсолютная погрешность (%) 8КЭ	2.23	-2.04	-2.05	-2.05	-2.02	-1.95	-1.82	-1.40
Абсолютная погрешность (%) 16КЭ	1.56	-1.35	-1.36	-1.36	-1.33	-1.26	-1.13	-0.71
Абсолютная погрешность (%) 32КЭ	1.40	-1.18	-1.19	-1.19	-1.16	-1.09	-0.96	-0.54
Абсолютная погрешность (%) 64КЭ	1.36	-1.13	-1.15	-1.14	-1.12	-1.05	-0.91	-0.50

Анализ этих результатов позволяет сделать вывод о том, что достаточная для практических целей точность расчета достигается уже при восьми конечных элементах.

### 6.3.3 Нить с заданной стрелой провисания

Определим напряженно-деформированное состояние нити под действием собственного веса и сосредоточенной силы (рисунок 6.26).

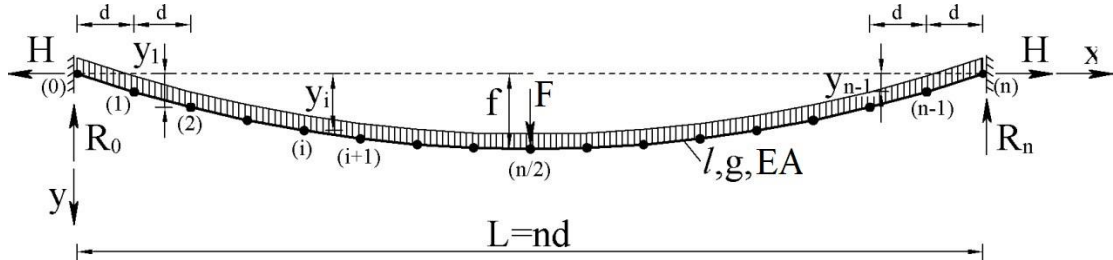


Рисунок 6.26 – Нить под действием собственного веса и сосредоточенной силы

Заданные параметры нити:

Стрела провисания -  $f$ , пролет  $L$ , собственный погонный вес нити  $g$ , узловая нагрузка  $F$ , жесткость нити  $EA$ .

Собственный вес нити – это распределенная нагрузка по длине нити. Для решения задачи необходимо привести эту нагрузку к распределенной по пролету.

$$q_i = \frac{g}{\cos \alpha_i}. \quad (6.25)$$

Полагается, что расстояния между точками приложения нагрузки  $F_i$  не зависят от конфигурации нити под нагрузкой и равны  $d$ . Приведенная распределенная нагрузка к узловой:

$$F_i = \frac{d}{2} \cdot \left( \frac{g}{\cos \alpha_i} + \frac{g}{\cos \alpha_{i+1}} \right) = \frac{d \cdot g}{2} \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha_i} + \frac{1}{\cos \alpha_{i+1}} \right). \quad (6.26)$$

Выполним расчет нити в геометрически нелинейной постановке.

На рисунке 6.27 представлен фрагмент основной системы смешанного метода.

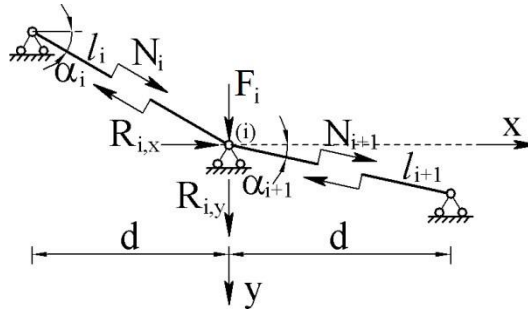


Рисунок 6.27 – Фрагмент основной системы смешанного метода

Составляем систему геометрически нелинейных разрешающих уравнений.

Уравнения равновесия ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\begin{aligned} N_i \cdot \cos \alpha_i + N_{i+1} \cdot \cos \alpha_{i+1} &= 0, \\ F_i - N_i \cdot \sin \alpha_i + N_{i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1} &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Уравнения неразрывности деформации ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$-q_{y,i} \cdot \sin \alpha_i - q_{x,i} \cdot \cos \alpha_i + q_{y,i+1} \cdot \sin \alpha_{i+1} + q_{x,i+1} \cdot \cos \alpha_{i+1} + \frac{l_i}{EA} \cdot N_i = 0 \quad (6.28)$$

Геометрические параметры нити с учетом растяжения:

$$\begin{aligned} l_i^* &= l_i \cdot \left( 1 + \frac{N_i}{EA} \right), \quad \sin \alpha_i = \frac{y_i + q_{y,i} - y_{i-1} - q_{y,i-1}}{l_i^*}, \quad \cos \alpha_i = \frac{d + q_{x,i} - q_{x,i-1}}{l_i^*}, \\ l_{i+1}^* &= l_{i+1} \cdot \left( 1 + \frac{N_{i+1}}{EA} \right), \quad \sin \alpha_{i+1} = \frac{y_{i+1} + q_{y,i+1} - y_i - q_{y,i}}{l_{i+1}^*}, \quad \cos \alpha_{i+1} = \frac{d + q_{x,i+1} - q_{x,i}}{l_{i+1}^*}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Решение системы геометрически нелинейных разрешающих уравнений (6.27)-(6.29) выполняется итерационно, как и в п.6.4.2.

Выполним численный расчет при следующих параметрах:

пролет  $L = 100$  м, стрела провисания  $f = 5$  м, площадь каната  $A = 12$  см<sup>2</sup>, модуль упругости материала  $E = 16 \cdot 10^6$  тс / м<sup>2</sup>, собственный вес каната  $g = 10$  кгс / м, сосредоточенная нагрузка  $F = 1$  т.

Результаты расчета при различном количестве конечных элементов, а также сравнение с аналитическим решением [158, 178], приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3

	Распор $H, m$	$N_{\max}, m$	$y_{\max}, m$
Аналитическое решение	6.45	6.53	5.81
Решение по МКЭ в форме КСМ - 8 КЭ	6.4966	6.5638	5.77
Погрешность	-0.72%	-0.52%	0.69%
Решение по МКЭ в форме КСМ - 16 КЭ	6.4665	6.5386	5.7970
Погрешность	-0.26%	-0.13%	0.22%
Решение по МКЭ в форме КСМ - 32 КЭ	6.4591	6.5336	5.8037
Погрешность	-0.14%	-0.06%	0.11%

Из таблицы 6.3 видно, что погрешность решения задачи методом конечных элементов в форме классического смешанного метода даже при разбиении на 8 КЭ не превышает 1%. При увеличении числа рассматриваемых конечных элементов точность решения увеличивается, погрешность составляем менее 0.15% при разбиении нити на 32 КЭ. Дальнейшее увеличение числа рассматриваемых элементов не приводит к значительному снижению погрешности решения и соответственно не оправдывает увеличение порядка системы разрешающих уравнений.

#### 6.4 Расчет систем с односторонними связями

Часто встречающиеся в инженерной практике системы с односторонними связями относятся к классу конструктивно-нелинейных, т. е. систем с изменяющейся в процессе нагружения, возведения или эксплуатации конструктивной схемой. [1-3, 14, 28, 29, 51, 55, 113, 124, 135, 136, 152, 153, 154, 179].

Проблема расчета систем с односторонними связями вызывала значительный интерес, начиная с 50-х годов XX в. Уже в работах И.М. Рабиновича [153, 154] рассмотрены простейшие случаи, для которых возможно получение точного решения.

Теория расчета конструкций с односторонними упругими и неупругими связями связана с общими проблемами расчета балок, рам, плит, контактирующих с односторонними основаниями разных типов, с расчетом пролетных строений, мостов, тоннелей и подземных сооружений. В [115] рассматривается расчет каменных конструкций, как расчет конструкций, включающих односторонние связи, а в [113] вантовых систем, в том числе рам с затяжками.

Все работы, связанные с исследованием систем с односторонними связями, можно объединить условно по используемым подходам и методам в четыре группы:

- прямые и итерационные методы [2, 3, 8, 104, 149, 171, 174, 179 и др.];
- методы линейного программирования [93-95, 133, 148, 156 и др.];
- методы нелинейного программирования [4, 7, 25-27, 108, 109, 117, 132, 173 и др.];
- вариационные и разностно-вариационные методы [15, 16, 105, 106 и др.].

В подавляющем большинстве работ, связанных с исследованием систем с односторонними упругими или неупругими, как конструктивно- или физически-нелинейных систем используются итерационные методы, включенные в общий алгоритм [2, 14, 16, 25, 50, 105, 106]. Это связано с тем, что в этих системах площадь зоны “отлипания” или количество точек контакта с односторонними связями зависят от величины нагрузок, последовательности их приложения и т. д. [27, 93, 94, 108]. Поэтому в расчетах с использованием итерационных процедур и процедур пошагового нагружения необходимо отслеживать на каждом шаге процесс закрытия зазоров между сооружением и односторонними связями, изменение знаков реакций в этих связях и “отлипание” сооружения от связей [14, 16, 26, 115].

Итерационный подход к расчету систем с односторонними связями был применен в работах В. А. Игнатьева [51] и Е. М. Тихонова [179]. В них даны алгоритмы поиска рабочих расчетных схем для балок и систем перекрестных балок с односторонними связями. Предложенная в работе [179] модификация

алгоритма из [16] позволяет избежать случаев заикливания итерационного процесса.

В настоящее время для расчета конструктивно-нелинейных систем с односторонними связями применяются, чаще всего, методы линейного и нелинейного программирования [4, 7, 94, 108, 117, 156, 173 и др.]

Наиболее полный обзор работ, посвященных расчету систем с односторонними связями, называемыми конструктивно-нелинейными, содержится в диссертации В. П. Аленина [2]. В ней же выполнен критический анализ имеющихся на современном этапе подходов к решению проблемы расчета систем с односторонними связями.

Сложность расчета систем на деформируемом основании, как систем с односторонними связями заключается в том, что область контакта или точки контакта изменяются в зависимости от величины и порядка приложения нагрузки.

В работе З. Н. Пригородовой [149] изложен комбинированный алгоритм расчета балок на линейном одностороннем континуальном основании. Суть алгоритма заключается в том, что на каждой итерации расчета в случае наличия зоны отрыва вычисляются дополнительные сосредоточенные силы, прикладываемые во всех находящихся в этой зоне дискретных односторонних опорах для устранения отрыва. После оценки полученного таким образом решения на соответствие рабочим направлениям односторонних связей реакций и перемещений вносятся изменения в расчетную схему, и выполняется следующая итерация. Расчет считается законченным, когда дополнительные сосредоточенные силы становятся равными нулю. На основе идеи дополнительных нагрузок в работах, выполненных в школе В. А. Игнатьева, был разработан прямой метод последовательных приближений, названный авторами по его физическому смыслу “методом компенсирующих нагрузок” [1, 2, 55, 124, 179].

В работах [1] и [2] на конкретных примерах показаны возможности применения этого метода для расчета систем с односторонними линейно-упругими, нелинейно-упрочняющимися и разупрочняющимися связями.

Для реализации отслеживания изменения расчетной схемы после каждого шага итерации или нагружения наиболее удобным методом представляется разрабатываемый нами МКЭ в форме классического смешанного метода. Система решающих уравнений этой формы МКЭ предоставляет широкие возможности для анализа поведения системы, как при изменениях различных параметров, так и при изменениях видов воздействия на систему. Так, например, может рассматриваться задача о нахождении нагрузки, которой соответствует заданный уровень узловых перемещений или узловых усилий и т.д. Не меняя структуру этих уравнений, можно принимать за неизвестные параметры любые из перечисленных трех: параметр силового нагружения, параметр линейного перемещения узлов (прогибы) или параметр усилия в узловых точках (изгибающие моменты).

Необходимость смены параметра нагружения возникает при анализе конструктивно нелинейных систем с использованием процедур пошагового нагружения и смены расчетной схемы.

Преимуществом алгоритма является полная информация о НДС системы на каждом шаге нагружения и на каждой итерации при уточнении решения на этом шаге. Алгоритм даёт возможность устранения проблемы заикливания итерационного процесса и отслеживать процесс включения или выключения односторонних связей в процессе пошагового приращения параметра.

В данном разделе излагается опубликованный в наших работах [60, 66, 67] алгоритм расчета систем с односторонними связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.

#### **6.4.1 Алгоритм расчета стержневых систем с односторонними связями**

Применение МКЭ в форме классического смешанного метода для моделирования стержневых систем с односторонними связями рассмотрим на примере многопролетной балки с заданной нагрузкой, и зазорами  $\Delta_i$  между

балкой и упругими опорами (рисунок 6.28, а). Основная система смешанного метода для рассматриваемой балки изображена на (рисунок 6.28, б). На рисунке 6.28, в показан отдельно  $i$ -й конечный элемент, за который принимается участок балки между опорами  $(i-1)$ ,  $i$ .

Фрагмент основной системы смешанного метода показан на рисунке 6.29. В каждом надпорном сечении балки поставлены связи, препятствующие его линейным смещениям  $q_i$  по направлению оси  $OY$  и угловым смещениям  $\varphi_i$  (поворотам сечений).

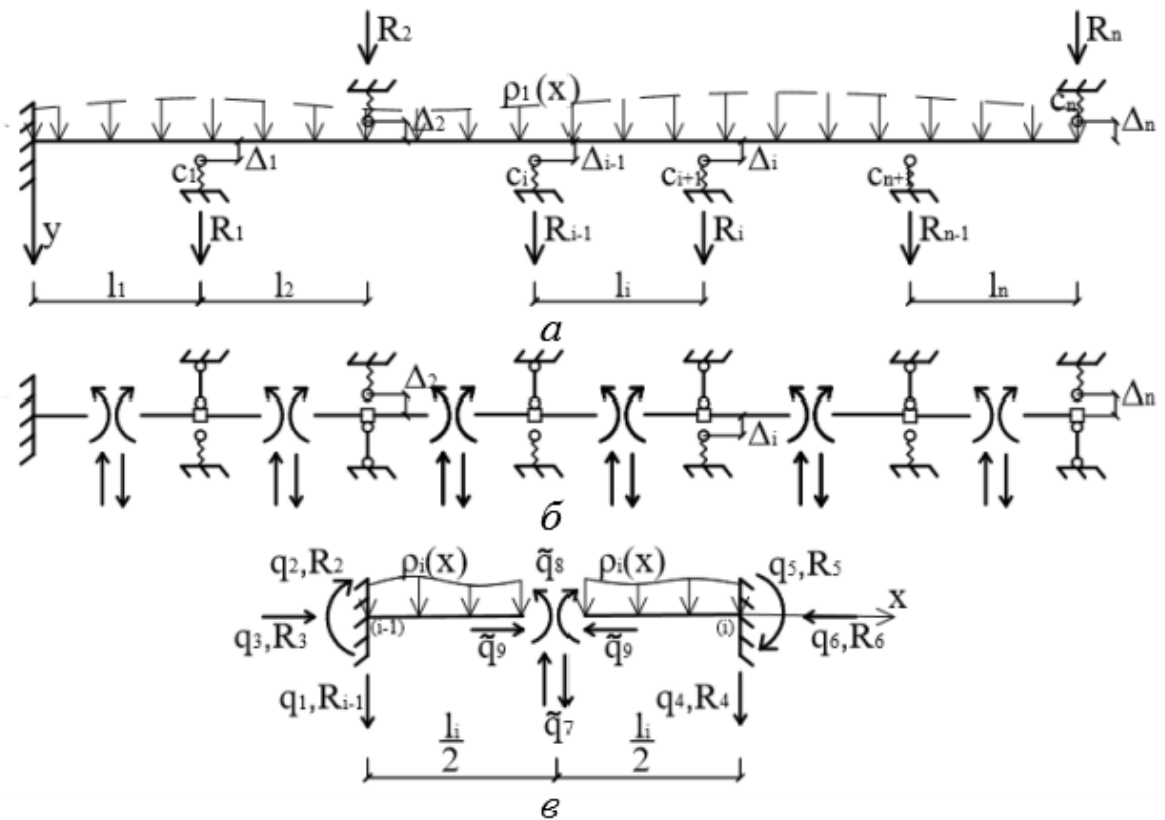


Рисунок 6.28 – Многопролетная балка с заданной нагрузкой и зазорами между балкой и упругими опорами

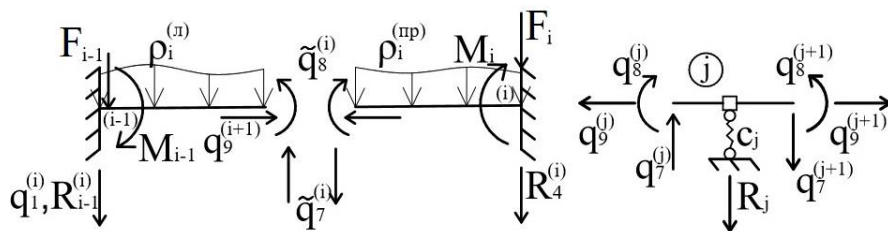


Рисунок 6.29 – Фрагмент основной системы многопролетной балки

На этом рисунке введены следующие обозначения:

$F_i, M_i, N_i$  – сосредоточенные приведенные к узловым нагрузки,

$\rho_i^{(l)}, \rho_i^{(np)}$  – нагрузки в левой и правой половинах КЭ,

$\Delta_i$  – зазоры между балкой и опорами,  $c_j$  – жесткость упругих опор,

Уравнения равновесия узла  $i$  при отсутствии в нем опоры.

$$1. R_y^{(i)} = R_4^{(i)} + R_1^{(i+1)} = F_i + (\rho_i^{(np)} + \rho_{i+1}^{(l)}) - \tilde{q}_7^{(i)} + \tilde{q}_7^{(i+1)} = 0,$$

$$2. \mathcal{M}^{(i)} = M_i + \tilde{q}_8^{(i)} - q_8^{(i+1)} + \tilde{q}_7^{(i)} \frac{l_i}{2} + \tilde{q}_7^{(i+1)} \frac{l_{i+1}}{2} - M_{i,\rho}^{(np)} + M_{i+1,\rho}^{(l)} = 0,$$

$$3. R_x^{(i)} = -\tilde{q}_9^{(i)} + \tilde{q}_9^{(i+1)} + N_i = 0.$$

Уравнения совместности деформаций в разрезе  $i$ -го КЭ

$$4. \delta_7^{(i)} = \delta_{7,1}^{(i)} q_1^{(i)} + \delta_{7,2}^{(i)} q_2^{(i)} + \delta_{7,4}^{(i)} q_4^{(i)} + \delta_{7,5}^{(i)} q_5^{(i)} + \delta_{7,7}^{(i)} q_7^{(i)} + \delta_{7,8}^{(i)} q_8^{(i)} + \delta_{7,n}^{(i)l} - \delta_{7,n}^{(i)np} = 0,$$

$$5. \delta_8^{(i)} = \delta_{8,1}^{(i)} q_1^{(i)} + \delta_{8,2}^{(i)} q_2^{(i)} + \delta_{8,4}^{(i)} q_4^{(i)} + \delta_{8,5}^{(i)} q_5^{(i)} + \delta_{8,7}^{(i)} q_7^{(i)} + \delta_{8,8}^{(i)} q_8^{(i)} + \delta_{8,n}^{(i)l} - \delta_{8,n}^{(i)np} = 0,$$

$$6. \delta_9^{(i)} = q_3^{(i)} - q_6^{(i)} + \delta_{9,9}^{(i)} q_9^{(i)} = 0.$$

Если в узле  $j$  находится жесткая опора, то  $q_4^{(j)} = 0$  и реакция в ней

$$R_j = F_i + (\rho_i^{(np)} + \rho_{i+1}^{(l)}) - \tilde{q}_7^{(i)} + \tilde{q}_7^{(i+1)},$$

Если в узле  $j$  находится упругая опора, то реакция в ней

$$R_j = c_j q_4^{(j)}.$$

Если в узле  $j$  находится упругая односторонняя опора, которая имеет зазор  $\Delta_j$  между ней и балкой, то  $R_j - c_j(q_4^{(j)} - \Delta_j) = 0$ , т. е. опора включается в работу по своему рабочему направлению только в том случае, когда  $q_4^{(j)} - \Delta_j > 0$ .

Система разрешающих уравнений МКЭ в форме КСМ предоставляет широкие возможности для анализа поведения системы, как при изменениях различных параметров системы, так и при изменениях вида воздействия на неё.

Это означает, что в ней можно менять параметр пошагового догружения, переходя от «жесткого» силового пошагового догружения и нахождения

соответствующей каждому шагу конфигурации системы к «мягкому» пошаговому деформационному догружению, заданием конфигурации системы и отысканием соответствующей ей нагрузки.

Конструктивно-нелинейными элементами в рассматриваемых задачах являются односторонние опоры, закрывающиеся после исчерпания зазора. Их поведение определяется следующими условиями:

Если:

$$\begin{cases} y_i \leq \Delta_i, \\ R_i = 0, \end{cases} \quad \text{то односторонняя опора не работает;} \quad (6.30)$$

$$\begin{cases} y_i > \Delta_i, \\ R_i > 0. \end{cases} \quad \text{то односторонняя опора включается в работу по своему рабочему направлению.}$$

Здесь:

$y_i$  – перемещение по направлению зазора в  $i$ -ой односторонней связи;

$\Delta_i$  — величина зазора между балкой и  $i$ -ой односторонней связью.

Алгоритм расчета балки с заданными упругими односторонними связями и заданной нагрузкой может быть представлен в следующем виде:

1. Задается шаг по нагрузке  $\Delta F_i = F_i / n$ , где  $n$  – число шагов по нагрузке (при необходимости он может быть увеличен или уменьшен в ходе расчета)

2. Все односторонние связи принимаются за двухсторонние и выполняется расчет при расчетной схеме со всеми двухсторонними связями и нагрузками  $F_i^{(1)} = \Delta F_i$ .

3. В первой итерации выполняется оценка величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двухсторонние:

- выбираются все связи в которых направления реакций не совпадают с их рабочим направлением;
- та из выбранных связей, в которой величина реакции максимальна по абсолютному значению, исключается в расчетной схеме.

4. На следующей итерации выполняется расчет балки с расчетной схемой, полученной на предыдущей итерации.

5. По результатам расчета выполняется оценка величин и направлений реакций в оставшихся, преобразованных из односторонних, двухсторонних связях:

- из этих связей выбираются все те, в которых направления реакций не совпадают с их рабочим направлением;

- та из выбранных связей, в которой величина реакции максимальна по абсолютному значению, исключается в расчетной схеме.

6. Также выполняется оценка величин и направлений перемещений узлов, соответствующих исключенным в основной системе односторонним связям:

- среди них выбираются те все узлы, в которых направления их перемещений совпадают с рабочими направлениями опорных связей;

- в том узле, для которого величина перемещения максимальна и превышает заданный зазор  $\Delta$ , вводится снова двухсторонняя связь.

7. Если направления реакций во всех оставшихся односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, совпадают с рабочими и величины перемещений узлов, соответствующих односторонним связям, не приводят к их включению в работу (зазоры не закрыты или перемещение происходит в направлении противоположном связи), то расчет на текущем шаге нагружения закончен, т.е. расчетная схема текущего шага нагружения найдена. Иначе алгоритм повторяется с шага 4. Итерации продолжаются до нахождения расчетной схемы для нагрузки, заданной на текущем шаге нагружения.

8. Далее выполняется увеличение нагрузки  $F_i^{(k)} = k \cdot \Delta F_i$ , ( $k = 2..n$ ) и алгоритм повторяется с шага 4.

Алгоритм реализован в разработанном нами программном средстве, с использованием которого выполнен расчет консольного стержня с жесткостью на изгиб  $EI = 44.5 \text{ т} / \text{м}^2$  и бесконечно-жесткими односторонними опорами (рисунок 6.30, а) для которого известно как аналитическое решение [136] (рисунок 6.30, б), так и численное решение с использованием ПК ЛИРА-САПР [29].

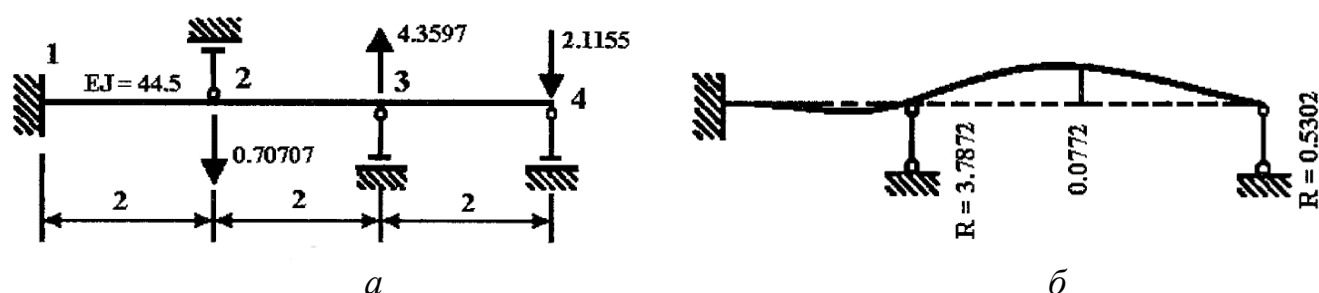


Рисунок 6.30 – Консольный стержень с односторонними связями  
При расчете было выбрано 10 шагов догружения.

На первом шаге нагружения, после первой итерации, были получены результаты, представленные в таблице 6.4.

Таблица 6.4

	Номер узла		
	2	3	4
Статус опоры	рабочее	рабочее	рабочее
Знак перемещения в “рабочем направлении”	-	+	+
Перемещения узлов, <i>м</i>	0	0	0
Знак реакции в “рабочем направлении”	-	+	+
Реакции в опорах, <i>т</i>	0.070707	-0.43597	0.21155

Анализ величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, показывает, что направления реакций не совпадают с рабочим во 2-ом и 3-ем узлах, при этом величина реакции в 3-ей связи максимальна по абсолютному значению и она становится односторонней в расчетной схеме второй итерации.

После второй итерации на первом шаге догружения, были получены результаты, представленные в таблице 6.5.

Таблица 6.5

	Номер узла		
	2	3	4
Статус опоры	рабочее	не рабочее	рабочее
Знак перемещения в “рабочем направлении”	-	+	+
Перемещение узла, <i>м</i>	0	0.0077189	0
Знак реакции в “рабочем направлении”	-	+	+
Реакция в опоре, <i>т</i>	-0.3850798	0	0.0530155

Анализ величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, показывает, что направления реакций во всех оставшихся односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, совпадают с рабочими и величины перемещений узлов, соответствующих односторонним связям, не приводят к их включению в работу (перемещение происходит в направлении противоположном связи). Таким образом, расчет на текущем шаге нагружения закончен. Расчетная схема текущего шага (первого) нагружения найдена.

На втором шаге догружения, после первой итерации, были получены результаты, представленные в таблице 6.6.

Таблица 6.6

	Номер узла		
	2	3	4
Статус опоры	рабочее	не рабочее	рабочее
Знак перемещения в “рабочем направлении”	-	+	+
Перемещение узла, $m$	0	0.0154378	0
Знак реакции в “рабочем направлении”	-	+	+
Реакция в опоре, $t$	-0.7701596	0	0.1060309

Анализ величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, показывает, что направления реакций во всех оставшихся односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, совпадают с рабочими и величины перемещений узлов, соответствующих односторонним связям, не приводят к их включению в работу (перемещение происходит в направлении противоположном связи). Таким образом, расчет на текущем шаге нагружения закончен. Расчетная схема текущего шага нагружения найдена.

Аналогично выполняется расчет на всех последующих шагах догружения. Расчетная схема при этом остается неизменной.

На десятом (последнем) шаге догружения, после первой итерации, были получены результаты, представленные в таблице 6.7.

Таблица 6.7

	Номер узла		
	2	3	4
Статус опоры	рабочее	не рабочее	рабочее
Знак перемещения в “рабочем направлении”	-	+	+

Перемещение узла, $m$	0	0.0771891	0
Знак реакции в “рабочем направлении”	-	+	+
Реакция в опоре, $m$	-3.8507982	0	0.5301545

Анализ величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, показывает, что направления реакций во всех оставшихся односторонних связях, преобразованных в двухсторонние, совпадают с рабочими и величины перемещений узлов, соответствующих односторонним связям, не приводят к их включению в работу (перемещение происходит в направлении противоположном связи). Таким образом, расчет на текущем шаге нагружения закончен. Расчетная схема после приложения окончательной нагрузки найдена.

В таблице представлены 6.8 аналитическое решение, приведенное в работе [136], результаты расчета в ПК ЛИРА-САПР [29] зависимости от количества итераций, и по разрабатываемой и на основе расширенного метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

Таблица 6.8

Параметр	Аналитическое решение	ЛИРА-САПР (итераций)			МКЭ в форме КСФ (10 шагов догружения, 11 итераций)
		2400	10000	30000	
$R_2, m$	-3.7872	-3,83	-3,795	-3,7871	-3.8508
$R_4, m$	0.5302	0,52	0,527	0,5301	0.5302
$Z_3, m$	0.0772	0,0778	0,0773	0,7772	0.0772

Расчета балок с односторонними связями с зазорами или без них по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода выполняется по единому алгоритму, приводящему к результатам, совпадающим с результатами, полученными другими методами, иллюстрируя эффективность предложенного алгоритма расчета, а также его основные преимущества – полная информация о НДС системы на каждой итерации или шаге нагружения, упрощение программирования итерационного алгоритма расчета, значительное сокращение числа итераций и объемов вычислений, возможность устранения проблемы закливания итерационного процесса. Разработанный алгоритм расчета и его частные варианты позволяют отслеживать процесс, включения и выключения

(«отлипания») односторонних связей как в процессе пошагового догружения балок, так и при изменении вида нагрузки (силовой или кинематической) и последовательности её приложения.

#### 6.4.2 Расчет изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода

Рассмотрим алгоритм математического моделирования конструктивно-нелинейной задачи изгиба пластинок с односторонними дискретно расположенными связями на основе МКЭ в форме классического смешанного метода.

В данной задаче используется пластинчатый конечный элемент прямоугольной формы с двенадцатью неизвестными в основной системе (рисунок 6.31, а).

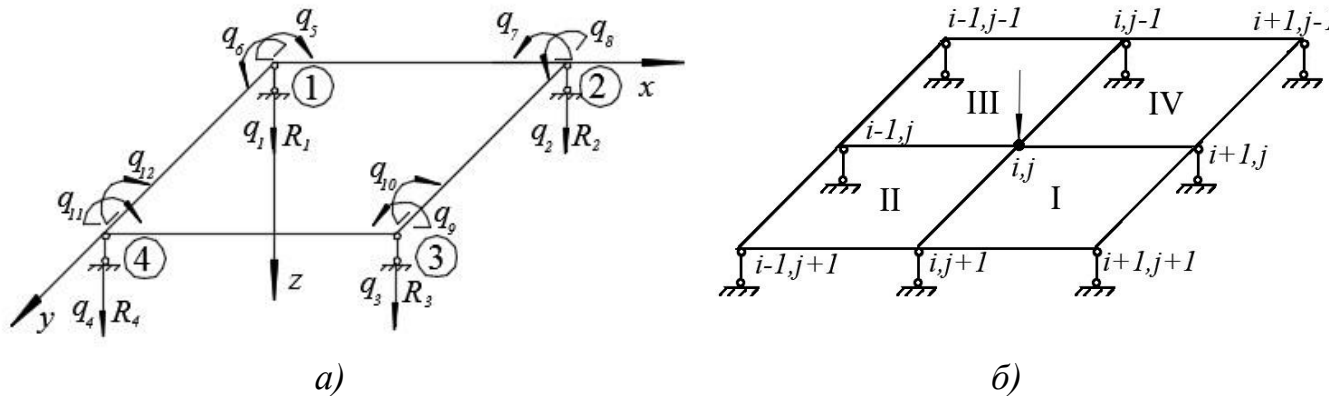


Рисунок 6.31 – Прямоугольный изгибаемый КЭ-пластинка с 12 неизвестными

В качестве неизвестных в основной системе принимаются усилия – изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и линейные перемещения в узлах – прогибы  $w$ .

Для пластинки с двухсторонними связями в контурных узлах система разрешающих уравнений для узла  $ij$  конечно-элементной сетки ((рисунок 6.31, б) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} 1. R_{ij} &= R_{ij}^I + R_{ij}^{II} + R_{ij}^{III} + R_{ij}^{IV} = 0, \\ 2. \Delta_{ij}^{(y)} &= \varphi_{ij}^{(y)} = \Delta_5^I + \Delta_7^{II} + \Delta_9^{III} + \Delta_{11}^{IV} = 0, \\ 3. \Delta_{ij}^{(x)} &= \varphi_{ij}^{(x)} = \Delta_6^I + \Delta_8^{II} + \Delta_{10}^{III} + \Delta_{12}^{IV} = 0. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{– уравнения равновесия,} \\ \text{– уравнения совместности углов} \\ \text{поворота нормали к} \\ \text{поверхности пластинки в узле} \\ \text{\textit{ij} относительно осей } Oy \text{ и } Ox \\ \text{соответственно.} \end{array} \quad (6.31)$$

При наличии во всех или некоторых узлах  $ij$  двусторонних упругих (линейных) опор, моделирующих упругое основание, величины реакций в них и перемещений по направлениям этих опорных связей формально описываются системами уравнений (6.31). Однако в них следует учесть деформации этих упругих опор, то есть учесть, что

$$R_{ij} = c\Delta_{ij}. \quad (6.32)$$

Поэтому в первом уравнении системы (6.31) для узла  $ij$  получаем

$$R_{ij} = R_{ij}^I + R_{ij}^{II} + R_{ij}^{III} + R_{ij}^{IV} = c\Delta_{ij} \quad (6.33)$$

Поэтому по сравнению с изложенным выше алгоритмом расчета стержневых систем, алгоритм расчета пластинки, представляемой ансамблем конечных элементов, учитывает дополнительно упругие линейные односторонние опоры в узлах с жесткостью  $c_{ij}$  и зазоры  $\Delta_{ij}$  между этими опорами и горизонтальной поверхностью пластинки (рисунок 6.32).

Для отслеживания изменения напряженно-деформированного состояния пластинки в процессе статического нагружения используется процедура пошагового нагружения по параметру. При двухсторонних связях таким параметром является силовая узловaя нагрузка  $F_{ij}$ , к которой приводится нагрузка, распределенная по площади пластинки.

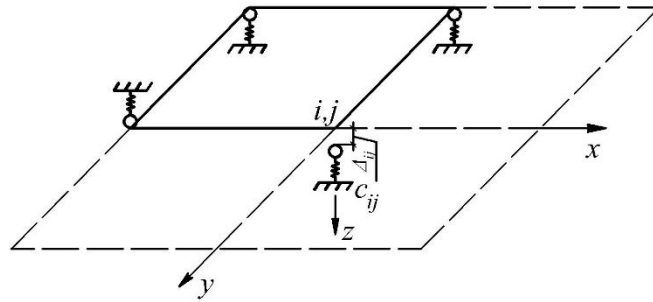


Рисунок 6.32 – Узел  $ij$  пластинки с упругими линейными односторонними опорами

Для иллюстрации алгоритма выполнты тест-расчет пластинки, опёртой по контуру на жесткие односторонние шарнирные опоры.

Исходные данные:

$E = 1.092 \cdot 10^7 \text{ H} / \text{м}^2$  - модуль упругости;  $\mu = 0.3$  - коэффициент Пуассона;

$h = 0.01 \text{ м}$  - толщина пластины;

$a = 1.0 \text{ м}$  и  $b = 1.0 \text{ м}$  - размеры сторон пластины вдоль осей  $X$  и  $Y$  глобальной системы координат, соответственно.

Пластинка загружена равномерно нагрузкой  $q = 1 \text{ H} / \text{м}^2$ , приведенной к узловой, и показанной на рисунке 6.33, а.

Пластинку представим ансамблем конечных элементов с сеткой узлов  $4 \times 4$  (рисунки 6.33, б, 6.33, в). Нумерация неизвестных (рисунок 6.33, б) производится в следующей последовательности: сначала нумеруются все перемещения в узлах, затем – все изгибающие моменты, в той же последовательности узлов.

Таким образом, согласно приведённым выше правилам нумерации неизвестных мы имеем при сетке узлов  $(4 \times 4)$  75 неизвестных: 1-5, 6, 10, 11, 15, 16, 20, 21-25 – вертикальные линейные смещения  $Z_i$ ; 26-75 – изгибающие моменты относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  соответственно в этих же угловых точках (рисунок 6.33, б).

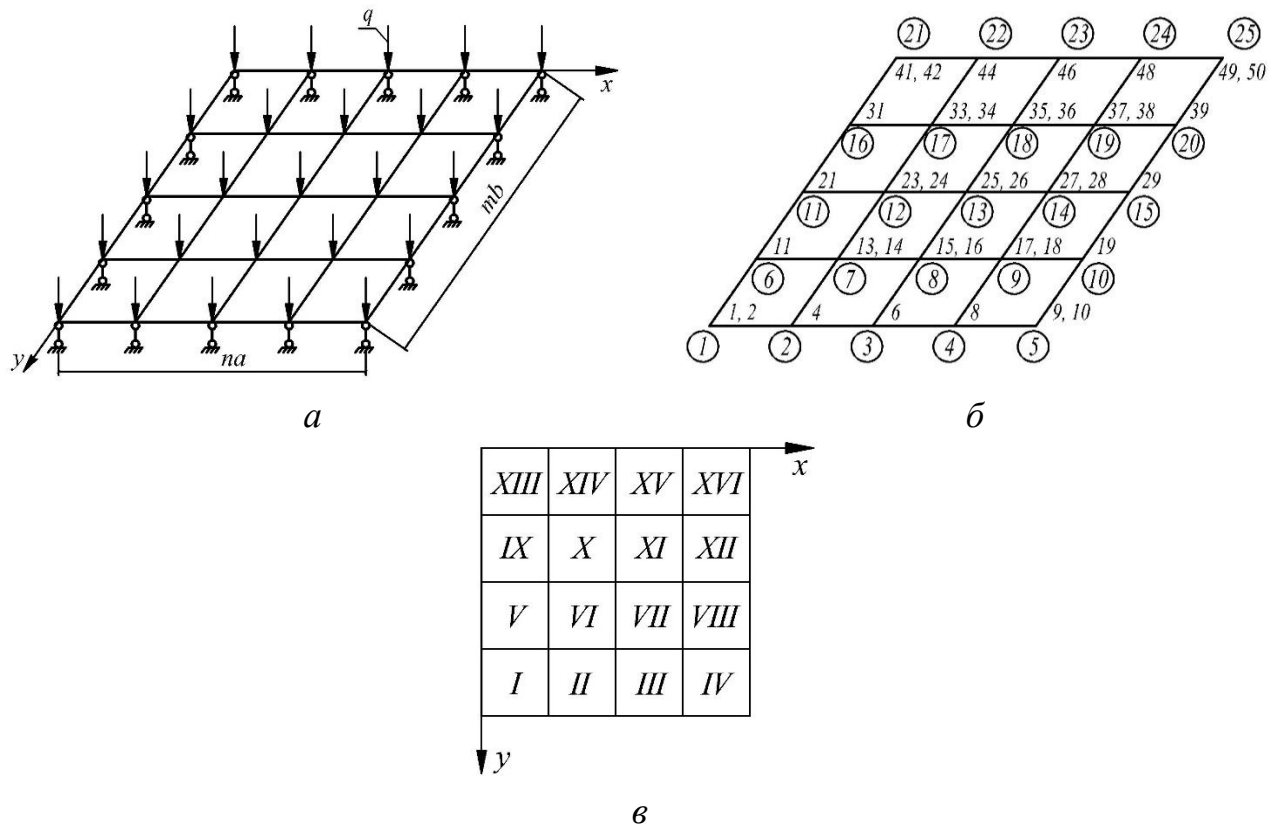


Рисунок 6.33 – Пластика с односторонними опорами по контуру  
 а) конечно-элементная сетка б) нумерация неизвестных  
 в) нумерация конечных элементов

В рассматриваемой задаче необходимо найти рабочую расчетную схему пластинки на односторонних жестких связях в контурных узлах. В соответствии с изложенным выше алгоритмом найдем последовательно рабочие расчетные схемы после каждого шага догружения  $\Delta q = \frac{q}{n}$ , где  $n$  – число шагов по нагрузке (в данном примере примем  $n = 10$ ).

Выполним расчет после первого шага нагружения  $q^{(1)} = \Delta q$ .

На первой итерации все опорные связи принимаются за двухсторонние.

В узлах 1, 5, 21 и 25 возникают реакции противоположные рабочему направлению и равные  $0,0207 \text{ Н}$ . Эти опорные связи исключаются в следующей расчетной схеме.

На второй итерация выполняется проверка принятой расчетной схемы. При этом анализируются как реакции, так и перемещения в узлах на контуре. Результаты, полученные на этом шаге, приведены в таблице 6.9.

Так как ни одно перемещение не направлено в сторону исключенных опор, и все реакции направлены в рабочем направлении опор, то расчетная схема не изменяется и осуществляется переход на следующий шаг нагружения.

На первой итерации второго шага нагружения расчетная схема, полученная после первого шага, принимается за исходную, выполняется расчет и осуществляется проверка перемещений и реакций в узлах на контуре пластинки. Результаты, полученные на первой итерации этого шага, также приведены в таблице 6.9. Как и ранее, ни одно перемещение не направлено в сторону исключенных опор, и все реакции направлены в рабочем направлении опор. Расчетная схема не изменяется и осуществляется переход на следующий шаг нагружения. На всех последующих шагах догружения расчетная схема, полученная на первом шаге нагружения, не изменяется.

Как показывают дальнейшие расчеты на протяжении всех следующих шагов опоры 1, 5, 21, 25 остаются исключенными из расчета. Результаты, полученные на десятом шаге нагружения, приведены в таблице 6.9. Ни одно перемещение не направлено в сторону исключенных опор, и все реакции направлены в рабочем направлении опор. Расчетная схема не изменяется.

Таблица 6.9

Показатель	Узел				
	1	2	3	6	11
Вторая итерация первого шаг нагружения ( $\Delta F = 0,1F$ )					
Реакция, Н	0	-0,006407	-0,012185	-0,006407	-0,012185
Перемещение $w$ , м	-0,0000595	0	0	0	0
Первая итерация второго шаг нагружения ( $\Delta F = 0,2F$ )					
Реакция, Н	0	-0,012815	-0,024370	-0,012815	-0,024370
Перемещение $w$ , м	-0,000119	0	0	0	0
Первая итерация десятого шаг нагружения ( $\Delta F = F$ )					
Реакция, Н	0	-0,064074	-0,121852	-0,064074	-0,121852
Перемещение $w$ , м	-0,0005949	0	0	0	0

Нами выполнено сравнение результатов расчета пластинок с сеткой конечных элементов ( $4 \times 4$ ) и ( $8 \times 8$ ), выполненных по изложенному выше алгоритму на основе метода конечных элементов в форме классического

смешанного метода (МКЭ в форме КСМ) и полученных с использованием ПК ЛИРА-САПР.

В таблице 6.10 (сетка КЭ 4x4) и (сетка КЭ 8x8) для сравнения показаны перемещения характерных узлов первой четверти пластинки, имеющих не нулевые перемещения. Результаты по МКЭ в форме КСМ приняты за “точные”, так как они следуют из уравнений, удовлетворяющих одновременно условия равновесия и совместности деформаций в узлах конечно-элементной сетки. Нумерация узлов для сетки КЭ 8x8 приведена на рисунке 6.34.

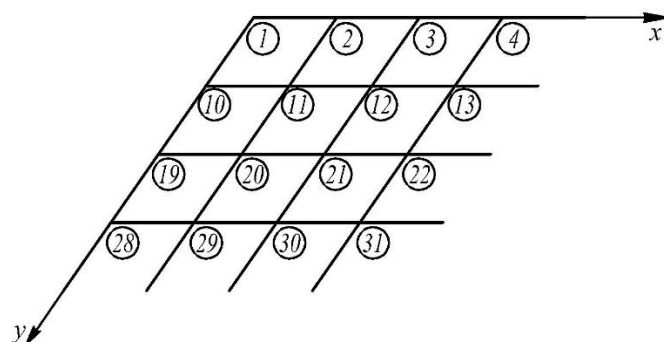


Рисунок 6.34 – Фрагмент – первая четверть пластинки с нумерацией узлов

Таблица 6.10

Узел, №	Перемещение $w$ , м		$\Delta w$ , (%)
	МКЭ в форме КСМ	ПК ЛИРА-САПР	
Сетка КЭ (4×4)			
1	−0,0005949	−0,0008638	31,13
7	0,00222	0,002466	9,99
8 и 12	0,003112	0,003402	8,53
13	0,004322	0,0047	8,05
Сетка КЭ (8×8)			
1	−0,0007231	−0,0007688	6,3
2 и 10	−0,0001954	−0,0002245	14,9
11	0,0006217	0,0006387	2,7
21	0,0022998	0,0023512	2,24
31	0,0037843	0,0038523	1,8

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что при сгущении сетки конечных элементов результаты расчета, полученные в ПК ЛИРА-САПР сближаются с “точными” результатами, полученными на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

## 6.5 Выводы по главе 6

1. Разработанный алгоритм решения систем нелинейных алгебраических уравнений, получаемых при использовании расширенного МКЭ в форме классического смешанного метода, прост и удобен в реализации, так как эти уравнения составляются непосредственно для дискретных расчетных схем. Результатом решения является полная картина напряженно-деформированного состояния конструкции.

2. Анализ геометрически нелинейного деформирования некоторых типов стержневых систем на основе расширенного МКЭ в форме классического смешанного метода позволил показать ошибочность вызвавших дискуссию выводов и рекомендаций в публикациях некоторых исследователей.

3. Выполненные примеры расчета показывают высокую эффективность расширенного МКЭ в форме классического смешанного метода. Высокая точность, получаемых с его помощью решений, позволяет рекомендовать его для анализа результатов расчетов, полученных с использованием других численных методов.

4. Использование развиваемой формы МКЭ позволяет выявить при исследовании устойчивости шарнирно-стержневых систем конфигурации, соответствующие точкам бифуркации (ветвления решений), и проследить кривую равновесных состояний за точкой бифуркации, т.е. в закритической области.

5. МКЭ в рассматриваемой форме позволяет выполнять расчеты нитей и конструкций с их использованием.

6. Показана эффективность разработанного алгоритма расчета систем с односторонними связями на основе расширенной формы МКЭ. Алгоритм позволяет отследить включение и выключение односторонних связей в процессе пошагового нагружения, менять параметр нагружения (силовой на деформированный и наоборот), не изменяя при этом структуру разрешающих уравнений, вносить изменения в расчетную схему после каждого шага

нагружения. Такой итерационный алгоритм свободен от закливания и позволяет найти решение при минимальном количестве итераций в процессе нахождения рабочих расчетных схем.

## Заключение

### Основные результаты

1. В соответствии со сформулированной целью в диссертации разработан расширенный метод конечных элементов в форме классического смешанного метода физический смысл которого наиболее логично объясняется с помощью введенного термина-понятия “матрица откликов” конечного элемента.

2. На основе этой формы МКЭ разработаны физико-математические модели некоторых типов конечных элементов и алгоритмы формирования разрешающих уравнений применительно к линейным и нелинейным задачам статики, динамики и устойчивости в строительной механике.

3. Разработаны алгоритмы и программные средства численной реализации разрешающих конечно-элементных уравнений.

4. Эффективность разработанных моделей и алгоритмов подтверждена численным решением широкого круга тестовых примеров: линейных и нелинейных задач статики, динамики и устойчивости, и сравнением с имеющимися аналитическими решениями и результатами, полученными на основе других методов.

5. Разработанные программные средства и выполненное их вычислительное тестирование создают основу для разработки программного обеспечения развиваемой формы МКЭ.

6. Заложены основы для дальнейшего развития расширенной теории МКЭ на основе классического смешанного метода, расширения библиотеки матриц откликов конечных элементов, разработки программных средств для реализации алгоритмов расчета сложных конструкций.

## Выводы

1. Обзор литературы по теме исследования показал отсутствие сопоставимого по эффективности и степени формализации с МКЭ в перемещениях других форм или вариантов МКЭ.

2. При реализации вычислительного процесса по МКЭ в перемещениях возникает ряд не решенных до сегодняшнего дня проблем.

3. Наиболее перспективной, из имеющихся в настоящее время форм МКЭ, представляется расширенный МКЭ в форме классического смешанного метода. По степени простоты формализации и алгоритмизации, т.е. математического моделирования, МКЭ в этой форме аналогичен классическому МКЭ в перемещениях. Поэтому все программные средства, реализующие МКЭ в перемещениях, могут быть использованы как основа для программных средств, реализующих МКЭ в форме смешанного метода.

4. Основное терминологическое отличие этой формы МКЭ заключается во введенном фундаментальном термине-понятии – «матрица откликов», позволившем логически обосновать соответствующие смешанному методу физические и математические модели конечных элементов и разрешающих систем уравнений.

5. Число этих уравнений определяется, как и в МКЭ в перемещения, числом неизвестных в узле конечно-элементной сетки принимаемой основной системы. Это означает, что и традиционной форме МКЭ, и в альтернативной число уравнений будет одинаковым. Однако в альтернативной форме в разрешающих уравнениях содержатся одновременно как кинематические, так и силовые неизвестные, что позволяет получить в результате решения все основные параметры напряженно-деформированного состояния исследуемой конструкции (напряжения и перемещения).

6. Выполненные примеры расчета на основе разработанных моделей позволили выявить ряд преимуществ и особенностей МКЭ в форме классического смешанного метода, позволяющих решить ряд отмечаемых многими исследователями проблем, связанных с применением традиционного МКЭ:

- одновременного удовлетворения условий равновесия и условий неразрывности деформаций;
- обеспечения совместности как перемещений, так и усилий на границах смежных конечных элементов;
- исключение из расчетов влияния смещения конечного элемента как жесткого целого;
- учета влияния конечных элементов с очень большой жесткостью.

7. Основные преимущества развиваемой формы МКЭ заключаются в следующем:

- не меняя структуру системы разрешающих уравнений, можно после любого шага нагружения сменить вид параметра нагружения, т.е. менять местами задаваемый вид параметра нагружения и один из подлежащих нахождению видов неизвестных, что особенно важно при расчете конструктивно – нелинейных систем с пошаговой процедурой нагружения, что оказывается очень эффективным при исследовании закритического поведения стержневых конструкций, позволяя проследить “ветвление” решений в закритической области;
- разрешающая система конечно-элементных уравнений метода конечных элементов в альтернативной форме оказывается особенно удобной при решении геометрически и конструктивно нелинейных задач, т.е. в расчете систем с изменяющейся расчетной схемой при пошаговом процессе нагружения (инкрементальное нагружение);
- возможность расчета нерастяжимых и растяжимых нитей, что невозможно в традиционном МКЭ.

**Список литературы**

1. Алёнин, В. П. Практические методы расчета плит на одностороннем основании типа Винклера. Исследования по теории расчета и проектирования сооружений [Текст] / В. П. Алёнин, В. А. Игнатьев. – Саратов : СПИ, 1984. - 327 с.
2. Алёнин, В. П. Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними односторонними связями [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук / Алёнин В. П. - Волгоград, 2002 – 325 с.
3. Алёнин, В. П. Прямые методы расчета конструктивно нелинейных систем [Текст] / В. П. Алёнин, П. В. Алёнин. – Омск : Сфера, 2006. - 68 с.
4. Алявдин, П. В. Статический расчет вантово-стержневых систем с учетом геометрической, физической и конструктивной нелинейностей [Текст] : дис. ... канд. техн. наук / Алявдин П. В. - Новосибирск, 1969. – 160 с.
5. Аргирис, Дж. Энергетические теоремы и расчет конструкций [Текст] / Дж. Аргирис // Современные методы расчета статически неопределимых систем : сб. ст. : пер. с англ. – Ленинград, 1961. - Ч. 1. - С. 37-255
6. Аргирис Дж., Келси С. Энергетические теоремы и расчет конструкций [Текст] / Дж. Аргирис, С. Келси // Современные методы расчета статически неопределимых систем : сб. ст. : пер. с англ. Л., 1961. Ч. II С. 256-293.
7. Астрахан, А. Х. Исследование деформаций стержней с односторонними связями методом квадратичного программирования [Текст] : дис. ... канд. техн. наук / Астрахан А. Х. – Ленинград : ЛИИЖТ, 1980. - 234 с.
8. Афендульев, А. А. К расчету балок на упругом основании при односторонней связи с основанием [Текст] / А. А. Афендульев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1964. - № 4. – С. 27-30.
9. Белкин, А. Е. Расчеты пластин методом конечных элементов [Текст] / А. Е. Белкин, С. С. Гаврюшин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. - 232 с.

10. Белый, М. В. Численные методы статического и динамического расчета конструкций на основе многоуровневых подходов [Текст] : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.17 ; МГСУ / Белый М. В. - Москва, 1994. - 34 с.
11. Белостоцкий, А. М. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем [Текст] / А. М. Белостоцкий, С. И. Дубинский, А. Л. Потапенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006. - № 10. - С. 99-110.
12. Белостоцкий, А. М. Реализация и верификация методов субмоделирования и динамического синтеза подконструкций в универсальных и специализированных программных комплексах [Текст] / А. М. Белостоцкий, А. Л. Потапенко // Int. Journ. for Computational Civil and Structural Engineering. – 20011. - Vol. 7, Issue 1. - P. 76-83
13. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / К. Васидзу. – Москва : Мир, 1987. - 542 с.
14. Верификационный отчет по программному комплексу ЛИРА-САПР [Текст] / ГУП МНИИТЭП. - Москва, 2013. – Т. II, тест 4. - С. 34
15. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – Москва : Физматгиз, 1960. - 491 с.
16. Власова, З. А. Расчёт балки на неоднородном нелинейно-упругом основании вариационно-разностным методом [Текст] / З. А. Власова // Деформация сплошных сред и управление движением. – Ленинград : ЛГУ. - 1984. - С. 81-85.
17. Вольмир, А. С. Исследование динамики конструкций из композитных материалов на основе метода суперэлементов [Текст] / А. С. Вольмир, В. Н. Терских // Механика композитных материалов. - 1979. - № 4. - С. 652-655.
18. Вольмир, А. С. Статика и динамика сложных структур. Прикладные многоуровневые методы исследований [Текст] / А. С. Вольмир, Б. А. Куранов, А. Т. Турбаивский. - Москва : Машиностроение, 1989. - 248 с.

19. Габова, В. В. Применение смешанной формы МКЭ к расчетам стержневых систем [Текст] : дис. ... канд-та техн. наук / В. В. Габова ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград, 2011.

20. Габова, В. В. Получение матрицы откликов стержневого конечного элемента плоской стержневой системы на основе смешанного вариационного принципа [Текст] / В. В. Габова, А. В. Игнатьев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. - Вып. 14. - С. 75-79.

21. Галишникова, В. В. Регулярные стержневые системы (Теория и методы расчета) [Текст] / В. В. Галишникова, В. А. Игнатьев. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. - 552 с.

22. Галишникова, В. В. Анализ устойчивости пространственных ферм (Stability Analysis of Space Trusses) / В. В. Галишникова // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций). – 2009. - Vol. 5, Issue 1&2. - P. 35-44.

23. Галишникова, В. В. Численный анализ устойчивости равновесия пространственных ферм в геометрически нелинейной постановке [Текст] / В. В. Галишникова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2010. - № 1. - С. 42-50.

24. Гвоздев, А. А. Общий метод расчета сложных статически неопределимых систем [Текст] / А. А. Гвоздев. – Москва : МИИТ, 1927. 239 с.

25. Гордеев, В. Н. Расчет упругих систем с односторонними связями как задач квадратичного программирования [Текст] / В. Н. Гордеев, А. В. Перельмутер // Исследования по теории сооружений. – Москва : Стройиздат, 1967. - Вып. 15. - С. 208-212.

26. Гордеев, В. Н. О конечности методов решения одной задачи квадратичного программирования [Текст] / В. Н. Гордеев // Кибернетика. – 1971. - № 1. – С. 85-89.

27. Гордеев, В. Н. Алгоритм для расчета систем с односторонними связями [Текст] / В. Н. Гордеев // Материалы 4 всерос. конф. по применению матем. машин в строит. механике. – Киев, 1967. – С. 28-35.

28. Городецкий, А. С. Компьютерные модели конструкций [Текст] / А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров. – Москва : Изд-во АСВ, 2009. – 360 с.
29. Городецкий, А. С. Конструктивная нелинейность. Односторонние связи. Проблемы реализации [Текст] / А. С. Городецкий, Д. А. Городецкий, А. В. Пикуль // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. - № 12 (3), 35-39. - URL: <https://doi.org/10.22337/1524-5845-2016-12-3-35-39>
30. Гриненко, Н. И. О задачах исследования колебаний конструкций методом конечных элементов [Текст] / Н. И. Гриненко, В. В. Мокеев // Прикладная механика. - 1985. – Т. 21, № 3. - С. 12-15.
31. Гукова, М. И. Вычисление расчетных длин сжатых стержней с учетом их совместной работы [Текст] / М. И. Гукова, Н. Ю. Симон, А. Е. Святошенко // Строительная механика и расчет сооружений. - 2012. - № 3. - С. 43-48.
32. Дворников, В. А. Новый метод расчета на устойчивость [Текст] / В. А. Дворников // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. - № 1. - С. 66-70.
33. Дорогов, Ю. И. Устойчивость стержня с жесткими окончаниями [Текст] / Ю. И. Дорогов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2013. - № 3. - С. 16-21.
34. Дорогов, Ю. И. Об устойчивости горизонтального стержня, лежащего на жестком основании [Текст] / Ю. И. Дорогов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2015. - № 1. - С. 58-65.
35. Евзеров, И. Д. Численное решение задач сильного изгиба [Текст] / Е. И. Д. Евзеров, Ю. Д. Гераймович, М. В. Лазнюк // Сайт поддержки пользователей САПР. Режим доступа: <http://www.cad.dp.ua/obzors/lira.php/> (дата обращения: 30.10.2015).
36. Жиделёв, А. В. Расчет плоских геометрически нелинейных стержневых систем с наличием следящей нагрузки / А. В. Жиделёв, А. В. Игнатъев [Текст] // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2010. - Вып. 17. - С. 14-16.

37. Жиделёв, А. В. Сравнительный анализ расчетов на устойчивость геометрически нелинейных стержневых систем в статической и динамической постановках на примере фермы Мизеса [Текст] / А. В. Жиделёв, А. В. Игнатъев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. - Вып. 15. - С. 52-54.
38. Ивантеев, В. И. Расчет частот и форм свободных колебаний конструкции методом многоуровневой динамической конденсации [Текст] / В. И. Ивантеев, В. Д. Чубань // Ученые записки ЦАГИ. - 1984. - Т. 15, № 4. - С. 81-82.
39. Игнатъев В. А. Метод конечных элементов в задачах строительной механики [Текст] / В. А. Игнатъев. - Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1980. - 87 с.
40. Игнатъев, В. А. Расчет регулярных стержневых систем [Текст] / В. А. Игнатъев ; Мин. обороны СССР. СВВХУ. - Саратов, 1973. - 433 с.
41. Игнатъев, В. А. Расчет регулярных статически неопределимых стержневых систем [Текст] / В. А. Игнатъев. - Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1979. - 295 с.
42. Игнатъев, В. А. Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем [Текст] / В. А. Игнатъев. - Саратов : Изд-во Саратовского ун-та. - 1992. - 142 с.
43. Игнатъев, В. А. Алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений высокого порядка в задачах динамики и устойчивости конструкций [Текст] / В. А. Игнатъев, В. Н. Ромашкин // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. – 2015. – Вып. 2 (38). – Режим доступа: [www.vestnik.ru](http://www.vestnik.ru).
44. Игнатъев, В. А. Суперэлементный вариант метода частотно-динамической конденсации [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Макаров // Пространственные конструкции зданий и сооружений / БелГТАСМ. - Белгород, 1996. - С. 19-25.
45. Игнатъев, В. А. Расчет коробчатых систем сплайн – интерполяцией перемещений [Текст] / В. А. Игнатъев, С. Ф. Горелов // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1986. - № 11. - С. 30-33.

46. Игнатъев, В. А. Определение редуцированного спектра частот и форм свободных колебаний систем с большим числом степеней свободы на основе сплайн – коллокационной конденсации [Текст] / В. А. Игнатъев, В. Н. Ромашкин // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. – 2014. - Вып. №35 (54). - С.140-151.

47. Игнатъев, В. А. Последовательная частотно-динамическая конденсация [Текст] / В. А. Игнатъев, В. Н. Ромашкин // Материалы науч.-техн. Интернет-конференции. - Волгоград, ВолгГАСУ, 2010. - С. 63-87.

48. Игнатъев, В. А. Модифицированный метод последовательной частотно – динамической конденсации [Текст] / В. А. Игнатъев // Academia. Архитектура и строительство. – 2011. - № 2. - С. 100-103.

49. Игнатъев, В. А. Метод частотно-динамической конденсации [Текст] / В. А. Игнатъев, А. У Чантуридзе // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2011. - Вып. 24 (43). – С. 46-53.

50. Игнатъев, В. А. Динамика сооружений [Текст] / В. А. Игнатъев С. М. Шашков. - Волгоград : Изд-во ВолгПИ, 1988. - 84 с.

51. Игнатъев, В. А. Расчет регулярных и квазирегулярных стержневых систем с двухсторонними и односторонними связями по методу обобщенных неизвестных [Текст] / В. А. Игнатъев // Исследования по строительной механике стержневых систем. - Саратов: СПУ, 1984 - С. 2-9.

52. Игнатъев, А. В. Obtaining the dynamic frequency equation for the plate calculation by the Finite Element Method in the form of a classical mixed method [Электронный ресурс] / А. В. Игнатъев // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456 : VII International Symposium Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (Novosibirsk, Russian Federation, 1-8 July, 2018) / Russian Academy of Architecture and Civil Engineering Sciences (RAACS). – [IOP Publishing], 2018. – URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012110/pdf>.

53. Игнатъев, А. В. The mathematical modeling of the incomplete algebraic eigenvector and eigenvalue problem for obtaining the reduced frequency equation and

its solution [Электронный ресурс] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 456 : VII International Symposium Actual Problems of Computational Simulation in Civil Engineering (Novosibirsk, Russian Federation, 1-8 July, 2018) / Russian Academy of Architecture and Civil Engineering Sciences (RAACS). – [IOP Publishing], 2018. – URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/456/1/012109/pdf>

54. Игнатьев, А. В. Analysis of Flexible Bars and Frames with Large Displacements of Nodes By Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method [Электронный ресурс] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 262 : International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety (ICCATS 2017) (21–22 September 2017, Chelyabinsk, Russian Federation) : Conference Proceedings. – [IOP Publishing], 2017. – URL : <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/262/1/012049>.

55. Игнатьев, А. В. Analysis of Systems with Unilateral Constraints through the Finite Element Method in the Form of a Classical Mixed Method / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко [Текст] // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1754-1759.

56. Игнатьев, А. В. Modified Algorithm for the Analysis of Thin Plates by the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1766-1770.

57. Игнатьев, А. В. On the Efficiency of the Finite Element Method in the Form of the Classical Mixed Method [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A. A. Radionov. – [Elsevier publishing], 2016. – P. 1760-1765.

58. Игнатьев, В. А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики : моногр. [Текст] / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, А. В. Жиделев ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград, 2006. - 176 с.

59. Игнатьев, А. В. Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, А. В. Чумаков, В. В. Гилка // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2019. - Т. 15, № 1. - С. 62-68.

60. Игнатьев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок с односторонними связями по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2018. - № 8 (716). - С. 5-14.

61. Игнатьев, А. В. Расчёт тонких пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода с исключением перемещений конечных элементов как жёсткого целого [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2018. - № 3 (711). - С. 5-13.

62. Игнатьев, А. В. Математическая модель и алгоритмы динамического расчёта конструкций по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев // Известия ВолГТУ. Сер.: Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. - Волгоград, 2018. - № 5 (215). - С. 22-26.

63. Игнатьев, А. В. Конструктивные особенности и дефекты некоторых типов плоских регулярных балочных ферм [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, В. В. Габова // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2018. - № 1 (276). - С. 17-23.

64. Игнатьев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жёсткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство. - 2017. - № 9. - С. 5-14.

65. Игнатьев, А. В. Особенности расчёта плоских регулярных балочных ферм со сложной решёткой [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2017. - № 6. - С. 28-34.

66. Игнатьев, А. В. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчёту систем с односторонними связями [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, М. И. Бочков // Строительная механика и расчёт сооружений. - 2017. - № 2. - С. 52-61.

67. Игнатьев, А. В. Расчёт многопролётных балок с односторонними связями по МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, М. И. Бочков // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Стр-во и архитектура. - 2017. - № 48 (67). - С. 94-108.

68. Игнатьев, А. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестник МГСУ. - 2016. - № 2. - С. 20-33.

69. Игнатьев, А. В. Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем [Текст] / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестник МГСУ. - 2015. - № 12. - С. 47-58.

70. Игнатьев, А. В. Особенности применения и сходимость МКЭ в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатьев, Е. А. Невзорова, Н. С. Самылина // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2015. - Т. 11, № 2. - С. 89-93.

71. Игнатьев, А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода (особенности и возможности применения) [Текст] / А. В. Игнатьев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2015. № 3 (260). - С. 55-60.

72. Игнатьев, В. А. Расчет плоских рам с большим перемещением узлов по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода

[Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев // Строительство и реконструкция. - 2015. - № 2 (58). - С. 12-19.

73. Игнатъев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 3 [Текст] / А. В. Игнатъев // Вестник МГСУ. - 2015. - № 1. - С. 16-26.

74. Игнатъев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 2 [Текст] / А. В. Игнатъев // Вестник МГСУ. - 2014. - № 12. - С. 40-59.

75. Игнатъев, А. В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Ч. 1 [Текст] / А. В. Игнатъев // Вестник МГСУ. - 2014. - № 11. - С. 37-57.

76. Игнатъев, А. В. Расчёт нерастяжимой преднапряженной контргрузом нити по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, Е. В. Онищенко // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2014. - Вып. 36 (55). - С. 104-111.

77. Игнатъев, А. В. Исследование устойчивости и закритического поведения фермы Мизеса по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, Е. В. Симон // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2014. - Вып. 38. - С. 94-101.

78. Игнатъев, А. В. Specific features and advantages of the finite element method in the form of classical mixed method as an alternative for the traditional finite element method [Текст] / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2014. - Т. 10, № 4. - С. 121-124.

79. Игнатъев, В. А. Решение плоской задачи теории упругости по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев [Текст] // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2013. - Вып. 31-2 (50). - С. 337-343.

80. Игнатъев, А. В. Расчет геометрически нелинейных плоских шарнирно-стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического

смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2013. – Вып. 34 (53). - С. 82-89.

81. Игнатъев, А. В. Проблема бесконечно жестких элементов при расчете стержневых систем [Текст] / А. В. Игнатъев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2012. - № 5. - С. 10-13.

82. Игнатъев, А. В. Применение смешанной формы МКЭ к расчету стержневых систем, содержащих элементы с резко различными жесткостями [Текст] / А. В. Игнатъев, В. В. Габова // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2011. – Вып. 22. - С. 22-25.

83. Игнатъев, А. В. Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов плоской стержневой системы [Текст] / А. В. Игнатъев, В. В. Габова // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2009. – Вып. 14. - С. 71-74.

84. Игнатъев, А. В. Алгоритм расчета стержневых систем по методу конечных элементов (МКЭ) в смешанной форме / А. В. Игнатъев // Вестник гражданских инженеров. - 2007. - № 2. - С. 106-108.

85. Игнатъев, В. А. Смешанная форма МКЭ в задачах строительной механики [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев // Строительная механика и расчет сооружений. - 2006. - № 1. - С. 59-64.

86. Игнатъев, А. В. Развитие и применение смешанной формы МКЭ в расчетах стержневых систем и пластинок [Текст] : дис. ... канд-та техн. наук / А. В. Игнатъев ; Волгогр. гос. архит.-строит. академия - Волгоград, 2002.

87. Игнатъев, А. В. Матрица упругих свойств изгибаемого прямоугольного конечного элемента [Текст] / А. В. Игнатъев, В. А. Игнатъев // Вестн. Волгогр. гос. архит.-строит. академии. Сер.: Стр-во и архитектура. - 2002. – Вып. 2 (5). - С. 139-141.

88. Игнатъев, В. А. Динамика сооружений [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, В. В. Габова. – Волгоград, 2015. – 81 с.

89. Игнатьев, В. А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики [Текст] : учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев. - Волгоград, 2005. - 99 с.

90. Игнатьев, В. А. Вариационные методы расчета в строительной механике [Текст] : учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев. - Волгоград, 2003. - 106 с.

91. Карпов, Д. В. Развитие метода редуцированных элементов для расчета регулярных стержневых систем и анализа плоских температурных полей [Текст] : дис. ... канд. техн. наук / Д. В. Карпов. - Владивосток, 2002. - 209 с.

92. Кеглин, Б. Г. Динамический конечный элемент в строительной механике [Текст] / Б. Г. Кеглин, Е. С. Цуканова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. - № 4. - С. 45-53.

93. Ким, Т. С. Алгоритм расчета систем с односторонними связями [Текст] / Т. С. Ким, В. Г. Яцура // Автоматизированное оптимальное проектирование конструкций. – Хабаровск, 1977. – С. 39-47.

94. Ким, Т. С. Об использовании алгоритмов математического программирования для расчета систем с односторонними связями [Текст] / Т. С. Ким, В. Г. Яцура // Автоматизированное оптимальное проектирование конструкций. – Хабаровск, 1977– С. 39-47.

95. Ким, Т. С. Расчет систем с односторонними связями как задач о дополнителности [Текст] / Т. С. Ким, В. Г. Яцура // Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. - № 3 – С. 41-44.

96. Киселев, В. А. Строительная механика. Специальный курс : Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / В. А. Киселев. – Москва : Стройиздат, 1980. - 616 с.

97. Кирсанов, М. Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы [Текст] / М. Н. Кирсанов, А. Н., Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2017. - № 2. - С. 6-10.

98. Кирсанов, М. Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы [Текст] / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2016. - № 5. - С. 19-22.

99. Кирсанов, М. Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой [Текст] / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2016. - № 3. - С. 16-19.

100. Кирсанов, М. Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой [Текст] / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2015. - № 3. - С. 7-11.

101. Кирсанов, М. Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость [Текст] / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2012. - № 3. - С. 48-51.

102. Кирсанов, М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем [Текст] / М. Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2011. - № 5. - С. 11-15.

103. Кирсанов, М. Н. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей [Текст] / М. Н. Кирсанов А. С. Степанов // Строительная механика и расчет сооружений. - 2017. - № 5. - С. 9-14.

104. Кобелев, Е. А. Расчет конструктивно-нелинейных систем методом обобщенных функций [Текст] / Е. А. Кобелев // Прочность, устойчивость и колебания строительных конструкций. - Ленинград : ЛИСИ. - 1987. - С. 152-158.

105. Коваленко, О. Ф. Изгиб балок из нелинейно упругого материала на нелинейно упругом основании с учетом отрыва [Текст] / О. Ф. Коваленко // Тр. ТИСИ. – Томск : ТГУ, 1968. - Т. 14.- С. 47-58.

106. Коваленко, О. Ф. Расчет конструкций на упругом основании, как систем с односторонними связями [Текст] : дис. ... канд. техн. наук / Коваленко О. Ф. - Москва : МИСИ.- 1968.- 170 с.

107. Корноухов, Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем [Текст] / Н. В. Корноухов. – Москва : Стройиздат, 1949. - 376 с.

108. Кузнецова, Р. Е. Расчет конструкций на упругом основании как систем с односторонними связями методом нелинейного программирования [Текст] : дис. ... канд. тех. наук / Р. Е. Кузнецова. – Москва, 1971. - 161 с.

109. Кузнецова, Р. Е. Расчет физически нелинейных статически неопределимых систем с односторонними связями [Текст] / Р. Е. Кузнецова, С. Б. Дворкина // Исследования по строительным конструкциям и строительной механике : тр. ТИСИ. - Томск. - 1977. - С. 154-158.

110. Кургузов, В. Д. О численном решении геометрически нелинейных задач строительной механики [Текст] / В. Д. Кургузов // Известия вузов. Строительство. - 2009. - № 3-4. - С. 14-22.

111. Левяков, С. В. О численном решении геометрически нелинейных задач статики упругих конструкций [Электронный ресурс] / С. В. Левяков // Сайт поддержки пользователей САПР. - Режим доступа: <http://www.cad.dp.ua/obzors/fem3.php/> (дата обращения: 30.10.2015).

112. Леньшин, В. П. Расчет конструкций с нерегулярными отверстиями и вырезами методом неоднородных конечных элементов [Текст] / В. П. Леньшин // Строительная механика и расчет сооружений. - 1983. - № 2. - С. 21-24.

113. Ловцов, А. Д. Линейная задача дополненности в строительной механике систем с односторонними связями [Текст] / А. Д. Ловцов. – Хабаровск : Изд-во Тихоокеанского ун-та, 2013. – 198 с.

114. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики [Текст] / П. А. Лукаш. – Москва : Стройиздат, 1978. - 204 с.

115. Лукашевич, А. А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач [Текст] / А. А. Лукашевич // Известия вузов. Строительство. – 2007. - № 12. - С. 18-23.

116. Ляхович, Л. С. Метод отделения критических сил и собственных частот упругих систем [Текст] / Л. С. Ляхович. – Томск : Изд-во Томского ун-та, 1970. – 108 с.

117. Майер, Дж. Квадратичное программирование и теория упруго-идеально-пластических деформаций конструкций [Текст] / Дж. Майер // Механика : сб. пер. – Москва : Иностран. лит., 1969. - № 6.- С. 112-128.

118. Маркус, Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий [Текст] / Г. Маркус ; пер. с нем. Д. В. Вайнберга, Л. С. Ямпольского ; под ред. проф. Б. Н. Горбунова. - Харьков ; Киев : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. - 438 с.

119. Масленников, А. М. Расчет строительных конструкций методом конечных элементов [Текст] : учеб. пособие / А. М. Масленников. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1977. - 78 с.

120. Масленников, А. М. Расчет строительных конструкций численными методами [Текст] / А. М. Масленников. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1987. - 224 с.

121. Матевосян Р. Р. Устойчивость сложных стержневых систем (качественная теория) [Текст] / Р. Р. Матевосян. – Москва : Госстройиздат, 1961. – 184 с.

122. Назаров, Д. И. Геометрически нелинейный анализ в метод конечных элементов, реальности и мифы [Текст] / Д. И. Назаров // Проблемы динамики, прочности и износостойкости машин. – 2000. - № 6.

123. Назаров, Д. И. Обзор современных программ конечно-элементного анализа [Текст] / Д. И. Назаров // САПР и графика. - 2000 - № 2. - С. 52-55.

124. Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. А. Игнатьев [и др.] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград, 2014. - 97 с.

125. Нудельман, Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем [Текст] / Я. Л. Нудельман. – Москва : Гостехиздат, 1949.

126. Об использовании метода конечных элементов при решении геометрически нелинейных задач [Текст] / А. Н. Данилин [и др.] // САПР и графика. - 2000. - № 4. - С. 26-31.

127. Образцов, И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов [Текст] / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – Москва : Высш. шк., 1985. – 392 с.
128. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред [Текст] / Дж. Оден. – Москва : Мир, 1976. - 464 с.
129. Пановко, Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем [Текст] / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – Москва : Наука, 1987. – 352 с.
130. Перельмутер, А. В. Беседы о строительной механике [Текст] / А. В. Перельмутер. – Москва : Изд-во SCAD Soft ; Изд-во АСВ, 2014. - 250 с.
131. Перельмутер, А. В. Штрихи истории метода конечных элементов [Текст] / А. В. Перельмутер // Актуальные проблемы численного моделирования зданий, сооружений и комплексов. Т. 1. К 25-летию научно-исследовательского центра СтаДиО. — Москва : Изд-во АСВ, 2016 - С. 286-326.
132. Перельмутер, А. В. Использование квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями [Текст] // А. В. Перельмутер // Исследования по теории сооружений. – 1972. - Вып. 19. - С. 138-147.
133. Перельмутер, А. В. К расчету систем с односторонними дискретными связями [Текст] / А. В. Перельмутер // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. - № 1. - С. 59-61.
134. Перельмутер, А. В. Некоторые ошибки в постановках и решениях задач устойчивости равновесия конструкций [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер // Международная научно-техническая конференция «Вычислительная механика деформируемого твердого тела» : тр. – Москва : МИИТ, 2006. - Т. 2. - С. 316-323.
135. Перельмутер, А. В. Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой [Текст] / А. В. Перельмутер, О. В. Кабанцев. – Москва : Изд-во СКАД СОФТ ; Изд. дом АСВ, 2015 - 148 с.
136. Перельмутер, А. В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Москва : Изд-во АСВ, 2011. – 709 с.

137. Перельмутер, А. В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы [Текст] / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Москва : Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – Т. 1. - 704 с.

138. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика [Текст] / В. В. Петров. – Москва : Инфра-Инженерия, 2014. -480 с.

139. Петров, В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек [Текст] / В. В. Петров. - Саратов : Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1975. - 120 с.

140. Покровский, А. А. Смешанная форма МКЭ в расчетах стержневых систем и сплошной среды [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук / А. А. Покровский. - Пенза : ПГАСА, 2000. – 308 с.

141. Покровский, А. А. О методе перемещений в МКЭ с отделением смещений твердого тела [Текст] / А. А. Покровский // Строительная механика и расчет сооружений. - 2011. - № 4. - С. 2-4.

142. Покровский, А. А. Геометрические соотношения конечного элемента и их применение к расчету гибких стержней и стержневых систем [Текст] / А. А. Покровский // Прикл. механика. - 1987. - Т. XIV, № 7. - С. 104-107.

143. Покровский, А. А. Смешанная форма МКЭ в расчетах стержневых систем с учетом физической и геометрической нелинейностей [Текст] / А. А. Покровский, Р. А. Хечумов // Строит. механика и расчет сооружений. – 1991. – №2. – С. 5-11.

144. Покровский, А. А. Смешанная форма метода конечных элементов (МКЭ) в линейных задачах [Текст] / А. А. Покровский. - Пенза : ПГАСА, 2003. – 100 с.

145. Постнов, В. А. Численные методы расчёта судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов. – Ленинград : Судостроение, 1977. - 280 с.

146. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций [Текст] / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. - Ленинград : Судостроение, 1974. - 344 с.

147. Постнов, В. А. Динамические матрицы жесткости балочных элементов и их использование в методе конечных элементов при расчете вынужденных колебаний стержневых систем [Текст] / В. А. Постнов // Вестник гражданских инженеров. - 2005 - № 1 (2). - С. 42-49.

148. Портаев, Л. П. Расчет систем с дискретными односторонними связями – задача линейного программирования [Текст] / Л. П. Портаев // Строительная механика и расчет сооружений. - 1975. - № 1. - С. 59-61.

149. Пригородова, З. Н. Расчет балки на сплошном упругом основании при односторонней связи балки с основанием [Текст] / З. Н. Пригородова // ПромстройНИИ проект : сб. науч. тр. - Владивосток, 1966. – Вып. 2. - С. 85-88.

150. Прочность, устойчивость, колебания [Текст] : справ. в 3 т. / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. - Москва : Машиностроение, 1968 Т. 1. – 463 с.

151. Рабинович, И. М. Основы строительной механики стержневых систем [Текст] / И. М. Рабинович. – Москва : Гос. изд-во лит. по стр-ву и архитектуре, 1956. – 456 с.

152. Рабинович, И. М. Основы расчета вантово-стержневых систем [Текст] / И. М. Рабинович. – Москва : Стройиздат, 1975. - 145 с.

153. Рабинович, И. М. Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи [Текст] / И. М. Рабинович // Инженерный сборник. - Москва, 1950. - Т. 6.

154. Рабинович, И. М. К задаче статически неопределимых систем с односторонними связями (доказательство единственности решения) [Текст] / И. М. Рабинович // Исследования по теории сооружений. – Москва : Госстройиздат, 1961. - Вып. 10.

155. Расчет стержневых систем методом конечных элементов : в 2-х. Ч. Ч. 1 : МКЭ в задачах статики [Текст] : учеб. пособие / В. А. Игнатьев [и др.]. – Волгоград, 2008. - 168 с.

156. Резников, Л. М. К расчёту систем с односторонними связями [Текст] / Л. М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. - №3 – С. 54-56.

157. Рейсснер, Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости [Текст] / Э. О. Рейсснер // Проблемы механики сплошной среды (к 70-летию акад. Н.И. Мусхелишвили). – Москва : Изд-во АН СССР, 1961. – С. 328-337.

158. Рекач, В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости [Текст] / В. Г. Рекач. – Москва : Высш. шк., 1984. – 287 с.

159. Ржаницын, А. Р. Строительная механика [Текст]. – Москва : Высш. шк., 1991. – 440 с.

160. Розин, Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения [Текст] / Л. А. Розин. – Санкт-Петербург : Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.

161. Розин, Л. А. Стержневые системы, как системы конечных элементов [Текст] / Л. А. Розин. – Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 232 с.

162. Розин, Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам [Текст] / Л. А. Розин. – Москва : Стройиздат, 1977. – 128 с.

163. Ромашкин, В. Н. Суперэлементная формулировка метода частотно-динамической конденсации [Текст] / В. Н. Ромашкин // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Сер.: Политематическая. – 2013. – Вып. 1 (25). – Режим доступа: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013\\_1\(25\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Romashkin-2013_1(25).pdf)

164. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2019613405 Рос. Федерация. Модуль поиска частот и форм свободных колебаний плоских стержневых систем для ПК КСФ МКЭ [Текст] / А. В. Игнатъев, В. В. Гилка, А. В. Чумаков ; ВолгГТУ. – Оpubл. 15.03.2019.

165. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018662231 Рос. Федерация. Модуль визуализации и расчёта плоских стержневых систем для ПК КСФ МКЭ [Текст] / А. В. Ильин, А. В. Игнатъев ; ВолгГТУ. – Оpubл. 02.10.2018.

166. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018662103. Рос. Федерация. Динамический расчёт плоских стержневых систем (ДРПСС КСФ МКЭ) [Текст] / А. В. Игнатъев; ВолгГТУ. – Оpubл. 03.09.2018.

167. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018619882 Рос. Федерация. Расчет устойчивости стержневых систем по методу конечных

элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев. – Опубл. 14.08.2018.

168. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017661091 Рос. Федерация. Расчёт изгибаемых пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, Е. А. Невзорова ; ВолгГТУ. – Опубл. 03.10.2017.

169. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016660344 Рос. Федерация. Программа расчёта плоских стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода [Текст] / А. В. Игнатъев, В. В. Габова ; ВолгГАСУ. – Опубл. 13.09.2016.

170. Секулович, М. Метод конечных элементов [Текст] : пер. с серб. / М. Секулович. - Москва : Стройиздат, 1993. -664 с.

171. Синицын, А. П. Балка на упругом основании как система с односторонними связями [Текст] / А. П. Синицын // Вестник ВИА. - № 64. - 1952. – С. 20-33.

172. Сливкер, В. И. Строительная механика. Вариационные основы [Текст] : учеб. пособие / В. И. Сливкер. – Москва : АСВ, 2005. - 736 с.

173. Сливкер, В. И. Расчёт конструкций с нелинейными связями [Текст] / В. И. Сливкер // Исследования по теории сооруж. – Москва : Стройиздат. - 1968. - Вып. 16. - С. 187-193.

174. Сливкер, В. И. О расчете конструкций на упругом основании при односторонней связи с основанием [Текст] / В. И. Сливкер // Строительная механика и расчет сооружений. – 1967. - № 6. – С. 18-19.

175. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Стержневые системы [Текст] / А. Ф. Смирнов. – Москва : Стройиздат, 1984. - 512 с.

176. Соболев, В. И. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний плоской пластины [Текст] / В. И. Соболев, Т. Н. Черниговская // Современные технологии. Моделирование. - 2007. - № 4 (16). - С. 28-32.

177. Сон, М. П. Бесконечно жесткие элементы при расчете стержневых систем методом перемещений [Текст] / М. П. Сон // Строительная механика и расчет сооружений. - 2011. - № 6 (239). - С. 32-35.

178. Справочник проектировщика расчетно-теоретический [Текст] / под ред. проф. А. А. Уманского. – Москва : Госстройиздат, 1960. - 1040 с.

179. Тихонов, Е. М. Расчет по методу обобщенных неизвестных балок с односторонними связями [Текст] / Е. М. Тихонов. - Саратов : СПИ, 1984. - С. 46-59.

180. Торопцев, А. В. Решение четырех тестовых задач для Назарова Д. И. [Электронный ресурс] / А. В. Торопцев // Сайт поддержки пользователей САПР. Режим доступа: [http:// www.cad.dp.ua/obzors/paper1.php/](http://www.cad.dp.ua/obzors/paper1.php/) (дата обращения: 30.10.2015).

181. Трушин, С. И. Решение задач устойчивости гибких упруго-пластических оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.17 / С. И. Трушин. - Москва, 1999. - 277 с.

182. Трушин, С. И. Метод конечных элементов. Теория и задачи [Текст] / С. И. Трушин. - Москва : Изд-во АВС, 2008. - 256 с.

183. Тюкалов, Ю. Я. Модифицированный принцип минимума дополнительной энергии для решения задач строительной механики в напряжениях [Текст] / Ю. Я. Тюкалов. – Москва, 2002. - Деп. в ВИНТИ: № 628-B2002. - 15 с.

184. Тюкалов, Ю. Я. Расчет изгибаемых плит на основе минимизации дополнительной энергии и принципа возможных перемещений [Текст] / Ю. А. Тюкалов. – Москва, 2002. - Деп. в ВИНТИ: № 1025-B2002. - 13 с.

185. Тюкалов, Ю. Я. Решение задач строительной механики методом конечных элементов в напряжениях на основе функционала дополнительной энергии и принципа возможных перемещений [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук / Ю. Я. Тюкалов. – Москва : МГСУ, 2006.

186. Тюкалов, Ю. Я. Определение частот свободных колебаний методом конечных элементов в напряжениях [Текст] / Ю. Я. Тюкалов // Инженерно-строительный журнал. - 2016. - № 7 (67). - С. 39–54.

187. Тюханов, В. В. Метод решения задач динамики пластинок сложной формы [Текст] / В. В. Тюханов // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. - 2011. - № 1. - С. 138-144.

188. Улитин, Г. М. Продольно-поперечный изгиб и устойчивость весоной стержневой системы [Текст] / Г. М. Улитин, В. С. Царенко // Строительная механика и расчет сооружений. - 2017. - № 2. - С. 18-23.

189. Цуканова, Е. С. Совершенствование методов расчета колебаний стержневой системы на основе динамического конечного элемента [Текст] : дис. ... канд. техн. наук / Е. С. Цуканова. – Брянск : Брянск. гос. техн. ун-т., 2017.

190. Чувиковский, В. С. Численные методы расчетов в строительной механике корабля [Текст] / В. С. Чувиковский. – Ленинград : Судостроение, 1976. - 376 с.

191. Шапошников, Н. Н. Строительная механика [Текст] : Учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков. - СПб.: Издательство «Лань», 2012. - 704 с.

192. Шулькин, Ю. Б. Теория упругих стержневых конструкций [Текст] / Ю. Б. Шулькин – Москва : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры – 1984. - 272 с.

193. Юлдашев, О. И. Конечно-элементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств [Текст] / О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева // JINR LIT Scientific Report 2008-2009, JINR. - Dubna, 2009. - С. 105-108.

194. A mixed finite element and improved genetic algorithm method for maximizing buckling load of stiffened laminated composite plates [Text] / A. R. Vosoughi [et al.] // Aerospace Science and Technology. – 2017. – Vol. 70. - P. 378-387.

195. An object-oriented framework for multiphysics problems combining different approximation spaces [Text] / A. M. Farias [et al.] // Finite Elements in Analysis and Design. – 2018. – N 151. - P. 34-49.

196. Analysis of elastic media with voids using a mixed-collocation finite-element method [Text] / P. L. Bishay [et al.] // Journal of Engineering Mechanics. – 2017. – Vol. 143 (4), article № 04016119.
197. Argiris, J. Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method [Text] / J. Argiris // J. Royal Aero. Sci. Tech. Note, 69. – 1965. – P. 711-713.
198. Argiris, J. Matrix analysis of three-dimensional elastic media - small and large displacements [Text] / J. Argiris // AIAA J.3. – 1965. – P. 45-51.
199. Argyris, J. H. Non-Linear and Post-Buckling Analysis of Structures [Text] / J. H. Argyris, P. C. Dunne // Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, U.S. - Germany Symposium, 1976. – S. 525-571.
200. Auricchio, F. Mixed Finite Element Methods [Electronic resource] / F. Auricchio, L. Beirão da Veiga, F. Brezzi // Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition, 2017 John Wiley & Sons, Ltd. – DOI: 10.1002/9781119176817.ecm2004
201. Auricchio, F. Isogeometric collocation mixed methods for rods [Text] / F. Auricchio, L. B. da Veiga, J. Kiendl // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S. – 2016. – Vol. 9 (1). – P. 33-42
202. Banerjee, J. R. Free vibration of a three-layered sandwich beam using the dynamic stiffness method and experiment [Text] / J. R. Banerjee, C. W. Cheung, R. Morishima // International Journal of Solids and Structures. – 2007. – Vol. 44. – P. 7543–7563.
203. Banerjee, J. R. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements [Text] / J. R. Banerjee // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – Vol. 28. 1283-98.
204. Banerjee, J. R. Development of an exact dynamic stiffness matrix for free vibration analysis of a twisted Timoshenko beam [Text] / J. R. Banerjee // Journal of Sound and Vibration – 2004. – Vol. 270. – P. 379–401.

205. Banerjee, J. R. Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach [Text] / J. R. Banerjee // Computers & Structure. – 1997. - Vol. 63 (1). - P. 101–103.
206. Banerjee, J. R. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Axially loaded Beam Elements [Text] / J. R. Banerjee, S. A. Banerjee // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1992. – Vol. 33. - P. 739-751.
207. Banerjee, J. R. Free vibration analysis of a twisted beam using the dynamic stiffness method [Text] / J. R. Banerjee // International Journal of Solids and Structures. - 2001. – Vol. 38. - P. 6703–6722.
208. Banerjee, J. R. Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method [Text] / J. R. Banerjee // Computers and Structures. - 2003. – Vol. 81. - P. 1915–1922.
209. Bathe, K. J. Finite Element Procedures [Text] / K. J. Bathe // Prentice Hall, Englewood Cliffs. - 1996. 1036 P.
210. Bathe, K. J. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation [Text] / K. J. Bathe, E. N. Dvorkin // International J. for Numerical Methods in Engineering. 1985. - Vol. 21. - P. 367-383.
211. Bathe, K. J. Numerical Methods in Finite Element Analysis [Text] / K. J. Bathe, E. L. Wilson // Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.
212. Bendixsen, A. Die Methode der Alpha Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen [Text] / A. Bendixsen. - Berlin, 1914.
213. Bennighof, J. K. An automated multi-level substructuring method for eigenspace computation in linear elastodynamics [Text] / J. K. Bennighof, R. B. Lehoucq // SIAM J Sci Comput. - 2004. - Vol. 25 (6). - P. 2084–2106.
214. Benzi, M. A robust incomplete factorization preconditioner for positive definite matrices [Text] / M. Benzi, M. Tuma // Numer Linear Algebra Appl. - 2001. - Vol. 99. - P. 1-20.
215. Bleich, F. Die Berechnung st-unbest. Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatres [Text] / F. Bleich. - Berlin, 1918.

216. Bogner, F. A cylindrical shell discrete element [Text] / F. Bogner, R. Fox, L. Schmit // AIAA J.5. - 1967. - No. 4.
217. Boscolo, M. Dynamic stiffness formulation for composite Mindlin plates for exact modal analysis of structures. Part II: Results and applications [Text] / M. Boscolo, J. Banerjee // Computers and Structures. – 2012. – Vol. 96–97. - P. 74–83
218. Bourquin, F. Analysis and comparison of several component mode synthesis methods on one dimensional domains [Text] / F. Bourquin // Numer Math. - 1990. - Vol. 58 (1). - P. 11–33.
219. Bress, J. A. C. Cours de mécanique appliquée par Bresse Troisième partie. Calcul des moments de flexion dans une poutre à plusieurs travées solidaires [Text] / J. A. C. Bresse. - Paris : Gauthier Villars, 1865. - P. 19-20.
220. Brezzi, F. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems [Text] / F. Brezzi, J. Douglas, L. D. Marini // Numer. Math. - 1985. - Vol. 47. - P. 217–235.
221. Brezzi, F. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables [Text] / F. Brezzi, J. Douglas, M. Fortin, L. D. Marini // RAIRO Mod`el. Math. Anal. Numer. - 1987. – Vol. 21. – P. 581–604.
222. Brezzi, F. Mixed and Hybrid Finite Element Method [Text] / F. Brezzi, M. Fortin // Springer Series In Computational Mathematics. – 1991. - Vol. 15. - 350 p.
223. Cai, Z. First-order system least squares for the stress-displacement formulation: Linear elasticity [Text] / Z. Cai, G. Starke // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2003. -N 41. - P. 715–730.
224. Cai, Z. Least-squares methods for linear elasticity [Text] / Z. Cai, G. Starke // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2004. - N 42. - P. 826–842.
225. Cai, Z. An adaptive least squares mixed finite element method for the stress-displacement formulation of linear elasticity [Text] / Z. Cai, J. Korsawe, G. Starke // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2005 - N 21. - P. 132–148.
226. Chama, A. Three-field mixed finite element approximations for problems in elasticity [Text] / A. Chama. - University of Cape Town, PhD thesis, 2013.

227. Chen, Y. H. Beam length dynamic stiffness [Text] / Y. H. Chen, J. T. Shen // Computational Methods of Applied Mechanics in Engineering. - 1996. - Vol. 129. - P. 311-318.
228. Chen, S.-H Guyan reduction [Text] / S.-H. Chen, H. H. Pan // Communications in Applied Numerical Methods. - 1988. - Vol. 4. - P. 549-556.
229. Choi J. H. Iterative method for dynamic condensation combined with substructuring scheme [Text] / J. H. Choi, H. Kim, M. Cho // Journal of Sound and Vibration. - 2008. - Vol. 317, No. 1. - P. 199-218.
230. Clapeyron, B. P. E. Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés [Text] / B. P. E. Clapeyron // Ibid., 1857. - Vol. 45, N. 26.
231. Clough, R.W. The Finite Element Methods in Plane Stress Analysis [Text] / R. W. Clough // Proceedings of 2nd ASCE. Conf. on Electronic Computation. - Pittsburg, 1960.
232. Clough, R. Comparision of three-dimensional finite elements [Text] / R. Clough // Symp. Application of FEM in Civil Eng. - Nashville, Ten., 1969.
233. Conditions for equivalence between the Hu-Washizu and related formulations, and computational behavior in the incompressible limit [Text] / J. K. Djoko, [et al.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2006. - N 195. - P. 4161-4178.
234. Corbett, C. J. Three-dimensional isogeometrically enriched finite elements for frictional contact and mixed-mode debonding [Text] / C. J. Corbett, R. A. Sauer // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2015. – Vol. 284. - P. 781–806.
235. Corbett, C. J. NURBS-enriched contact finite elements [Text] / C. J. Corbett, R. A. Sauer // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2014. – Vol. 275. - P. 55–75.
236. Coupled cohesive zone models for mixed-mode fracture: a comparative study [Text] / R. Dimitri [et al.] // Eng. Fract. Mech. – 2015. - N 148. - P. 145–179.

237. Courant, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations [Text] / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. - 1943. - Vol. 49. - P. 1-23.

238. Craig, R. Coupling of Substructures for Dynamic Analysis [Text] / R. Craig, M. Bampton M. // Am. Inst. Aero. Astro. J. - 1968. - Vol. 6, No. 7. - P. 1313—1319.

239. Craig, R. R. Substructure method in vibration [Text] / R. R. Craig // J Vib Acoust - 1995. – Vol. 117(B). - P. 207-213.

240. Cuppen, M. J. A divide and conquer method for the symmetric tridiagonal eigenproblem [Text] / M. J. Cuppen // Numer. Math. - 1981. - Vol. 36. - P. 177-195.

241. Day, D. Analysis and computation of a least-squares method for consistent mesh tying [Text] / D. Day., P. Bochev // J. of Comput. and Appl. Mathem. – 2008. – Vol. 218. – P. 21–33.

242. De Lorenzis, L. Isogeometric contact: a review [Text] / L. De Lorenzis, P. Wriggers, T. J. Hughes // GAMM-Mitt. – 2014 – N 37. - P. 85–123.

243. Dhillon, I. S. A New  $O(n^2)$  Algorithm for the Symmetric Tridiagonal Eigenvalue [Text] / I. S. Dhillon // Eigenvector Problem : thesis. - UC Berkeley Technical report UCB : CSD-97-971. - Berkley CA, 1997

244. Dhillon, I. S. Multiple representations to compute orthogonal eigenvectors of symmetric tridiagonal matrices [Text] / I. S. Dhillon, B. N. Parlett // Linear Algebra Appl. - 2004. - № 387. - P. 1-28.

245. Dimitri, R. Isogeometric treatment of frictional contact and mixed mode debonding problems [Text] / R. Dimitri, G. Zavarise // Comput. Mech. – 2017. – N 62. - P. 1–18.

246. Eytelwein J. A. Handbuch der Statik fester Körper [Text] / J. A. Eytelwein. - Berlin : Realschulbuchhandlung, 1808.

247. Fraeijs de Veubeke, B. M. Displacement and equilibrium models [Text] / B. M. Fraeijs de Veubeke // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2001. - Vol. 52. - P. 287-342.

248. Gehler, W. Der Rahmen Einfaches Verfahren zur Berechnung v. Rahmen aus Eisen und Eisenbeton mit ausgeführten Beispielen / W. Gehler. - Berlin., 1913. – 181 s.
249. Guyan, R. J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices [Text] / R. J. Guyan // AIAA Journal. - 1965. - Vol. 3, No. 2. - P. 380.
250. Hallauer, W. L. Beam bending torsion dynamics stiffness method for calculation of exact vibration modes [Text] / W. L. Hallauer, R. Y. L. Liu // journal of Sound and Vibration. - 1982. - Vol. 85. - P. 83-113.
251. Harmel, M. Volumetric mesh generation from T-spline surface representations [Text] / M. Harmel, R. A. Sauer, D. Bommes // Comput. Aided Des. – 2017. - N 82. - P. 13–28.
252. Hellinger, E. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua [Text] / E. Hellinger // Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften. - Teubner, Leipzig, 1914. - Bd. 4. - Teil 4. - P. 601-694.
253. Herrmann, L. R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem [Text] / L. R. Herrmann // AIAA J. - 1965. - Vol. 3, N 10.
254. Herrmann, L. A bending analysis of plates [Text] / L. Herrmann // Proc. Conf. Matrix. Meth. Str. Mech. – Ohio : Wright Patterson AFB, 1965.
255. Herrmann L. Finite element bending analysis of plates [Text] / L. Herrmann // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1967. - Vol. 93, N 5. - P. 13-26.
256. Hou, G. Component mode synthesis-based design optimization method for local structural modification [Text] / G. Hou, V. Maroju // Struct Optim - 1995. - Vol. 10. - P. 128–136.
257. Hrennikoff, A. Solution of problems in elasticity by the framework method [Text] / A. Hrennikoff // J. Appl. Mech. - 1941. - N 8/4. – P. 169–175.
258. Hurty, W. C. Dynamic analysis of structural systems using component modes [Text] / W. C. Hurty // AIAA Journal. - 1965. - Vol. 3, N 4. - P. 678-685.

259. Ignatyev, V. A. Berechnung von Kastenträgersystemen unter Verwendung von Spline – Superelementen [Text] / V. A. Ignatyev // Technische Mechanik. – 1987. - Heft 4, N 8. - S. 46–51.

260. Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines [Text] / R. Dimitri [et al.] // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2014. – N 269. - P. 394–414.

261. Jiang, B.-N. The least-squares finite element method in elasticity. Part II: Bending of thin plates [Text] / B.-N. Jiang // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. – Vol. 54 (10). – P. 1459–1475.

262. Jiang, B.-N. The least-squares finite element method in elasticity. Part I: Plane stress or strain with drilling degrees of freedom [Text] / B.-N. Jiang, J. Wu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. - Vol. 53. - P. 621–636.

263. Kadapa, C. Nurbs based least-squares finite element methods for fluid and solid mechanics [Text] / C. Kadapa, W.G. Dettmer, D. Peri'c // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2015. – Vol. 101 (7). - P. 521–539.

264. Kasper, E. P. A mixed-enhanced strain method: Part II: Geometrically nonlinear problems [Text] // E. P. Kasper, R. L. Taylor // Computers & Structures. – 2000. –Vol. 75. - P. 251- 260.

265. Kasper, E. P. A mixed-enhanced strain method: Part I: Geometrically linear problems [Text] / E. P. Kasper, R.L. Taylor // Computers and Structures. – 2000. – Vol. 75. – P. 237-250.

266. Kim, J. G. A posteriori error estimation method for the flexibility-based component mode synthesis [Text] / J. G. Kim, P. S. Lee // AIAA J. - 2015. – Vol. 53 (10). - P. 2828–2837.

267. Kim, J. G. An enhanced Craig–Bampton method [Text] / J. G. Kim, P. S. Lee // Intl J Numer MethodsEng. – 2015. - № 103. - P. 79–93.

268. Kim, J. G. An enhanced AMLS method and its performance [Text] / J. G. Kim, S. H. Boo, P. S. Lee // Comput Methods Appl Mech Eng. - 2015. - Vol. 287. - P. 90–111.

269. Kolousek, V. Dynamics in engineering structures [Text] / V. Kolousek. – London ; Butterworth, 1973. – 580 p.
270. Lall, S. A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control system [Text] / S. Lall, J. E. Marsden, S. Glavaski // Int J Robust Nonlinear Control. - 2002. – Vol. 12 (6). - P. 519–535.
271. Lamichhane, B. P. Convergence in the incompressible limit of finite element approximations based on the Hu-Washizu formulation [Text] / B. P. Lamichhane, B. D. Reddy, B. I. Wohlmuth // Numerische Mathematik. – 2006. – Vol. 104. - P. 151-175.
272. Leung, Y. T. An accurate method of dynamic condensation in structural analysis [Text] / Y. T. Leung // Int. J. Num. Meth. Engng. - 1978. - Vol. 12. - P. 1705-1716.
273. Lee, U. Spectral Element Method in Structural Dynamics [Text] / U. Lee. - Singapore : John Wiley & Sons Pte Ltd, - 2009. - 30 p.
274. Liu, R. A three-dimensional nodal-based implementation of a family of discontinuous Galerkin methods for elasticity problems [Text] / R. Liu, M. F. Wheeler, C. N. Dawson // Computers & Structures. – 2009. – Vol. 87. – P. 141–150.
275. Lumpe, G. Geometrisch nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabwerken [Text] / G. Lumpe // Mitteilung, Universität Hannover. - 1982. N 28.
276. Maleki-Jebeli, S. A large deformation hybrid isogeometric-finite element method applied to cohesive interface contact/debonding [Text] / S. Maleki-Jebeli, M. Mosavi-Mashhadi, M. Baghani // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2018. – 330. - P. 395-414.
277. Manderla, H. Die Berechnung der Sekundärspannung [Text] / M. E. Manderla // Allgemeine Bauzeitung. – 1880. - Vol. 45. - P. 27–43.
278. Matzen, M. E. A weighted point-based formulation for isogeometric contact [Text] / M. E. Matzen, M. Bischoff // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2016. – 308. - P. 73–95.

279. Marcus, H. Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten [Text] / H. Marcus // Published by Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. KG, 1932.

280. McHenry, D. A. Lattice Anthology of the Solution of Plane Stress Problems [Text] / D. A. McHenry // J. Inst. Civ. Eng. - 1943. - Vol. 21, № 1

281. Mohr, O. Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen [Text] / O. Mohr. - Zivilling, 1892.

282. Müller, B. Stress-Based Finite Element Methods in Linear and Nonlinear Solid Mechanics [Text] / B. Müller, G. Starke // Advanced Finite Element Technologies. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures). – 2016. – Vol. 566. - P. 69-104.

283. Navier, C. L. M. Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines [Text] / C. L. M. Navier. – Paris : Firmin Didot père et fils, etc., 1826

284. Newmark N. M. Numerical Methods of Analysis in Bars, Plates, and Elastic Bodies [Text] / N. M. Newmark // Numerical Methods in Analysis in Engineering. - Macmillan, 1949.

285. Nisters, C. Least-squares finite element methods with applications in fluid and solid mechanics [Text] / C. Nisters // PhD thesis, 2018.

286. Nguyen, V. P. Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects [Text] / V. P. Nguyen, [et al.] // Math. Comput. Simulation. – 2015. – Vol. 117. - P. 89–116.

287. NURBS-and T-spline-based isogeometric cohesive zone modeling of interface debonding [Text] / R. Dimitri [et al.] // Comput. Mech. – 2014. – Vol. 54, N 2. - P. 1–20.

288. Oden J. T. A General Theory of Finite Elements [Text] / J. T. Oden // Int. J. Num. Eng. - 1969. - № 1. - P. 205-226, 247-260.

289. Oden, J. T. Some observation on properties of certain mixed finite element approximations [Text] / J. T. Oden, J. N. Reddy // Int. J. Numer. Meth. Eng. - 1975. - Vol. 9, № 4. - P. 933-938.

290. On continuous, discontinuous, mixed, and primal hybrid finite element methods for second-order elliptic problems [Text] / P. R. B. Devloo, [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2018. -N 115 (9). - P. 1083-1107.

291. On the stability analysis of hyperelastic boundary value problems using three- and two-field mixed finite element formulations [Text] / J. Schroeder [et al.] // Computational Mechanics. – 2017. – Vol. 60 (3). - P. 479-792.

292. Ostenfeld, A. Die Deformations method [Text] / A. Ostenfeld. - Berlin : Springer, 1926.

293. Papadimiriou, C. Component mode synthesis technique for finite element model updating [Text] / C. Papadimiriou, D. C. Papadioti // Comput Struct. - 2013. - Vol. 126. - P. 15–28.

294. Parlett, B. N. The Symmetric Eigenvalue Problem [Text] / B. N. Parlett/ // 2nd ed., SIAM. - Philadelphia, 1997.

295. Poceski A., From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method [Text] / A. Poceski // J. Theor. App. Mechanics, Yug. Society of Mechanics. - Belgrade, 1979. - No. 5.

296. Poceski A., A mixed finite element method for bending of plates [Text] / A. Poceski // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1975. - Vol. 9. No. 1. –P. 3-15.

297. Poceski A. Mixed Finite Element Method [Text] / A. Poceski. - Verlag ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 1992. - 356 p.

298. Q'Callahan, J. C. A procedure for an improved reduced system (IRS) model [Text] / J. C. Q'Callahan // Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, Union College, Schenectady. – NY, 1989. - P. 17-21.

299. Rabczuk, T. Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D [Text] / T. Rabczuk, T. Belytschko // Intl J Numer Methods Eng. - 2005. – Vol. 63 (11). - P. 1559–82.

300. Reddy, B. D. Three-Field Mixed Finite Element Methods in Elasticity [Text] / B. D. Reddy // Advanced Finite Element Technologies. CISM International

Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures). - Springer Cham, 2016. – Vol. 566. - P. 53-68

301. Reissner, E. Effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates [Text] / E. Reissner // J. Appl. Mech. - 1945. - Vol. 12, № 2. - P. A69–A77.

302. Reissner, E. On a variational theorem in elasticity [Text] / E. Reissner // J. Math. Phys. – 1950. – Vol. 29, No. 2. - P. 90-95.

303. Schröder, J. Least-Squares Mixed Finite Element Formulations for Isotropic and Anisotropic Elasticity at Small and Large Strains [Text] / J. Schröder, A. Schwarz, K. Steeger // Advanced Finite Element Technologies. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures), 2016. – Vol. 566. - P. 131-175.

304. Semenov, V. A. Hybrid finite elements for analysis of shell structures [Text] / V. A. Semenov, P. Yu. Semenov // Proc. International Congress ICSS-98, 22–26 June 1998, Moscow, Russia. – Moscow, 1998. – Vol. 1. – P. 244–251.

305. Stein, E. Numerische Methoden und deren Konvergenz zur statischen Berechnung geometrisch nichtlinearer Stabwerke im unter und überkritischen Bereich [Text] / E. Stein, M. H. Kessel // Ingenieur-Archiv. – 1977. – Vol. 46. - S. 323-335.

306. Steeger, K. Least-squares mixed finite elements for geometrically nonlinear solid mechanics [Text] / K. Steeger // PhD thesis, 2017.

307. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures [Text] / M. J. Turner [et al.] // J. Aero. Sci. - 1956. - Vol. 23. - N. 9. - P. 805–824.

308. Washizu, K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity [Text] / K. Washizu. - Oxford, Pergamon Press, 1975.

309. Winkler, E. Beiträge zur Theorie der continuierlichen Brückenträger [Text] / E. Winkler // Civilingenieur. – 1862. - Band 8. - S. 136–182.

310. Wilkinson, J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem [Text] / J. H. Wilkinson. - Oxford University Press, 1965.

311. Wittrick, W. H. A unified approach to initial buckling of stiffened panels in compression [Text] / W. H. Wittrick // International Journal of Numerical Methods in Engineering. – 1968. – Vol. 11. – P. 1067–1081.

312. Wittrick, W. H. Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings [Text] / W. H. Wittrick, F. W. Williams // International Journal of Mechanical Sciences. – 1974. – Vol. 16. – P. 209–239.

313. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics (7th edn) [Text] / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, D. D. Fox // Butterworth-Heinemann : Oxford, 2014.

314. Zu-Qing, Qu. Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis [Text] / Qu Zu-Qing // Springer Publications, 2004. – 369 p.

## **Приложение А Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019613405

**МОДУЛЬ ПОИСКА ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ  
ПК КСФ МКЭ**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»  
(ВолгГТУ) (RU)*

Авторы: *Игнатъев Александр Владимирович (RU), Гилка Вадим  
Викторович (RU), Чумаков Артем Владимирович (RU)*

Заявка № 2019612048

Дата поступления 04 марта 2019 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 15 марта 2019 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

1704С  
43.09/18

## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018662103

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ  
СИСТЕМ (ДРПСС КСФ МКЭ)

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»  
(ВолГТУ) (RU)*

Автор: *Игнатъев Александр Владимирович (RU)*



Заявка № 2018619302

Дата поступления 03 сентября 2018 г.

Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 27 сентября 2018 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

1107C  
42.4/48

## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018662231

**Модуль визуализации и расчета плоских стержневых систем  
для ПК КСФ МКЭ**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»  
(ВолГТУ) (RU)**

Авторы: **Ильин Артем Владимирович (RU),  
Игнатьев Александр Владимирович (RU)**

Заявка № 2018619354

Дата поступления 03 сентября 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 02 октября 2018 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018619882

Расчет устойчивости стержневых систем по методу  
конечных элементов в форме классического смешанного  
метода

Правообладатель: *Игнатьев Александр Владимирович (RU)*Автор: *Игнатьев Александр Владимирович (RU)*

Заявка № 2018617515

Дата поступления 12 июля 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 14 августа 2018 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017661091

РАСЧЕТ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН ПО МЕТОДУ  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО  
СМЕШАННОГО МЕТОДА

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»  
(ВолгГТУ) (RU)*

Авторы: *Игнатъев Александр Владимирович (RU),  
Невзорова Елена Александровна (RU)*



Заявка № 2017617826

Дата поступления 04 августа 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 03 октября 2017 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016660344

**Программа расчета плоских стержневых систем по методу  
конечных элементов в форме классического смешанного  
метода**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего профессионального  
образования «Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет» (ВолгГАСУ) (RU)*

Авторы: *Игнатъев Александр Владимирович (RU),  
Габова Виктория Викторовна (RU)*

Заявка № 2016617731

Дата поступления 18 июля 2016 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 13 сентября 2016 г.




Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

**Приложение Б Акты внедрения научного исследования**

**УТВЕРЖДАЮ:**

Директор ООО «Стройсервис»

  
С. Ю. Мирушкин  
«04» июня 2019г.**Акт**

о внедрении результатов научных исследований,  
полученных в диссертации Игнатьева А.В.  
«Развитие метода конечных элементов  
в форме классического смешанного метода строительной механики»

Результаты диссертационной работы Игнатьева А.В. «Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики» внедрены в практическую деятельность ООО «Стройсервис».

В частности, в практике проектной деятельности внедрен программный комплекс «ПК КСФ МКЭ».

Программы комплекса позволяют выполнять статический и динамический расчет частей строительных конструкций и используются для верификации (сравнительного анализа) результатов расчета, полученных с использованием других программных комплексов, что позволяет исключить получение не достоверных результатов.

Применение программного комплекса уменьшает вероятность возникновения аварий из-за возникновения ошибок в расчётах, что имеет важное социально-экономическое значение.

Генеральный директор



Мирушкин С.Ю.



**УТВЕРЖДАЮ:**

Первый проректор-директор института  
архитектуры и строительства ФГБОУ ВО  
«Волгоградский государственный технический  
университет»  
доктор технических наук  
профессор



Стефаненко Игорь Владимирович  
«05» . 07. 2019 г.

**Акт**

о внедрении результатов научных исследований,  
полученных в диссертации Игнатъева А.В.  
«Развитие метода конечных элементов  
в форме классического смешанного метода строительной механики»

Результаты диссертационной работы Игнатъева А.В. «Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики» внедрены в учебный процесс Института архитектуры и строительства Волгоградского государственного технического университета. В частности:

- внедрены в учебный процесс при изучении студентами факультета строительства и жилищно-коммунального хозяйства дисциплин:
  - 08.03.01 Строительство (Промышленное и гражданское строительство): «Строительная механика»;
  - 08.04.01 Строительство (Теория и проектирование зданий и сооружений): «Методы механики деформируемого твёрдого тела в расчётах строительных конструкций», «Современные методы расчёта плоских и пространственных систем на основе дискретных и континуальных моделей»;
  - 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений (Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений): «Прикладная механика (Строительная механика)», «Нелинейные задачи строительной механики», «Динамика и устойчивость сооружений»;
  - 08.06.01; Техника и технологии строительства (Строительная механика): «Строительная механика»;
- с 2003 г. в учебном процессе используется учебное пособие: Вариационные методы расчета в строительной механике: учеб. пособие / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев. - Волгоград: учеб. пособие, 2003. - 106 с.;

- с 2005 г. в учебном процессе используется учебное пособие: Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики: учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев. - Волгоград: учеб. пособие, 2005. - 99 с.;

- с 2008 г. в учебном процессе используется учебное пособие: Расчет стержневых систем методом конечных элементов : в 2-х ч. Ч.1 : МКЭ в задачах статики: учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, Т. И. Апраксина, Ю. Н. Бахтин. - Волгоград: учеб. пособие, 2008. - 168 с.;

- с 2014 г. в учебном процессе используется учебное пособие, содержащее разделы, посвященные применению метода конечных элементов форме классического смешанного метода: Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Электрон. изд. сетевого доступа. - Волгоград: учеб. пособие, 2014. - 97 с.;

- с 2015 г. в учебном процессе используется учебное пособие, содержащее разделы, посвященные применению метода конечных элементов форме классического смешанного метода: Динамика сооружений [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев, В. В. Габова. - Волгоград: учеб. пособие, 2015;

- с 2016 г. в учебном процессе используется Программа расчёта плоских стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатьев, В. В. Габова; ВолгГАСУ. - 2016;

- с 2017 г. в учебном процессе используется программа: Расчёт изгибаемых пластин по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатьев, Е. А. Невзорова; ВолгГТУ. – 2017;

- с 2018 г. в учебном процессе используются программные средства: Расчет устойчивости стержневых систем по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатьев. – 2018; Динамический расчёт плоских стержневых систем (ДРПСС КСФ МКЭ) / А. В. Игнатьев; ВолгГТУ. – 2018; Модуль визуализации и расчёта плоских стержневых систем для ПК КСФ МКЭ / А. В. Ильин, А. В. Игнатьев; ВолгГТУ. – 2018.

Заместитель директора  
по учебной работе  
ИАиС ВолгГТУ



Захаров Е. А