

На правах рукописи



Ищанов Тлек Рахметолович

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С
УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ
ВАРИАНТАХ АППРОКСИМАЦИИ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Волгоград – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волгоградский государственный аграрный университет» на кафедре «Высшая математика».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор

Клочков Юрий Васильевич

Официальные оппоненты: **Каюмов Рашит Абдулхакович,**

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Механика» Института
строительства ФГБОУ ВО «Казанский
государственный архитектурно-строительный
университет»

Ким Алексей Юрьевич,

доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры «Теория сооружений и
строительных конструкций» Института
урбанистики, архитектуры и строительства
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный
технический университет имени Гагарина
Ю.А.»

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы
народов».

Защита состоится 11 декабря 2018 года в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.028.10 в ИАиС ФГБОУ ВО Волгоградском государственном техническом университете по адресу: 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1, ауд. Б-203.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте www.vstu.ru ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет».

Автореферат разослан «___» _____ 2018 г.

Ученый секретарь

Воронкова Галина

диссертационного совета



Вячеславна

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Предъявляемые практикой требования надежности и экономичности при создании инженерных конструкций приводят к необходимости использования оболочек различных конфигураций. Это объясняется тем, что оболочечные конструкции обладают высокими прочностными свойствами, небольшим весом и устойчивостью. Область применения оболочечных конструкций весьма обширна, это промышленное и гражданское строительство, машиностроение, судостроение, авиастроение. В процессе эксплуатации оболочки подвергаются воздействию внутренних и внешних силовых факторов, поэтому расчеты на прочность и их совершенствование выходят на первый план.

В создании общей теории тонких оболочек важную роль сыграли отечественные ученые Власов В.З., Новожилов В.В., Бидерман В.Л., Тимошенко С.П. Векуа И.Н., Вольмир А.С., Пикуль В.В., Галимов К.З., Корнишин М.С., Болотин В. В., Григолюк Э.И., Черных К.Ф., Паймушин В.Н., и др. С развитием и постоянным повышением эффективности компьютерной техники все большее распространение стали получать численные методы расчета оболочек, в развитие которых внесли вклад такие ученые как Петров В.В., Немировский Ю.В., Матвиенко Ю.Г., Хайруллин Ф.С. и другие. Наибольшую известность из всех численных методов приобрел метод конечных элементов (МКЭ), в развитие которого внесли существенный вклад отечественные и зарубежные ученые Постнов В. А., Голованов А. И., Игнатьев В. А., Косицын С. Б., Баженов В. Г., Капустин С. А., Шапошников Н. Н., Агапов В. П., Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н., Скопинский В. Н., Зенкевич О.М., Кантин Г., Баженов В.А., Соловей Н.А., Розин Л.А., Клауф П., Бате К., Оден Дж., Галлагер Р., Железнов Л.П., Кабанов Д.В. и др.

Физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы. Избавиться от этого недостатка можно путем учета деформаций поперечного сдвига. Сдвиговая теория более точна и физически последовательнее классической теории.

Цель работы - создание алгоритмов конечно-элементного анализа НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основе реализации пакета авторских прикладных программ по расчету на прочность оболочечных конструкций произвольной геометрии при инвариантной векторной аппроксимации полей перемещений. Обоснование необходимости учета деформаций поперечного сдвига при определении НДС короткопролетных, жестко защемленных оболочек.

Задачи исследования:

- вывод геометрических соотношений тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла поворота нормали;
- разработка конечно-элементных моделей тонких оболочек при различных условиях опирания и видах заданной нагрузки;
- разработка алгоритма формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений; разработка алгоритма программы вычислений напряжений;
- выполнение численного анализа НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования для скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений.

Научная новизна:

- получены основные геометрические соотношения между деформациями и перемещениями при альтернативном общепринятому варианту отсчета угла поворота нормали;
- разработан алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при общепринятом и альтернативном вариантах отсчета угла поворота нормали для расчета тонких оболочек с

учетом деформации поперечного сдвига на основании скалярной конечно-элементной интерполяционной процедуры;

- разработан алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при общепринятом и альтернативном отсчете угла поворота нормали для расчета тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основании векторной конечно-элементной интерполяционной процедуры;

- выполнен численный анализ НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования с использованием скалярной аппроксимации перемещений, показавший преимущества альтернативного способа отсчета угла поворота нормали;

- выполнен численный анализ НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования при использовании векторной аппроксимации полей перемещений, показавший существенные преимущества разработанных алгоритмов расчета с векторной интерполяционной процедурой.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается математической обоснованностью вывода основных геометрических соотношений, корректной математической постановкой задач с использованием векторного и тензорного анализа, теории тонких оболочек, дифференциальной геометрии, теории аппроксимации функций, соответствием качественных результатов расчета физической картине исследуемых процессов, совпадением количественных результатов, полученных при использовании разработанных алгоритмов, с результатами исследований других авторов, результатами, полученными по аналитическим формулам. Во всех примерах расчета оболочек контролировалась сходимость вычислительного процесса, как необходимого условия адекватности любого численного метода.

Практическая ценность диссертационной работы заключается в разработке алгоритмов и пакета прикладных программ по расчету на прочность

тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, которые могут быть использованы проектными, научно-исследовательскими и эксплуатационными организациями при анализе НДС элементов сооружений, моделируемых оболочками различной конфигурации при произвольном характере воздействий и условий закрепления на границах.

Методология и методы диссертационного исследования. Основой диссертационного исследования являются положения вариационного метода строительной механики – МКЭ, классическая теория тонких оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява, сдвиговая теория типа С. П. Тимошенко, описанные в трудах отечественных и зарубежных авторов. Проведен теоретический анализ литературных источников и материалов сети интернет. Автором в ходе исследования использовались следующие методы: логический анализ, векторный и тензорный анализ, статистический анализ (сопоставления, сравнения), системный подход, табличный и графический методы.

Диссертация соответствует паспорту специальности 05.23.17 – Строительная механика, в частности, пункту 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета» и пункту 4 «Численные методы расчета сооружений и их элементов» области исследований.

Основные результаты работы, выносимые на защиту:

- геометрические соотношения между деформациями и перемещениями при различных вариантах отсчета угла поворота нормали;
- алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота нормали для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основании скалярной аппроксимации перемещений;
- алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота

нормали для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига с векторной аппроксимацией полей перемещений;

- результаты исследования НДС при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота нормали с использованием скалярной и векторной форм интерполяционной процедуры, показавшие существенное повышение точности расчетов по разработанным алгоритмам.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на VIII международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2015» (Москва, РУДН, 2015); международной научно-практической конференции "Стратегические ориентиры инновационного развития АПК в современных экономических условиях" (Волгоград, ВолГАУ, 2016); первой национальной научно-практической конференции «Современное научное знание в условиях системных изменений», посвященной пятилетию присвоения имени П. А. Столыпина Омскому ГАУ (Омск, Омский ГАУ, 2016) и других. Полностью работа докладывалась на расширенном заседании кафедры «Высшая математика» Волгоградского государственного аграрного университета 6 февраля 2018 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано двенадцать научных работ, из них четыре - в рецензируемых изданиях, рекомендованных перечнем ВАК РФ.

Структура и объём работы. Основные положения диссертационной работы изложены на 168 страницах, состоят из введения, четырех глав, заключения, выводов, списка литературы и 2 приложений. Работа иллюстрирована 19 таблицами и 37 рисунками. Список литературы содержит 189 источников, в том числе 53 зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, сформулированы цель и задачи исследования, указана научная новизна и практическая ценность работы, описана структура диссертации.

В первой главе проведен обзор существующих в настоящее время работ по исследуемой теме. Во многих работах используется классическая теория пластин и оболочек, которая проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического применения. Недостатком классической теории является погрешность, связанная с обобщенной силой Кирхгофа. Данная проблема решается путем учета деформаций поперечного сдвига. Сдвиговая теория более точна и физически последовательнее классической теории.

Анализ работ, посвященных расчету тонких оболочек на основе МКЭ, показывает, что к настоящему времени для расчета оболочечных конструкций в линейной и нелинейной постановках используется весьма широкий набор типов конечных элементов, различающихся между собой формой, количеством варьируемых параметров, видом аппроксимаций функций, наличием или отсутствием кривизны, ориентацией на срединной поверхности. Приведенные конкретные расчеты оболочечных конструкций, для которых имеются аналитические решения или приводятся результаты, подтвержденные экспериментальными данными, позволяют сделать вывод о достаточной точности разработанных конечных элементов для инженерной практики.

В большинстве работ, посвященных расчету оболочек с учетом поперечного сдвига (Вольмир А. С., Рикардс Р. Б. и другие), отсчет угла поворота нормали осуществляется от исходного состояния, в то же время, с геометрической точки зрения, более корректно рассматривать вариант, когда угол поворота нормали отсчитывается от ее деформированного состояния. Данный вариант был предложен и реализован в настоящем исследовании.

Также актуальной остается проблема учета смещений конечного элемента как жесткого целого при использовании криволинейной системы координат. К настоящему моменту учет жестких смещений дискретного элемента предлагается осуществлять в явной форме (Косицын С. Б., Мануйлов Г. А., Голованов А. И., Кузнецов Ю. М. и другие), что является достаточно

трудоемким процессом, во многом зависящим от конкретного типа оболочечной конструкции.

В ряде работ (Николаев А. П., Бандурин Н. Г., Клочков Ю. В.) проблеме смещения КЭ как жесткого целого предложено решать в неявном виде на основе векторной интерполяции перемещений, основанной на использовании интерполяционного выражения для вектора перемещения в целом, а не для его отдельных компонент. Однако, вопрос определения НДС тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, допускающих жесткие смещения под действием заданной нагрузки изучен недостаточно, что требует дополнительного исследования.

Во второй главе на основании теории тонких оболочек Новожилова В.В. были выполнены расчеты по определению НДС эллиптического цилиндра при различном характере воздействий (сосредоточенные и распределенные силы, внутреннее давление) и условий закрепления на границах (свободный край, шарнирное опирание, жесткая заделка). Расчеты проводились при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений.

Конечным элементом выбирается четырехугольная область оболочки, произвольно расположенная на ее срединной поверхности с узлами i, j, k, l . Криволинейный конечный элемент отображается на квадрат с локальными координатами α и β , введенными для выполнения численного интегрирования.

Скалярная интерполяционная процедура. Столбец узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат был выбран в следующем виде

$$\begin{aligned} \{U_y^l\}_{1 \times 72}^T &= \left\{ \{v_y^{1l}\}_{1 \times 24}^T \{v_y^{2l}\}_{1 \times 24}^T \{v_y^l\}_{1 \times 24}^T \right\}, & \{U_y^r\}_{1 \times 72}^T &= \left\{ \{v_y^{1r}\}_{1 \times 24}^T \{v_y^{2r}\}_{1 \times 24}^T \{v_y^r\}_{1 \times 24}^T \right\} \\ \{m_y^l\}_{1 \times 24}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,\alpha}^i \dots m_{,\alpha}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l m_{,\alpha\alpha}^i \dots m_{,\alpha\alpha}^l m_{,\beta\beta}^i \dots m_{,\beta\beta}^l m_{,\alpha\beta}^i \dots m_{,\alpha\beta}^l\}, \\ \{m_y^r\}_{1 \times 24}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,x}^i \dots m_{,x}^l m_{,t}^i \dots m_{,t}^l m_{,xx}^i \dots m_{,xx}^l m_{,tt}^i \dots m_{,tt}^l m_{,xt}^i \dots m_{,xt}^l\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где m - это компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v .

При скалярной интерполяционной процедуре отдельная компонента вектора перемещения определяется через узловые значения этой же компоненты и ее производные

$$m = \{\chi\}_{1 \times 24}^T \{m_y^l\}_{24 \times 1}, \quad (2)$$

где $\{\chi\}^T = \{\chi_1 \dots \chi_{24}\}$ – матрица-строка, которая составлена из произведений полиномов Эрмита пятой степени.

Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента формируются на основе равенства работ внешних и внутренних сил на возможном перемещении

$$\int_V \{\varepsilon_{ij}^\zeta\}^T \{\sigma^{ij}\} dV = \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (3)$$

где $\{\varepsilon_{ij}^\zeta\}, \{\sigma^{ij}\}$ – деформации и напряжения в произвольном слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ , $\{P\}$ – столбец внешней поверхностной нагрузки, $\{U\}^T = \{v^1 v^2 v\}$.

При векторном способе интерполяции столбец векторных узловых неизвестных для четырехугольного элемента в локальной и глобальной системах координат будет определяться следующим образом

$$\begin{aligned} \{\vec{v}_y^l\}_{1 \times 24}^T &= \{\vec{v}^i \dots \vec{v}^l \vec{v}_{,\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta}^l \vec{v}_{,\alpha\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\alpha}^l \vec{v}_{,\beta\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta\beta}^l \vec{v}_{,\alpha\beta}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\beta}^l\}; \\ \{\vec{v}_y^r\}_{1 \times 24}^T &= \{\vec{v}^i \dots \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \dots \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \dots \vec{v}_{,t}^l \vec{v}_{,xx}^i \dots \vec{v}_{,xx}^l \vec{v}_{,tt}^i \dots \vec{v}_{,tt}^l \vec{v}_{,xt}^i \dots \vec{v}_{,xt}^l\} \end{aligned} \quad (4)$$

где $\vec{v}^i \dots \vec{v}^l$ – векторы перемещения точек, находящихся в узлах элемента;

$\vec{v}_{,\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\beta}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\beta\beta}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\beta}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\beta}^l$ – первые и вторые производные вектора перемещения узловых точек в локальной системе координат;

$\vec{v}_{,x}^i \dots \vec{v}_{,t}^i \dots \vec{v}_{,xx}^i \dots \vec{v}_{,tt}^i \dots \vec{v}_{,xt}^i \dots \vec{v}_{,xt}^l$ – первые и вторые производные вектора перемещения узловых точек в глобальной системе координат.

Столбец векторных узловых неизвестных в локальной системе координат можно представить матричным произведением

$$\{\vec{v}_y^l\}_{24 \times 1} = [GL]_{24 \times 24} [\vec{A}]_{24 \times 72} \{n_y\}_{72 \times 1} = [GL]_{24 \times 24} [\vec{A}]_{24 \times 72} [TR]_{72 \times 72} \{U_y^r\}_{72 \times 1}, \quad (5)$$

где $[GL]$ – матрица перехода от $\{\vec{v}_y^l\}$ к $\{\vec{v}_y^r\}$; $[\vec{A}]$ – матрица, элементами которой являются базисные векторы узлов конечного элемента;

$$\{n_y\}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^{1i} t_1^{1i} \dots t_1^l t_2^{1i} \dots t_2^l t_{11}^{1i} \dots t_{11}^l t_{22}^{1i} \dots t_{22}^l t_{12}^{1i} t_{12}^{2i} t_{12}^i \dots t_{12}^l\};$$

$[TR]$ - матрица перехода от $\{n_y\}$ к $\{U_y^\Gamma\}$.

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента можно выразить через векторы перемещения узлов с помощью интерполяционного выражения

$$\vec{v} = \{\chi\}^T \{\vec{v}_y^l\} = \{\chi\}^T \begin{bmatrix} \vec{A} \\ [GR] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{TR\} \\ \{U_y^\Gamma\} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$1 \times 24 \quad 24 \times 1 \quad 1 \times 24 \quad 24 \times 72 \quad 72 \times 72 \quad 72 \times 72 \quad 72 \times 1$

где $[GR]$ – определяется из равенства $[GL][\vec{A}] = [\vec{A}][GR]$.

Базисные векторы узлов конечного элемента могут быть выражены через базисные векторы внутренней точки конечного элемента матричными соотношениями

$$\{\vec{e}^\rho\} = [p^\rho][p]^{-1}\{\vec{e}\}, \quad (7)$$

где $[p^\rho]$ и $[p]$ определяются из равенств $\{\vec{e}^\rho\} = [p^\rho]\{\vec{l}\}; \{\vec{e}\} = [p]\{\vec{l}\};$

$$\{\vec{e}\}^T = \{\vec{e}_1^o \ \vec{e}_2^o \ \vec{e}_n^o\}; \ \{\vec{e}^\rho\}^T = \{\vec{e}_1^{o\rho} \ \vec{e}_2^{o\rho} \ \vec{e}_n^{o\rho}\}; \ \{\vec{l}\} = \{\vec{l} \ \vec{j} \ \vec{k}\}.$$

Квазидиагональная матрица $[\vec{A}]$, составленная из узловых векторов локального базиса, с учетом (7) может быть представлена суммой

$$[\vec{A}]_{24 \times 72} = \vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]. \quad (8)$$

Соотношение (6) с учетом (8) примет вид

$$v^1 \vec{e}_1^o + v^2 \vec{e}_2^o + v \vec{e}_n^o = \{\chi\}^T (\vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]) \{Q_y\}, \quad (9)$$

где $\{Q_y\} = [GR][TR]\{U_y^\Gamma\}$.

Интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения при векторном способе интерполяции могут быть получены из (9) и записаны в следующем виде

$$v^1 = \{\chi\}^T [A_1] \{Q_y\}; \quad v^2 = \{\chi\}^T [A_2] \{Q_y\}; \quad v = \{\chi\}^T [A_3] \{Q_y\}; \quad (10)$$

При векторной интерполяционной процедуре каждая компонента вектора перемещения и ее производные по глобальным координатам зависят от узловых значений всех трех компонент вектора перемещения и их производных в глобальной системе координат. В этом и состоит отличие векторной интерполяции от общепринятой скалярной интерполяции перемещений, при которой отдельная компонента вектора перемещения зависит от узловых значений только этой же компоненты и не зависит от узловых значений остальных двух компонент.

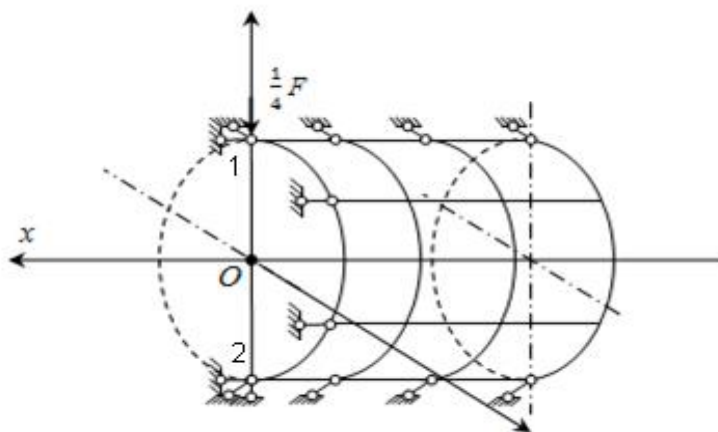


Рис. 1 – Расчетная схема эллиптического цилиндра, нагруженного сосредоточенной силой

Пример 1. Эллиптический цилиндр загружен сосредоточенной силой F и имеющий на диаметрально противоположной стороне шарнирную опору, препятствующую вертикальному смещению (рис. 1).

Расчеты выполнялись в двух вариантах: в первом варианте применялась скалярная аппроксимация перемещений; во втором – векторная аппроксимация полей перемещений. Исходные данные: $L = 26,289$ см, $b = 12,58$ см, $t = 0,24$ см, $F = 453,6$ Н, $E = 0,738 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3125$. Отношение параметров $n = b/c$ поперечного сечения эллиптического цилиндра варьировалось от 1 до 4. При выбранной расчетной схеме напряжения в точке приложения сосредоточенной силы (точка 1) и в точке шарнирного опирания (точка 2) должны быть равны. Для удобства анализа конечно-элементных решений были использованы следующие обозначения

$$\gamma^B = \sigma_{xx}^{B1} / \sigma_{xx}^{B2}; \gamma^H = \sigma_{xx}^{H1} / \sigma_{xx}^{H2}; \omega^B = \sigma_{tt}^{B1} / \sigma_{tt}^{B2}; \omega^H = \sigma_{tt}^{H1} / \sigma_{tt}^{H2}, \quad (11)$$

где верхние индексы «в» и «н» указывают, что напряжения вычислены на внутренней и наружной поверхностях эллиптического цилиндра соответственно.

Результаты повариантных расчетов представлены на рисунках 2 и 3, на которых показаны изменения коэффициентов γ и ω (11) в зависимости от отношения $n = b/c$ при сетке дискретизации 10×10 .

Как видно из диаграмм, при векторном варианте аппроксимации перемещений значения коэффициентов γ и ω равны единице при любых отношениях b/c . При использовании скалярного варианта аппроксимации перемещений γ и ω равны единице лишь при $b/c = 1$, т.е. при расчете кругового цилиндра.

При увеличении отношения $n = b/c$ (т.е. когда цилиндр приобретает все более выраженную эллиптическую форму) отклонения значений коэффициентов γ и ω от единицы становятся все более значительными.

Результаты, представленные на диаграммах, получены при фиксированной сетке дискретизации 10×10 . Поэтому интерес представляет изменение значений напряжений при скалярном варианте аппроксимации перемещений при значительном сгущении сетки дискретизации. Результаты расчетов эллиптического цилиндра при $n = b/c = 3$ показали, что, несмотря на значительное сгущение сетки ($n_z = 841$), значения γ и ω весьма далеки от единицы.

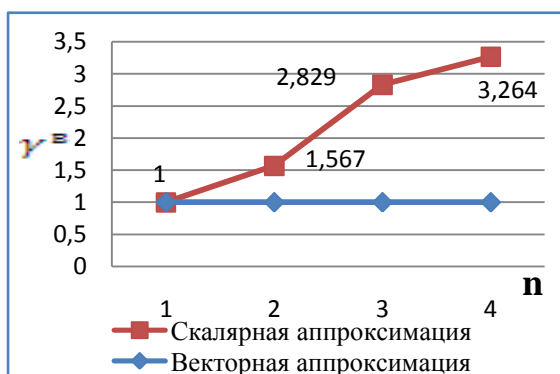


Рис. 2 – Диаграмма зависимости коэффициента γ от отношения $n = b/c$



Рис. 3 – Диаграмма зависимости коэффициента ω от отношения $n = b/c$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при конечно-элементном расчете эллиптических цилиндров с применением теории Новожилова В. В. необходимо использовать векторный вариант интерполяции перемещений, так как применение скалярного варианта интерполяции перемещений в этом случае не позволяет получить удовлетворительный результат даже при достаточно измельченной сетке дискретизации.

В третьей главе изложен расчет тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании скалярной интерполяции полей перемещений при двух вариантах отсчета угла поворота нормали. В первом варианте расчета отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния, во втором – от ее деформированного состояния.

Геометрия тонкой оболочки в исходном состоянии. Срединная поверхность оболочки может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}. \quad (12)$$

Векторы локального базиса и их производные по глобальным координатам описываются формулами

$$\vec{a}_1^o = \vec{R}_{,\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_2^o = \vec{R}_{,\lambda_2}^o; \quad (13)$$

$$\vec{a}_{1,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_{1,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_1}^o. \quad (14)$$

Для эллиптического цилиндра радиус-вектор может быть записан в следующем виде

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + b \cdot \sin(t)\vec{j} + c \cdot \cos(t)\vec{k}, \quad (15)$$

Векторы локального базиса и их производные по глобальным координатам описываются формулами

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^o &= \vec{R}_{,x}^o = \vec{i}; \quad \vec{a}_2^o = \vec{R}_{,t}^o = b \cdot \cos(t)\vec{j} - c \cdot \sin(t)\vec{k}; \\ \vec{a}_n^o &= \vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o / |\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o| = \vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o / \sqrt{a_n^0}; \end{aligned} \quad (16)$$

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ в исходном состоянии определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^{o\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o. \quad (17)$$

Векторы базиса в исходном состоянии можно представить зависимостями

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{o\zeta} = (\vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o)_{,x} = \vec{R}_{,x}^o + \zeta \vec{a}_{n,x}^o = \vec{a}_1^o; \quad \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\zeta}^{o\zeta} = \vec{a}_n^o; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^{o\zeta} = (\vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o)_{,t} = \vec{R}_{,t}^o + \zeta \vec{a}_{n,t}^o = \vec{a}_2^o(1 + \zeta \cdot q_{32}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $q_{32} = cb/a_n^0 \sqrt{a_n^0}$.

Геометрия оболочки в деформированном состоянии. Положение точки срединной поверхности в процессе деформации определится соотношением

$$\vec{R} = \vec{R}^o + \vec{v}. \quad (19)$$

Векторы локального базиса в деформированном состоянии представлены соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= \vec{R}_{,i} = (\vec{R}^o + \vec{v})_{,i} = \vec{a}_i^o + t_i^p \vec{a}_p^o + t_i \vec{a}_n^o; \\ \vec{a}_n &= \vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o / |\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o| = -t_x \vec{a}_1^o - t_t \vec{a}_2^o + \vec{a}_n^o. \end{aligned} \quad (20)$$

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ в деформированном состоянии, определяется радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{o\zeta} + \vec{V}. \quad (21)$$

Вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ , можно определить одним из следующих соотношений

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^o); \quad (22)$$

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{v}^n \times \vec{a}_n^o) + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^o), \quad (23)$$

где $\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0$.

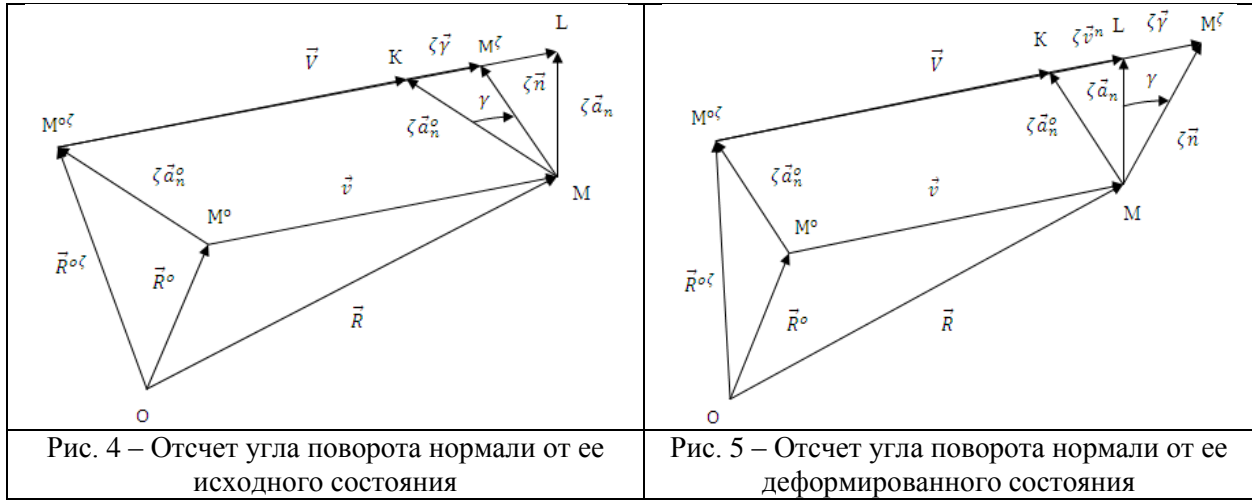
В первом варианте (рис. 4) отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния (22), во втором (рис. 5) – от деформированного состояния (23).

Вектор углов поворота нормалей описывается соотношением (Черных К.Ф.)

$$\vec{\gamma} = -\gamma^2 \vec{a}_1^0 + \gamma^1 \vec{a}_2^0 + \Omega_n \vec{a}_n^0. \quad (24)$$

Деформации в произвольном слое для первого и второго вариантов отсчета углов поворота нормали определяются соотношениями механики сплошной среды

$$\varepsilon_{ij}^\zeta = (g_{ij} - g_{ij}^0)/2. \quad (25)$$



Столбец узловых неизвестных четырехугольного КЭ в локальной и глобальной системах координат выбирается в виде

$$\begin{aligned} \{U_y^l\}_{1 \times 44}^T &= \left\{ \{v_y^{1l}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^{2l}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^l\}_{1 \times 12}^T \{\gamma_y^1\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^2\}_{1 \times 4}^T \right\}; \{U_y^\Gamma\}_{1 \times 44}^T = \left\{ \{v_y^{1\Gamma}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^{2\Gamma}\}_{1 \times 12}^T \{v_y^\Gamma\}_{1 \times 12}^T \{\gamma_y^1\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^2\}_{1 \times 4}^T \right\}; \\ \{m_y^l\}_{1 \times 12}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,\alpha}^i \dots m_{,\alpha}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l\}; \{\gamma_y^\rho\}_{1 \times 4}^T = \{\gamma^{\rho i} \gamma^{\rho j} \gamma^{\rho k} \gamma^{\rho l}\}, \\ \{m_y^\Gamma\}_{1 \times 12}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,x}^i \dots m_{,x}^l m_{,t}^i \dots m_{,t}^l\}, \end{aligned} \quad (26)$$

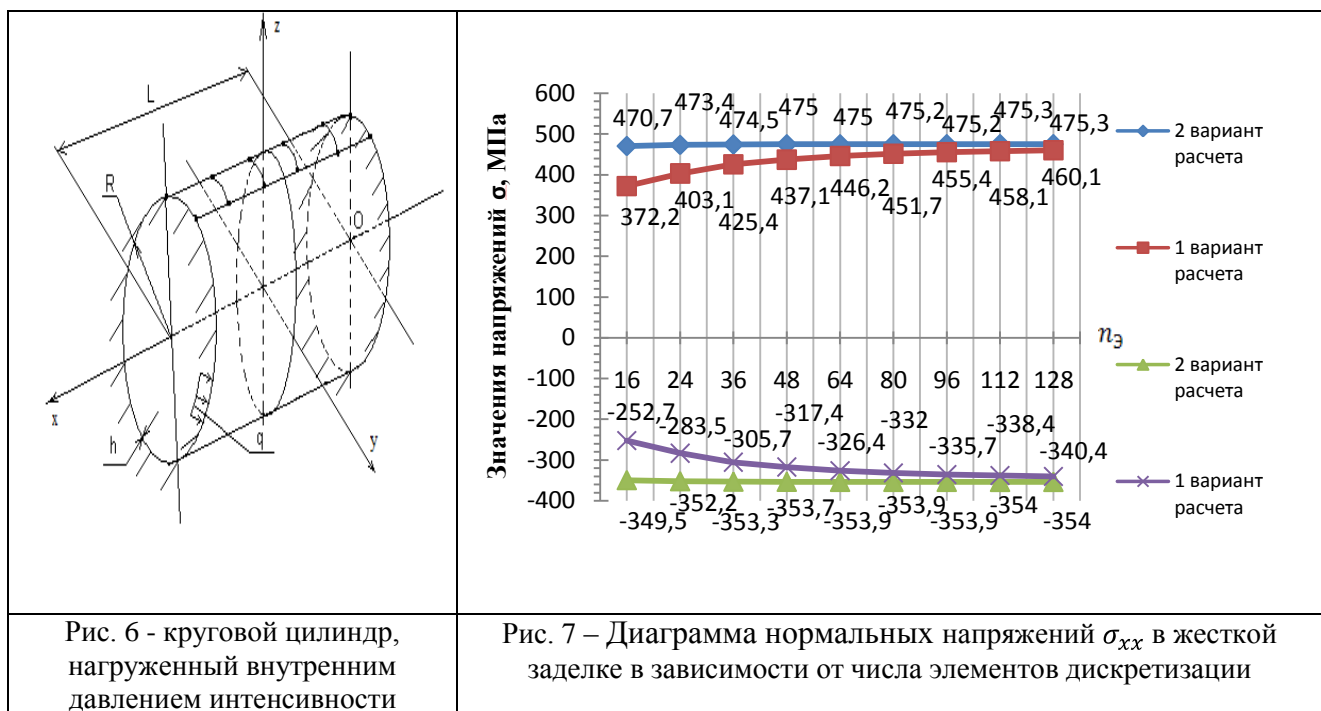
где m - это компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v .

При скалярной интерполяции перемещений компоненты вектора перемещения и компоненты вектора углов поворота нормали определяются через интерполяционные выражения следующего вида

$$m = \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{m_y^l\}_{12 \times 1}; \quad \gamma^\rho = \{h\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^\rho\}_{4 \times 1}, \quad (27)$$

где $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \dots \psi_{12}\}$ – матрица-строка, которая составлена из произведений полиномов Эрмита третьей степени, $\{h\}^T = \{h_1 h_2 h_3 h_4\}$ – матрица-строка, содержащая билинейные функции локальных координат.

Пример 3. Защемленный по торцам круговой цилиндр нагружен внутренним давлением интенсивности q (Рис. 6). Исходные данные: $R = 1,0 \text{ м}$; $L = 1,0 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,3$; $q = 5 \text{ МПа}$. Расчеты выполнялись в двух вариантах, в первом варианте отсчет угла поворота нормали производился от ее исходного положения, во втором – от ее деформированного положения. Результаты повариантного расчета представлены на рисунке 7, на котором показаны значения физических напряжений σ_{xx} в жесткой заделке на внутренней (верхняя часть диаграммы) и внешней (нижняя часть диаграммы) поверхностях цилиндра в зависимости от числа элементов дискретизации n_z .



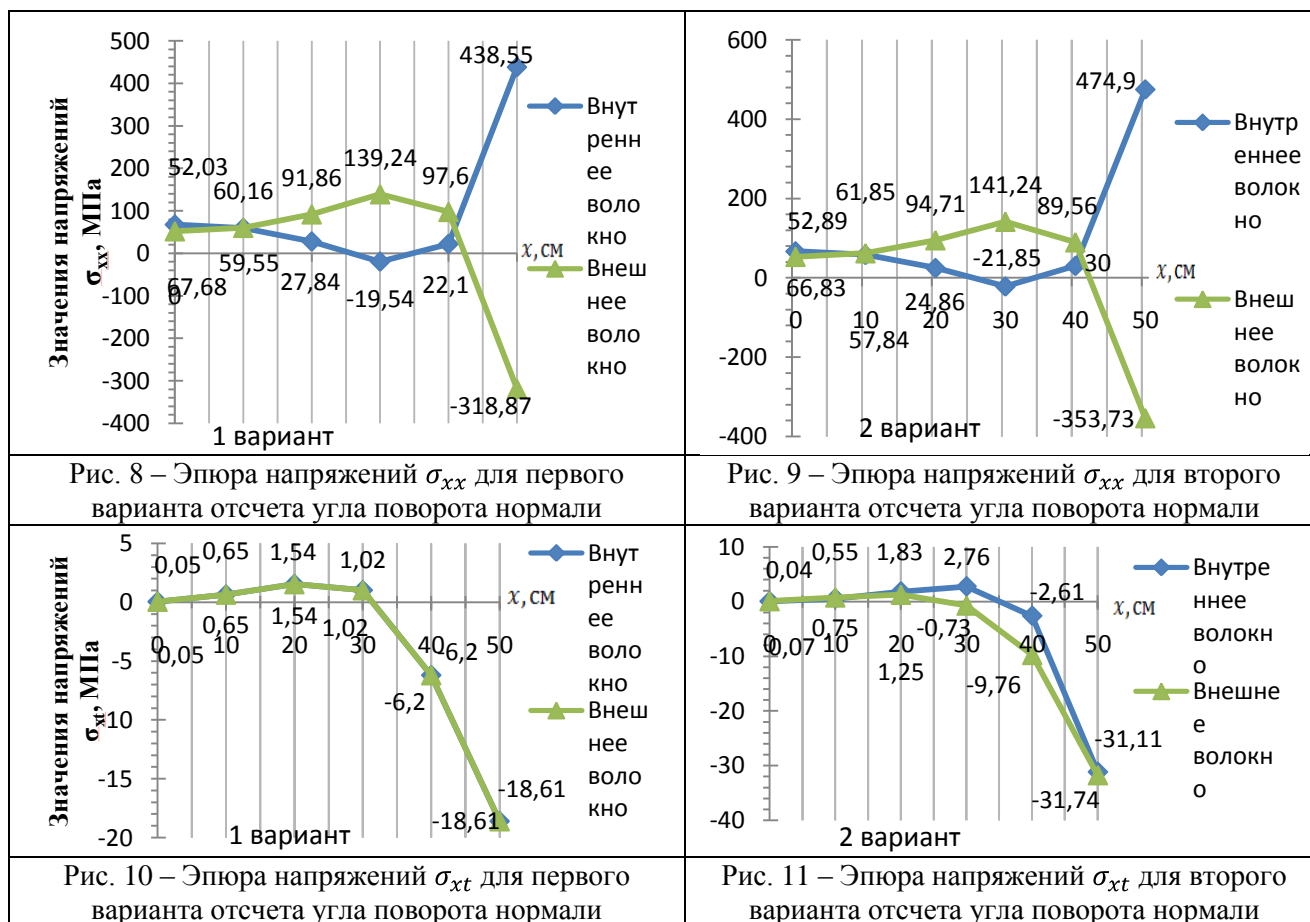
Анализ диаграммы показывает существенно лучшую сходимость вычислительного процесса во втором варианте расчета по сравнению с первым вариантом. Для достижения аналогичного уровня точности в первом варианте требуется на порядок большее число элементов дискретизации, чем во втором варианте.

Эпюры изменений напряжений σ_{xx} , σ_{xt} вдоль образующей цилиндра для первого и второго вариантов отсчета углов поворота нормали при скалярной

аппроксимации представлены на рисунках 8 – 11. При расчетах использовалась сетка дискретизации (2x51). Как видно из рисунков 8, 9 в середине пролета наблюдается безмоментное состояние и моментное в жесткой заделке, что соответствует физическому смыслу решаемой задачи.

Анализ сдвиговых деформаций (рисунки 10 и 11) показывает, что σ_{xt} близки к нулю в середине пролета и достигают максимальных значений в жесткой заделке, что также удовлетворяет физическому смыслу решаемой задачи.

На основании проведенного сравнительного анализа двух вариантов расчета эллиптического цилиндра был сделан вывод, что второй вариант позволяет получить удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации.



В четвертой главе изложен алгоритм расчета тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига в двух вариантах отсчета угла поворота нормали при использовании векторной интерполяции полей перемещений. В данной главе был выполнен сравнительный анализ скалярной и векторной

аппроксимаций в первом и во втором вариантах отсчета угла поворота нормали. Показано, что векторная интерполяция позволяет учесть смещения четырехугольного элемента дискретизации как жесткого целого.

Матрица жесткости четырехугольного элемента 44×44 при использовании векторной интерполяции полей перемещений. Столбец векторных узловых неизвестных для четырехугольного элемента в локальной и глобальной системах координат будет определяться следующим образом

$$\{\vec{V}_y^l\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \{\vec{v}_y^l\}_{1 \times 12}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad \{\vec{V}_y^r\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \{\vec{v}_y^r\}_{1 \times 12}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \{\vec{v}_y^l\}_{1 \times 12}^T &= \{\vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\alpha}^i \vec{v}_{,\alpha}^j \vec{v}_{,\alpha}^k \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \vec{v}_{,\beta}^j \vec{v}_{,\beta}^k \vec{v}_{,\beta}^l\}; \\ \{\vec{v}_y^r\}_{1 \times 12}^T &= \{\vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l\}; \quad \{\vec{\gamma}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\vec{\gamma}^i \vec{\gamma}^j \vec{\gamma}^k \vec{\gamma}^l\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$\vec{v}^i \dots \vec{v}^l$ – векторы перемещения узловых точек; $\vec{\gamma}^i \dots \vec{\gamma}^l$ – векторы углов поворота нормалей; $\vec{v}_{,\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta}^l \vec{v}_{,x}^i \dots \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \dots \vec{v}_{,t}^l$ – первые производные вектора перемещения узловых точек в локальной и глобальной системах координат соответственно.

Взаимосвязь между векторами $\{\vec{V}_y^l\}$ и $\{\vec{V}_y^r\}$ описывается формулой

$$\{\vec{V}_y^l\}_{16 \times 1} = [TM]_{16 \times 16} \{\vec{V}_y^r\}_{16 \times 1}. \quad (30)$$

Вектор перемещения и вектор углов поворота нормалей внутренней точки дискретного элемента можно выразить через векторы узловых точек зависимостями

$$\vec{v} = \{\psi\}_{1 \times 12}^T \{\vec{v}_y^l\}_{12 \times 1} = \{\psi\}_{1 \times 12}^T [TM_{11}]_{12 \times 12} \{\vec{v}_y^r\}_{12 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \{h\}_{1 \times 4}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{4 \times 1}. \quad (31)$$

Столбец векторных узловых неизвестных в глобальной системе координат можно представить в виде матричного произведения

$$\{\vec{V}_y^r\}_{16 \times 1} = [\vec{A}]_{16 \times 44} \{z_y\}_{44 \times 1} = [\vec{A}]_{16 \times 44} [TP]_{44 \times 44} \{U_y^r\}_{44 \times 1}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \{z_y\}_{44 \times 1}^T &= \{\{z_v\}_{36 \times 1}^T, \{z_\gamma\}_{8 \times 1}^T\}; \quad \{z_v\}_{36 \times 1}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^l t_1^{1i} t_1^{2i} t_1^i \dots t_1^l t_2^{1i} t_2^{2i} t_2^i \dots t_2^l\}; \\ \{z_\gamma\}_{8 \times 1}^T &= \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{1l} \gamma^{2l}\}. \end{aligned} \quad (33)$$

На основании (32) запишем соотношения (31) в следующем виде

$$\vec{v} = \{\psi\}_{1 \times 12}^T [\vec{A}_v]_{12 \times 36} [TR_{11}]_{36 \times 36} [TP_{11}]_{36 \times 36} \{U_{yv}^r\}_{44 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \{h\}_{1 \times 4}^T [\vec{A}_\gamma]_{4 \times 8} [TR_{22}]_{8 \times 8} [TP_{22}]_{8 \times 8} \{U_{y\gamma}^r\}_{8 \times 1}. \quad (34)$$

Квазидиагональные матрицы $[\vec{A}_v]$ и $[\vec{A}_\gamma]$, составленные из векторов локального базиса могут быть представлены следующим образом

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} = [A_{v1}] \vec{a}_1^o + [A_{v2}] \vec{a}_2^o + [A_{v3}] \vec{a}_n^o; \quad \begin{bmatrix} \vec{A}_\gamma \end{bmatrix}_{4 \times 8} = [A_{\gamma 1}] \vec{a}_1^o + [A_{\gamma 2}] \vec{a}_2^o. \quad (35)$$

С учетом соотношений (35) зависимости (34) примут вид

$$v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o = \{\psi\}^T ([A_{v1}] \vec{a}_1^o + [A_{v2}] \vec{a}_2^o + [A_{v3}] \vec{a}_n^o) \{L_y\}, \quad (36)$$

$$\gamma^1 \sqrt{a_{22}^o} \vec{a}_1^o + (\gamma^2 / \sqrt{a_{22}^o}) \vec{a}_2^o = \{h\}^T ([A_{\gamma 1}] \vec{a}_1^o + [A_{\gamma 2}] \vec{a}_2^o) \{M_y\}, \quad (37)$$

где $\{L_y\} = [TR_{11}][TP_{11}]\{U_{yv}^r\}$, $\{M_y\} = [TR_{22}][TP_{22}]\{U_{y\gamma}^r\}$.

Интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения и вектора углов поворота нормали описываются зависимостями

$$\begin{aligned} v^1 &= \{\psi\}^T [A_{v1}] \{L_y\}; \quad v^2 = \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\}; \quad v = \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\}; \\ \gamma^1 &= \{h\}^T [A_{\gamma 1}] \{M_y\}; \quad \gamma^2 = \{h\}^T [A_{\gamma 2}] \{M_y\}; \end{aligned} \quad (38)$$

Анализируя соотношения (38), можно сделать вывод, что каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента зависит от узловых значений всех трех компонент и многочленов, содержащих узловые значения этих трех компонент и их производные. Каждая компонента

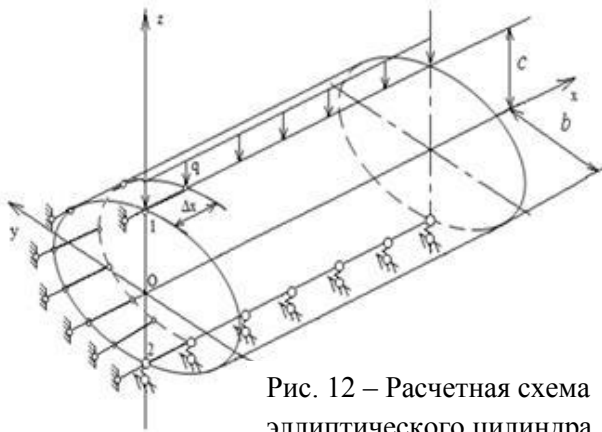


Рис. 12 – Расчетная схема эллиптического цилиндра

цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейно распределенной нагрузкой, интенсивности q и имеющего на диаметрально противоположной образующей цилиндра пружинные опоры (рис. 12), жесткость которых варьировалась. Исходные данные: $q = 5 \cdot 10^{-3}$ МПа; $b = 0,1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 0,001$ м. Величина параметра c была принята равной $0,025$ м.

Результаты расчетов НДС эллиптического цилиндра с пружинными опорами для первого и второго вариантов отсчета углов поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений представлены в таблицах 1 и 2 соответственно. В этих таблицах приведены значения напряжений σ_{tt} в зависимости от величины жесткого смещения. В первом варианте расчета, когда угол отсчитывался от исходного состояния

вектора углов поворота нормали зависит от узловых значений обеих компонент вектора углов поворота нормали.

Пример 4. Определение напряженно-деформированного состояния бесконечно длинного эллиптического

нормали, использовалась сетка дискретизации (337x2), во втором варианте расчета, при отсчете угла от деформированного положения нормали, для скалярной аппроксимации выбиралась сетка дискретизации (145x2), для векторной – 49x2. Анализ табличного материала показывает, что напряжения σ_{tt} при скалярной интерполяции в обоих вариантах значительно изменяются по величине, в то время как при смещении оболочки как твердого тела, они должны оставаться неизменными.

Таблица 1 – Расчет НДС эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния							Таблица 2 - Расчет НДС эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния						
Жесткость пружины, 10 ² Н/м			∞	0,1	0,01	0,02	Жесткость пружины, 10 ² Н/м			∞	0,1	0,01	0,02
Величина жесткого смещения, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00	Величина жесткого смещения, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00
Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках, при заданных смещениях оболочки				Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках, при заданных смещениях оболочки			
	Точка (1) (0; 0)	σ _{tt} ^B	157,19	153,22	117,74	-213,55	Точка (1) (0; 0)	σ _{tt} ^B	158,40	129,14	111,22	108,14	
		σ _{tt} ^H	-156,79	-152,89	-117,96	208,22		σ _{tt} ^H	-158,01	-129,70	-112,36	-109,39	
	Точка (2) (0; π)	σ _{tt} ^B	157,21	161,07	195,54	517,45	Точка (2) (0; π)	σ _{tt} ^B	158,19	96,13	58,11	51,58	
σ _{tt} ^H		-156,81	-160,61	-194,54	-511,36	σ _{tt} ^H		-157,79	-95,01	-56,55	-49,94		
Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0	0,99928	9,92892	19,32095	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0	0,42056	0,67818	0,72243
Векторная аппроксимация	Точка (1) (0; 0)	σ _{tt} ^B	157,20	157,20	157,20	157,20	Векторная аппроксимация	Точка (1) (0; 0)	σ _{tt} ^B	158,46	158,46	158,46	158,46
		σ _{tt} ^H	-156,81	-156,81	-156,81	-156,81			σ _{tt} ^H	-158,35	-158,35	-158,35	-158,35
	Точка (2) (0; π)	σ _{tt} ^B	157,20	157,20	157,20	157,20		Точка (2) (0; π)	σ _{tt} ^B	158,46	158,46	158,46	158,46
		σ _{tt} ^H	-156,81	-156,81	-156,81	-156,81			σ _{tt} ^H	-158,35	-158,35	-158,35	-158,35
Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00

При векторной интерполяции полей перемещений при расчете тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига численные значения напряжений остаются неизменными, что свидетельствует о том, что векторная интерполяция перемещений позволяет автоматически учитывать смещения конечного элемента как жесткого целого.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан алгоритм исследования НДС тонких оболочек с использованием четырехугольного конечного элемента размером 72×72 на основании соотношений Новожилова В. В. при использовании скалярной и векторной интерполяционных процедур. На основе разработанного элемента обоснована необходимость применения векторной интерполяции полей перемещений при расчете тонких оболочек, не являющихся оболочками вращения.

2. Получены основные геометрические соотношения между деформациями и перемещениями с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования.

3. Предложен алгоритм конечно-элементного исследования НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. При этом отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее исходного и деформированного положений. Был обоснован вывод о предпочтительности варианта расчета с отсчетом угла поворота нормали от ее деформированного состояния, при котором можно получать удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации.

4. Разработан алгоритм конечно-элементного исследования НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании различных форм аппроксимаций перемещений. Впервые использовалась векторная форма интерполяционной процедуры для вектора угла поворота нормали. На примерах расчетов было показано, что использование векторной аппроксимации полей перемещений и углов поворота нормали дает возможность учета в неявной форме смещения КЭ как жесткого целого, в то время как при использовании скалярной аппроксимации искомых величин такая возможность отсутствует.

5. На основании численного анализа НДС оболочек, показана необходимость учета деформаций поперечного сдвига при расчете

короткопролетных, жестко защемленных оболочечных конструкций. Показаны преимущества предложенного варианта отсчета угла наклона нормали по сравнению с общепринятым вариантом в сочетании с интерполяцией полей векторов перемещений и векторов углов поворота нормали.

6. Разработан пакет прикладных программ, позволяющий повысить точность конечно-элементного исследования напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, внедрение которого в расчетную инженерную практику может способствовать снижению материалоемкости оболочечных конструкций.

Основные положения и научные результаты диссертации изложены в следующих публикациях.

Статьи в журналах, проиндексированных в SCOPUS, Web of Science.

1. Klochkov, Yu. A. Allowance for Transverse Shear Deformations in the Finite Element Calculation of a Thin Elliptic Cylinder Shell / Yu. A. Kolchikov, A. P. Nikolaev, T. R. Ishchanov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability – 2018, - Vol. 47. - No. 4 - pp. 349-355.

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях

2. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 5. С. 49–54.

3. Клочков, Ю. В. О способах аппроксимации перемещений в МКЭ при расчете эллиптических цилиндров / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика и расчет сооружений. -2015 - № 4(261). - С. 64-70.

4. Клочков, Ю. В. Сравнительный анализ скалярной и векторной форм аппроксимаций в МКЭ на примере соотношений В. В. Новожилова для эллиптического цилиндра / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2015 - № 2. - С. 51-58.

5. Клочков, Ю. В. Применение соотношений Новожилова В. В. К расчету тонкостенных конструкций АПК / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. - 2014. - № 2 (34). - С. 171-175.

Публикации в других изданиях

6. Клочков, Ю. В. Сопоставительный анализ эффективности различных форм аппроксимаций полей перемещений в МКЭ при расчете тонких оболочек / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Труды VIII Международной научно-практической конференции «Инженерные системы-2015».- Москва, 20-22 апреля 2015 г.- М.: РУДН. - 2015. - С. 49-54.

7. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный алгоритм расчета оболочек вращения с учетом деформации поперечного сдвига / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Современное научное знание в условиях системных изменений. Материалы международной научно-практической конференции, посвященной пятилетию присвоения имени П. А. Столыпины Омскому государственному аграрному университету. Май - 2016., г. Омск. – Омск: ФГБОУ ВО Омский ГАУ. - 2016. - С. 198-200.

8. Клочков, Ю. В. Расчет произвольных тонких оболочек на основе МКЭ в инвариантной формулировке при использовании гипотезы Кирхгофа / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Стратегические ориентиры инновационного развития АПК в современных экономических условиях. Материалы международной научно-практической конференции. 26 – 28 января - 2016., г. Волгоград. Том 3. – Волгоград: ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - 2016. - С. 485-489.

9. Клочков, Ю. В. Анализ НДС произвольных оболочек при использовании МКЭ с учетом деформации поперечного сдвига / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Стратегические ориентиры инновационного развития АПК в современных экономических условиях. Материалы международной научно-практической конференции. 26 – 28 января - 2016., г. Волгоград. Том 3. – Волгоград: ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - 2016. - С. 470-475.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

10. Свид. 2017664156. Программа компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния с использованием векторной аппроксимации полей перемещений / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2017660735; дата поступления 25.10.2017; дата регистрации 13.12.2017.

11. Свид. 2017664156. Программа формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния с использованием векторной аппроксимации полей перемещений / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2017660732; дата поступления 25.10.2017; дата регистрации 13.12.2017.

12. Свид. 2017664156. Программа расчета напряжений в эллиптическом цилиндре с учетом сдвиговых деформаций на основании векторной аппроксимации полей перемещений / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов; правообладатель ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ. - № 2017660781; дата поступления 25.10.2017; дата регистрации 18.12.2017.

Ищанов Тлек Рахметолович

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ
РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ АППРОКСИМАЦИИ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Автореферат

Подписано в печать 05.10.2018. Формат 60х84^{1/16}

Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100. Заказ № .

ИПК ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ «Нива».

400002, г. Волгоград, пр-т. Университетский, 26