УДК 624.072.2

О. В. Коновалов, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов

Волгоградский государственный технический университет

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ В ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача динамического расчета циклической конструкция в виде балки на жестких опорах, загруженной регулярно расположенными точечными массами, с использованием метода обобщенных сил. Замена инерционных сил в узловых точках циклических и бициклических конструкций обобщенными нагрузками в виде ортогональных многочленов представляет возможность редуцировать систему уравнений и перейти к решению независимых уравнений.

Ключевые слова: периодическая функция, гармонические колебания, инерционные силы, метод конечных элементов, обобщенные податливости.

Основы метода обобщенных неизвестных [1—3] базируются на конечно-элементном подходе [4—7] к циклическим системам, обладающим многими слоями симметрии [2, 8—10], с использованием идеи разложения периодической функции на сумму простых осциллирующих функций [11—13] при расчете бициклических конструкций [14—16].

Основные идеи упрощения расчета сложных регулярных конструкций предложены в работах А. И. Сегаля [17], Н. С. Стрелецкого [18], И. М. Рабиновича [19] и представляют собой сочетание идей расчленения сложных циклических систем на более простые подсистемы и методологии объединения неизвестных, с использованием разложения периодической функции на сумму простых осциллирующих функций.

Данные методики используются для составления уравнений связи с минимальным числом неизвестных, системы канонических уравнений метода обобщенных неизвестных и ортогонализации основных эпюр с целью упрощения систем канонических уравнений.

В работе рассматривается циклическая система с двойной регулярностью в виде бирегулярной конструкции на жестких опорах (рис. 1), загруженной регулярно расположенными точечными массами (рис. 1, *а*).

Использование свойств ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента [20] при гармонических колебаниях циклической системы дает возможность представить форму свободных колебаний в виде:

$$Y_{i,s} = A_{i,s}\sin(\Omega_s t + \phi). \tag{1}$$

Максимальные инерционные силы при воздействии внешнего возмущения, вызывающего свободные колебания и соответствующие им формы максимальных амплитуд, определяют инерционные силы F_K и инерционные реакции R_K (рис. 1, *б*):

$$F^{(0)}_{i,s(\max)} = \sum_{k=1}^{n-1} F_k \sin\frac{k\pi i}{n}. \tag{2}$$

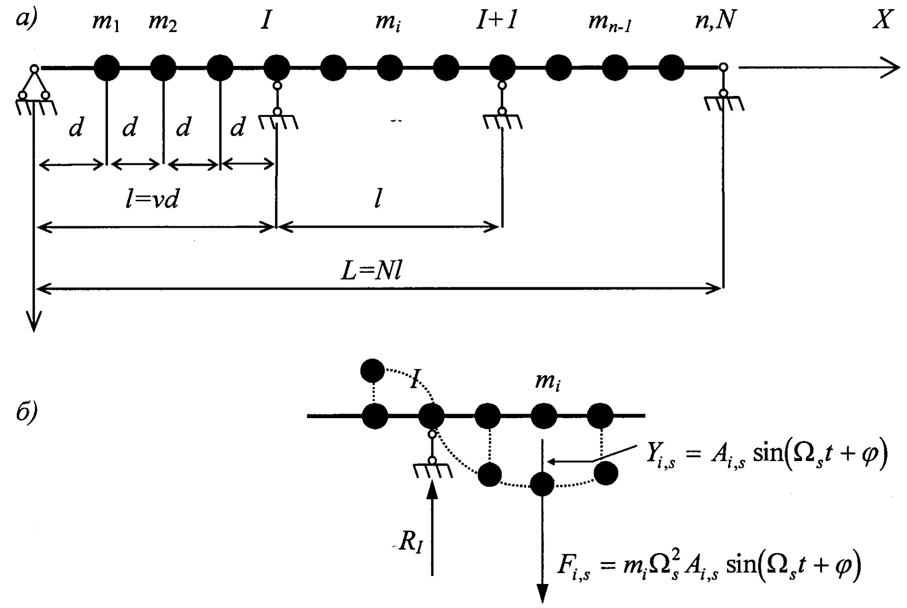

Рис. 1. Бирегулярная конструкция на жестких опорах:
а — загрузка точечными массами; *б* — распределение сил и реакций

Зависимость между обобщенными перемещениями и обобщенными силами определяется следующим выражением:

$$A_k = \frac{F_k}{m\Omega_s^2}. \tag{3}$$

За обобщенные неизвестные реакции принимаются коэффициенты R_K в разложении

$$R_I = \sum_{K=1}^{N-1} R_K \sin\frac{K\pi I}{N},\ K = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4}$$

За обобщенные неизвестные инерционные силы принимаются коэффициенты F_K в разложении (2).

Используя результаты, полученные в работе [20], получаем коэффициенты канонических уравнений метода обобщенных перемещений:

$$\delta_{kk} = \sum_{i=1}^{n-1}\left[1\times\sin\left(\frac{k\pi i}{n}\right)\lambda_{k,y}^{(p)}\sin\left(\frac{k\pi i}{n}\right)\right] = \frac{n}{4}\lambda_{k,y}^{(p)};$$

$$\delta_{Kk} = \sum_{i'=1}^{n-1}\left[1\times\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)\times\lambda_{k,y}^{(p)}\sin\left(\frac{k\pi i'}{n}\right) = \right.$$

$$= \sum_{i'=1}^{n-1}\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)\times\lambda_{k,y}^{(p)}\sin\left(\frac{k\pi I\nu}{N\nu}\right) = \frac{N}{2}\lambda_{k,y}^{(p)};$$

$$\delta_{K,k} = \delta_{k,K};$$

$$\delta_{KK} = \sum_{I=1}^{N-1}\left[1\cdot\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)\lambda_{K,y}^{(p)}\right] = \frac{N}{2}\lambda_{K,y}^{(p)};$$

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n-1}\left[1\cdot\sin\left(\frac{k\pi i}{n}\right)A_K\sin\left(\frac{k\pi i}{n}\right)\right] = \frac{n}{2}A_k;$$

$$\Delta_K = \sum_{I=1}^{N-1}\left[1\cdot\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)A_K\sin\left(\frac{K\pi I}{N}\right)\right] = \frac{N}{2}A_K, \tag{5}$$

где $\lambda_{k,y}^{(p)}$, $\lambda_{K,y}^{(p)}$ — обобщенные податливости:

$$\lambda_{k,y}^{(p)} = \frac{d^3}{48EI}\cdot\frac{2+\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin^4\frac{k\pi}{2n}};$$

$$\lambda_{K,y}^{(p)} = \frac{l^3}{48EI}\cdot\frac{2+\cos\frac{K\pi}{N}}{\sin^4\frac{K\pi}{2N}}. \tag{6}$$

Здесь d — шаг регулярности для масс; $l = vd$ — шаг регулярности для жестких опор.

Согласно [20] и с учетом полученных выражений коэффициентов канонических уравнений (2), (4), (5) получаем:

$$F_k\delta_{kk} + R_K\delta_{kK} = \frac{n}{2}A_k = \frac{n}{2}\frac{F_k}{m\Omega_s^2};$$

$$\sum F_k\delta_{Kk} + R_K\delta_{KK} = \frac{N}{2}A_K, \tag{7}$$

где $k = \beta N - t$; $(t = 1, 2, 3, ..., N-1$; $\beta = 1, 2, 3, ..., \nu)$;

$$K = \begin{cases} N - t, & \text{если } \beta \text{ — нечетное,} \\ t, & \text{если } \beta \text{ — четное.} \end{cases}$$

Физический смысл первого уравнения для точек k представляет собой обобщенное перемещение Δk для системы, загруженной в точках i.

Когда $t = 0$ (предельный случай), то $K = N$ и обобщенные перемещения равны 0:

$$K = N,\ k = \beta N,\ \delta_{Kk} = \delta_{kK} = 0.$$

Следовательно, последнее уравнение первой группы системы уравнений (7) принимает в данном случае следующий вид:

$$F_k\delta_{Kk} = \Delta k. \tag{8}$$

Отсюда с учетом (2) получаем взаимосвязь между обобщенными силами, обобщенной податливостью и частотами свободных колебаний:

$$F_k \frac{n}{2}\left[\lambda_{k,y}^{(P)} - \frac{1}{m\Omega_s^2}\right] = 0. \tag{9}$$

Решая уравнение (9) относительно Ω_s^2 определяем независимые $(\nu - 1)$ частоты свободных колебаний:

$$\Omega_s^2 = \Omega_k^2 = \frac{1}{m\lambda_{k,y}^{(P)}} = \frac{48EI}{md^3}\left(\frac{\sin^4 \dfrac{k\pi}{2n}}{2 + \cos\dfrac{k\pi}{n}}\right), \tag{10}$$

где $k = \beta N$; $\beta = 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

Полученные $(\nu - 1)$ частот свободных колебаний соответствуют частотам свободных колебаний балки без промежуточных опор. Формы колебаний соответствуют формам свободных колебаний с точками, закрепленными в местах расположения опор.

Вторая группа уравнений представляет собой по физическому смыслу обобщенное перемещение ΔK для той же основной системы при загружении ее в регулярно расположенных с шагом $l = \nu d$ точках I:

$$y_I = \sum_{K=1}^{N-1} A_K \sin\frac{K\pi I}{N}. \tag{11}$$

В предложенной задаче опорные точки, т. е. точки расположения масс с шагом L не имеют перемещений. Следовательно, соответсвующие обобщенные перемещения:

$$A_K = \frac{2}{N}\sum_{I=1}^{N-1} y_I \sin\frac{K\pi I}{N} = 0. \tag{12}$$

На рисунке 2 приведен шаблон для матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений метода обобщенных неизвестных для бирегулярной балки со сосредоточенными точечными массами. Из данного рисунка видно, что для узлов, расположенных бирегулярно, возможны преобразования, позволяющие исключить уравнения, определяющие взаимосвязь между обобщенными силами, обобщенной податливостью и частотами свободных колебаний.

Очевидно, что структура матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений метода обобщенных неизвестных позволяет построить решение в общем виде. Для каждого уравнения первой группы общей системы уравнений (7) получаем:

$$F_k = -R_K \frac{\delta_{kK}}{\delta_{kk}^*}, \tag{13}$$

где $\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \dfrac{n}{2m\Omega_s^2}$. (14)

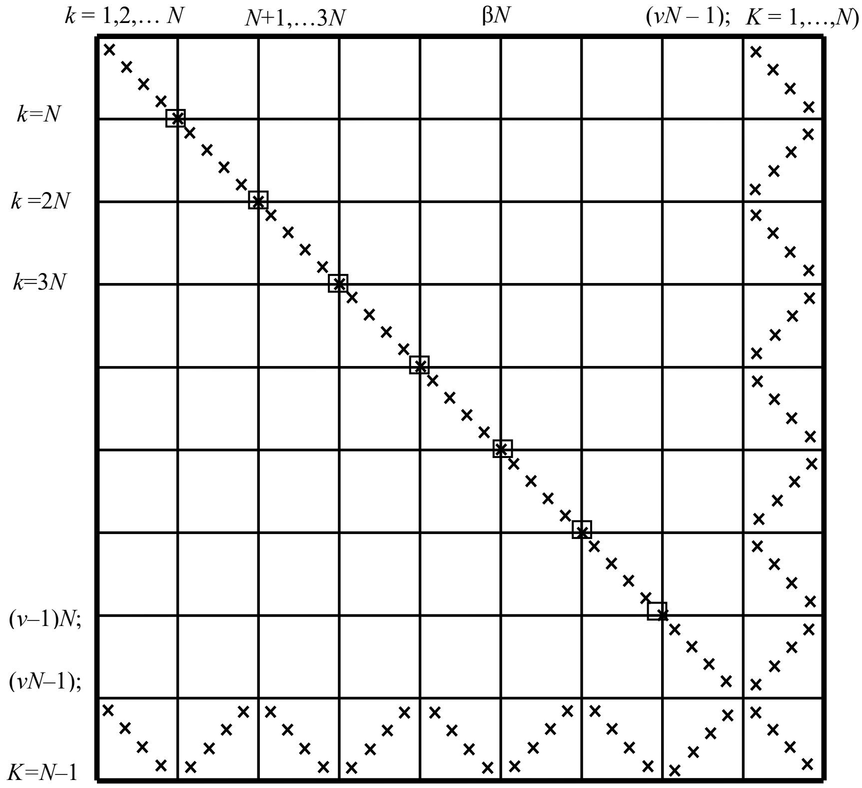

Рис. 2. Шаблон матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений метода обобщенных неизвестных

В общем случае для матрицы (см. рис. 2):

$$k = \beta N - t \begin{cases} K = N - t, & \text{при } \beta \text{ нечет.;} \\ K = t, & \text{при } \beta \text{ чет.,} \end{cases}$$

где $K = \begin{cases} N - t, & \text{если } \beta \text{ нечет.,} \\ t, & \text{если } \beta \text{ чет.} \end{cases}$

Обобщенное перемещение для бирегулярных узлов, исходя из сформированной матрицы коэффициентов [5, 20], представляется следующим образом:

$$\sum_{\beta=1}^{v} F_k \delta_{Kk} + R_K \delta_{KK} = \Delta K = \frac{N}{2} A_K. \tag{15}$$

При значениях $\beta = 2k - 1$ получаем независимые уравнения для случая $N = t + K$, при β — четных получаем уравнения для случая $K = t$.

Подставляя в (15) значение F_k по (13) получаем $(N - 1)$ независимых уравнений следующего вида:

$$R_K \left(\delta_{KK} - \sum_{\beta=1}^{v} \frac{\delta_{kK}^2}{\delta_{kk}^*} \right) = \Delta K = \frac{N}{2} A_K. \tag{16}$$

При рассмотрении узлов с бирегулярной периодичностью и исходя из того, что в соответствии с (12) $A_K = 0$, из (16) после преобразования получаем:

$$\delta_{KK} - \sum_{\beta=1}^{v} \frac{\left(\delta_{kK}\right)^2}{\delta_{kk}^{*}} = 0. \tag{17}$$

Подставив в это выражение значения коэффициентов, получаем с учетом (15) следующее частотное уравнение:

$$\frac{N}{2}\left(\lambda_{K,y}^{(P)}\right) - \sum_{\beta=1}^{v} \frac{\left(\frac{N}{2}\left(\lambda_{k,y}^{(P)}\right)\right)^2}{\left(\frac{n}{2}\lambda_{k,y}^{(P)} - \frac{n}{2m\Omega_s^2}\right)} = 0. \tag{18}$$

Преобразуем данное уравнение к виду:

$$v\left(\lambda_{K,y}^{(P)}\right) - \sum_{\beta=1}^{v} \frac{\left(\lambda_{k,y}^{(P)}\right)^2}{\left(\lambda_{k,y}^{(P)} - \alpha_s\right)} = 0\,, \tag{19}$$

где $K = \begin{cases} N - t, & \text{если}\,\beta\,\text{нечет.}, \\ t, & \text{если}\ \beta\ \text{чет.}, \end{cases}$

$$\alpha_s = \frac{1}{m\Omega_s^2}.$$

Решая данное уравнение относительно собственных частот Ω_s^2 для узловых точек и перебирая все возможные значения K от 1 до $N - t$ получаем все $n(N - 1)$ значений собственных частот Ω_s^2 [15, 19]. Для получения всего спектра частот необходимо к этим частотам добавить (n – 1) частот.

Решение данного уравнения можно представить в виде k-гиперболических функций, имеющие k – 1 разрывов (рис. 3).

Представление частотного уравнения в виде (19) свидетельствует о том, что данная функция имеет при $\alpha_s = \lambda_{k,y}^{(P)}$ бесконечные разрывы, а в промежутке между соседними точками разрывов монотонно убывает от (+∞) до (–∞).

Отсюда следует, что интервал изоляции корня частотного уравнения определяется соседними частотами несущей поверхности (см. рис. 2), а сам корень внутри интервала изоляции удобно находить при помощи комбинации шагового метода и метода Ньютона [5, 20].

В качестве примера рассматривается неразрезная шарнирно опертая по концам балка, для которой $n = 9,\ N = 3,\ l = 3,\ L = 9,\ EI = 1.$ Результаты расчета по МКЭ и по методу обобщенных неизвестных приведены в таблице.

Основы метода обобщенных неизвестных, базирующегося на конечноэлементном подходе к бициклическим системам, обладающими многими слоями симметрии, дают результат, полностью совпадающий с результатами конечно-элементных методов, являющихся для данной задачи точными.

(см. табл.). Решение представленной задачи сводится к решению блоков отдельных независимых уравнений.

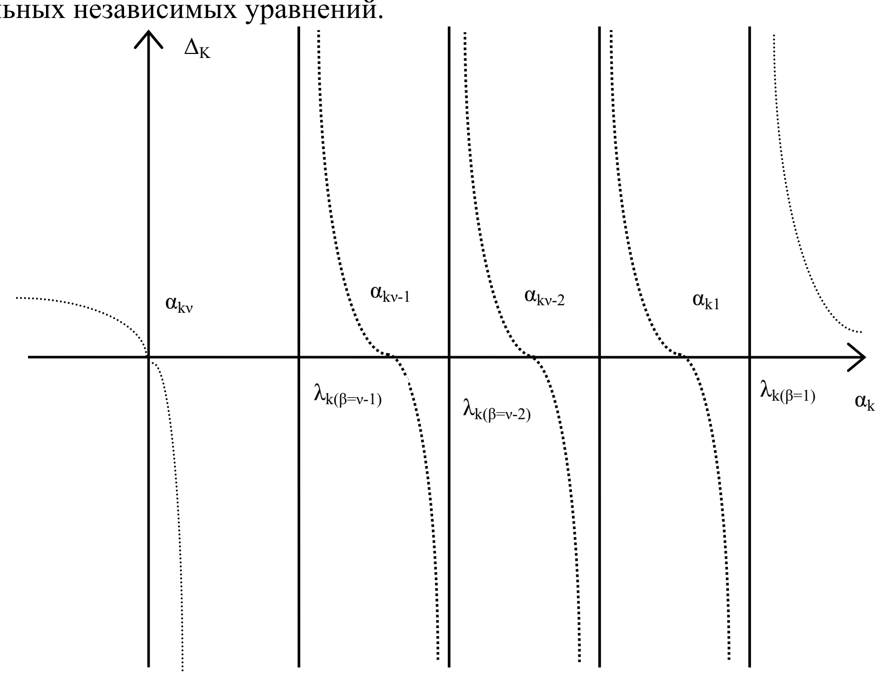

Рис. 3. Графическое представление определения собственных частот

	λ1	λ2	λ3	λ4	λ5	λ6
Метод обобщенных неизвестных	0,0257	0,0398	0,0495	0,5122	0,5865	0,7564
Метод конечных элементов	0,0257	0,0398	0,0495	0,5122	0,5865	0,7564

По результатам работы можно сделать следующие *выводы:*

1. Решение поставленной задачи по определению частот собственных колебаний циклических и бициклических систем, обладающих многими слоями симметрии, по методу обобщенных сил дает точные результаты, совпадающие с результатами конечно-элементного метода.

2. Замена инерционных сил в сегментарных точках циклических и бициклических конструкций обобщенными нагрузками в виде ортогональных многочленов представляет возможность редуцировать систему уравнений и перейти к решению независимых уравнений.

3. Разложения периодической функции в ряды Фурье дает возможность расчета пространственных конструкций со сложной симметрией.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.* The finite element method in structural and continuum mechanics. London, McGraw-Hill Book Company: 1967. 274 p.

2. *Bathe K. J.* Finite Element Procedures. Prentice Hall, Englewood Cliffs. 1996. 1036 p.

3. *Oden J. T., Reddy J. N.* Some observation on properties of certain mixed finite element approximations // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1975. Vol. 9. No. 4. Pp. 933—938.

4. *Игнатьев В. А., Коновалов О. В.* Свободные колебания бирегулярных систем с граничными условиями, соответствующими условиям периодического продолжения: депонированная рукопись. Волгоград : ВолгИСИ, 1994. 13 с.

5. *Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е.* Особенности метода обобщенных неизвестных в расчетах свободных колебаний одномерных бирегулярных систем // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2018. Вып. 54(73). С. 61—69.

6. *Zienkiewicz O. C.* The finite element method — from intuition to generality // Appl. Mech. Rev., 1970. Vol. 23. Pp. 249—256.

7. *Felipa C.* Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures. Univ. of California, Berkeley, str. Eng. Lab., Rep. SESM 66-22, 1966. 212 p.

8. *Гордеев В. Н., Динкевич С. З.* Об особенностях расчета механических систем, обладающих свойствами симметрии // Численные методы решения задач строительной механики. Киев, 1978. С. 126—149.

9. *Basri K., Zainorabidin A., Mohamad H. M., Musta B.* Determining the peat soil dynamic properties using geophysical methods // Magazine of Civil Engineering. 2021. Vol. 105. Iss. 5. Art. 10508. DOI: 10.34910/MCE.105.8.

10. *Ricker N.* The form and laws of propagation of seismic wavelets // Geophysics. 1953 Vol. 18. Iss. 1. P. 10. DOI: 10.1190/1.1437843.

11. *Динкевич С. З.* Расчет циклических конструкций. Спектральный метод. М. : Стройиздат, 1977. 128 с.

12. *McKay A.* Alternate path method in progressive collapse analysis: Variation of dynamic and non-linear load increase factors. The University of Texas at San Antonio, 2008.

13. *Жданов А. П.* Тригонометрические полиномы по теории интерполирования и их применение к расчету регулярных статически неопределимых систем строительных конструкций. Вып. 36. М. : МАДИ, 1972. С. 92—110.

14. *Золотов О. Н., Милейковский И. Е.* Использование свойств ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента при расчете пространственных систем // Механика твердого тела. 1995. № 2, С. 148—154.

15. *Коновалов О. В.* Расчет свободных колебаний бирегулярных стержневых систем // Проблемы теории пластин, оболочек и стержневых систем // Межвузовский научный сборник. Саратов : СГУ, 1995. С. 82—91.

16. *Игнатьев В. А.* Расчет регулярных статически неопределимых стержневых систем. Саратов : СГУ, 1979. 327 с.

17. *Игнатьев В. А., Коновалов О. В.* К расчету циклических систем // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 1999. Вып. 1. С. 6—11.

18. *Pietruszczak S., Mroz Z.* Finite element analysis of deformation of strain-softening materials // Int. J. Numer. Methods Eng. 1981. Vol. 17. Iss. 3. Pp. 327—334. DOI: 10.1002/nme.1620170303.

19. *Коновалов О. В.* Расчет свободных колебаний многопролетной балки с точечными массами в узлах в форме метода обобщенных неизвестных // Актуальные вопросы науки и техники: сб-к науч. тр. по итогам междунар. науч.-практ. конф. Вып. 2. Самара, 2015. С. 124—127.

20. *Коновалов, О. В, Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е.* Динамика циклических систем на упругих опорах с эквидистантно расположенными массами // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 1(86). 145—152.

Поступила в редакцию
в мае 2024 г.

Ссылка для цитирования:

Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е. Метод обобщенных неизвестных в динамических расчетах циклических систем // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 3(96). С. 14—22. DOI: 10.35211/18154360_2024_3_14.

Об авторах:

Коновалов Олег Владимирович — канд. тех. наук, доц., доц. каф. математики и естественно-научных дисциплин, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; miit.vgasu@mail.ru

Арзамаскова Лариса Михайловна — канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

Евдокимов Евгений Евгеньевич — канд. тех. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая; 1 stroymech@vgasu.ru

Oleg V. Konovalov, Larisa M. Arzamaskova, Evgenii E. Evdokimov

Volgograd State Technical University

THE METHOD OF GENERALIZED UNKNOWNS IN DYNAMIC CALCULATIONS OF CYCLIC SYSTEMS

The problem of dynamic calculation of a cyclic structure in the form of a beam on rigid supports loaded with regularly spaced point masses using the generalized forces method is considered. The replacement of inertial forces at the nodal points of cyclic and bicyclic structures with generalized loads in the form of orthogonal polynomials makes it possible to reduce the system of equations and proceed to solving independent equations.

Key words: periodic function, harmonic oscillations, inertial forces, finite element method, generalized malleability.

For citation:

Konovalov O. V., Arzamaskova L. M., Evdokimov E. E. [The method of generalized unknowns in dynamic calculations of cyclic systems]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2024, iss. 3, pp. 14—22. DOI: 10.35211/18154360_2024_3_14.

About authors:

Oleg V. Konovalov — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; miit.vgasu@mail.ru

Larisa M. Arzamaskova — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru

Evgenii E. Evdokimov — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation