

УДК 624.04

А. В. Игнатьев, И. С. Завьялов, Е. С. Мельникова

Волгоградский государственный технический университет

**АЛГОРИТМ РЕДУЦИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИЙ МКЭ
В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОСНОВНЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ**

В статье обсуждаются проблемы, возникающие при использовании метода конечных элементов для динамического расчета зданий и сооружений. Рассмотрены основные направления исследований по данной проблеме. Приведено описание разработанного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений метода конечных элементов в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных и его практическое применение в задаче динамического расчета квадратной пластины. В ходе исследования проведен ее динамический расчет с использованием исходной и редуцированной систем частотных уравнений. Выполнен анализ результатов редуцированного спектра собственных частот колебаний пластины, полученных с использованием предложенного алгоритма, а также проведена верификация результатов численного расчета с аналитическим решением.

Ключевые слова: МКЭ в форме классического смешанного метода, изгибаемая тонкая пластина, алгоритм редуцирования системы частотных уравнений, неполная алгебраическая проблема собственных векторов и собственных значений.

Введение

Большинство современных конструкций и сооружений являются сложными системами больших размеров со сложной геометрической формой, которые работают в сложном напряженно-деформированном состоянии. Проведение динамических расчетов является крайне важным этапом при возведении зданий и сооружений, поскольку в процессе эксплуатации конструкций они могут подвергаться различным динамическим нагрузкам, таким как ветровые, сейсмические, от движущихся машин и т. д. Проведение динамических расчетов позволяет определить параметры колебаний, амплитудные значения перемещений, уровни перегрузок и другие показатели, которые могут помочь в определении пригодности конструкции к эксплуатации. Кроме того, проведение динамических расчетов позволяет определить критические частоты и формы колебаний, что может быть полезным при проектировании и выборе материалов для конструкции, чтобы снизить вероятность ее разрушения в условиях динамических нагрузок.

Реальные инженерные сооружения являются системами с бесконечным числом степеней свободы, динамика которых описывается сложными дифференциальными уравнениями второго порядка. Результатом решения этих уравнений является нахождение непрерывной функции изменения перемещений во времени. Точное решение таких дифференциальных уравнений связано с трудоемким процессом, требующим вычислительных ресурсов ЭВМ. Поэтому используются различные методы строительной механики (Бубнова — Галеркина, Релея — Ритца, взвешенных невязок, конечных разностей, МКЭ и другие) для решения этой проблемы. Эти методы позволяют представить инженерное сооружение в виде дискретной расчетной модели с конечным

числом степеней свободы, которые описываются системой алгебраических уравнений.

В частности, авторы разработали метод конечных элементов (МКЭ) в форме классического смешанного метода (КСМ) в строительной механике.

Теоретическое обоснование, а также разработка дискретных физико-математических моделей, основанных на МКЭ, и соответствующих алгоритмов численного анализа различных типов строительных конструкций и сооружений представлены в ряде научных публикаций [1—3]. Последующие исследования, направленные на развитие и усовершенствование этих вычислительных алгоритмов, изложены в работах [4, 5].

Применение численных методов для решения задач динамики приводит к необходимости решать алгебраическую задачу нахождения собственных значений (СЗ) и собственных векторов (СВ) достаточно высокого порядка. Найденные СЗ и СВ соответствуют частотам и формам колебаний конструкции.

В этой области выделяются 2 основные задачи: полная проблема, заключающаяся в определении всех СЗ и связанных с ними СВ, и частичная (неполная) проблема, когда необходимо найти только ограниченное количество (обычно старших или младших) СЗ и СВ. Решение этой задачи для плотных матриц небольшого размера не представляет сложности, однако для матриц высокого порядка оно оказывается значительно более сложным, и выбор эффективного метода решения представляет собой серьезную проблему.

Одним из перспективных направлений в области строительной механики является развитие редуционных методов, позволяющих снизить размерность расчетных схем. В настоящее время отечественные и зарубежные ученые активно разрабатывают различные редуционные подходы для решения задач большого масштаба. Эти методы, применяемые для статических и динамических расчетов, условно можно разделить на 2 основные группы: немодальные методы и модальные методы.

Немодальные методы

1. Метод суперэлементов.

В современных научных исследованиях активно разрабатываются новые типы оболочечных суперэлементов для линейного и нелинейного статического анализа, а также для анализа свободных колебаний сферических конструкций с частично или полностью сферической геометрией [6]. В работе [7] рассматриваются эффективность, верификация, апробация и оценка суперэлементной методики для моделирования динамических характеристик крупноразмерных комбинированных систем «фундамент — железобетонные конструкции — металлоконструкции». В работе [8] также исследуется эффективность метода суперэлементов для динамических расчетов.

2. Метод подконструкций (субструктурирования).

Среди работ, посвященных развитию этого метода, следует отметить исследования по динамическому расчету конструкций с использованием метода субструктур [9].

3. Агрегатный метод.

Системы конечно-элементных уравнений, применяемые при расчете сложных строительных конструкций, являются плохо обусловленными из-за больших разбросов значений жесткостей, сопряжения разнотипных

конечных элементов и сложности геометрии контуров. Эти факторы приводят к образованию нерегулярных сеток и, как следствие, могут затруднять процесс расчета. Это приводит к плохой сходимости большинства итерационных методов. Для решения проблемы предлагается метод сопряженных градиентов с агрегатным многоуровневым поэлементным предобуславливанием AMIS [10].

4. Интерполяционные методы.

Эти методы включают в себя метод разреженных сеток и сплайн-методы [11, 12].

Модальные методы

1. Метод покомпонентного синтеза форм (модального синтеза).

В этом методе применяется математическое моделирование на последовательности сгущающихся конечно-элементных сеток или узлов конденсации [13—18].

2. Конденсационные методы.

К данному типу следует отнести различные подходы, направленные на сокращение размерности системы и упрощение вычислений [19—21].

При этом следует отметить, что подавляющее большинство исследований связано с понижением порядка конечно-элементных уравнений, получаемых при расчете конструкций по МКЭ в форме метода перемещений. В связи с этим проведение исследований, связанных с формированием и решением редуцированной системы частотных уравнений, получаемых на основе МКЭ в форме КСМ, является актуальным.

Материалы и методы

Для редуцирования системы частотных уравнений, получаемой на основе МКЭ в форме КСМ, нами модифицирован алгоритм формирования редуцированной системы конечно-элементных уравнений МКЭ в форме КСМ с использованием интерполяции основных смешанных неизвестных для статического расчета пластинчатых систем, представленный в [22, 23]. Блок-схема модифицированного алгоритма показана на рис. 1.

Данный алгоритм позволяет эффективно редуцировать систему частотных уравнений МКЭ для задач динамики пластинчатых систем.

Результаты и обсуждение

Для верификации результатов расчетов, получаемых с использованием предлагаемого алгоритма, нами решена задача динамического расчета изгибаемой тонкой пластины, шарнирно опертой по контуру (рис. 2).

При расчете приняты следующие исходные данные:

$$a = b = 1 \text{ м}; h = 0,01 \text{ м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E = 1,092 \cdot 10^7 \text{ Т/м}^2.$$

Расчет СЗ и СВ для этой пластины выполнен в следующих вариантах:

1. С использованием полной системы частотных уравнений, полученной при разбиении пластины КЭ-сеткой 8×8 (рис. 3).

2. С применением разработанного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений, основанного на интерполяции основных смешанных неизвестных, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 8×8 , а мелкого — 16×16 (рис. 4).

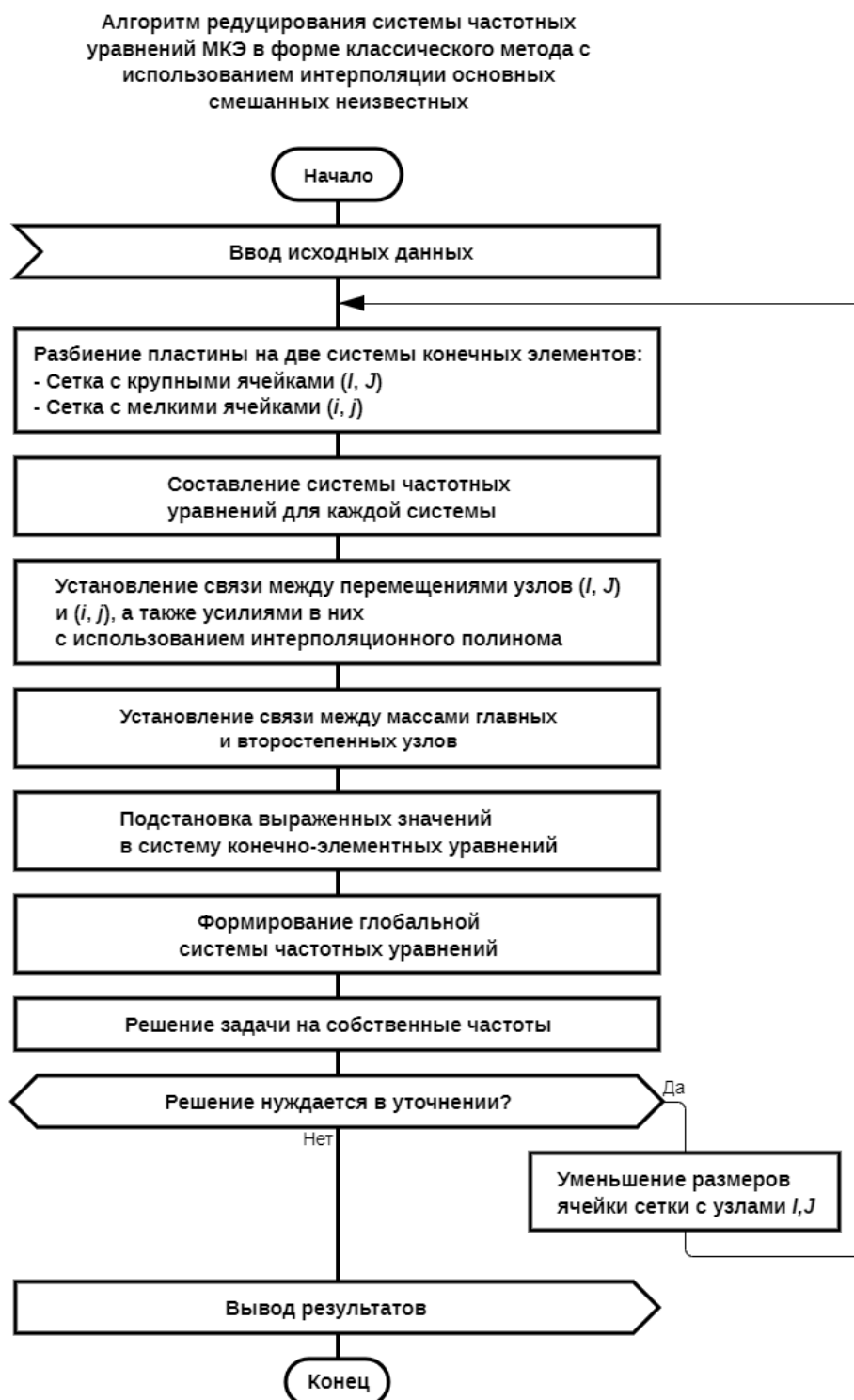


Рис. 1. Блок-схема алгоритма редуцирования системы частотных уравнений, получаемой на основе МКЭ в форме КСМ

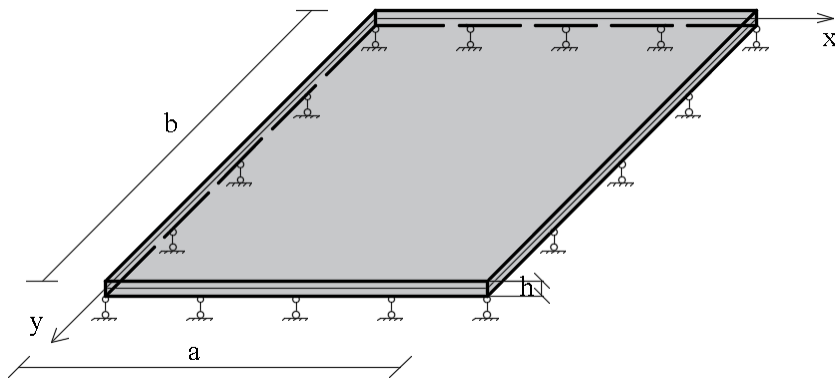


Рис. 2. Физическая модель шарнирно опёртой по контуру пластины

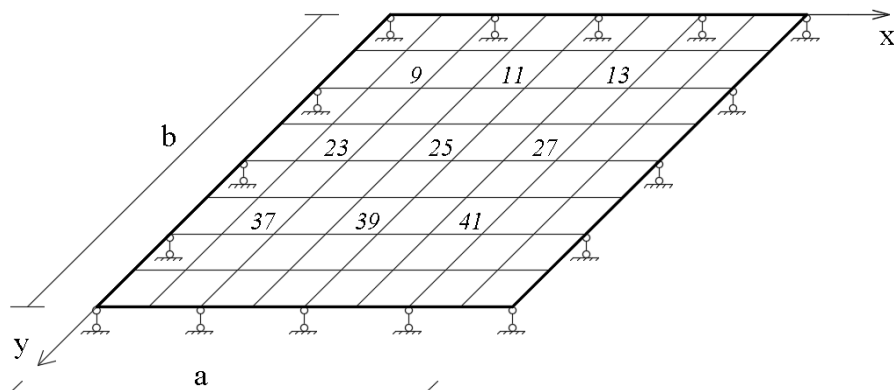


Рис. 3. Конечно-элементная модель пластины с крупной сеткой 8×8

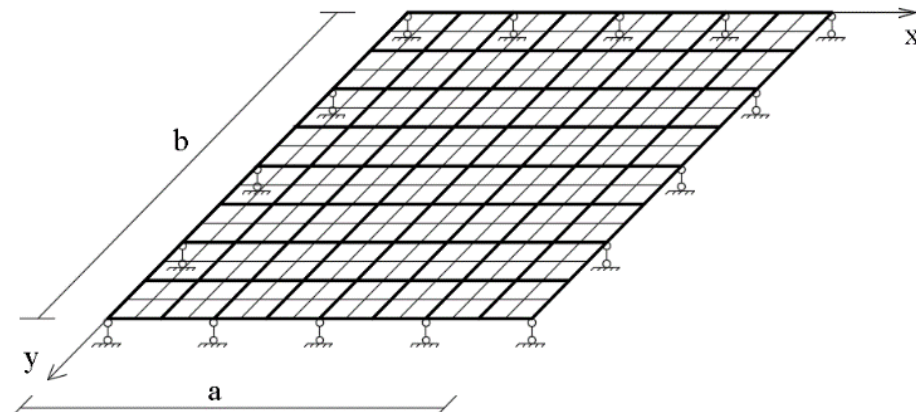


Рис. 4. Конечно-элементная модель пластины с мелкой сеткой 16×16

При исследовании свободных колебаний конструкции задача нахождения собственных значений и собственных векторов решается для матричного уравнения общего вида:

$$([D_{ст}] - \lambda[m])\{q\} = 0.$$

Определитель этого уравнения:

$$\|c\| = \|D - \lambda \mathbf{m}\| = 0,$$

$\lambda = \omega^2$, ω — частота свободных колебаний.

Здесь

$$[D_{cm}] = \begin{bmatrix} r_{rr} & \tilde{r}_{rs} \\ \tilde{\delta}_{sr} & \delta_{ss} \end{bmatrix} \text{ — статическая матрица откликов,}$$

$$[m_{дин}] = \begin{bmatrix} m_{rr} & \tilde{m}_{rs} \\ \tilde{m}_{sr} & m_{ss} \end{bmatrix} \text{ — диагональная матрица масс,}$$

$$\{\bar{q}\} = \begin{Bmatrix} q_r \\ \tilde{q}_s \end{Bmatrix} \text{ — вектор основных неизвестных (кинематических и силовых).}$$

Система разрешающих уравнений в общем виде записывается:

$$\begin{aligned} 1) \quad & r_{rr} q_r + \tilde{r}_{rs} \tilde{q}_s - \lambda (\mathbf{m}_{rr} q_r + \mathbf{m}_{rs} \tilde{q}_s) = 0, \\ 2) \quad & \tilde{\delta}_{sr} q_r + \delta_{ss} \tilde{q}_s - \lambda (\mathbf{m}_{sr} q_r + \mathbf{m}_{ss} \tilde{q}_s) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом того, что расчеты проводятся при регулярной конечно-элементной сетке и для такого типа систем точность результатов при диагональной матрице масс (ДММ) не сильно отличается от согласованной матрицы масс (СММ), дальнейшие расчеты будем вести с использованием ДММ:

$$[m_{дин}] = \begin{bmatrix} m_{rr} & 0 \\ 0 & m_{ss} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Частотное уравнение МКЭ в форме КСМ (1) с учетом (2) может быть записано в виде системы разрешающих уравнений:

$$\begin{cases} (r_{r,r} - \lambda \mathbf{m}_r) q_r + \tilde{r}_{r,s} \tilde{q}_s = 0, \\ \tilde{\delta}_{s,r} q_r + (\delta_{s,s} - \lambda \mathbf{m}_s) \tilde{q}_s = 0. \end{cases}$$

Система разрешающих уравнений в расширенной записи для i -го узла выглядит:

$$\begin{aligned} R_i &= r_{i,1} q_1 + r_{i,2} q_2 + \dots + (r_{i,i} - \lambda_i \mathbf{m}_i^k) q_i + r_{i,i+1} q_{i+1} + \dots + r_{i,n} q_n + \\ &+ \tilde{r}_{i,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \tilde{r}_{i,n+m} \tilde{q}_{n+m} - R_{i,F} = 0, \quad (i=1, \dots, n), \\ \Delta_{n+t} &= \tilde{\delta}_{n+t,1} q_1 + \tilde{\delta}_{n+t,2} q_2 + \dots + \tilde{\delta}_{n+t,n} q_n + \delta_{n+t,n+1} \tilde{q}_{n+1} + \dots + \\ &+ (\delta_{n+t,n+t} - \lambda_{n+t} \mathbf{m}_i^f) \tilde{q}_{n+t} + \dots + \delta_{n+t,n+m} \tilde{q}_{n+m} - \Delta_{n+t,F} = 0, \quad (t=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (3)$$

Для проведения расчетов по первому варианту с разбиением пластины КЭ-сеткой 8×8 (КСМ 8×8 (ДММ)) составим глобальную систему частотных уравнений в соответствии с (3). После учета граничных условий глобальная система уравнений для расчета по исходной схеме смешанного метода при сетке 8×8 состоит из 147 уравнений:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} - \lambda_{147 \times 147} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \right) \{q\}_{147 \times 1} = 0.$$

Для проведения расчетов по второму варианту, когда в качестве крупного разбиения используется КЭ-сетка 8×8 , а мелкого 16×16 , в соответствии с общим алгоритмом составим глобальную систему частотных уравнений для исходного разбиения 16×16 (КСМ $16 \times 16 \rightarrow 8 \times 8$ (ДММ)). После учета граничных условий она состоит из 675 уравнений:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{675 \times 675} - \lambda_{675 \times 675} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}_{675 \times 675} \right) \{q\}_{675 \times 1} = 0.$$

После нахождения коэффициентов интерполяционного полинома, связывающего основные неизвестные в узлах, значения в узлах мелкой сетки, выраженные через значения тех же узловых неизвестных крупной сетки подставляются в систему конечно-элементных уравнений.

В итоге получена редуцированная глобальная система уравнений смешанного метода при переходе от мелкой сетки 16×16 к сетке 8×8 , состоящая из 147 уравнений, которая записывается в виде:

$$\left(\begin{bmatrix} D_{\text{ст}}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} - \lambda_{147 \times 147} \begin{bmatrix} \mathbf{m}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \right) \{q\}_{147 \times 1} = 0.$$

В результате для матриц $\begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147}$ и $\begin{bmatrix} D_{\text{ст}(k)}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147}$ вычисляем матрицы СЗ и СВ:

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{147} \end{bmatrix}_{147 \times 147} & \text{— диагональная матрица из} \\ & & \text{147 собственных значений} \\ & & \text{для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \text{ и } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}(k)}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \\ \\ [v] &= \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{147,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{147,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{147,j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1,147} & v_{2,147} & \cdots & v_{147,147} \end{bmatrix}_{147 \times 147} & \text{— матрица из 147 соответствующих} \\ & & \text{собственных векторов для матриц } \begin{bmatrix} D_{\text{ст}} \end{bmatrix}_{147 \times 147} \text{ и} \\ & & \begin{bmatrix} D_{\text{ст}(k)}^* \end{bmatrix}_{147 \times 147} \end{aligned}$$

Далее в виде фрагментов матриц приведены нижние части спектра собственных частот колебаний этой пластинки, полученные при вычислениях по первому и второму варианту.

Для фрагмента матрицы $[\omega]$ нижней части спектра собственных частот при расчете по первому варианту используется полная система частотных уравнений, полученная при разбиении пластины КЭ сеткой 8×8 :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 62,740 & & & & & \\ & 155,648 & & & & \\ & & 155,648 & & & \\ & & & 240,627 & & \\ & & & & 308,803 & \\ & & & & & 308,803 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

147×147

Для фрагмента матрицы $[\omega^*]$ нижней части спектра собственных частот при расчете по второму варианту используется редуцированная система частотных уравнений (от мелкой сетки 16×16 к сетке 8×8), полученная путем применения частного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений с применением билинейной интерполяции основных смещенных неизвестных.

$$[\omega^*] = \begin{bmatrix} 62,785 & & & & & \\ & 155,794 & & & & \\ & & 155,794 & & & \\ & & & 241,118 & & \\ & & & & 308,968 & \\ & & & & & 308,968 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

147×147

В таблице 1 приведены СВ (v^*) для узлов, отмеченных на рис. 3, соответствующие нижней части спектра собственных частот колебаний пластины.

Таблица 1

СВ для контрольных узлов, соответствующие нижней части спектра собственных частот колебаний пластины

№ узла	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
9	-0,125	-0,250	0,098	0,250	0,177	0,044
11	-0,177	-0,177	-0,093	0	0	-0,242
13	-0,125	0	-0,230	-0,250	0,177	0,044
23	-0,177	-0,177	0,232	0	0	0,242
25	-0,250	0	0	0	-0,354	-0,087
27	-0,177	0,177	-0,232	0	0	0,242
37	-0,125	0	0,230	-0,250	0,177	0,044
39	-0,177	0,177	0,093	0	0	-0,242
41	-0,125	0,250	-0,098	0,250	0,177	0,044

На основе этих результатов построены первые 6 форм собственных колебаний пластины (рис. 5—10).

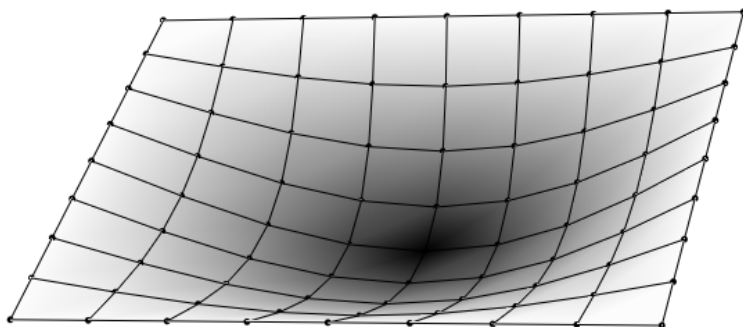


Рис. 5. 1-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

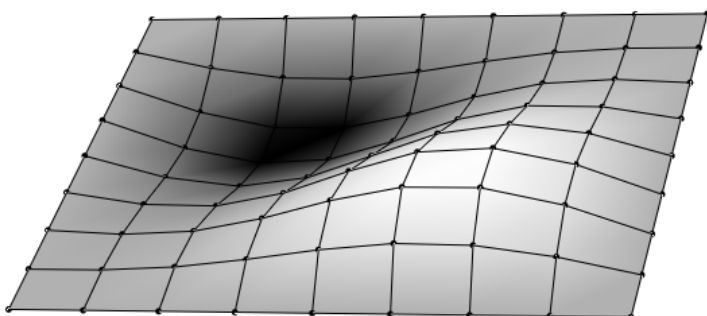


Рис. 6. 2-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

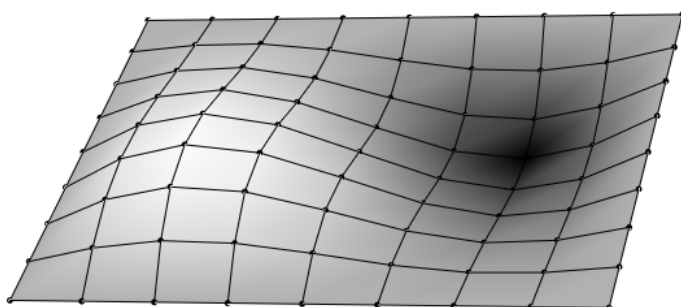


Рис. 7. 3-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

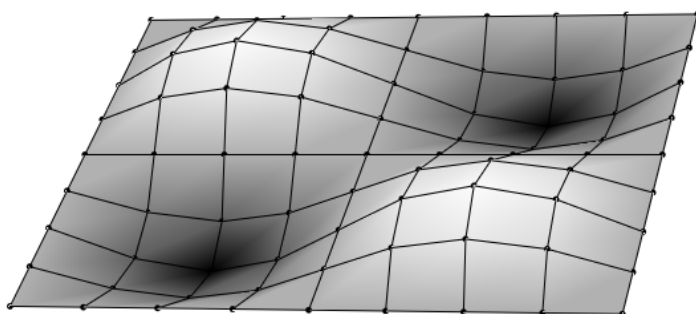


Рис. 8. 4-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

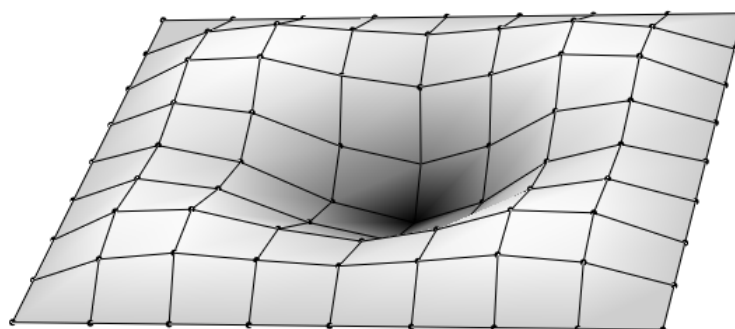


Рис. 9. 5-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

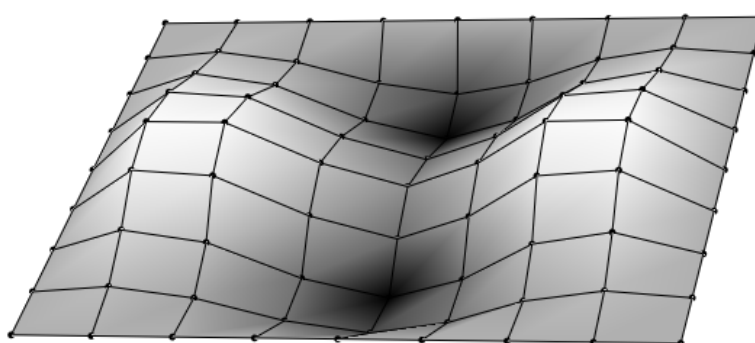


Рис. 10. 6-я форма колебаний шарнирно опертой по контуру пластины

В таблице 2 приведены результаты расчета нижней части спектра собственных частот колебаний рассматриваемой пластины, полученные с использованием КСМ 8×8 (ДММ), КСМ $16 \times 16 \rightarrow 8 \times 8$ (ДММ), в ПК «ЛИРА САПР», а также аналитическое решение.

Таблица 2

Результаты расчета нижней части спектра собственных частот шарнирно опертой по контуру пластины

ω	КСМ 8×8 (ДММ)	КСМ $16 \times 16 \rightarrow 8 \times 8$ (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (СММ)	А.Р.
1	62,740	62,785	61,747	61,752	62,832
2	155,648	155,794	153,565	153,680	157,080
3	155,648	155,794	153,565	153,680	157,080
4	240,627	241,118	240,864	241,379	251,320
5	308,803	308,968	306,183	307,247	314,159
6	308,803	308,968	306,183	307,247	314,159

В таблице 3 приведены абсолютные погрешности полученных результатов по сравнению с аналитическим решением.

Т а б л и ц а 3

*Абсолютные погрешности собственных частот
по сравнению с аналитическим решением*

ω	КСМ 8×8 (ДММ)	КСМ $16 \times 16 \rightarrow 8 \times 8$ (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (СММ)
1	0,092	0,047	1,085	1,080
2	1,432	1,286	3,515	3,400
3	1,432	1,286	3,515	3,400
4	10,693	10,202	10,456	9,941
5	5,356	5,191	7,976	6,912
6	5,356	5,191	7,976	6,912

В таблице 4 приведены относительные погрешности полученных результатов по сравнению с аналитическим решением.

Т а б л и ц а 4

*Относительные погрешности собственных частот
по сравнению с аналитическим решением.*

ω	КСМ 8×8 (ДММ)	КСМ $16 \times 16 \rightarrow 8 \times 8$ (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (ДММ)	«ЛИРА САПР» 8×8 (СММ)
1	0,146	0,075	1,726	1,719
2	0,910	0,819	2,236	2,164
3	0,910	0,819	2,236	2,164
4	4,247	4,060	4,159	3,956
5	1,707	1,652	2,540	2,204
6	1,707	1,652	2,540	2,204

Анализ результатов показывает, что применение разработанного алгоритма при вычислении СЗ для шарнирно опертой пластины дает лучшие результаты, за исключением четвертой частоты, где лучшие результаты получены в ПК «ЛИРА САПР» с использованием согласованной матрицы масс.

Выводы

Анализ полученных результатов показал, что использование разработанного алгоритма редуцирования системы частотных уравнений, основанного на интерполяции основных смешанных неизвестных, обеспечивает более высокую точность, чем использование полной системы частотных уравнений, полученной при разбиении пластины КЭ-сеткой 8×8 . Это особенно заметно в случае, когда применяется крупное разбиение на основе сетки 8×8 в сочетании с мелким разбиением.

Дополнительно результаты, полученные с использованием ПК «ЛИРА САПР», также демонстрируют значительные погрешности в сравнении с аналитическим решением. В большинстве случаев эти погрешности не меньше тех, которые получены с использованием разработанного алгоритма. Этот факт подтверждает корректность работы последнего.

Подводя итог, можно сказать, что разработанный алгоритм редуцирования систем частотных уравнений демонстрирует высокую точность и является эффективной альтернативой традиционным методам вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. *Игнатъев В. А., Игнатъев А. В.* Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы): научное издание. М. : ACB, 2022. 306 с.
2. *Игнатъев В. А., Бочков М. И.* Development of Single-Node Finite Elements for the Calculation of Systems with Unilateral Constraints by FEM in the Form of the Classical Mixed Method // Proceedings of the 7th International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety. 2023. Pp. 222—231. DOI: 10.1007/978-3-031-47810-9_21.
3. *Бочков М. И.* Определение напряженно-деформированного состояния систем с односторонними связями от кинематического смещения связей с помощью метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2021. Вып. 4(85). С. 137—147.
4. *Калиновский С. А., Бочков М. И.* Расчет нити методом конечных элементов в форме классического смешанного метода с учетом реальной геометрической конфигурации // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 1(94). С. 127—137. DOI: 10.35211/18154360_2024_1_127.
5. *Игнатъев В. А., Игнатъев А. В., Завьялов И. С.* Техника формирования редуцированных конечно-элементных СЛАУ высоких порядков, описывающих напряженно-деформированное состояние одномерных и двумерных конструкций // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 1(94). С. 115—126. DOI: 10.35211/18154360_2024_1_115.
6. *Shamloofard M., Hosseinzadeh A., Movahhedy M.* Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells // Engineering with Computers. 2021. Vol. 37. DOI: 10.1007/s00366-020-01015-w.
7. *Nagibovich A.* Superelement simulation of dynamic characteristics of large-size combined systems Foundation — reinforced concrete structures — metal structures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 698. Pp. 022063. DOI: 10.1088/1757-899X/698/2/022063.
8. *Huang S., Li P.* Superelement Method Based Structure Simulation of Large Pallet Structure // 2nd International Conference on Computer Engineering and Applications. 2010. Vol. 1. Pp. 92—95. DOI: 10.1109/ICCEA.2010.25.
9. *Yamada K., Ji J.* Substructure elimination method for evaluating bending vibration of beams // Mechanical Engineering Journal. 2023. Vol. 10. DOI: 10.1299/mej.23-00293.
10. *Фялко С. Ю.* Агрегатный многоуровневый метод конечных элементов для анализа больших задач — моделей строительных зданий и сооружений // Вісник Одеського національного морського університету. 2003. № 10. С. 112—118.
11. *Игнатъев В. А., Ромашкин В. Н.* Определение редуцированного спектра частот и форм свободных колебаний систем с большим числом степеней свободы на основе сплайн-коллокационной конденсации // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2014. Вып. 35(54). С. 140—151.
12. *Карпов Д. В.* Развитие метода редуцированных элементов для расчета регулярных стержневых систем и анализа плоских температурных полей: дис. ... канд. техн. наук. Владивосток, 2002. 209 с.
13. *Hurty W. C.* Dynamic analysis of structural systems using component modes // AIAA Journal. 1965. Vol. 3, No. 4. Pp. 678—685.
14. *Craig R. R.* Substructure method in vibration // J. Vib. Acoust. 1995. No. 117(B). Pp. 207—213.
15. *Papadimiriou C., Papadioti D. C.* Component mode synthesis technique for finite element model updating // Comput. Struct. 2013. Vol. 126. Pp. 15—28.
16. *Kim J. G., Lee P. S.* A posteriori error estimation method for the flexibility-based component mode synthesis // AIAA J. 2015. Vol. 53. Iss. 10. Pp. 2828—2837.
17. *Rabczuk T., Belytschko T.* Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D // Intl. J. Numer. Methods Eng. 2005. Vol. 63. Iss. 11. Pp. 1559—1582.

18. Белостоцкий А. М., Дубинский С. И., Потапенко А. Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. № 10. С. 99—110.
19. Mohan S. C., Panwar N., Maniteja Ajay C. B. Two Stage SEREP Method for Condensation of Space Frame Structure for Dynamic Analysis // ASPS Conference Proceedings. 2022. Vol. 1. Pp. 1087—1094. DOI: 10.38208/acp.v1.625.
20. Lee D., Chang S., Lee J. Generalized polynomial chaos expansion by reanalysis using static condensation based on substructuring // Applied Mathematics and Mechanics. 2024. Vol. 45. Pp. 819—836. DOI: 10.1007/s10483-024-3108-8.
21. Игнатьев А. В., Чумаков А. В., Гилка В. В. Моделирование неполной алгебраической проблемы собственных значений и векторов методом частотно-динамической конденсации на основе МКЭ в форме классического смешанного метода // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 1. С. 62—68. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-1-62-68.
22. Ignatyev V. A., Ignatiev A. V., Zavyalov I. The Efficiency of Application of Triangular Bending Finite Elements for Plate Calculation Using the Classical Mixed-Type Approach to the Finite-Element Method // Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles. Vol. 1: Proceedings of the International Conference. 2022. Vol. 509. Pp. 963—971. DOI: 10.1007/978-3-031-11058-0_98.
23. Игнатьев А. В., Завьялов И. С., Бочков М. И. Алгоритм редуцирования систем уравнений МКЭ высоких порядков с использованием полиномиальной интерполяции основных смешанных неизвестных // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2024. № 7(787). С. 5—18. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-787-7-5-18.

© Игнатьев А. В., Завьялов И. С., Мельникова Е. С., 2025

Поступила в редакцию
в декабре 2024 г.

Ссылка для цитирования:

Игнатьев А. В., Завьялов И. С., Мельникова Е. С. Алгоритм редуцирования системы частотных уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием интерполяции основных неизвестных // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2025. Вып. 1(98). С. 153—166. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_153.

Об авторах:

Игнатьев Александр Владимирович — д-р техн. наук, доц., проф. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; ORCID: 0000-0003-0733-8808

Завьялов Иван Сергеевич — ассистент каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

Мельникова Екатерина Сергеевна — магистрант, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1 ORCID: 0009-0001-1799-4633

Alexander V. Ignatyev, Ivan S. Zavyalov, Ekaterina S. Melnikova

Volgograd State Technical University

ALGORITHM FOR FORMING A REDUCED SYSTEM OF FREQUENCY EQUATIONS OF THE FEM IN THE FORM OF A CLASSICAL MIXED METHOD USING INTERPOLATION OF THE MAIN VARIABLES

This article discusses the problems that arise when using the finite element method for dynamic calculation of buildings and structures. The main directions of research on this problem are considered. The main part describes the developed algorithm for reducing the system of FEM frequency equations in the form of a classical mixed method using interpolation of basic unknowns and its practical application in the problem of dynamic calculation of a square plate. In the course of the study, its

dynamic calculation was carried out using the initial and reduced system of frequency equations. The results of the reduced spectrum of natural frequencies of plate vibrations obtained using the proposed algorithm are analyzed, and the results of numerical calculation with an analytical solution are verified.

Key words: FEM in the form of a classical mixed method, flexible thin plate, algorithm for forming a reduced system of frequency equations, incomplete algebraic eigenvector and eigenvalue problem.

For citation:

Ignatyev A. V., Zavyalov I. S., Melnikova E. S. [Algorithm for forming a reduced system of frequency equations of the FEM in the form of a classical mixed method using interpolation of the main variables]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2025, iss. 1, pp. 153—166. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_153.

About authors:

Alexander V. Ignatyev — Doctor of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0733-8808

Ivan S. Zavyalov — Assistant, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation

Ekaterina S. Melnikova — Master's Degree student, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; ORCID: 0009-0001-1799-4633