

УДК 624.04: 519.6

О. В. Душко, М. И. Бочков, С. С. Рекунов, Е. А. Максютова, М. Д. Даудова

Волгоградский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА СИСТЕМ С УГЛОВЫМИ УПРОЧНЯЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ

**Исследование выполнено за счет средств программы развития ВолгГТУ
«Приоритет 2030», в рамках научного проекта № 45/654-24**

Произведен анализ эффективности алгоритма расчета систем с упрочняющимися (разупрочняющимися) угловыми связями с помощью алгоритма, сочетающего преимущества метода конечных элементов в форме классического смешанного метода и метода компенсирующих нагрузок. В качестве параметра оценки эффективности выбрано количество итераций, необходимых для расчета систем с нелинейными связями различной жесткости с одинаковой точностью. Приведен пример расчета задачи с нелинейными упруго-податливыми опорами различной жесткости, необходимый для анализа эффективности.

Ключевые слова: метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, нелинейные моментные связи, нелинейная работа узлов, метод компенсирующих нагрузок.

Задача учета податливости узловых соединений как важного фактора, влияющего на поведение строительных конструкций, является актуальной проблемой строительной механики, которая часто не учитывается в современной расчетной практике. С физической точки зрения податливость угловых соединения возникает вследствие особенностей их работы, связанных со сложной конструкцией. Деформации, которые фактически возникают в узлах, как было доказано в работах [1, 2], не являются равномерными по всему сечению элемента, а концентрируются в зоне узла, что усугубляется наличием сварных швов, болтовых соединений, закладных деталей и других конструктивных особенностей. Эти особенности обуславливают сложности точного расчета систем с учетом упруго-податливой работы узлов. В идеализированных расчетных схемах узлы часто представляют, как абсолютно жесткие или шарнирные. Абсолютно жесткий узел предполагает полное отсутствие угловых перемещений, что в реальности невозможно. Все реальные соединения обладают некоторой степенью податливости. С другой стороны, шарнирное соединение, хотя и допускает угловые перемещения, в идеале не должно воспринимать изгибающих моментов, но на практике всегда присутствует некоторое сопротивление изгибу, связанное с податливостью элементов, образующих узел. Например, даже в случае болтового соединения некоторая податливость сохраняется за счет трения между болтом и отверстием, а также за счет упругих деформаций самих болтов и примыкающих элементов.

Податливость узлов приводит к перераспределению внутренних усилий в конструкции, изменяя напряжение в элементах и, как следствие, надежность и несущую способность [3, 4]. Недооценка податливости может привести к занижению расчетных напряжений и к недопустимым деформациям или даже разрушению конструкции. Для учета влияния податливости узлов используются

специальные численные методы (например, метод конечных элементов — МКЭ), позволяющие моделировать реальную геометрию узла и свойства материалов с высокой степенью точности. В современной расчетной практике учет упруго-податливой работы соединений вводится в функционал расчетных комплексов [5], также этому явлению посвящен ряд научных работ как теоретического [6], так и прикладного характера [7, 8]. Более того, экспериментальные исследования, включающие испытания натуральных образцов или физическое моделирование, являются незаменимым инструментом для верификации результатов расчета и уточнения параметров податливости [2]. Выбор метода учета податливости зависит от сложности узла, требований к точности расчета и доступных ресурсов. Учет податливости угловых соединений позволяет значительно уточнить расчет конструкций. Влияние податливости особенно критично при расчете высотных зданий, мостов и других ответственных конструкций, где даже небольшие погрешности могут привести к непредсказуемым последствиям. Поэтому тщательное исследование и моделирование податливости узловых соединений является необходимым условием обеспечения безопасности и надежности сооружений.

В данной статье к задаче расчета стержневой системы с учетом упруго-податливой работы узлов применяется разработанный авторами в [9] метод учета конструктивной нелинейности, сочетающий преимущества метода компенсирующих нагрузок [10] и МКЭ в форме классического смешанного метода [5, 11, 12].

МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ МКЭ) на сегодняшний день является активно развивающимся методом строительной механики. Существует большое количество работ, описывающих его преимущества при расчете современных задач строительной механики, таких как физически нелинейных задач [13, 14], контактных задач [15] и других [16, 17]. В рамках КСМ МКЭ уже существует развернутая номенклатура базовых конечных элементов. На рисунке 1 показан конечный элемент, используемый в данной работе — конечный элемент-стержень, работающий на изгиб. Разработке этих конечных элементов посвящены работы отечественных и зарубежных ученых [15, 16, 18, 19].

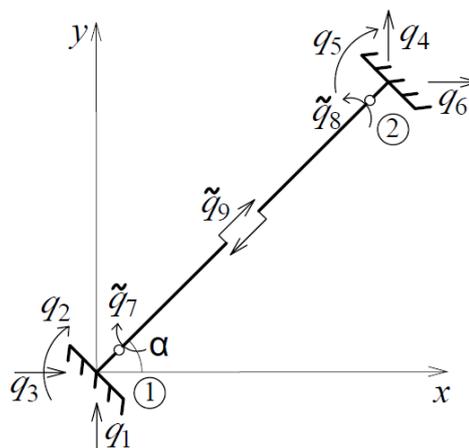


Рис. 1. Конечный элемент-стержень смешанного метода

В конечном элементе, приведенном на рис. 1, приняты следующие неизвестные: $\tilde{q}_1, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_6$ — по два неизвестных линейных перемещения в узлах стержневой системы; \tilde{q}_2, \tilde{q}_5 — по два неизвестных угловых перемещения в узлах стержневой системы; \tilde{q}_7, \tilde{q}_8 — по два неизвестных изгибающих момента в узлах конечного элемента; \tilde{q}_9 — неизвестное продольное усилие в середине конечного элемента.

Таким образом, можно сделать вывод, что предлагаемый в работе конечный элемент обладает такой отличительной особенностью, как введение дополнительного неизвестного в узлах, что роднит его с конечными элементами смешанного метода пластин. Как показано в наших работах, применение таких конечных элементов обладает рядом отличительных особенностей, которые важны для решения нелинейных задач строительной механики.

В [9] для данного типа конечного элемента применительно к задачам расчета систем, включающих упрочняющиеся упруго-податливые опоры, сформулирован алгоритм, использующий элементы метода компенсирующих нагрузок [10]. При использовании этого метода в узлах системы вводятся нагрузки, величины которых вычисляются по формуле:

$$\Delta F_{(j+1)}^{(i)} = q_R^{(i)} - (B^{(i)} \cdot q_{\Delta}^{(i)} + C^{(i)}), \quad (1)$$

где $q_{\Delta}^{(i)}$ — линейное перемещение или угол поворота, возникающие в i -й опоре, в зависимости от типа опоры; $B^{(i)}, C^{(i)}$ — коэффициенты, описывающие жесткость опоры после преодоления перемещения, при котором происходит упрочнение связи.

Для уточнения величин этих нагрузок вводится понятие критерия выхода из расчета, который напрямую связан с величиной невязки между решениями на j -й и $(j+1)$ -й итерации расчета. Величина невязки должна быть меньше величины $\Delta_{\text{опр}}$, которая задается на момент начала расчета. Формально это условие может быть представлено в виде формулы:

$$\delta_{(j+1)} < \Delta_{\text{опр}}. \quad (2)$$

Разница невязок $\delta_{(j+1)}$ вычисляется по формуле:

$$\delta_{(j+1)} = \frac{\Delta M_{(j+1)} - \Delta M_{(j)}}{\Delta M_{(j+1)}} \cdot 100\%, \quad (3)$$

где $\Delta M_{(j+1)}$ — величина компенсирующей нагрузки на $(j+1)$ -й итерации; $\Delta M_{(j)}$ — величина компенсирующей нагрузки на (j) -й итерации.

Для анализа эффективности данного алгоритма предлагается использовать решение приведенного для его верификации в [9, 10] примера, но с учетом различных жесткостных характеристик упрочняю-

щихся опор. Анализ произведем по количеству итераций, необходимых для решения задачи с величиной $\Delta_{\text{опр}} = 1\%$.

Рассмотрим результаты расчета балки, опертой на упрочняющиеся (разупрочняющиеся) упруго-податливые опоры, со следующими параметрами:

постоянная изгибная жесткость $EI = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$;

длина $l = 2 \text{ м}$;

сила, приложенная в середине пролета равная $F = 8 \text{ кН}$.

Расчетная схема балки представлена на рис. 2, а, расчетная конечно-элементная модель этой балки для КСМ МКЭ — на рис. 2, б.

Для описания работы нелинейно-упругих моментных связей с разупрочнением, используется следующая функция:

$$M^{(i)} = \begin{cases} 40\varphi^{(i)}, & 0 \leq q_{\Delta}^{(i)} \leq 0,0125, \\ 20\varphi^{(i)} + 0,125, & \\ 0,0125 \leq q_{\Delta}^{(i)}. \end{cases} \quad (4)$$

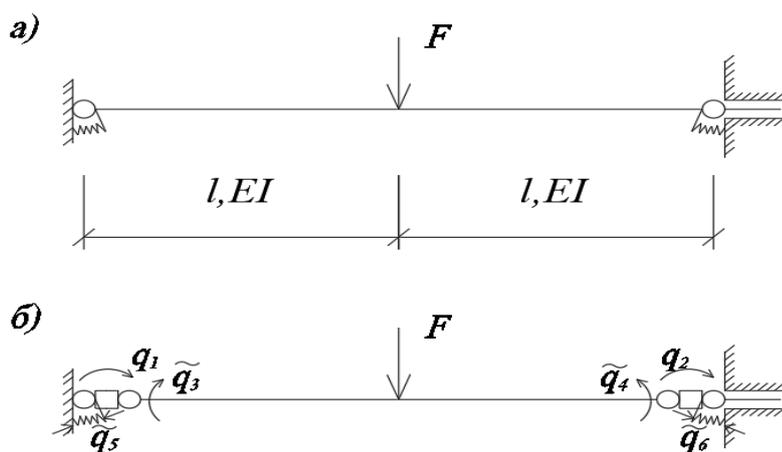


Рис. 2. Расчет балки, опертой на упрочняющиеся упруго-податливые опоры:
а — расчетная схема балки, закрепленной двумя нелинейными угловыми опорами;
б — расчетная конечно-элементная модель для КСМ МКЭ

При этом второй участок кусочной функции для анализа эффективности предлагаемого алгоритма будет отличаться от первого. Всего рассмотрено семь вариантов, результаты приведены в графическом виде на рис. 3.

В таблице 1 приведены результаты расчета для трех характерных вариантов функции: отражены геометрические параметры деформированной системы, величины компенсирующих нагрузок, величины невязок. Расчет оканчивается при достижении величины невязок значения в 1%.

В таблице 2 приведены результаты расчетов с точки зрения операционной эффективности в зависимости от величины жесткости упруго-

податливых связей на втором интервале работы после упрочнения или разупрочнения.

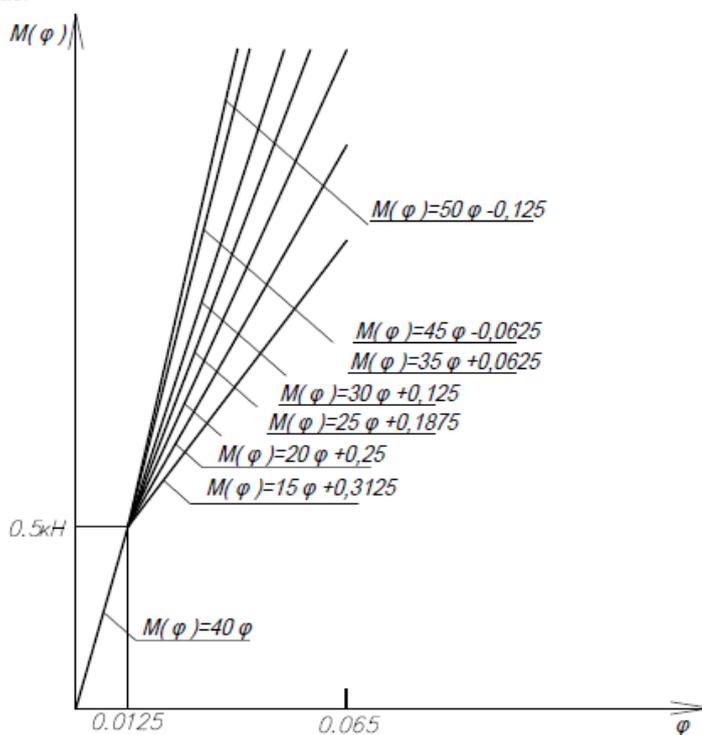


Рис. 3. Зависимость момента от перемещения при различных типах жесткости

Таблица 1

№ j-й итерации	dφ	dM	dM(j+1)	δ, %
15φ + 0,3125				
1	1	0	0,9375	100
2	1,46875	0,9375	0,644531	-45,45
3	1,32266	0,644531	0,736084	12,43
4	1,368042	0,736084	0,707474	-4,04
5	1,353737	0,707474	0,71614	1,24
6	1,358207	0,71614	0,17362	-0,39
25φ + 0,1875				
1	1	0	0,5625	100
2	1,28125	0,5625	0,457031	-23,08
3	1,228516	0,457031	0,476807	4,15
4	1,238404	0,476807	0,473099	-0,78
35φ + 0,0625				
1	1	0	0,1875	100
2	1,09375	0,1875	0,175781	6,67
3	1,087891	0,175781	0,176514	0,41

Таблица 2

Типы жесткости	Количество итераций	δ , %
$15\varphi + 0,3125$	6	-0,39
$20\varphi + 0,25$	5	0,49
$25\varphi + 0,1875$	4	-0,78
$30\varphi + 0,125$	4	-0,22
$35\varphi + 0,0625$	3	0,41
$45\varphi - 0,0625$	3	0,37
$50\varphi - 0,125$	4	0,17

На основании изложенного, можно сделать следующие *выводы*:

1. Алгоритм, сочетающий преимущества КСМ МКЭ и метода компенсирующих нагрузок, позволяет производить расчет систем с различными типами нелинейных упруго-податливых опор, независимо от того, является ли опора упрочняющейся либо разупрочняющейся, и степени изменения жесткости опоры вследствие ее нелинейной работы.

2. При приближении значения жесткости опоры на втором участке к начальной жесткости наблюдается резкий рост скорости схождения расчета к результату, удовлетворяющему критерию окончания алгоритма. При этом упрочняется связь или разупрочняется не имеет значения.

3. Выполненные расчеты показали высокую эффективность предлагаемого алгоритма при расчете систем с различными пропорциями жесткостей, что делает целесообразным разработку программных средств его реализации. Это и будет являться задачей дальнейших исследований авторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Морозов Н. В., Кащеев Г. В., Чертоляс Н. Ф., Берестнев Б. Н. Экспериментальные исследования работы балок различной жесткости на различном основании // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1984. № 6. С. 17—21.
2. Байков В. Н., Фролов А. К. Анализ деформируемости узлового соединения ригеля с колоннами // Бетон и железобетон. 1978. № 2. С. 26—28.
3. Стругацкий Ю. М., Хайнер Е. П. Исследование элементов рамного каркаса из унифицированных деталей Московского каталога // Исследование несущих конструкций сборных многоэтажных зданий. М.: МНИИТЭП, 1983. С. 34—65.
4. Ананьин М. Ю., Фомин Н. И. Метод учета податливости в узлах металлических конструкций зданий // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. 2010. С. 72.
5. Voffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed Finite Element Methods and Applications // Springer. 2013. Vol. 44. DOI: 10.1002/zamm.201490021.
6. Должиков В. Н., Должикова Е. Н. Экспериментальные исследования влияния деформаций в узловых соединениях на напряженно-деформированное состояние в натурной опоре из МИК-С // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. № 9. С. 1484—1493. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.9.1484-1493.
7. Должиков В. Н., Должикова Е. Н. Экспериментальные исследования влияния смещений в узловых соединениях элементов на напряженно-деформированное состояние натурального фрагмента фермы // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2024. № 4(784). С. 34—43. DOI: 10.32683/0536-1052-2024-784-4-34-43.
8. Должиков В. Н., Удотова О. А. Влияние податливости узловых соединений на напряженно-деформированное состояние металлических стержневых систем // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2023. № 11(779). С. 15—25. DOI: 10.32683/0536-1052-2023-779-11-15-25.
9. Игнатьев А. В., Бочков М. И. Расчет простых систем с нелинейными моментными связями методом конечных элементов в форме классического смешанного метода // Известия вузов. Строительство. 2023. № 11(779). С. 3—14. DOI: 10.32683/0536-1052-2023-779-11-15-25.

10. *Аленин В. П.* Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними одно-сторонними связями: дис. . . . д-ра техн. наук. Волгоград, 2002. 325 с.
11. *Ignatyev A. V., Ignatyev V. A.* Specific Features and Advantages of the Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method as an Alternative for the Traditional Finite Element Method // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. Vol. 10. Iss. 4. Pp. 121—124.
12. *Arnold D. N., Falk R., Winther R.* Differential complexes and stability of finite element methods. I. The de Rham complex // *Compatible spatial discretizations*. 2007. Vol. 142. Pp. 23—46.
13. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element / *Yu. V. Klochkov, V. A. Pshenichkina, A. P. Nikolaev, O. V. Vakhnina, M. Yu. Klochkov* // *Magazine of Civil Engineering*. 2023 No. 4. Iss. 120. Pp. 34—47. DOI: 10.34910/MCE.120.3.
14. Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements / *Yu. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, O. V. Vakhnina, T. A. Sobolevskaya, M. Yu. Klochkov* // *Magazine of Civil Engineering*. 2022 No. 5. Iss. 113. Pp. 159—170. DOI: 10.34910/MCE.113.14.
15. *Laursen T. A., Kim T. Y., Dolbow J. E.* A Mortared Finite Element Method for Frictional Contact on Arbitrary Surfaces // *Computational Mechanics*. 2007. Vol. 39. Pp. 223—235.
16. *Laursen T. A., Yang B.* A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar // *Computational Mechanics*. 2008. Vol. 41 Pp. 189—205.
17. *Бочков М. И., Игнатъев В. А.* Development of Single-Node Finite Elements for the Calculation of Systems with Unilateral Constraints by FEM in the Form of the Classical Mixed Method // *Proceedings of the 7th International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety*. 2023. Pp. 222—231. DOI: 10.1007/978-3-031-47810-9_21.
18. *Бочков М. И.* Определение напряженно-деформированного состояния систем с одно-сторонними связями от кинематического смещения связей с помощью метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура*. 2021. Вып. 4(85). С. 137—147.
19. *Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Бочков М. И.* Расчет многопролетных балок с одно-сторонними связями по МКЭ в форме классического смешанного метода // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура*. 2017. Вып. 48(67). С. 94—108.

© Душко О. В., Бочков М. И., Рекунов С. С., Максютова Е. А., Даудова М. Д., 2025

Поступила в редакцию
в декабре 2024 г.

Ссылка для цитирования:

Исследование эффективности метода компенсирующих нагрузок в задачах расчета систем с угловыми упрочняющимися связями / О. В. Душко, М. И. Бочков, С. С. Рекунов, Е. А. Максютова, М. Д. Даудова // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура*. 2025. Вып. 1(98). С. 145—152. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_145.

Об авторах:

Душко Олег Викторович — д-р техн. наук, доц., зав. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; ovd28@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3982-1899

Бочков Максим Иванович — канд. техн. наук, доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

Рекунов Сергей Сергеевич — канд. техн. наук, доц., доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

Максютова Евгения Александровна — магистрант, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

Даудова Мадина Джамбулатовна — студентка, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

**Oleg V. Dushko, Maxim I. Bochkov, Sergey S. Rekunov, Evgenia A. Maksyutova,
Madina Dz. Daudova**

Volgograd State Technical University

**STUDY OF THE EFFICIENCY OF THE COMPENSATING LOAD METHOD
IN THE CALCULATION OF SYSTEMS WITH ANGULAR HARDENING CONNECTIONS**

**The research was carried out at the expense of the funds of the development program
of VSTU "Priority 2030", within the framework of scientific project No. 45/654-24**

The efficiency of the algorithm for calculating systems with hardening (softening) angular bonds is analyzed using an algorithm that combines the advantages of the finite element method in the form of a classical mixed method and the method of compensating loads. The number of iterations required to calculate systems with nonlinear connections of different stiffness with the same accuracy is chosen as the parameter for evaluating efficiency. An example of calculating a problem with nonlinear elastic supports of various stiffness, necessary for efficiency analysis, is given.

Key words: FEA in the form of the classical mixed method, nonlinear moment relations, nonlinear operation of nodes, compensating load method.

For citation:

Dushko O. V., Bochkov M. I., Rekunov S. S., Maksyutova E. A., Daudova M. Dz. [Study of the efficiency of the compensating load method in the calculation of systems with angular hardening connections]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2025, iss. 1, pp. 145—152. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_145.

About authors:

Oleg V. Dushko — Doctor of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; ovd28@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3982-1899

Maxim I. Bochkov — Candidate of Engineering Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru

Sergey S. Rekunov — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation

Evgenia A. Maksyutova — Master's Degree student, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation

Madina Dz. Daudova — Student, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation