

УДК 665.455:006.354

**О. В. Матвиенко<sup>а, б</sup>, Н. С. Фирсанова<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> *Томский государственный архитектурно-строительный университет*

<sup>б</sup> *Томский государственный университет*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ДИЛАТАНТНОЙ ЖИДКОСТИ С ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ БАЛКЛИ — ГЕРШЕЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ**

Исследовано неустановившееся течение дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли — Гершеля в цилиндрической трубе. Течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости на входе в трубу, а также в приосевой и пристеночной зонах течения. Увеличение эффективной вязкости вблизи оси течения объясняется вязкопластическим поведением среды, около стенки — дилатантными свойствами. По мере стабилизации течения и уменьшения скорости сдвиговых деформаций происходит вырождение высоковязкой зоны, локализованной вблизи входного сечения; эффективная вязкость в приосевой зоне увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** реология, вязкость, неньютоновские жидкости, дилатантность, вязкость, вязкопластичность, жидкость Балкли — Гершеля.

Течение растворов и расплавов полимеров описывается нелинейной зависимостью эффективной вязкости от интенсивности скоростей сдвиговых деформаций [1]. Среды, вязкость которых увеличивается с ростом скорости сдвига, называются дилатантными жидкостями. При низких скоростях сдвига эти жидкости имеют низкую вязкость и легко текут [2]. Однако при более высоких скоростях сдвига их вязкость значительно увеличивается.

На практике также часто встречаются системы, обладающие пространственной структурой: если величина приложенного к среде напряжения мала, то среда ведет себя подобно твердому телу [3, 4]. Прочность структуры характеризуется предельным напряжением сдвига  $\sigma$ . При достижении этого напряжения происходит разрушение твердофазной структуры, что приводит к резкому уменьшению вязкости. Таким образом, при высоких сдвиговых напряжениях среда ведет себя подобно вязкой жидкости [5].

Для описания деформационного поведения различных структурированных дисперсных сред существует множество реологических моделей, передающих в определенном диапазоне напряжений сдвига отдельные особенности реального течения [6—10].

Наибольшее практическое распространение для описания поведения вязкопластических структурированных дисперсных систем получила реологическая модель течения неньютоновских жидкостей Шведова — Бингама [7, 11]. Эта модель линейно сочетает пластические и вязкие свойства среды [12]. Для одновременного учета нелинейности кривой течения и наличия предельного напряжения сдвига широкое практическое распространение получила модель Балкли — Гершеля [13], объединяющая в себе свойства модели степенной жидкости Оствальда — де Вейля и вязкопластической среды Шведова — Бингама.

Настоящая работа является продолжением исследований закрученного течения неньютоновских сред [14—17]. Ее целью является исследование структуры течения дилатантной жидкости в цилиндрической трубе.

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения [18]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\phi\phi}}{r}. \quad (3)$$

Для построения модели среды необходимо установить связь между девиаторами тензора напряжений и тензора скоростей деформации. Реологические соотношения для осесимметричного течения неньютоновской среды в цилиндрическом канале имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2 \left( k U^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{xr} &= \left( k U^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{rr} &= \left( k U^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r}, \\ \tau_{\phi\phi} &= 2 \left( k U^{n-1} + \frac{\sigma}{U} \right) \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Интенсивность скоростей сдвиговых деформаций определяется выражением:

$$U = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (5)$$

Таким образом, среда определяется тремя параметрами:  $\sigma$  — предельным напряжением сдвига, показателем консистенции жидкости  $k$ , характеризующим ее текучесть, а также параметром нелинейности  $n$ .

При  $k = 0$  получим идеально пластическую среду, при  $\sigma = 0$  — жидкость Оствальда — де Вейля. Параметр  $n$  характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее  $n$  отличается от 1 (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется нелинейность кривой течения. Значения  $0 < n < 1$  характерны для псевдопластических жидкостей, эффективная вязкость которых убывает с ростом скорости сдвига. При  $n = 1$  модель Балкли — Гершеля переходит в модель Шведова — Бингама. Ньютоновская

жидкость характеризуется параметрами  $n = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Значения  $n > 1$  соответствуют дилатантной жидкости, эффективная вязкость которой увеличивается с ростом скорости ее сдвига.

Реологические соотношения (4) справедливы в области течения:

$$T^2 = \frac{\tau_{xx}^2 + \tau_{rr}^2 + \tau_{\phi\phi}^2}{2} + \tau_{x\phi}^2 + \tau_{r\phi}^2 + \tau_{xr}^2 > \sigma^2. \quad (6)$$

В случае  $T^2 < \sigma^2$  среда движется как абсолютно твердое тело: компоненты тензора скоростей деформации равны 0.

По аналогии с ньютоновской жидкостью удобно ввести в рассмотрение эффективную вязкость  $\mu_{eff}$ , которая может быть рассчитана как:

$$\mu_{eff} = kU^{n-1} + \frac{\sigma}{U}. \quad (7)$$

Первое слагаемое  $\mu_{pl} = kU^{n-1}$  характеризует пластическую вязкость, второе  $\mu_{str} = \frac{\sigma}{U}$  — структурную вязкость, связанную с необходимостью приложения напряжений, превосходящих предел текучести, для разрушения структуры вязкопластической среды.

Характерной особенностью течения дилатантной жидкости Балкли — Гершеля с пределом текучести является неоднозначное влияние скорости сдвиговой деформации жидкости на поле ее эффективной вязкости: составляющая эффективной вязкости жидкости, обусловленная ее дилатантными свойствами, увеличивается с увеличением скорости сдвиговых деформаций, а вязкопластическая составляющая в этом случае уменьшается.

Простейший анализ показывает, что при больших и малых скоростях сдвига жидкости ее эффективная вязкость принимает большие значения:  $\mu_{eff} \rightarrow \infty$  при  $U \rightarrow 0$  и  $U \rightarrow \infty$ . Эффективная вязкость жидкости уменьшается до минимума при скорости сдвига, равной:

$$U_{min} = \left( \frac{\sigma}{(n-1)k} \right)^{1/n}. \quad (8)$$

На границах расчетной области задавались следующие условия:

$$x=0: u = u_m \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), v = 0; \quad (9)$$

$$x=L: \frac{\partial u}{\partial x} = 0, v = 0; \quad (10)$$

$$r=0: \frac{\partial u}{\partial r} = 0, v = 0; \quad (11)$$

$$r=R: u = 0, v = 0. \quad (12)$$

Величина  $u_{in}$  определяет скорость на оси течения на входе в канал. Для параболического распределения осевой скорости эта величина связана с объемным расходом жидкости  $Q$  соотношением:

$$u_{in} = 2 \frac{Q}{\pi r_{in}^2}. \quad (13)$$

Уравнения (1—3) решались численно с использованием метода конечного объема [15].

Рассмотрим прямоочное и закрученное течения дилатантной жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале. Поле течения жидкости моделировалось при  $k = 0,05 \dots 10$  (Н с<sup>*n*</sup>)/м<sup>2</sup>,  $n = 1 \dots 3$ ,  $\sigma = 0 \dots 10$  Па,  $u_{in} = 1 \dots 10$  м/с. Радиус канала составлял  $R = 0,1$  м, а его длина  $L = 2 \dots 5$  м.

При стабилизированном течении дилатантной жидкости Балкли — Гершеля с пределом текучести в цилиндрическом канале в его центре ( $r < r_y$ ) образуется жесткая зона. Положение границы этой зоны зависит от перепада давления в канале и предельного напряжения сдвига жидкости в нем:

$$r_y = 2\sigma \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}. \quad (14)$$

Течение в канале возможно при выполнении условия  $r_y < R$  в нем. Если  $R < r_y$ , то происходит запираение канала и течение становится невозможным. Жидкость в жесткой зоне канала ( $r \leq r_y$ ) движется как твердое тело с плоским профилем осевой скорости:

$$u = u_y = \frac{2n}{n+1} k \left| \frac{dp}{dx} \right|^{-1} \left( \frac{\sigma}{k} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{R}{r_y} - 1 \right)^{\frac{n+1}{n}}. \quad (15)$$

Вне этой зоны ( $r_y < r$ ) формируется область сдвигового течения с радиальным распределением скорости:

$$u = u_y \left[ 1 - \left( \frac{r - r_y}{R - r_y} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (16)$$

На рисунке 1 представлено радиальное распределение осевой скорости течения в различных сечениях канала. Осевая скорость течения в центральной части канала уменьшается вниз по потоку, а в пристеночной области наблюдается обратный эффект, что приводит к уменьшению толщины пограничного слоя. Радиальное распределение осевой скорости дилатантной жидкости с пределом текучести на значительном удалении от входа в канал указывает на наличие жесткой зоны в центре канала и зоны сдвигового течения вблизи его стенки. С увеличением предельного напряжения сдвига  $\sigma$  толщина жесткой зоны увеличивается, а толщина зоны сдвигового течения уменьшается. С увеличением показателя нелинейности  $n$  распределение

осевой скорости в центральной зоне течения приближается к линейному, что свидетельствует о проявлении жидкостью ее дилатантных свойств.

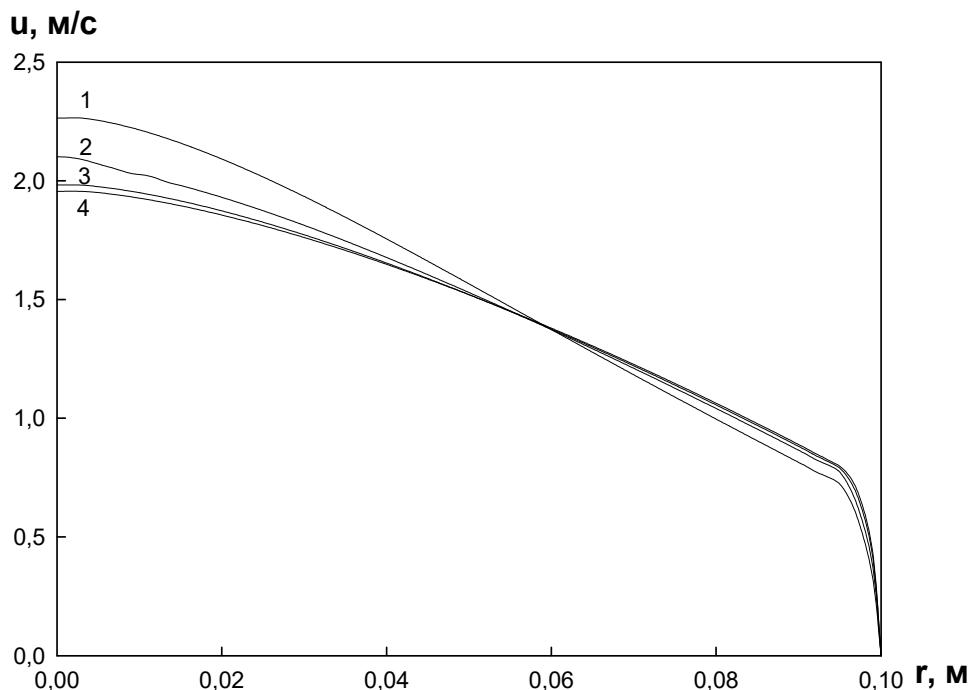


Рис. 1. Радиальное распределение осевой скорости:

$u_m = 2,5$  м/с,  $n = 2$ ,  $k = 1$  Па $\cdot$ с $^2$ ,  $\sigma = 5$  Па: 1 —  $x = 0,1$  м; 2 —  $0,2$ ; 3 —  $0,6$ ; 4 —  $1,5$

На рисунках 2—4 показаны изолинии эффективной вязкости. Как видно, течение дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли — Гершеля характеризуется тремя зонами с высокой вязкостью. На начальном участке течения в пристеночной зоне формируется область повышенных значений эффективной вязкости. Появление этой области связано с формированием динамического пограничного слоя и ростом в нем сдвиговых напряжений. Вниз по потоку по мере стабилизации течения происходит исчезновение этой области. Структура течения перестает зависеть от осевой координаты. При этом изолинии эффективной вязкости становятся параллельными оси течения. По мере гидродинамической стабилизации течения в приосевой зоне канала уменьшается скорость сдвига, что приводит к увеличению эффективной вязкости жидкости в этой зоне.

После прохождения начального участка в приосевой области преобладают вязкопластические свойства течения, приводящие к формированию здесь области высоковязкого течения. По мере стабилизации потока в окрестности оси начинает формироваться жесткая зона. В окрестности стенки, где сдвиговые напряжения максимальны, в потоке проявляются дилатантные свойства, приводящие к росту эффективной вязкости.

Влияние показателя нелинейности  $n$  на поле эффективной вязкости иллюстрируют рис. 2,  $a$ — $в$ . На начальном участке течения вблизи стенки трубы с ростом параметра нелинейности происходит увеличение размеров зоны по-

вышенной вязкости. При этом значения  $\mu_{eff}$  в этой зоне увеличиваются. Результаты расчетов показывают, что варьирование параметра нелинейности в диапазоне  $1 < n < 3$  не влияет на поведение эффективной вязкости в приосевой зоне, где наиболее существенно проявляются вязкопластические свойства. Однако в ядре потока и особенно в пристеночной зоне течения с увеличением показателя нелинейности эффективная вязкость значительно возрастает, формируя на стенке слой загустевшей жидкости.

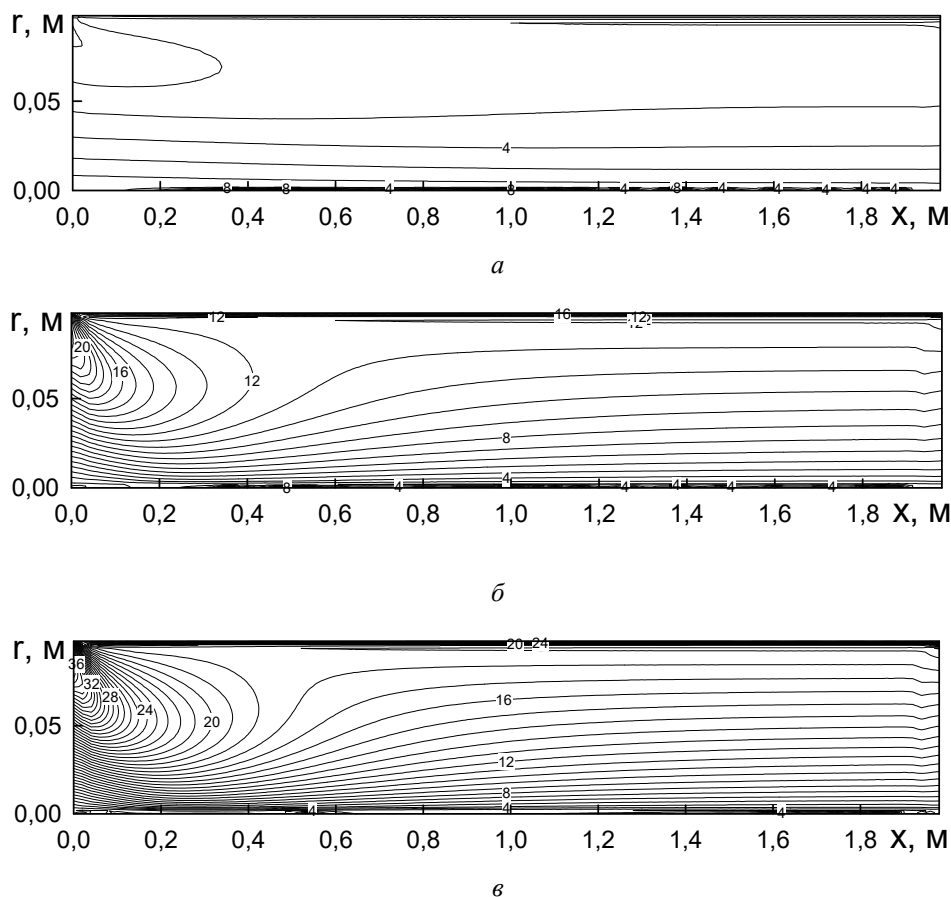


Рис. 2. Изолинии эффективной вязкости:  $u_{in} = 2,5$  м/с,  $\sigma = 1$  Па,  $k = 1$  Па·с<sup>n</sup>:  
 а —  $n = 1,5$ ; б —  $n = 1,75$ ; в —  $n = 2,0$

Увеличение показателя консистенции жидкости приводит к заметному увеличению ее эффективной вязкости на начальном участке течения, а также в ядре потока и вблизи стенки (рис. 3). Входная зона высоковязкого течения становится более компактной, а вязкость в ней увеличивается.

Увеличение предельного напряжения сдвига жидкости приводит к значительному увеличению ее эффективной вязкости в приосевой зоне канала (рис. 4). Однако влияние величины предельного напряжения сдвига на эффективную вязкость вблизи стенки незначительно.

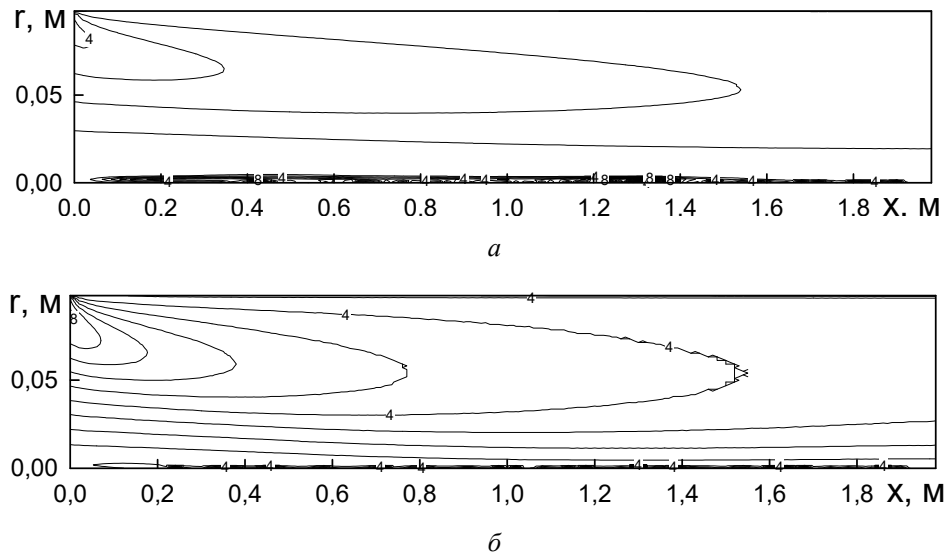


Рис. 3. Изолинии эффективной вязкости:  $u_{in} = 2,5 \text{ м/с}$ ,  $\sigma = 1 \text{ Па}$ ,  $n = 2$ :  
 $a - k = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}^2$ ;  $b - k = 0,2 \text{ Па} \cdot \text{с}^2$

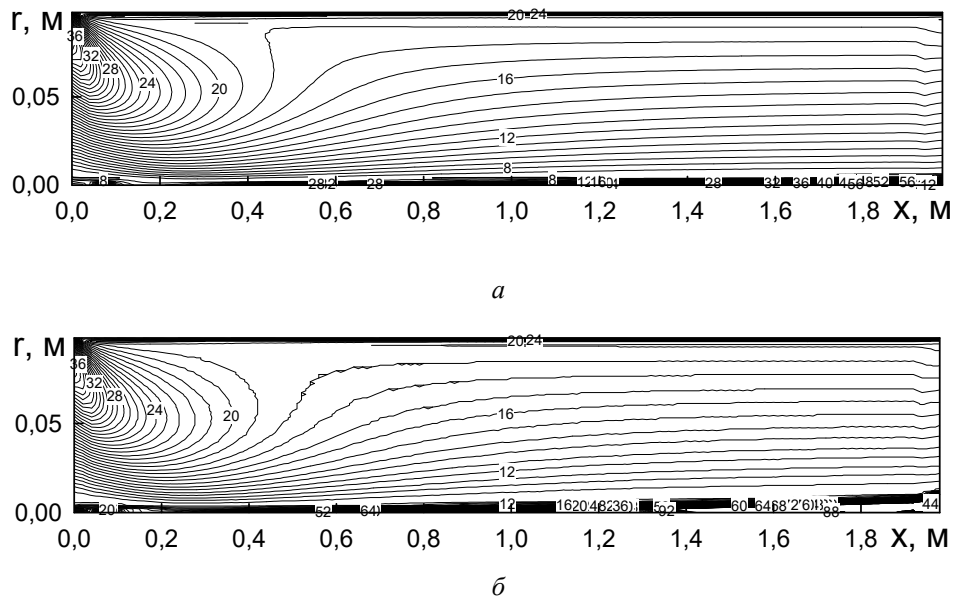


Рис. 4. Изолинии эффективной вязкости:  $u_{in} = 2,5 \text{ м/с}$ ,  $k = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}^2$ ,  $n = 2$ :  
 $a - \sigma = 10 \text{ Па}$ ;  $b - \sigma = 20 \text{ Па}$

В результате анализа влияния реологических свойств среды на течение потока можно сделать следующие выводы:

- течение дилатантной жидкости с пределом текучести характеризуется повышенными значениями эффективной вязкости на входе в трубу, а также в приосевой и пристеночной зонах течения;

- повышение значений эффективной вязкости в приосевой зоне объясняется вязкопластическим поведением среды, в пристеночной — дилатантным;
- по мере гидродинамической стабилизации эффективная вязкость в приосевой зоне увеличивается, что приводит к формированию зоны квазитвердого течения.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малкин А. Я., Исаев А. И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб. : Профессия, 2007. 560 с.
2. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М. : Мир, 1964. 108 с.
3. Лескин А. И., Гофман Д. И., Алексиков С. В., Аль-Карагули М. М. Органическая композиция для восстановления свойств вяжущего в асфальтогрануляте // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2019. Вып. 1(74). С. 33—39.
4. Олянский Ю. И., Щекочихина Е. В., Калиновский С. А., Каныгин В. А. Реологические свойства сарматских глин с нарушенной структурой // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2019. Вып. 2(75). С. 11—19.
5. Климов Д. М., Петров А. Г., Георгиевский Д. В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. М. : Наука, 2005. 394 с.
6. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А. М. Кутепов, Л. Д. Полянин, З. Д. Запryanov, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин. М. : Бюро Квантум, 1996. 336 с.
7. Матвиенко О. В., Унгер Ф. Г., Базуев В. П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. Томск : Изд-во ТГАСУ, 2015. 335 с.
8. Островский Г. М. Прикладная механика неоднородных сред. СПб. : Наука, 2000. 359 с.
9. Sybilski D. Non-newtonian viscosity of polymer-modified bitumens // Materials and Structures. 1993. Vol. 26. Pp. 15—23.
10. Williamson R. V. The Flow of Pseudoplastic Materials // Industrial and Engineering Chemistry. 1929. Vol. 21. No. 11. Pp. 1108—1111.
11. Каныгин В. А. Безнапорное течение вязкопластичной жидкости // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2016. Вып. 45(64). С. 114—118.
12. Шульман З. П., Байков В. И., Бендерская С. Л. Течение пленки вязкопластичной жидкости при динамическом воздействии // Инженерно-физический журнал. 1977. Т. 33. № 4. С. 666—670.
13. Herschel W. H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzol-Lösungen // Kolloid Z. 1926. Vol. 39. Pp. 291—300.
14. Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Дульзон, Н. Г. Смирнова, М. В. Агафонова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2014. № 2(43). С. 80—93.
15. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 1. С. 192—199.
16. Матвиенко О. В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского государственного университета. Серия: Математика и механика. 2018. № 55. С. 99—112.
17. Матвиенко О. В., Эфа А. К., Базуев В. П., Евтюшкин Е. В. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке // Известия вузов: Физика. 2006. Т. 49. № 56. С. 96—107.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1973. 847 с.

© Матвиенко О. В., Фирсанова Н. С., 2024

Поступила в редакцию  
в сентябре 2024 г.



*Ссылка для цитирования:*

Матвиенко О. В., Фирсанова Н. С. Исследование неустановившегося течения дилатантной жидкости с пределом текучести Балкли — Гершеля в цилиндрической трубе // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 4(97). С. 146—154. DOI: 10.35211/18154360\_2024\_4\_146.

*Об авторах:*

**Матвиенко Олег Викторович** — д-р физ.-мат. наук, проф., Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томский государственный университет. Российская Федерация, 634050, г. Томск, пр-т Ленина, 36; matvolegv@mail.ru

**Фирсанова Наталия Сергеевна** — аспирант, Томский государственный университет. Российская Федерация, 634050, г. Томск, пр-т Ленина, 36; firnataliya@yandex.ru

**Oleg V. Matvienko<sup>a, b</sup>, Natalia S. Firsanova<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Tomsk State University of Architecture and Building*

<sup>b</sup> *Tomsk State University*

## **INVESTIGATION OF THE UNSTEADY FLOW OF A DILATING FLUID WITH THE BULKLEY — HERSCHEL YIELD STRENGTH IN A CYLINDRICAL TUBE**

In this work, the study of the unsteady flow of a dilatant fluid with the Bulkley — Herschel yield strength in a cylindrical pipe was carried out. The flow of a dilatant fluid with yield strength is characterized by increased values of effective viscosity at the inlet to the pipe, as well as in the axial and parietal flow zones. The increase in effective viscosity near the flow axis is explained by the viscoplastic behavior of the medium, near the wall by dilatant properties. As the flow stabilizes and the rate of shear deformations decreases, the high-viscosity zone localized near the inlet section degenerates; The effective viscosity in the axial zone increases, resulting in the formation of a quasi-solid flow zone.

**Key words:** rheology, viscosity, non-Newtonian fluids, dilatance, viscosity, viscoplasticity, Bulkley — Herschel fluid.

*For citation:*

Matvienko O. V., Firsanova N. S. [Investigation of the unsteady flow of a dilating fluid with the Bulkley — Herschel yield strength in a cylindrical tube]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2024, iss. 4, pp. 146—154. DOI: 10.35211/18154360\_2024\_4\_146.

*About authors:*

**Oleg V. Matvienko** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building (TSUAB), Tomsk State University. 36, Lenina Ave., Tomsk, 634050, Russian Federation; matvolegv@mail.ru

**Natalia S. Firsanova** — Postgraduate student, Tomsk State University, 36, Lenina Ave., Tomsk, 634050, Russian Federation; firnataliya@yandex.ru