

УДК 539.32, 624.046

С. Ю. Калашиков, Е. В. Гурова, Е. Г. Шведов, А. С. Машакарян

Волгоградский государственный технический университет

ВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖИМАЕМОГО СТЕРЖНЯ С НАЧАЛЬНОЙ ПОГИБЬЮ ПРИ ИНДУЦИРОВАННОЙ АНИЗОТРОПИИ

Рассматривается продольный изгиб гибкого прямолинейного стержня, имеющего начальное технологическое несовершенство в виде начальной погиби. Неоднородность напряженного состояния в изогнутом состоянии приводит к стеснению деформаций, вызывающих переменность упругих характеристик материала. Для получения уравнения стержня в отклоненном состоянии используется предложенная ранее авторами теория деформирования тел в неоднородных полях напряжений с индуцированной анизотропией свойств. Решение строится на вариационном анализе прогибов стержня с использованием метода Бубнова — Галеркина. Анализируется рост максимального прогиба на ступенях последовательного нагружения возрастающей силой. Рассмотрены три варианта начальных кривизн, в т. ч. исчезающее малой. Приближенное интегрирование производится с использованием простых базисных функций. Независимо от степени начальной кривизны и выбора аппроксимирующей функции установлено заметное увеличение сжимающей силы, отвечающей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.

Ключевые слова: начальная кривизна, градиент напряжений, критические силы, индуцированная анизотропия, базисные функции.

Введение

В ряде экспериментальных работ установлено, что в процессе деформирования изотропные основания [1], поликристаллические и многокомпонентные металлы и сплавы могут проявлять свойства анизотропии [2—9]. Сложившиеся представления объясняют эти проявления эволюцией микроструктуры материала из-за переориентации кристаллографических осей при изготовлении и деформировании. Анизотропию могут проявлять и эластомеры в зависимости от технологических режимов изготовления или эксплуатации [10—13]. Предварительное деформирование приводит также к анизотропии свойств полимерных композитов [14]. Анизотропия подобного типа получила название наведенной или индуцированной.

Ранее авторами предложена и экспериментально проверена [15] модель поведения упругого материала и отвечающая ей группа физических уравнений, когда считается, что распределение напряжений вызывает анизотропию физических свойств материала, зависящую от степени неоднородности напряженного состояния в окрестностях рассматриваемой точки. Эта зависимость характеризуется учетом в определенных соотношениях градиентов тензоров напряжений и деформаций относительно пространственных координат. Появление физических, расчетных и математических моделей в последнее время стало заметным направлением в механике деформируемого твердого тела [16]. Учет приращений искомых величин реализует инкрементальный подход, который в последние десятилетия используется в механике деформируемого тела [17, 18], железобетона [19], в целом для стержневых систем [20], включая нелинейные задачи устойчивости, и даже в стратегических процессах управления [21—23]. В предложенной модели полагается, что неоднородное

напряженное состояние вызывает стеснение деформаций, когда менее напряженные объемы материала «поддерживают» более напряженные объемы, усиливая их сопротивляемость деформированию. Подобное распределение будет отвечать каждой точке тела, следовательно, имеет место локальная трансверсальная изотропия. По известному начальному линейному решению аналогично общеизвестному методу упругих решений последовательно производится корректировка упругих характеристик для многократной реализации системы разрешающих дифференциальных уравнений. По сути, изложенное представляет собой модель и разрешающие инкрементальные соотношения деформируемого тела с криволинейной трансверсальной анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния. В [24, 25] модель тела с индуцированной анизотропией применена к продольному изгибу сжимаемого стержня. В [26] такая задача разрешена вариационным анализом прогибов идеализированного прямолинейного центрально-сжатого стержня с использованием метода Бубнова — Галеркина. Предполагалось некое малое возмущение на начальном этапе нагружения. В [27] численно решена задача продольного сжатия стержня с начальной погибью. В результате установлено заметное увеличение сжимающей силы, соответствующей значительному нарастанию прогибов. При производстве прутков прямоугольного поперечного сечения ГОСТ 103—2006 «Прокат сортовой стальной горячекатаный полосовой. Сортамент»¹ устанавливается, что серповидность проката, т. е. искривление участка полосы по дуге в плоскости проката, не должна превышать значений 0,5 % длины, а при высоких требованиях по запросу потребителя — 0,2 %. При наименьшей длине из выпускаемых в 2 м это даст значение кривизны в 4 мм, или 2 мм на 1 п. м, что заведомо определяет продольный изгиб.

Кроме численных методов представляется целесообразным применить приближенные способы реализации, например, вариационные методы. Метод Бубнова — Галеркина представляет собой приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений краевой задачи. Для дифференциального уравнения вида $\Phi(x, y, y', \dots) = 0$ приближенное решение ищется в виде:

$$y = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

где базисные функции $\varphi_k(x)$ удовлетворяют всем граничным условиям задачи при $x = x_1$ и $x = x_2$, а C_k — неопределенные параметры, которые находятся из условия ортогональности невязки к базисным функциям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \varphi_k(x) dx = 0. \quad (2)$$

Последнее распадается на систему алгебраических уравнений, из которых и определяются параметры C_k . Количество уравнений равно числу неопределенных параметров C_k . Метод может быть применен для анализа прогибов оси стержня при продольном изгибе.

¹ ГОСТ 103—2006. Прокат сортовой стальной горячекатаный полосовой. Сортамент. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200068758>.

Материалы и методы исследований

Рассмотрим простой стержень прямоугольного поперечного сечения, сжимаемый силой F , приложенной в центре тяжести поперечного сечения. Линия действия силы проходит через центр опорных шарниров. Вследствие технологических погрешностей изготовления он имеет начальную погибь f_0 (рис. 1):

$$f_0 = f_0(z),$$

которая в исходном состоянии имеет, как обычно принимается, вид полуволны синусоиды:

$$f_0 = f_m \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (3)$$

где f_m — наибольшее значение погиби в середине стержня.

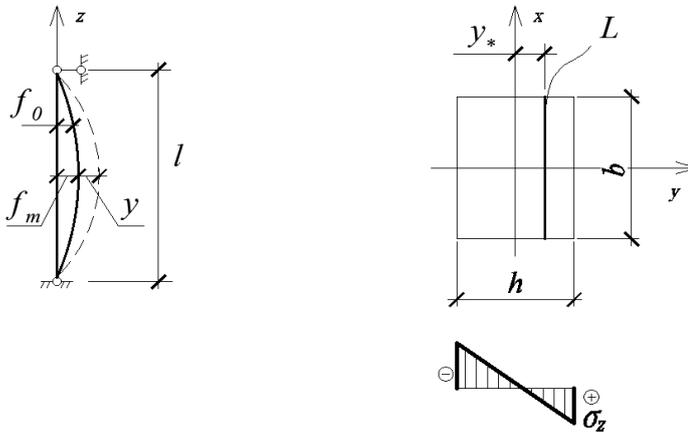


Рис. 1. Расчетная схема сжатого стержня с начальной погибью

Любое малейшее увеличение силы придаст кривизне приращение и увеличит перемещение каждой точки по длине стержня на дополнительный прогиб y . Полный прогиб стержня в любом сечении тогда:

$$y_{\text{полн}} = y + f_m \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (4)$$

Неоднородность напряженного состояния создается по высоте поперечного сечения h . В каждом сечении по длине стержня степень неоднородности различна из-за разной величины прогиба, следовательно, создается трансверсальная анизотропия, индуцированная прогибом y , функционально зависящая от координаты по сечению y^* . Поверхность одинакового уровня напряжений U вырождается для каждого сечения в линию L (рис. 2). Касательная к ней плоскость P соответственно совпадает с плоскостью, касательной к изогнутой оси стержня S . Направление вектора-градиента τ нормально к плоскости S и, разумеется, линии L . Обозначив его как ось упругой симметрии α , примем в плоскости изотропии направление оси γ , совпадающей с линией L , а

оси β — нормально к линии L в плоскости S (т. е. по касательной). Слои материала по направлению α спрессованы, следовательно, повышенный модуль упругости $E_\beta = E_{gr}$, а $E_\alpha = E_0$ равен модулю Юнга для материала.

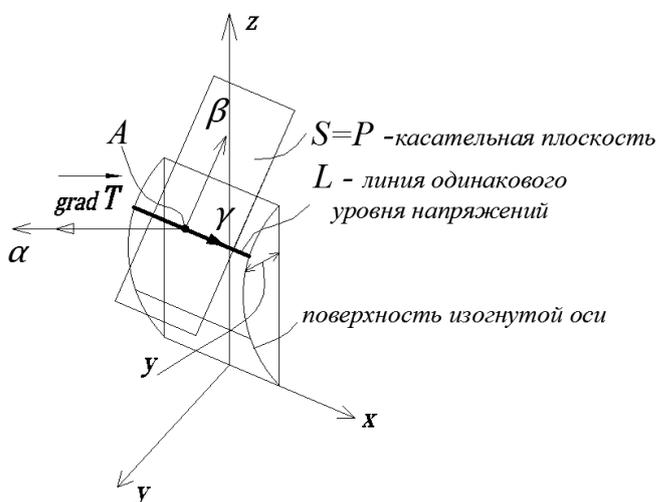


Рис. 2. Положение осей анизотропии при сжатии стержня с начальной погибью

Модуль упругости материала в касательной к изогнутой оси плоскости равен [15]:

$$E_{gr} = E_0 \frac{\lambda_E + 1,5g}{\lambda_E + g}, \quad (5)$$

где функция неоднородности напряженного состояния для любого сечения в данной задаче

$$g = \frac{\text{grad } T}{T} = \frac{12y_{\text{полн}}}{h^2 + 12y_{\text{полн}} \cdot y_*}. \quad (6)$$

Здесь

$$T = \frac{F}{\sqrt{3}A} \left(1 + \frac{12y_{\text{полн}}}{h^2} \cdot y_* \right),$$

а модуль вектор-градиента

$$\text{grad } T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial y_*(h)} \right)^2}.$$

Зависимость «момент — кривизна», записанная для оси стержня:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x},$$

на любом этапе нагружения с учетом (4) — (6) приводит к дифференциальному уравнению:

$$\left[\frac{a + 1,5 \left(y + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right)}{a + y + f_m \sin \frac{\pi z}{l}} \right] E_0 J_x y'' = -F \left(y + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right), \quad (7)$$

где обозначено

$$a = \frac{\lambda_E h^2}{12},$$

а характеристика материала $\lambda_E = 20,1587 \text{ м}^{-1}$ определена в [15] по экспериментальным данным других авторов.

Методом Бубнова — Галеркина найдем приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (7), удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (8)$$

В качестве базисных могут быть выбраны простые функции, например, парабола:

$$y = C_1 z(l - z), \quad (9)$$

где C_1 — постоянный коэффициент (параметры C_k по (1)), не равный 0. Функция y должна удовлетворять краевым условиям (8) при любом выборе коэффициента.

Подставляя y и y'' по (9) в левую часть дифференциального уравнения (7), получим невязку:

$$\begin{aligned} R_1(z, C_1) = & C_1^2 \left[3z(z-l) + \frac{F}{E_0 J} z^2(l-z)^2 \right] - \\ & - C_1 \left\{ 2a + 3f_m \sin \frac{\pi z}{l} - \frac{F}{E_0 J} \left[(l-z) \left(az + 2zf_m \sin \frac{\pi z}{l} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{F}{E_0 J} f_m \sin \frac{\pi z}{l} \left(a + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Условие ортогональности (2) функции R_1 базисной функции необходимо использовать для определения постоянной интегрирования

$$\int_0^l z(l-z) R_1(z, C_1) dz = 0. \quad (11)$$

При использовании в качестве базисной простой функции в виде Эйлеровой синусоиды имеем:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (12)$$

что даст невязку:

$$\begin{aligned} R_2(C_1, z) = & C_1^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \left(-1,5 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{F}{E_0 J} \right) - \\ & - C_1 \sin \frac{\pi z}{l} \left[\frac{\pi^2}{l^2} \left(a + 1,5 f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right) - \frac{F}{E_0 J} \left(a + 2 f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right) \right] + \\ & + \frac{F}{E_0 J} f_m \sin \frac{\pi z}{l} \left(a + f_m \sin \frac{\pi z}{l} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

и условие ортогональности:

$$\int_0^l R_2(C_1, z) \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0. \quad (14)$$

Результаты

При заданном значении силы F получающиеся из (11) и (13) уравнения дают решения в виде двух корней постоянной интегрирования C_1 .

В качестве примера рассмотрим стальной стержень длиной $l = 1$ м, размерами $b = 0,05$ м; $h = 0,02$ м; $i_x = 5,77$ мм. Значение упругой постоянной принято $\lambda_E = 20,1587$ м⁻¹ в [15] по экспериментальным данным [28], модуль Юнга для строительной стали принят $E_0 = 210 \cdot 10^6$ кПа, предел текучести $\sigma_0 = 260$ МПа. Соответствующая Эйлерова критическая сила составляет $F_3 = 68,4$ кН. Нагружение стержня осуществлялось ступенями, начиная от $0,25F_3$ до $1,4F_3$. Реализация уравнений (11) и (14), интегрирование и построение упругой линии (9), (12) выполнены в авторском программном модуле, работающем под управлением системы Wolfram Mathematica. Он позволяет производить не только вычисления, но и визуализацию [29]. Функциями программы является отыскание значений сжимающей силы, отвечающей критическому состоянию. Решение строится на анализе прогибов стержня с использованием метода переменного параметра упругости Биргера на разных ступенях нагружения. По сути, производится численное моделирование [30] процесса деформирования и вычисляется зависимость «нагрузка — прогиб». Оказалось, что корни уравнений имеют положительные и отрицательные значения. Последние не приводят к имеющему физический смысл решению (9) и (12). В первом варианте наибольшее значение начальной погиби $f_m = 1,0 \cdot 10^{-4}$ принято исчезающее малым. Численные значения этих параметров и величина максимального прогиба посередине высоты стержня для некоторых значений ступени нагружения приведены в табл. 1.

Задавая стержню иные значения начальной кривизны, не превышающей стандартно допускаемых несовершенств, получим для $f_m = 1,0$ мм (0,1 % на 1 п. м) результаты, приведенные в табл. 2, а для $f_m = 2,0$ мм (предельные 0,2 % на 1 п. м длины) — в табл. 3.

Таблица 1

Значения постоянных интегрирования по (11) и (14) и прогибов по (9) и (12) для стержня с $f_m = 0,1$ мм

F, кН	$\frac{F}{F_3}$	Парабола по (9)			Синусоида по (12)		
		C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $U_{\text{полн}}$, мм	C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $U_{\text{полн}}$, мм
5	0,075	$28,7 \cdot 10^{-6}$	0,0071	0,107	$7,4 \cdot 10^{-6}$	0,074	0,11
10	0,15	$61,8 \cdot 10^{-6}$	0,0154	0,115	$15,9 \cdot 10^{-6}$	0,0159	0,12
17,1	0,25	$118,3 \cdot 10^{-6}$	0,03	0,13	$30,5 \cdot 10^{-6}$	0,0305	0,13
34,2	0,5	$329,7 \cdot 10^{-6}$	0,082	0,182	$84,1 \cdot 10^{-6}$	0,0844	0,18
51,3	0,75	$781 \cdot 10^{-6}$	0,195	0,295	$194,5 \cdot 10^{-6}$	0,1945	0,29
68,4	1,0	$20,5 \cdot 10^{-4}$	0,51	0,61	$4,75 \cdot 10^{-4}$	0,475	0,58
69,4	1,015	$21,8 \cdot 10^{-4}$	0,55	0,65	$5,03 \cdot 10^{-4}$	0,503	0,60
85,5	1,25	$81,8 \cdot 10^{-4}$	2,044	2,144	$14,91 \cdot 10^{-4}$	1,491	1,59
88,9	1,3	0,0127	3,18	3,28	$20,2 \cdot 10^{-4}$	2,02	2,12
90,6	1,325	0,0167	4,175	4,275	$24,01 \cdot 10^{-4}$	2,401	2,50
92,3	1,35	0,0237	5,93	6,03	$29,1 \cdot 10^{-4}$	2,91	3,01
94	1,375	0,0386	9,65	9,75	$36,2 \cdot 10^{-4}$	3,62	3,72
95,7	1,4	0,0919	22,97	23,07	$46,9 \cdot 10^{-4}$	4,69	4,49

Таблица 2

Значения постоянных интегрирования по (11) и (14) и прогибов по (9) и (12) для стержня с $f_m = 1,0$ мм

F, кН	$\frac{F}{F_0}$	Парабола по (9)			Синусоида по (12)		
		C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $y_{\text{полн}}$, мм	C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $y_{\text{полн}}$, мм
5	0,075	$2,44 \cdot 10^{-4}$	0,061	1,061	$6,0 \cdot 10^{-5}$	0,60	1,06
10	0,15	$5,17 \cdot 10^{-4}$	0,129	1,129	$12,7 \cdot 10^{-5}$	0,127	1,13
17,1	0,25	$9,68 \cdot 10^{-4}$	0,242	1,242	$23,7 \cdot 10^{-5}$	0,237	1,24
34,2	0,5	$2,5 \cdot 10^{-3}$	0,625	1,625	$59,9 \cdot 10^{-5}$	0,599	1,60
51,3	0,75	$5,2 \cdot 10^{-3}$	1,30	2,30	$12,1 \cdot 10^{-4}$	1,21	2,21
68,4	1,0	$11,2 \cdot 10^{-3}$	2,80	3,80	$24,6 \cdot 10^{-4}$	2,46	3,46
69,4	1,015	$11,8 \cdot 10^{-3}$	2,95	3,95	$25,7 \cdot 10^{-4}$	2,57	3,57
85,5	1,25	$35,4 \cdot 10^{-3}$	8,85	9,85	$62,3 \cdot 10^{-4}$	6,23	7,23
88,9	1,3	$52,4 \cdot 10^{-3}$	13,1	14,1	$81,1 \cdot 10^{-4}$	8,11	9,11
90,6	1,325	$67,6 \cdot 10^{-3}$	16,9	17,9	$94,5 \cdot 10^{-4}$	9,45	10,45
92,3	1,35	$93,9 \cdot 10^{-3}$	23,5	24,5	$11,2 \cdot 10^{-3}$	11,2	12,2
94	1,375	0,1497	37,4	38,4	$13,7 \cdot 10^{-3}$	13,7	14,7
95,7	1,4	0,3492	87,3	88,3	$17,4 \cdot 10^{-3}$	17,4	18,4

Таблица 3

Значения постоянных интегрирования по (11) и (14) и прогибов по (9) и (12) для стержня с $f_m = 2,0$ мм

F, кН	$\frac{F}{F_3}$	Парабола по (9)			Синусоида по (12)		
		C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $u_{полн}$, мм	C_1	Дополнительный прогиб y, мм	Полный прогиб $u_{полн}$, мм
5	0,075	$4,64 \cdot 10^{-4}$	0,116	2,12	$1,13 \cdot 10^{-4}$	0,11	2,11
10	0,15	$9,8 \cdot 10^{-4}$	0,245	2,25	$2,39 \cdot 10^{-4}$	0,24	2,24
17,1	0,25	$18,3 \cdot 10^{-4}$	0,458	2,46	$4,4 \cdot 10^{-4}$	0,44	2,44
34,2	0,5	$46,8 \cdot 10^{-4}$	1,17	3,17	$11,1 \cdot 10^{-4}$	1,11	3,11
51,3	0,75	$96,9 \cdot 10^{-4}$	2,42	4,42	$22,4 \cdot 10^{-4}$	2,24	4,24
68,4	1,0	0,0207	5,17	7,17	$44,8 \cdot 10^{-4}$	4,48	6,48
69,4	1,015	0,0218	5,45	7,45	$46,9 \cdot 10^{-4}$	4,69	6,69
85,5	1,25	0,0647	16,17	18,17	0,0113	11,3	13,3
88,9	1,3	0,0956	23,9	25,9	0,0146	14,6	16,6
90,6	1,325	0,1232	30,8	32,8	0,0171	17,1	19,1
92,3	1,35	0,1709	42,73	44,73	0,0202	20,2	22,7
94	1,375	0,2721	68,03	70,03	0,0247	24,7	26,7
95,7	1,4	0,6341	158,5	160,5	0,0314	31,4	33,4

В графической форме результаты представлены на рис. 3, где кривые деформирования, полученные при использовании параболической базисной функции, показаны сплошной линией, тригонометрические функции — пунктирной линией, а границы эйлеровой силы выделены толстой линией.

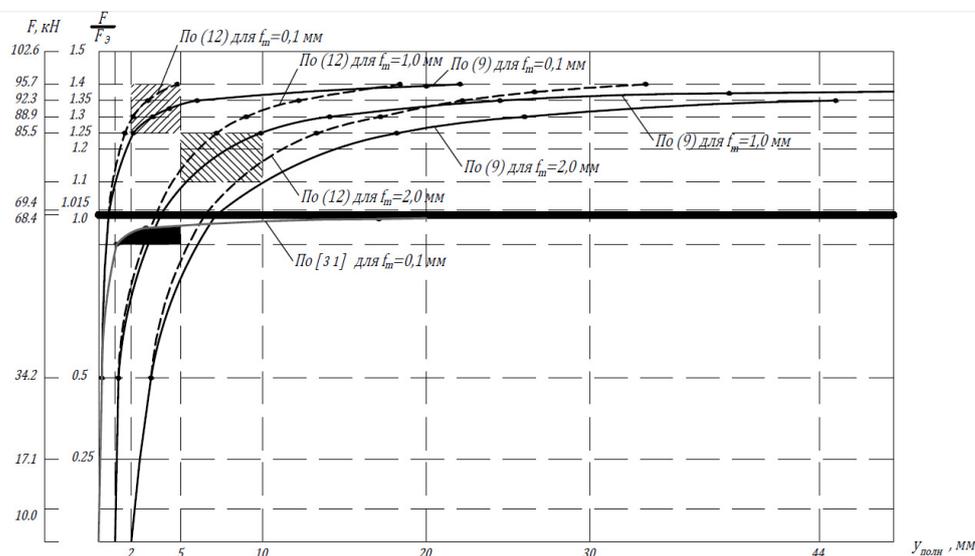


Рис. 3. Графики зависимости прогиба посередине высоты стержня от сжимающей силы при различных значениях f_m

Анализ табличных и графических данных показывает, что кривые роста прогибов отдаленно напоминают известную бифуркационную диаграмму «нагрузка — прогиб». Начальная погибь стержня приводит задачу к потере устойчивости 2-го рода с вопросом — какое значение сжимающей силы следует считать критическим? Особенно это актуально для исчезающе малой погиби с $f_m = 0,1$ мм. Заметим, что при нагрузке примерно до $1,25F_3 = 85,5$ кН прогибы не превышают $1/500$ длины пролета. До нагрузки $1,4F_3 = 95,7$ кН прогибы не превосходят $1/200$ пролета (на рис. 3 эта область затонирована восходящей штриховкой). Таким образом, представляется целесообразным полагать, что критической силой является $F_{кр} = 1,25F_3$.

При $f_m = 0,1$ мм прогиб, превышающий $1/200$ пролета в этом случае, преодолевается при нагрузке примерно $1,15F_3$. При нагрузке $\approx 1,25F_3$ перемещения начинают превышать $1/100$ пролета (на рис. 3 эта область затонирована нисходящей штриховкой). Таким образом, для этого стержня по деформационному критерию можно полагать предельной силой $1,15 < F_{кр} < 1,25F_3$.

Для стержня с $f_m = 2,0$ мм продольная сила, соответствующая прогибу в $1/200$ пролета, составляет $< F_3 = 68,4$ кН, прогиб, соответствующий $1/100$ длины пролета, преодолевается при $1,15F_3$ (на рис. 3 эта область затонирована

на точками). Поэтому критической силой можно полагать значение $F_{кр} \approx 1,0 F_3$.

При классическом подходе величина дополнительного прогиба определяется по общеизвестной формуле из [31]:

$$y = \frac{f_m}{\frac{F_3}{F} - 1}. \quad (15)$$

Результаты ее использования для тех же ступеней нагружения показаны на рис. 3 бледной линией (область допустимых прогибов обозначена заливкой).

Вид изогнутой оси стержня в форме параболы (сплошная линия) и синусоиды (пунктирная линия) для различных ступеней нагружения приведен на рис. 4. На начальных этапах деформирования разница в прогибах носит характер погрешности, а при проявлении градиентных эффектов синусоида адекватнее аппроксимирует вид оси.

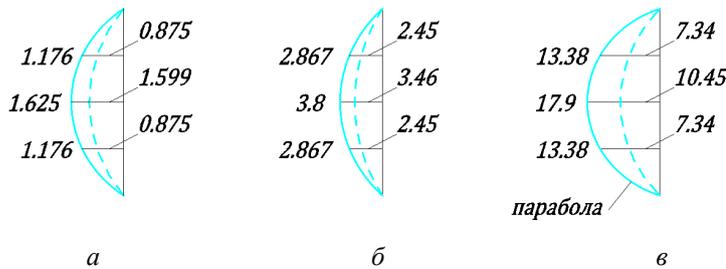


Рис. 4. Вид изогнутой оси стержня по (9) и (12) для различных ступеней нагружения:

$a — F = 0,5F_3$; $b — F = 1,0F_3$; $v — F = 1,325F_3$

Отличительной характеристикой конкретного сжимаемого стержня по [31] является отношение максимальной погиби к радиусу инерции поперечного сечения в плоскости наименьшей жесткости $\zeta = \frac{f_m}{i_x}$. В нашем случае:

$$\zeta_{0,1} = 0,0173;$$

$$\zeta_{1,0} = 0,173;$$

$$\zeta_{2,0} = 0,347.$$

То есть чем больше эта величина, тем быстрее должны нарастать дополнительные прогибы при росте сжимающей силы, что, вообще говоря, означает возрастающую деформативность.

По результатам, представленным в табл. 1—3, построены графики в полуобратных координатах, представленные на рис. 5. На эти координаты наложена координатная система, которая в полулогарифмических координатах показывает зависимость величины полного прогиба в зависимости от отношения допустимого полного прогиба $|y_{полн}|$ к величине максимальной погиби f_m .

Пунктирными линиями показаны кривые для различных значений f_m . Области реально разрешаемых прогибов для каждого случая затонированы.

Совместный анализ рис. 3 и 5 показывает качественное отличие поведения системы при использовании инкрементальной модели деформирования материала, удовлетворительно совпадающее с [27]. Это заключается не только в том, что прогибы нарастают при нагрузках, больших эйлеровой силы, но и в том, что, чем больше начальная погибь, отнесенная к радиусам инерции, тем больше сопротивляемость. То есть чем больше величина начальной погиби y_m , тем меньшее значение дополнительного прогиба будет требоваться для усиления градиентного эффекта.

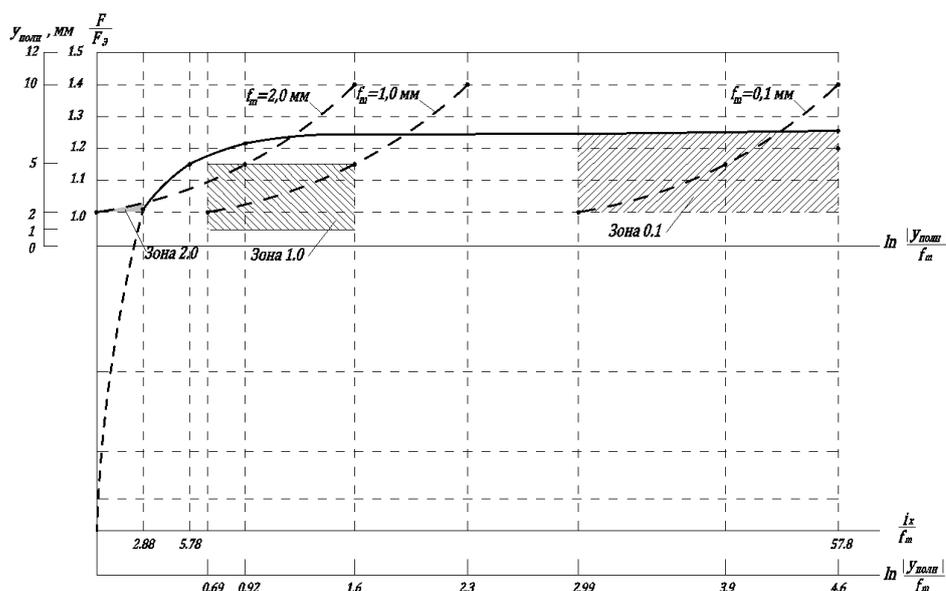


Рис. 5. Графики зависимости полного относительного дополнительного прогиба от сжимающей силы при различных начальных погибях

Выводы

На основе выполненного анализа деформирования сжимаемого стержня с начальной погибью при индуцированной анизотропии сформированы следующие выводы:

1. Приведенные в статье теоретические построения подтверждают ранее опубликованные результаты, что в сжато-изогнутом стержне вследствие неоднородности напряженного состояния в сечениях создается индуцированная видом напряженного состояния криволинейная анизотропия со сложно изменяющимися упругими характеристиками.
2. Продемонстрирована эффективность решения соответствующего уравнения изогнутого стержня в отклоненном состоянии. Решение строится на вариационном анализе прогибов стержня с использованием метода Бубнова — Галеркина.
3. Установлено заметное увеличение силы, соответствующей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.

Результаты решения удовлетворительно совпадают с результатами, ранее полученными авторами численными методами.

4. Установлена взаимосвязь между степенью начальной кривизны стержня и ростом дополнительного прогиба при проявлении градиентных эффектов.

5. Новые решения свидетельствуют об уточненной оценке устойчивого состояния стержня в сжато-изогнутом деформированном состоянии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Xiao Y., Zhang Z., Wang J. Granular hyperelasticity with inherent and stress-induced anisotropy // *Acta Geotech.* 2020. Vol. 15. Pp. 671—680.
2. Бусько В. Н., Осипов А. А. Применение магнитошумового метода для контроля механической анизотропии ферромагнитных материалов // *Приборы и методы измерений.* 2019. Т. 10. № 3. С. 281—292.
3. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов / А. А. Попович, В. Ш. Суфияров, Е. В. Борисов, И. А. Полозов, Д. В. Масайло, А. В. Григорьев. // *Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия.* 2016. № 3. С. 4—11.
4. Ельцов Р. И. Разработка технологического процесса изготовления сварных конструкций // *Строительные материалы и изделия.* 2021. Том 4. № 5. С. 35—44.
5. Одесский П. Д., Гурьева Е. С. Влияние пластической деформации на анизотропию механических свойств стальных листов большой толщины для строительных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений.* 1991. № 1. С. 70—77.
6. Муравьев В. В., Муравьева О. В., Волкова Л. В. Влияние анизотропии механических свойств тонколистового стального проката на информативные параметры волн Лэмба // *Сталь.* 2016. № 10. С. 75—79.
7. Finelli A., Labanti M. Analysis of the influence of the anisotropy induced by cold rolling on duplex and super-austenitic stainless steels // *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2010. Vol. 13. Pp. 24—30.
8. Loginov Y. N., Puzanov M. P. Influence of properties anisotropy on stress-deformed state at rolling stripes from electrical steel // *Chernye Metally.* 2018. Vol. 10. Pp. 22—27.
9. Коновалов О. В., Арзамаскова Л. М., Евдокимов Е. Е. Векториальные модели констант упругой податливости и констант упругой жесткости при исследовании неоднородности упругих свойств поликристаллов // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура.* 2022. Вып. 4(89). С. 99—105.
10. Устинов К. Б. О наведенной анизотропии механических свойств эластомеров // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2019. № 5. С. 27—36.
11. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites/ К. А. Mokhireva, A. Svistkov, V. N. Solod'ko, L. Komar, K. Stöckelhuber // *Polymer testing.* 2017. Vol. 59. Pp. 46—54.
12. Шадрин В. В., Мохирева К. А., Комар Л. А. Анизотропия механических свойств напленных вулканизаторов под воздействием внешней нагрузки // *Вестник Пермского федерального исследовательского центра.* 2017. № 1. С. 93—98.
13. Корнеев С. А., Корнеев В. С., Романюк Д. А. Математическое моделирование эффекта наведенной деформационной анизотропии резинокордного упругого элемента плоской муфты // *Омский научный вестник.* 2017. № 3(153). С. 10—15.
14. Комар Л. А., Мохирева К. А., Морозов И. А. Исследование появления анизотропных свойств полимерных нанокомпозитов в результате предварительного деформирования в условиях двухосного нагружения // *Вестник Пермского федерального исследовательского центра.* 2017. № 2. С. 61—66.
15. Калашиников С. Ю. Экспериментальная проверка модели деформирования материала в условиях неоднородного напряженного состояния: монография. Волгоград : Изд-во ВолгГТУ, 2017. 80 с.
16. Колчунов В. И., Федоров В. С. Понятийная иерархия моделей в теории сопротивления строительных конструкций // *Промышленное и гражданское строительство.* 2020. № 8. С. 16—23.
17. Петров В. В. Инкрементальные уравнения механики деформируемого тела в полных функциях // *Вестник отделения строительных наук.* 2010. Вып. 14: в 2 т. Т. 1. С. 159—166.

18. *Зиновьев А. С.* Напряженно-деформированное состояние системы «плита — слой основания» на базе инкрементальной модели деформирования // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Вып. 1(37). С. 27—33.
19. *Карпенко Н. И.* Модель деформирования железобетона в приращениях и расчет балок-стенок и изгибаемых плит с трещинами: монография. Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. 153 с.
20. *Петров В. В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. М. : Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.
21. *Кунавцев В. В.* Базисные функции метода двусторонних оценок в задачах устойчивости упругих неоднородно сжатых стержней // Вестник МГСУ. 2013. № 6. С. 63—70.
22. *Иноземцев В. К., Синева Н. Ф., Иноземцева О. В.* Инкрементальная модель для исследования устойчивости высотного сооружения на неоднородном основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. № 2. С. 41—46.
23. *Antipin I. A., Vlasova N. Yu.* Incremental approach to regional strategizing: Theory, methodology practices // Journal of New Economy. 2020. Vol. 21. Iss. 3. Pp. 73—90.
24. *Kalashnikov S. Yu., Gurova E. V., Kuramshin R. H., Yaziev B.* About the Distortion Model of Operational Compressed-Bent Bars with Induced Anisotropy // International Scientific Conference on Building Life-cycle Management. Information Systems and Technologies. 2022. Vol. 231. Pp. 95—102.
25. *Kalashnikov S. Yu., Gurova E. V., Bandurin N. G.* Longitudinal Compression of a Rod with Initial Deflection Acquiring Induced Anisotropy // Industrial and Civil Construction. 2022. Vol. 436. Pp. 145—152.
26. *Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г.* Применение метода Бубнова — Галеркина для анализа деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2022. Вып. 1(86). С. 132—144.
27. *Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Бандурин Н. Г.* Продольное сжатие стержня с начальной погибью, приобретающего наведенную анизотропию // Строительство и реконструкция. 2023. № 2(106). С. 25—38.
28. *Балдин В. А., Потанов В. Н., Фадеев А. А.* О сопротивлении стали деформированию при неравномерном распределении напряжений // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. № 5. С. 23—26.
29. *Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Курамышин П. Х.* Программа вариационного анализа критического состояния стержня с индуцированной анизотропией: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023660958 // Российская Федерация. № 2023660493 : заявл. 25.05.2023 : опубли. 25.05.2023.
30. *Bandurin N. G., Kalashnikov S. Yu.* One example of comparison between the efficiency of two approaches to differential equations computational solution // Materials Science Forum. 2018. Vol. 931. Pp. 170—173.
31. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М. : Физматгиз, 1963. 880 с.

© Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г., Машакарян А. С., 2024

Поступила в редакцию
в сентябре 2024 г.

Ссылка для цитирования:

Калашиников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г., Машакарян А. С. Вариационный анализ деформирования сжимаемого стержня с начальной погибью при индуцированной анизотропии // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Вып. 4(97). С. 41—55. DOI: 10.35211/18154360_2024_4_41.

Об авторах:

Калашиников Сергей Юрьевич — д-р техн. наук, проф., зав. каф. экспертизы и эксплуатации объектов недвижимости, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; kalashnikov@vstu.ru

Гурова Елена Владимировна — канд. техн. наук, доц., доц. каф. экспертизы и эксплуатации объектов недвижимости, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; eun.cafedra@yandex.ru

Шведов Евгений Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; esheg@rambler.ru

Машакарян Арарат Сергеевич — аспирант, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; woozyroll@yandex.ru

**Sergey Yu. Kalashnikov, Elena V. Gurova, Evgeniy G. Shvedov,
Ararat S. Mashakarian**

Volgograd State Technical University

VARIATIONAL ANALYSIS OF DEFORMATION OF A COMPRESSIBLE ROD WITH INITIAL BENDING UNDER INDUCED ANISOTROPY

The longitudinal bending of a flexible rectilinear rod having an initial technological imperfection in the form of an initial die is considered. The inhomogeneity of the stress state in the bent state leads to constrained deformations causing variability of the elastic characteristics of the material. To obtain the equation of the rod in the deflected state, the theory of deformation of bodies in inhomogeneous stress fields with induced anisotropy of properties proposed earlier by the authors is used. The solution is based on the variational analysis of the deflections of the rod using the Bubnov — Galerkin method. The growth of the maximum deflection at the steps of successive loading with increasing force is analysed. Three variants of initial curvatures, including vanishing small curvature, are considered. Approximate integration is performed using simple basis functions. Regardless of the degree of initial curvature and the choice of the approximating function, a noticeable increase in the compressive force corresponding to a significant increase in deflections compared to the bifurcation approach is found.

Key words: initial curvature, stress gradient, critical forces, induced anisotropy, basis functions.

For citation:

Kalashnikov S. Yu., Gurova E. V., Shvedov E. G., Mashakarian A. S. [Variational analysis of deformation of a compressible rod with initial bending under induced anisotropy]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2024, iss. 4, pp. 41—55. DOI: 10.35211/18154360_2024_4_41.

About authors:

Sergey Yu. Kalashnikov — Doctor of Engineering Sciences, Professor, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; kalashnikov@vstu.ru

Elena V. Gurova — Candidate of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; eun.cafedra@yandex.ru

Evgeniy G. Shvedov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; esheg@rambler.ru

Ararat S. Mashakarian — Postgraduate student, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; woozyroll@yandex.ru