

УДК 625.7.8

**Т. К. Акчурин<sup>а</sup>, Б. А. Бондарев<sup>б</sup>, И. А. Седых<sup>б</sup>, К. Н. Макаров<sup>б</sup>**

<sup>а</sup> Волгоградский государственный технический университет

<sup>б</sup> Липецкий государственный технический университет

## **ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОЦЕССА ВИБРОПОЛЗУЧЕСТИ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

Статья посвящена проблеме исследования деформаций ползучести при многократном повторном нагружении (виброползучести) полимерных композиционных материалов (ПКМ) и интерпретации этого процесса. Применены различные методы с построением математических моделей. Актуальность исследований заключается в том, что ПКМ, работающие в условиях динамического нагружения, обладают повышенной деформативностью, которая до настоящего времени мало изучена. Рассматриваются различные варианты описания этого процесса с применением методов математической статистики, с разделением кривых виброползучести на классы в зависимости от коэффициентов асимметрии цикла приложения нагрузки, с построением трехфакторного эксперимента, а также метода наименьших квадратов.

**Ключевые слова:** полимерный композиционный материал, виброползучесть, метод квадратичной регрессии на гиперкубе, метод наименьших квадратов.

Известно, что деформации виброползучести служат индикатором повреждаемости материала и зачастую используются при оценке циклической долговечности элементов из полимерных композиционных материалов (ПКМ) [1]. Ранее в [2] для интерпретации этого процесса были разработаны модели кривых виброползучести сжатых полимербетонных элементов, которые строились в зависимости от уровня нагружения, количества циклов нагрузления, коэффициента асимметрии цикла приложения нагрузки. В табл. 1 представлены уровни варьирования усталостных характеристик при испытаниях полимербетона ФАМ на выносливость.

Таблица 1

*Уровни варьирования усталостных характеристик при испытаниях полимербетона ФАМ*

Факторы	Уровень			Интервал варьирования
	Нижний	Основной	Верхний	
Коэффициенты асимметрии цикла $\rho(X_1)$	0,1	0,35	0,60	0,25
Количество циклов до разрушения $N(X_2)$	$1,5 \cdot 10^6$	$2,0 \cdot 10^6$	$2,5 \cdot 10^6$	$0,5 \cdot 10^6$
Коэффициент выносливости $K_{b, pul}(X_3)$	0,35	0,40	0,45	0,05

Кривые виброползучести [3] можно разделить на три класса для каждого значения коэффициента асимметрии цикла  $\rho$ . Описание классов этих кривых производится в зависимости от  $\rho$ .

Например, для  $\rho = 0,1$ :

первый класс:

$$x_1 \in [0,48; 068], x_2 \in [0; 3,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,1; y \in [5,19]; \quad (1)$$

второй класс:

$$x_1 \in [0,4; 0,46], x_2 \in [0; 3,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,1; y \in [3,18]; \quad (2)$$

третий класс:

$$x_1 \in [0,38; 0,45], x_2 \in [0; 3,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,1; y \in [5,19]. \quad (3)$$

Для  $\rho = 0,3$ :

первый класс:

$$x_1 \in [0,36; 0,46], x_2 \in [0; 2,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,3; y \in [7,15]; \quad (4)$$

второй класс:

$$x_1 \in [0,4; 0,46], x_2 \in [0; 2,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,3; y \in [9,18]; \quad (5)$$

третий класс:

$$x_1 \in [0,46; 0,5], x_2 \in [0; 2,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,3; y \in [14,21]. \quad (6)$$

Для  $\rho = 0,6$ :

первый класс:

$$x_1 \in [0,46; 0,66], x_2 \in [0; 0,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,6; y \in [12,19]; \quad (7)$$

второй класс:

$$x_1 \in [0,48; 0,68], x_2 \in [0; 0,5 \cdot 10^6], x_3 = 0,6; y \in [16,22]; \quad (8)$$

третий класс:

$$x_1 \in [0,52; 0,7], x_2 \in [0; 0,7 \cdot 10^6], x_3 = 0,6; y \in [20; 27,5]. \quad (9)$$

Для каждого из трех классов было построено полное регрессионное уравнение второго порядка вида:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_3^2 + \alpha_7 x_1 x_2 + \alpha_8 x_1 x_3 + \alpha_9 x_2 x_3. \quad (10)$$

Коэффициенты уравнения (10) исследованы на значимость, для них определены доверительные интервалы и определены коэффициенты корреляции параметров  $x_i$  с выходом  $y$ .

Получены и исследованы также уравнения только со значимыми коэффициентами.

Модели деформации виброползучести для областей параметров вида (1), (4), (7). Количество точек  $N = 7$ ,  $\sigma = 1,2008$ .

$$y = -21,826 + 128,91 \cdot x_1 + 1,383 \cdot x_2 - 63,406 \cdot x_3 - 114,26 \cdot x_1^2 - 0,60156 \cdot x_2^2 + 1,654 \cdot x_3^2 - 8,1551 \cdot x_1 \cdot x_2 + 138,9 \cdot x_1 \cdot x_3 - 2,0784 \cdot x_2 \cdot x_3. \quad (11)$$

Парные коэффициенты корреляции:

$$R\left(\frac{y}{x_1}\right) = 0,69034; \quad R\left(\frac{y}{x_2}\right) = 0,49626; \quad R\left(\frac{y}{x_3}\right) = 0,40719; \quad R\left(\frac{y}{x_1^2}\right) = 0,699;$$

$$R\left(\frac{y}{x_2^2}\right) = 0,439; \quad R\left(\frac{y}{x_3^2}\right) = 0,407; \quad R\left(\frac{y}{x_1 \cdot x_2}\right) = 0,6169; \quad R\left(\frac{y}{x_2 \cdot x_3}\right) = 0,575.$$

Модели деформации виброползучести для областей параметров первого вида со значимыми коэффициентами ( $\sigma = 3,2848$ ) [3—10]:

$$y = 5,6847 + 8,121 \cdot x_3 + 0,4113 \cdot x_2^2.$$

Вторым способом описания кривых виброползучести является построение модели по результатам трехфакторного эксперимента, матрица которого представлена в табл. 2 [11].

Таблица 2

Матрица трехфакторного композиционного плана второго порядка

Номер опыта	Кодировка				$Y$
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
1	1	-1	-1	-1	120
2	1	1	-1	-1	130
3	1	-1	1	-1	130
4	1	1	1	-1	135
5	1	-1	-1	1	140
6	1	1	-1	1	145
7	1	-1	1	1	143
8	1	1	1	1	155
9	1	-1,215	0	0	160
10	1	1,215	0	0	165
11	1	0	-1,215	0	170
12	1	0	1,215	0	175
13	1	0	0	-1,215	200
14	1	0	0	1,215	180
15	1	0	0	0	190

Для нахождения коэффициентов в модели рассмотрим два варианта их нахождения [12]:

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i \cdot X_i + \sum_{i \neq j=1}^n B_{ij} \cdot X_i \cdot X_j + \sum_{i=i}^n B_{ii} \cdot X_i^2,$$

где  $n = 3$  — число контролируемых факторов.

Так как свойство ортогональности не выполняется для столбцов, содержащих квадраты значений факторов, для обеспечения ортогональности всех столбцов матрицы планирования вместо квадратов значений факторов вводят новые переменные величины:

$$x_{ki}^* = x_{ki}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ki}^2, \quad (12)$$

где  $j = 1, \dots, k; i = 1, \dots, n$ .

По нижеследующим формулам рассчитываем коэффициенты  $B_i$ :

$$B_i = \frac{\sum_{i=0}^n x_{ij} \cdot y_i}{n}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (13)$$

$$B_{lm} = \frac{\sum_{i=0}^n x_{il} \cdot x_{im} \cdot y_i}{n}, \quad l \neq m. \quad (14)$$

Коэффициенты  $B_i$  по методу квадратичной регрессии на гиперкубе:

$$B_0 = 155,867, B_1 = 2,53833, B_2 = 2,27167, B_3 = 2,91333, B_{12} = -8,62325,$$

$$B_{13} = -6,65495, B_{23} = -3,21042, B_{11} = 0,13333, B_{22} = 0,13333, B_{33} = -0,1333.$$

С помощью полученных коэффициентов рассчитываем теоретические значения функции для каждого из 15 опытов:

$$\hat{Y}_1 = 143,2878, \hat{Y}_2 = 147,8311, \hat{Y}_3 = 147,5644,$$

$$\hat{Y}_4 = 153,1744, \hat{Y}_5 = 149,3811, \hat{Y}_6 = 153,9244,$$

$$\hat{Y}_7 = 153,1244, \hat{Y}_8 = 158,7344, \hat{Y}_9 = 153,5525,$$

$$\hat{Y}_{10} = 159,7206, \hat{Y}_{11} = 156,7821, \hat{Y}_{12} = 162,3023,$$

$$\hat{Y}_{13} = 161,0874, \hat{Y}_{14} = 168,1668, \hat{Y}_{15} = 169,3664.$$

Сравниваем исходную модель с расчетной (рис. 1) и представляем графическую интерпретацию полученной модели (рис. 2), найденной по методу планирования эксперимента в звездных точках.

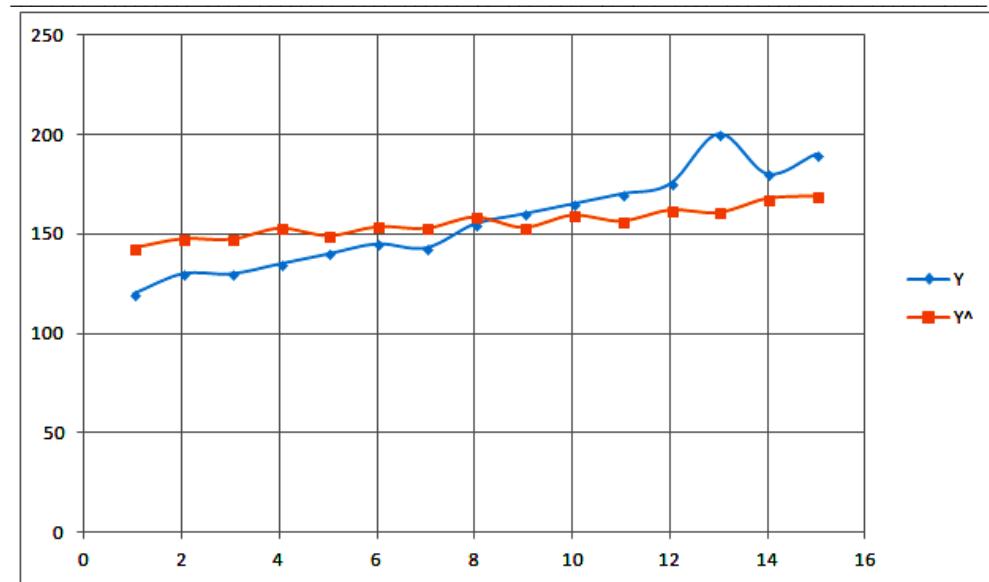


Рис. 1. График сравнения исходных и теоретических значений функции, найденных по методу планирования эксперимента в звездных точках

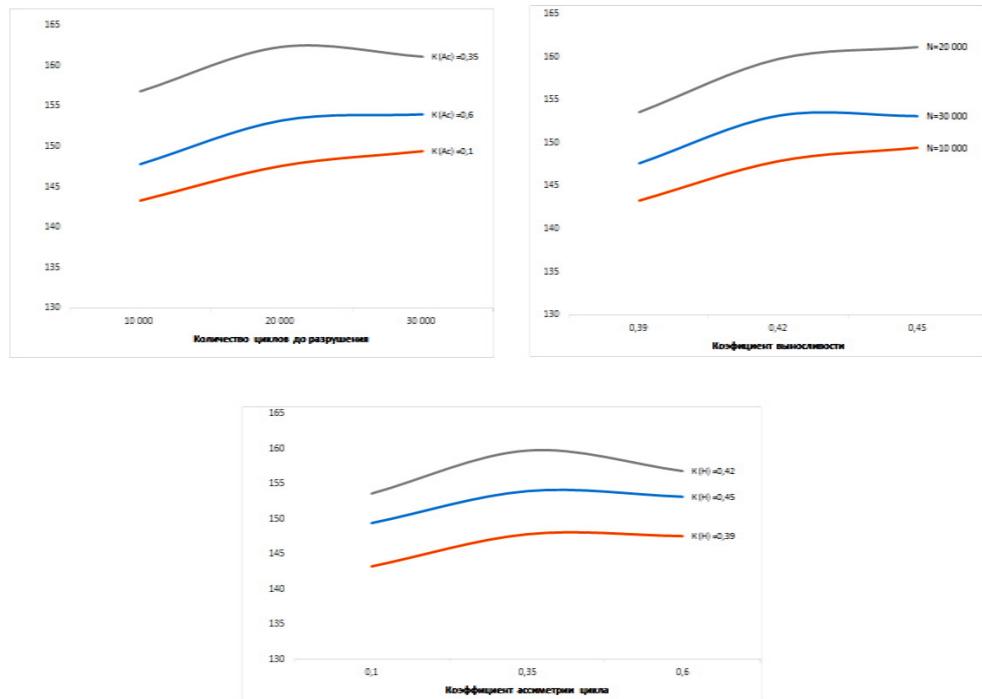


Рис. 2. Графическая интерпретация полученной математической модели, найденной по методу квадратичной регрессии на гиперкубе в звездных точках

Третим способом нахождения коэффициентов эксперимента является метод наименьших квадратов [13]. Он является математическим методом, используется для нахождения оптимальных параметров функции. Для этого метода составляем промежуточные расчеты (рис. 3).

	x1*y	x2*y	x3*y	x1*x2*y	x1*x3*y	x2*x3*y	x1*x1*y	x2*x2*y	x3*x3*y
1	-120	-120	-120	120	120	120	32,3804	32,3804	32,3804
1	130	-130	-130	-130	-130	130	35,07877	35,07877	35,07877
1	-130	130	-130	-130	130	-130	35,07877	35,07877	35,07877
1	135	135	-135	135	-135	-135	36,42795	36,42795	36,42795
1	-140	-140	140	140	-140	-140	37,77713	37,77713	37,77713
1	145	-145	145	-145	145	-145	39,12632	39,12632	39,12632
1	-143	143	143	-143	-143	143	38,58664	38,58664	38,58664
1	155	155	155	155	155	155	41,82468	41,82468	41,82468
1	-194,4	0	0	0	0	0	119,3699	-116,826	-116,826
1	200,475	0	0	0	0	0	123,1002	-120,477	-120,477
1	0	-206,55	0	0	0	0	-124,128	126,8305	-124,128
1	0	212,625	0	0	0	0	-127,779	130,5608	-127,779
1	0	0	-243	0	0	0	-146,033	-146,033	149,2123
1	0	0	218,7	0	0	0	-131,429	-131,429	134,2911
1	0	0	0	0	0	0	-138,731	-138,731	-138,731

Рис. 3. Промежуточные расчеты для метода наименьших квадратов

После рассчитываем коэффициенты  $B_i$  [14, 15]:

$$B_i = Y_i \left( \left( L_i^T \cdot L_i \right)^{-1} L_i^T \right). \quad (15)$$

Коэффициенты  $B_i$  по методу наименьших квадратов:  $B_0 = 153,09960$ ,

$$B_1 = 0,02499, B_2 = 0,02154, B_3 = 0,02389,$$

$$B_{12} = 0,00204, B_{13} = 0,00159, B_{23} = -0,00224,$$

$$B_{11} = -0,17219, B_{22} = -0,13212, B_{33} = -0,06861.$$

Рассчитываем теоретические значения функции для каждого из 15 опытов:

$$\hat{Y}_1 = 132,7394, \hat{Y}_2 = 136,5973, \hat{Y}_3 = 136,6965,$$

$$\hat{Y}_4 = 142,9358, \hat{Y}_5 = 136,2194, \hat{Y}_6 = 142,7345,$$

$$\hat{Y}_7 = 140,7929, \hat{Y}_8 = 148,6343, \hat{Y}_9 = 151,1368,$$

$$\hat{Y}_{10} = 161,0972, \hat{Y}_{11} = 161,783, \hat{Y}_{12} = 171,1989,$$

$$\hat{Y}_{13} = 181,4943, \hat{Y}_{14} = 189,1059, \hat{Y}_{15} = 204,8339.$$

Сравниваем исходную модель с расчетной (рис. 4) и представляем графическую интерпретацию полученной модели (рис. 5), найденной по методу наименьших квадратов.

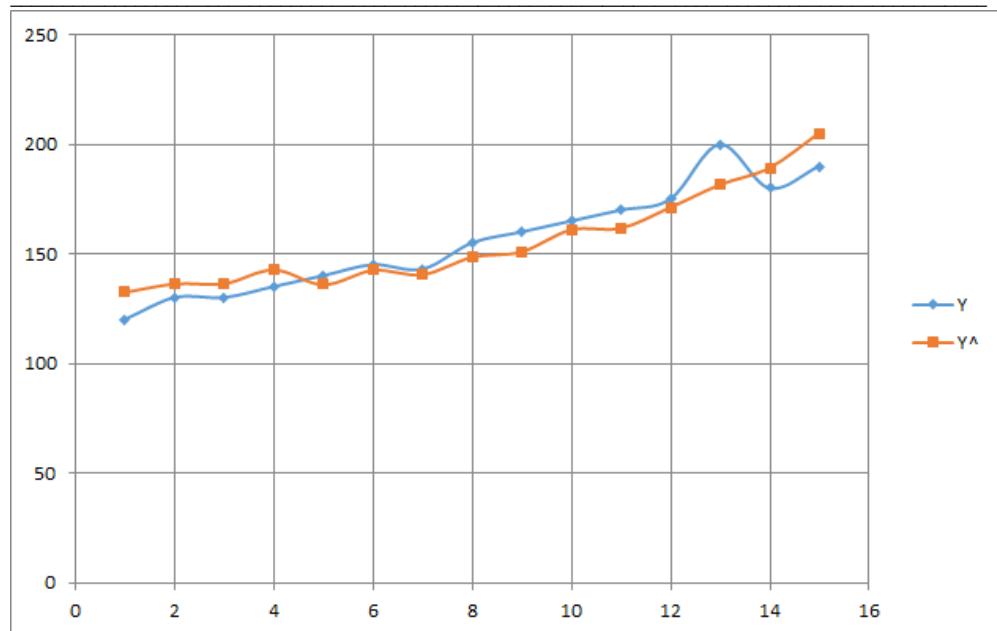


Рис. 4. График сравнения исходных и расчетных данных по методу наименьших квадратов

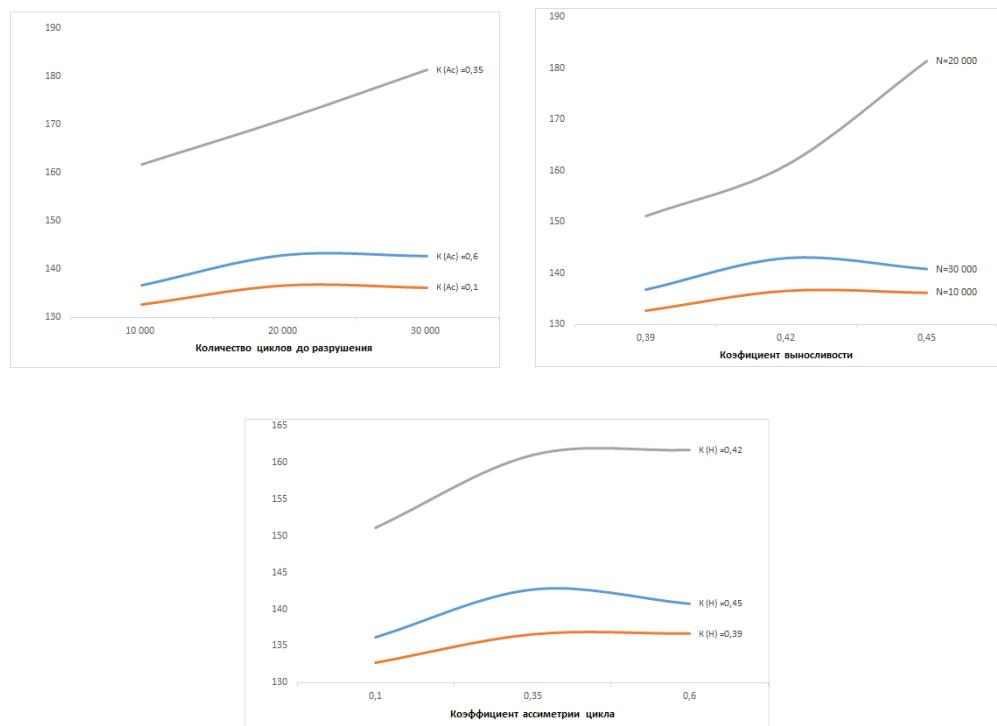


Рис. 5. Графическая интерпретация полученной математической модели, найденной по методу наименьших квадратов

В результате проведенных исследований выявлены классы кривых виброползучести и построены математические модели в зависимости от коэффициентов асимметрии циклов приложения нагрузки, уровня деформации наружения и количества циклов приложения нагрузки до разрушения ПКМ. Построенные модели отражают суть процесса виброползучести и могут быть применены для получения деформационных характеристик при многократном нагружении ПКМ.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бондарев А. Б., Бондарев Б. А., Борков П. В., Сапрыкин Р. Ю. Исследование виброползучести полимерных композиционных материалов в конструкциях транспортных сооружений при циклических испытаниях // Вестн. Волгогр. гос. архитектур.-строит. ун-та. Сер. : Стр-во и архитектура. 2016. Вып. 43(62). С. 35—41.
2. Патуров В. В. Полимербетоны. М. : Стройиздат, 1987. 285 с.
3. Выносливость композиционных материалов в конструкциях железнодорожных шпал : моногр. / Б. А. Бондарев, В. И. Харчевников, А. Д. Корнеев и др. ; под ред. В. И. Харчевникова. Липецк : Липецк. гос. техн. ун-т, 2002. 220 с.
4. Калашников В. И. Супер- и гиперпластификаторы. Микрокремнеземы. Бетоны нового поколения с низким удельным расходом цемента на единицу прочности // ALITinform: Цемент. Бетон. Сухие смеси. 2011. № 4(21). С. 52—60.
5. Tarakanov O. V., Belyakova E. A., Yurova V. S. Complex organomineral additives with hardening accelerator // Solid State Phenomena. 2018. Vol. 284. Pp. 929—935.
6. Ramachandran V. S., Feldman R. F., Beaudoin J. J. Concrete science: treatise on current research. London : Heyden, 1981. P. 427.
7. Yamamoto V. Retarders for concrete and their effects on setting time and shrinkage / Yoint Highway Research Project. 1972. P. 181.
8. Young J. F. A review of the mechanism of setretardation in Portland cement pastes containing organic admixtures // Cement and Concrete Research. 1972. No. 2. Pp. 415—433.
9. The influence of plasticizers on the composition of cement stone hydration products / O. V. Tarakanov, E. A. Belyakova, V. I. Kalashnikov, O. V. Grintsova, N. I. Makridin // Advances Engineering Research : International Symposium on Mechanical Engineering and material Science. 2016. Vol. 93. Pp. 186—191.
10. Tarakanov O., Belyakova E., Yurova V. On the issue of expanding the base of mineral and complex additives for cement // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 135. No. 22. P. 6.
11. Красовский Г. И. Планирование эксперимента. Минск : Изд-во БГУ, 1982. 302 с.
12. Бондарев А. Б., Седых И. А., Макаров К. Н., Жидков В. К. Планирование эксперимента при исследованиях выносливости конструкций из стеклопластикомербетона // Вестн. Липецк. гос. техн. ун-та. 2023. № 2(51). С. 13—22.
13. Barlow J. L. Chapter 9. Numerical aspects of solving linear least squares problems // Computational Statistics / Ed. by C. R. Rao : handbook of statistics. Vol. 9. North-Holland, 1993.
14. Седых И. А. Параметрическая идентификация квадратичных и кубических окрестностных моделей // Вестн. Липецк. гос. техн. ун-та. 2018. № 3(37). С. 13—17.
15. Макаров К. Н. Задача параметрической идентификации комплекснозначной динамической окрестностной модели // Тенденции развития современной науки : сб. тр. науч.-практ. конф. студентов и аспирантов Липецк. гос. техн. ун-та : в 2 ч. Ч. 2. Липецк, 2021. С. 44—45.

© Акчурин Т. К., Бондарев Б. А., Седых И. А., Макаров К. Н., 2025

Поступила в редакцию  
19.09.2025

Ссылка для цитирования:

Акчурин Т. К., Бондарев Б. А., Седых И. А., Макаров К. Н. Интерпретация процесса виброползучести полимерных композиционных материалов с применением методов математической статистики // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2025. Вып. 4(101). С. 114—122. DOI: 10.35211/18154360\_2025\_4\_114.

*Об авторах:*

**Акчурин Талгат Кадимович** — советник РААСН, канд. техн. наук, проф., проф. каф. строительных материалов и специальных технологий, Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; info@vgsu.ru

**Бондарев Борис Александрович** — д-р техн. наук, проф. каф. строительного материаловедения и дорожных технологий, Липецкий государственный технический университет. Российская Федерация, 398600, г. Липецк, ул. Московская, 30; smidt48@mail.ru

**Седых Ирина Александровна** — д-р техн. наук, доц., проф. каф. автоматизированных систем управления, Липецкий государственный технический университет. Российская Федерация, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30; sedykh-irina@yandex.ru

**Макаров Кирилл Николаевич** — аспирант каф. автоматизированных систем управления, Липецкий государственный технический университет. Российская Федерация, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30; kirik0-1@yandex.ru

**Talgal K. Akchurin<sup>a</sup>, Boris A. Bondarev<sup>b</sup>, Irina A. Sedykh<sup>b</sup>, Kirill N. Makarov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup> *Volgograd State Technical University*

<sup>b</sup> *Lipetsk State Technical University*

**INTERPRETATION OF THE VIBRATION CREEP PROCESS  
OF POLYMER COMPOSITE MATERIALS  
USING MATHEMATICAL STATISTICS METHODS**

This article examines the problem of the study of creep deformation under repeated loading (vibration creep) of polymer composite materials (PCMs) and the interpretation of this process. Various methods involving the construction of mathematical models are applied. The relevance of this research lies in the fact that PCMs operating under dynamic loading exhibit increased deformability, which has remained poorly understood. Various options for describing this process are considered using mathematical statistics methods, dividing vibration creep curves into classes depending on the asymmetry coefficients of the load application cycle, constructing a three-factor experiment, and employing the least-squares method.

**К e y w o r d s:** polymer composite material, vibration creep, quadratic regression method on a hypercube, least squares method.

*For citation:*

Akchurin T. K., Bondarev B. A., Sedykh I. A., Makarov K. N. [Interpretation of the vibration creep process of polymer composite materials using mathematical statistics methods]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2025, iss. 4, pp. 114—122. DOI: 10.35211/18154360\_2025\_4\_114.

*About authors:*

**Talgal K. Akchurin** — Candidate of Engineering Sciences, Professor, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; info@vgsu.ru; Scopus ID: 57190967539

**Boris A. Bondarev** — Doctor of Engineering Sciences, Lipetsk State Technical University. 30, Moskovskaya st., Lipetsk, 398600, Russian Federation; smidt48@mail.ru

**Irina A. Sedykh** — Doctor of Engineering Sciences, Docent, Lipetsk State Technical University. 30, Moskovskaya st., Lipetsk, 398055, Russian Federation; sedykh-irina@yandex.ru; ORCID: 0000-0003-0012-8103

**Kirill N. Makarov** — Postgraduate student, Lipetsk State Technical University. 30, Moskovskaya st., Lipetsk, 398055, Russian Federation; kirik0-1@yandex.ru; ORCID: 0009-0008-9556-7910