

УДК 624.04:519.6

**А. В. Игнатьев, О. В. Душко, М. И. Бочков, И. С. Завьялов,  
С. Ю. Иванов, А. Н. Колядов**

*Волгоградский государственный технический университет*

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСЧЕТА ПЛАСТИНОК  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА**

**Исследование выполнено за счет средств программы развития ВолгГТУ  
«Приоритет 2030» в рамках научного проекта № 45/654-24.**

Развиваются идеи метода конечных элементов в форме классического смешанного метода и основанных на нем алгоритмов расчета пластин. Приводится описание разработанного авторами программного комплекса расчета таких систем, акцентируется внимание на его преимуществах перед уже существующими на сегодняшний день расчетными комплексами. Производится апробация разработанного программного комплекса с помощью задач, предлагаемых экспертами, как верификационных для известного программного комплекса, основанного на методе конечных элементов в перемещениях.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** строительная механика, конечный элемент, стержневая система, пластинка, стрежень, классический смешанный метод, шарнирное соединение, матрица откликов, система разрешающих уравнений.

Метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее распространенных и универсальных численных методов решения сложных инженерных задач, в том числе расчета сложных строительных конструкций. При этом наибольшее распространение он получил в форме метода перемещений.

Одной из альтернатив МКЭ в перемещениях является МКЭ в смешанной форме. Эффективность этого метода часто упоминается учеными в области строительной механики различных профилей: в задачах динамики [1], задачах генетической [2] и конструктивной [3] нелинейности, задачах учета упруго-податливых свойств основания [4].

В рамках научной школы, основанной заслуженным деятелем науки и техники Российской Федерации, РСФСР, почетным работником высшего профессионального образования Российской Федерации, доктором технических наук, профессором Владимиром Александровичем Игнатьевым (1938—2023), развивается МКЭ в форме классического смешанного метода. В ряде работ представителей данной школы, возглавляемой в настоящее время А. В. Игнатьевым, продемонстрирована эффективность этого метода для расчета задач различного класса [5—9]. Большой вклад в развитие МКЭ в форме классического смешанного метода внесли ее представители: С. С. Рекунов — в развитие методов расчета систем с использованием пластинчатых конечных элементов [10], В. В. Габова — в расчет стержневых систем [11], М. И. Бочков — в решение задач нелинейной строительной механики [12]. Немаловажно отметить, что в рамках научной школы были разработаны алгоритмы понижения порядка систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высокого порядка [13, 14], в разработке которых принял участие И. С. Завьялов.

Кроме того, необходимо отметить и публикации других российских ученых [15—17], посвященные разработке смешанной формы МКЭ. В этих статьях приводится алгоритм получения коэффициентов матрицы отклика для изгибаемого прямоугольного конечного элемента пластины. Также описан базовый алгоритм расчета тонких изгибаемых пластин на основе МКЭ в виде классического смешанного МКЭ.

Таким образом, на сегодняшний день МКЭ в форме классического смешанного метода является методом, продемонстрировавшим свою эффективность применительно к широкому кругу задач, однако его внедрение в реальное проектирование и верификация осложнены отсутствием реализующих его программных продуктов. Это обосновывает необходимость разработки приложения, в котором будут реализованы все разработанные приложения.

Разработанный в рамках нашего исследования программный продукт реализует описанные ранее преимущества метода, предложенного нашей научной школой.

Приложение представляет собой настольную кроссплатформенную программу, предназначенную для статического анализа тонких прямоугольных пластин, основанного на МКЭ в форме классического смешанного метода. Графический интерфейс программы представлен на рис. 1.

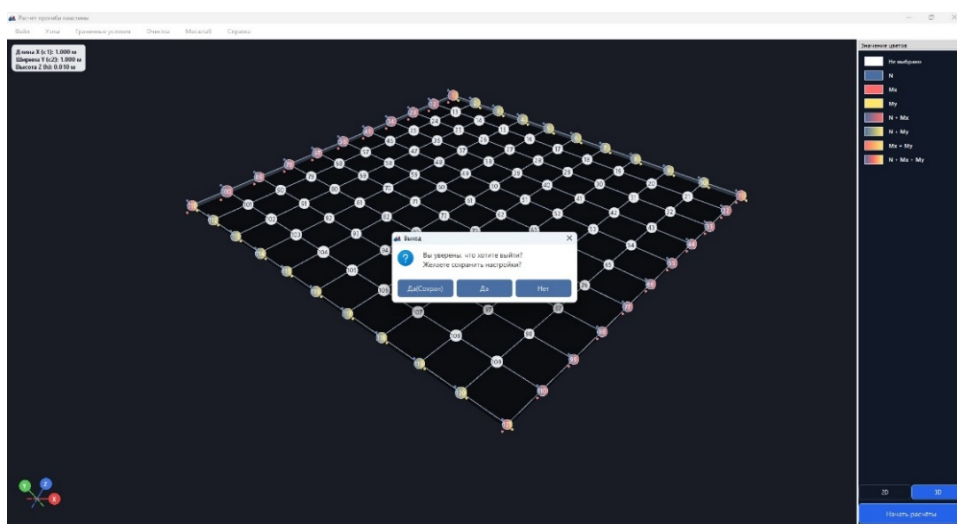


Рис. 1. Графический интерфейс СТАНТИП МКЭ КСМ

Программа реализована на языке C++ версии 17. Для построения графического интерфейса используется фреймворк Qt версии 5.14.2. Для решения систем линейных уравнений применяется библиотека линейной алгебры Eigen. Используемый стек технологий обеспечивает высокую производительность, удобный графический интерфейс и возможность переноса приложения на различные операционные системы.

Архитектура приложения организована по принципу разделения ответственности на несколько уровней: модель данных, вычислительное ядро, контроллеры и представления. В центре находится единая модель данных DataModel. В ней хранятся геометрические параметры пластины, размеры

расчетной сетки, физические свойства материала, параметры нагрузки и полный набор граничных условий. Численное ядро выделено в отдельный класс StatPlateSolver. В нем сосредоточен весь алгоритм расчета пластины с помощью МКЭ в форме классического смешанного метода.

Подробно с описанием алгоритмов МКЭ в форме классического смешанного метода для расчета тонких пластин можно ознакомиться в работах [5, 6, 8].

В программе используется пластинчатый конечный элемент (рис. 2).

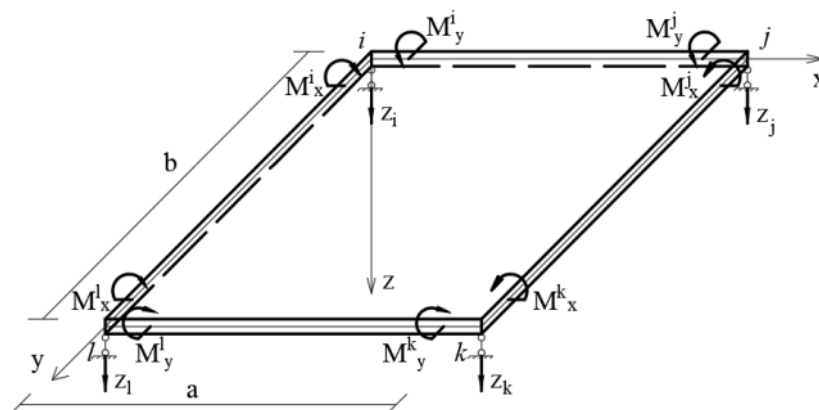


Рис. 2. Конечный элемент — тонкая пластина, работающая на изгиб

В общем виде конечный элемент пластинки, работающей на изгиб, обладает двенадцатью степенями свободы: в каждом узле по одному неизвестному перемещению  $z_i, z_j, z_k, z_l$  и по два неизвестных изгибающих момента, действующих в перпендикулярных плоскостях  $M_x^i, M_y^i, M_x^j, M_y^j, M_x^k, M_y^k, M_x^l, M_y^l$ .

Геометрия пластины определяется пользователем с помощью системы последовательных диалоговых окон, разработанных на платформе Qt. Особое внимание уделено системе граничных условий. В программе реализованы два основных режима работы с ними: набор типовых пресетов и детальное ручное задание. В списке типовых пресетов представлены классические схемы опирания прямоугольных пластин: жесткое защемление по контуру, свободное опирание, различные комбинации защемленных и свободных кромок и им подобные. При этом у пользователя сохраняется возможность вручную скорректировать списки узлов, добавив или убрав отдельные точки. Это позволяет моделировать сложные и комбинированные варианты опирания. Интерфейс окна создания расчетной схемы приведен на рис. 3.

Нагружение конструкции также задается в двух режимах. В простейшем случае используется равномерная распределенная нагрузка  $q$  по всей площади пластины. Пользователь вводит значение нагрузки, после чего оно переводится во внутреннюю систему единиц и автоматически распределяется по узлам в соответствии с принятой схемой. Для более сложных случаев предусмотрен ручной режим. В этом режиме пользователь выбирает конкретные узлы на схеме и задает для каждого индивидуальное значение нагрузки.

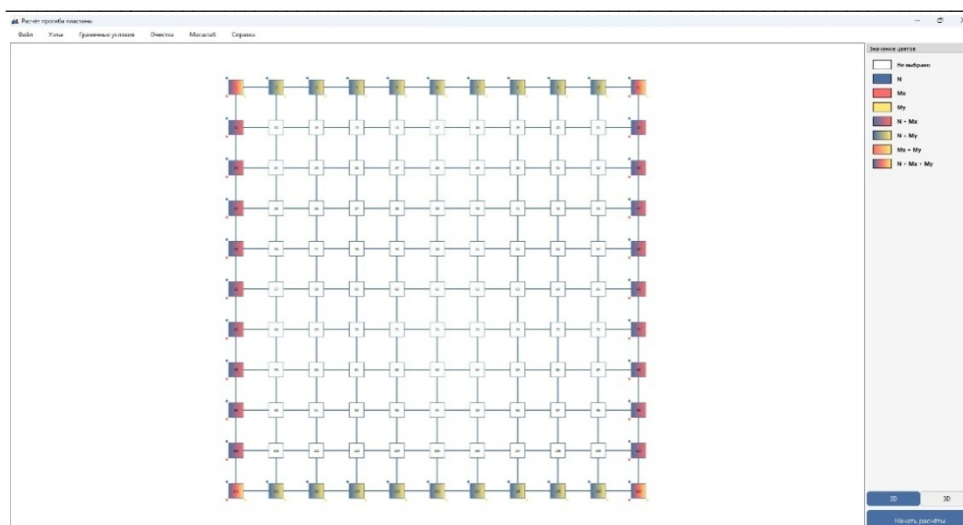


Рис. 3. СТАНТИП МКЭ КСМ. Задание граничных условий

Для наглядного анализа результатов расчета реализована система трехмерной визуализации. Такая визуализация облегчает понимание распределения прогибов и моментов по пластине и делает программу удобной для демонстраций и презентаций. Дополнительно реализована генерация изополей. По массивам значений прогибов и моментов строятся сглаженные цветовые карты с линиями равных значений. Интерфейс окна анализа результатов приведен на рис. 4.

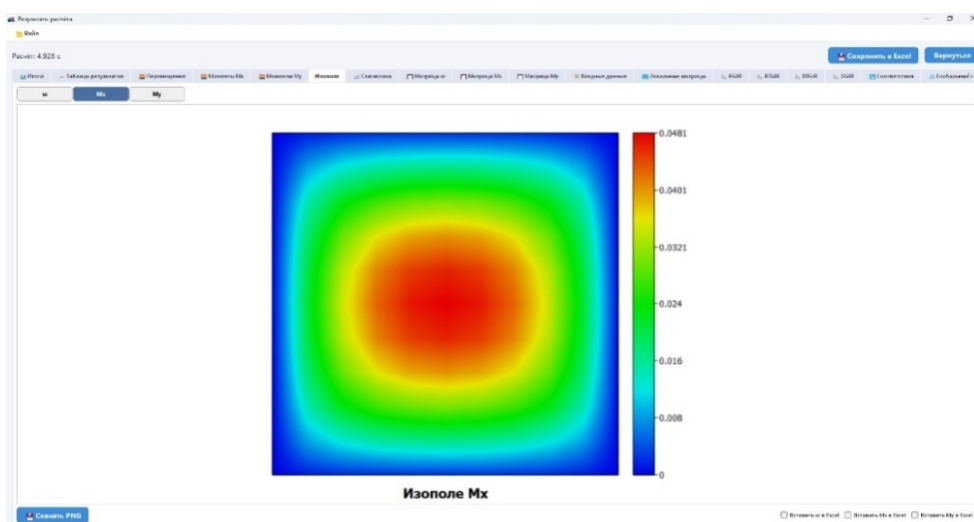


Рис. 4. СТАНТИП МКЭ КСМ. Анализ результатов

С использованием предложенной программы выполнен расчет прямоугольной консольной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Использованы следующие исходные данные:

$$a = 1 \text{ м}; b = 0,1 \text{ м}; h = 0,005 \text{ м}; \mu_x = \mu_y = 0,3; E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; q = 1700 \text{ Па}.$$

Граничные условия МКЭ в форме КСМ: во всех узлах жестко зашеченной кромки ( $x = 0$ ) прогиб равен нулю. Изгибающие моменты  $M_x$  исключаются из глобальной системы уравнений по свободной кромке ( $x = l$ ).

При решении задачи были рассмотрены два варианта схемы. В первом варианте коэффициент Пуассона  $\mu_x = \mu_y = 0,3$ , во втором  $\mu_x = \mu_y = 0$ , т. е. отсутствуют поперечные деформации. Разбиение на конечно-элементную сетку указано в табл., также указано количество конечных элементов. Общий вид расчетной схемы приведен на рис. 5. В результате расчета определено вертикальное перемещение  $w$  свободного края пластины, а также изгибающий момент в заделке  $M_x$ .

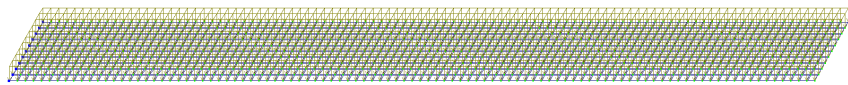


Рис. 5. Расчетная схема консольной пластины

На рис. 6—10 приведены деформированная схема пластины, мозаики перемещений  $w$ , изгибающих моментов  $M_x$ , позволяющие выполнить сравнение результатов расчета тестовой задачи.

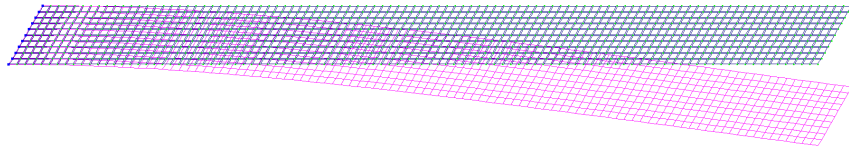


Рис. 6. Деформированная схема консольной пластины

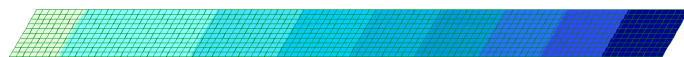
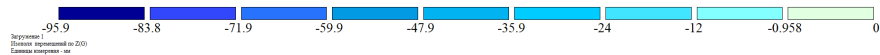


Рис. 7. Мозаика перемещений  $w$  при  $\mu_x = \mu_y = 0,3$

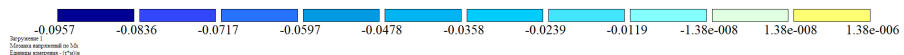


Рис. 8. Мозаика изгибающих моментов  $M_x$  при  $\mu_x = \mu_y = 0,3$

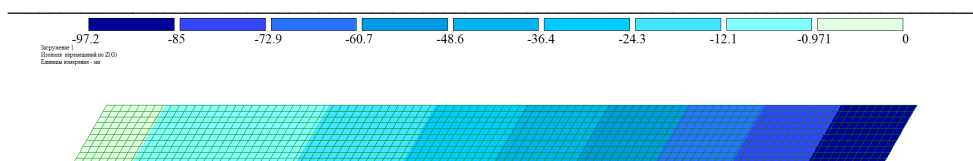


Рис. 9. Мозаика перемещений  $w$  при  $\mu_x = \mu_y = 0$

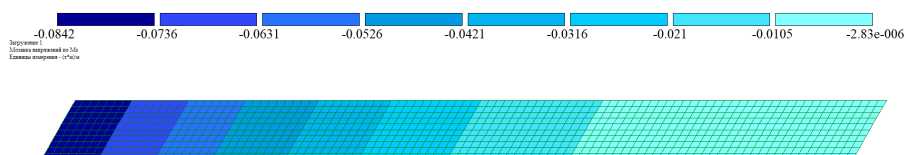


Рис. 10. Мозаика изгибающих моментов  $M_x$  при  $\mu_x = \mu_y = 0$

В табл. приведено сравнение результатов расчета этой пластины на основе МКЭ в форме КСМ с результатами, полученными в ПК «ЛИРА-САПР» и аналитическим решением.

*Сравнение численных результатов расчета на основе МКЭ в форме КСМ с результатами расчета в ПК «ЛИРА-САПР» и аналитическим решением*

Искомая величина	АР	Вариант расчета	МКЭ в перемещениях (ПК «ЛИРА-САПР»)	МКЭ в форме КСМ		
			1000 КЭ	40 КЭ	160 КЭ	1000 КЭ
Вертикальное перемещение свободной кромки, мм	-97,3	1-й	-95,9	-95,69	-95,83	-95,84
		2-й	-97,2	-90,40	-97,16	-97,15
Изгибающий момент в заделке, (Т · м)/м	-0,085	1-й	-0,0957	-0,0972	-0,1004	-0,1007
		2-й	-0,0842	-0,085	-0,085	-0,085

*Примечание:* АР — аналитическое решение (S. Timoshenko. Résistance des matériaux. Т. 1. Paris : Librairie Polytechnique Ch. Béranger, 1949).

На основании изложенного выше можно сделать следующие **выводы**:

1. В ходе исследования, основанного на МКЭ в форме смешанной формулировки (КСМ), была впервые решена ключевая задача расчета прямоугольной консольной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки. Сравнение результатов, полученных с помощью смешанного метода, с известным аналитическим решением и данными, полученными в программе «ЛИРА-САПР», продемонстрировало высокую сходимость и точность численных результатов, что подтверждает корректность математической модели метода для данного класса задач.

2. В результате разработки программного обеспечения была создана система, которая сочетает строгую математическую основу смешанной формулировки МКЭ для пластин с современным и удобным интерфейсом, реализованным на базе C++ 17 и Qt 5.14.2, а также эффективным вычислительным

ядром, использующим библиотеку Eigen. Такая структура делает приложение пригодным для учебных, исследовательских и крупных инженерных расчетов тонких прямоугольных пластин. В дальнейшем планируется провести верификацию программы для определения пригодности результатов для реального проектирования.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босаков С. В. Смешанный метод строительной механики в задачах динамики пластинок // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 3(296). С. 66—70. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.3.66.70. EDN: EDSKSI.
2. Петреня Е. Н., Петранин А. А. Технология поэтапного расчета строительных конструкций методом суперэлементов в смешанной формулировке // Строительная механика и конструкции. 2016. № 1(12). С. 5—18. EDN: WCEWXV.
3. Lukashevich A. A. Finite element models based on the approximation of discontinuous stress fields // Magazine of Civil Engineering. 2022. Vol. 110. Iss. 2. Art. No. 11004. DOI: 10.34910/MCE.110.4.
4. Козунова О. В. Некоторые вопросы расчета плоских рам на упругом основании на пространственную нагрузку // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 4(297). С. 17—24. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.4.17.24. EDN: FQAAPT.
5. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В., Жиделев А. В. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. 172 с. EDN: OWNUOH.
6. Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода (особенности и возможности применения) // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3(260). С. 55—60.
7. Ignatyev A. V., Ignatyev V. A. Specific features and advantages of the finite element method in the form of classical mixed method as an alternative for the traditional finite element method // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Vol. 10. No. 4. Pp. 121—124.
8. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М. : ACB, 2022. 306 с. EDN: CSOLBF.
9. Ignatyev V., Ignatiev A. V., Zavyalov I. The efficiency of application of triangular bending finite elements for plate calculation using the classical mixed-type approach to the finite-element method // Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles. Vol. 1 : Proceedings of the International Conference, St. Petersburg, 8—10 Feb. 2022. Vol. 509. Zlin : Springer Nature Switzerland AG, 2023. Pp. 963—971. DOI: 10.1007/978-3-031-11058-0\_98. EDN: RRDJGB.
10. Воронкова Г. В., Рекунов С. С. Особенности расчета пластинок по методу конечных элементов в смешанной форме // Вестн. Волгогр. гос. архитектур.-строит. ун-та. Сер. : Стр-во и архитектура. 2007. Вып. 7(26). С. 74—77.
11. Игнатьев А. В., Габова В. В. Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов плоской стержневой системы // Вестн. Волгогр. гос. архитектур.-строит. ун-та. Сер. : Стр-во и архитектура. 2009. Вып. 14(33). С. 71—74.
12. Bochkov M. I., Ignatyev V. A. Development of single-node finite elements for the calculation of systems with unilateral constraints by FEM in the form of the classical mixed method // Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety. ICCATS 2023. Lecture Notes in Civil Engineering. Vol. 400 / Eds. A. A. Radionov, D. V. Ulrikh, S. S. Timofeeva, V. N. Alekhin, V. R. Gasiyarov. Springer, Cham, 2024. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-47810-9\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-031-47810-9_21).
13. Ignatyev A. V., Ignatyev V. A. Mathematical modeling of an incomplete algebraic problem of eigenvalues and eigenvectors for obtaining a reduced frequency equation and solving it // VII International Symposium “Actual problems of computer modeling of structures and structures (APCSCE 2018)” / Russian Academy of Architecture and Construction Sciences. Novosibirsk : Novosibirsk State University of Architecture and Construction, 2018. P. 263.
14. Ignatyev A. V., Zavyalov I. S. Technique for solving finite element systems of high-order linear algebraic equations describing the stress-strain state of one-dimensional and two-dimensional structures // Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Construction, Architecture and

Technosphere Safety. ICCATS 2023, Sochi, 10—16 Sept. 2023. Vol. 400. Springer Cham, 2024. Pp. 232—243. DOI: 10.1007/978-3-031-47810-9\_22. EDN: MLGMLU.

15. Тухфатуллин Б. А., Путеева Л. Е., Григорьев А. И., Раков В. Д. Применение специального конечного элемента смешанного метода для расчета усиления стальной тропильной системы // Вестн. Белгор. гос. технолог. ун-та им. В. Г. Шухова. 2018. № 10. С. 43—51. DOI: 10.12737/article\_5bd95a73a46853.19300139. EDN: YMVPJJ.

16. Stress-strain state of elastic shell based on mixed finite element / Yu. V. Klochkov, V. A. Pshenichkina, A. P. Nikolaev, O. V. Vakhnina, M. Yu. Klochkov // Magazine of Civil Engineering. 2023. No. 4(120). Pp. 34—47. DOI: 10.34910/MCE.120.3.

17. Physically nonlinear shell deformation based on three-dimensional finite elements / Yu. V. Klochkov, A. P. Nikolaev, O. V. Vakhnina, T. A. Sobolevskaya, M. Yu. Klochkov // Magazine of Civil Engineering. 2022. No. 5(113). Pp. 159—170. DOI: 10.34910/MCE.113.14.

© Игнатъев А. В., Душко О. В., Бочков М. И., Завьялов И. С., Иванов С. Ю., Колядов А. Н., 2026

Поступила в редакцию  
26.01.2026

Ссылка для цитирования:

Компьютерное моделирование расчета пластинок методом конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатъев, О. В. Душко, М. И. Бочков, И. С. Завьялов, С. Ю. Иванов, А. Н. Колядов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2026. Вып. 1(102). С. 70—78. DOI: 10.35211/18154360\_2026\_1\_70.

Об авторах:

**Игнатъев Александр Владимирович** — д-р техн. наук, доц., проф. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

**Душко Олег Викторович** — д-р техн. наук, доц., зав. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; ovd28@mail.ru

**Бочков Максим Иванович** — канд. техн. наук, доц. каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1; stroymech@vgasu.ru

**Завьялов Иван Сергеевич** — ассистент каф. строительной механики, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

**Иванов Станислав Юрьевич** — канд. техн. наук, ассистент каф. строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

**Колядов Артем Николаевич** — студент, Волгоградский государственный технический университет (ВолГТУ). Российская Федерация, 400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1

**Alexander V. Ignatyev, Oleg V. Dushko, Maxim I. Bochkov, Ivan S. Zavyalov, Stanislav Yu. Ivanov, Artem N. Kolyadov**

*Volgograd State Technical University*

## COMPUTER SIMULATION OF PLATE CALCULATION BY THE FINITE ELEMENT METHOD IN THE FORM OF A CLASSICAL MIXED METHOD

The research was carried out at the expense of the funds of the development program of VSTU "Priority 2030", within the framework of scientific project No. 45/654-24.

In the article, the authors develop the ideas of the finite element method in the form of a classical mixed method and algorithms for calculating plates based on it. The description of the software

package developed by the authors for calculating such systems is given, and attention is focused on its advantages over the existing calculation complexes. The proposed software package is being tested using tasks proposed by experts as verification tasks for a well-known software package based on the finite element method in displacements.

**Key words:** structural mechanics, finite element, core system, plate, bar, classical mixed method, hinge joint, response matrix, system of resolving equations.

*For citation:*

Ignatyev A. V., Dushko O. V., Bochkov M. I., Zavyalov I. S., Ivanov S. Yu., Kolyadov A. N. [Computer simulation of plate calculation by the finite element method in the form of a classical mixed method]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura* [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Civil Engineering and Architecture], 2026, iss. 1, pp. 70—78. DOI: 10.35211/18154360\_2026\_1\_70.

*About authors:*

**Alexander V. Ignatyev** — Doctor of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-0733-8808

**Oleg V. Dushko** — Doctor of Engineering Sciences, Docent, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; ovd28@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3982-1899

**Maxim I. Bochkov** — Candidate of Engineering Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation; stroymech@vgasu.ru

**Ivan S. Zavyalov** — Assistant, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation

**Stanislav Yu. Ivanov** — Candidate of Engineering Sciences, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation

**Artem N. Kolyadov** — Student, Volgograd State Technical University (VSTU). 1, Akademicheskaya st., Volgograd, 400074, Russian Federation