Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к лабораторным работам

Составители О. М. Забродина, Н. А. Михайлова

Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 51-7(076.5)
ББК 22.1я73
П759

П759 **Прикладная** математика [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторным работам / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. О. М. Забродина, Н. А. Михайлова. — Электронные текстовые и графические данные (7,8 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Прикладная математика», приведены варианты индивидуальных заданий и примеры их выполнения, сформулированы контрольные вопросы по темам.

Для студентов технических специальностей 2-го курса заочной формы обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 51-7(076.5)
ББК 22.1я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данные методические указания составлены в соответствии с программой курса «Прикладная математика» и содержат описания пяти лабораторных работ по следующей схеме:

цель работы;
программное обеспечение;
теоретическое введение;
порядок выполнения работы;
пример выполнения лабораторной работы;
варианты индивидуальных заданий;
требования к отчету;
контрольные вопросы.

Вариант лабораторной работы определяется по сумме двух последних чисел зачетной книжки.

Лабораторная работа 1 выполняется как домашняя контрольная работа, лабораторные работы 2—5 выполняются на аудиторных занятиях.

Лабораторная работа 1
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы — знакомство с теорией по данной теме и применение ее в решении прикладных задач.

Теоретическое введение

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (ЗЛП) и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть ЗЛП задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные.

Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{1.3}$$

Допустим, что система (1.2) при условии (1.3) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (1.2) и (1.3) определяет полуплоскость с граничной прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,$$

где $i = \overline{1; m}$ и $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$

Линейная функция (1.1) при фиксированном значении Z является уравнением прямой:

$$C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}.$$

Построим многоугольник решений системы (1.2), (1.3) и график линейной функции (1.1) при $Z = 0$ (рис. 1.1). Тогда поставленной ЗЛП можно дать следующую интерпретацию: найти точку многоугольника решений, в которой прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ опорная и функция Z при этом достигает минимума.

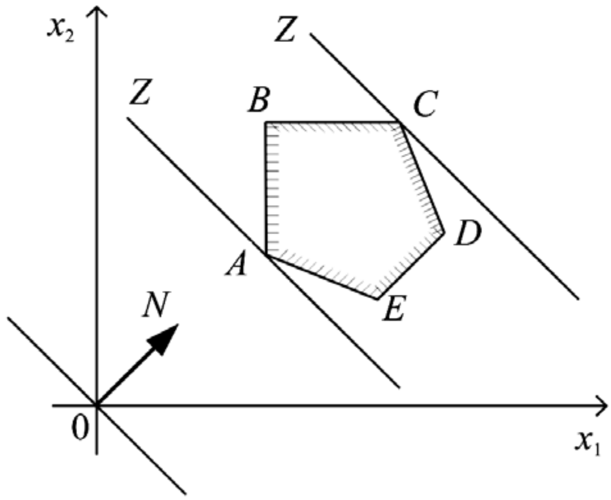


Рис. 1.1

Значения Z возрастают в направлении вектора $N = (C_1, C_2)$, поэтому прямую $Z = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора N.

Из рис. 1.1 видно, что прямая $Z = \text{const}$ дважды становится опорной — в точках A и C, что соответствует минимуму в точке A и максимуму в точке C. Координаты точки A (x_1; x_2) находим, решая систему уравнений для прямых AB и AE. Если многоугольник решений представляет неограниченную многоугольную область, то возможны два случая:

1) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь в направлении N или противоположном ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной; значит, линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис. 1.2, *а*);

2) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь, все же становится опорной. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограничена только сверху (рис. 1.2, *б*), только снизу (рис. 1.2, *в*) или и сверху и снизу (рис. 1.2, *г*).

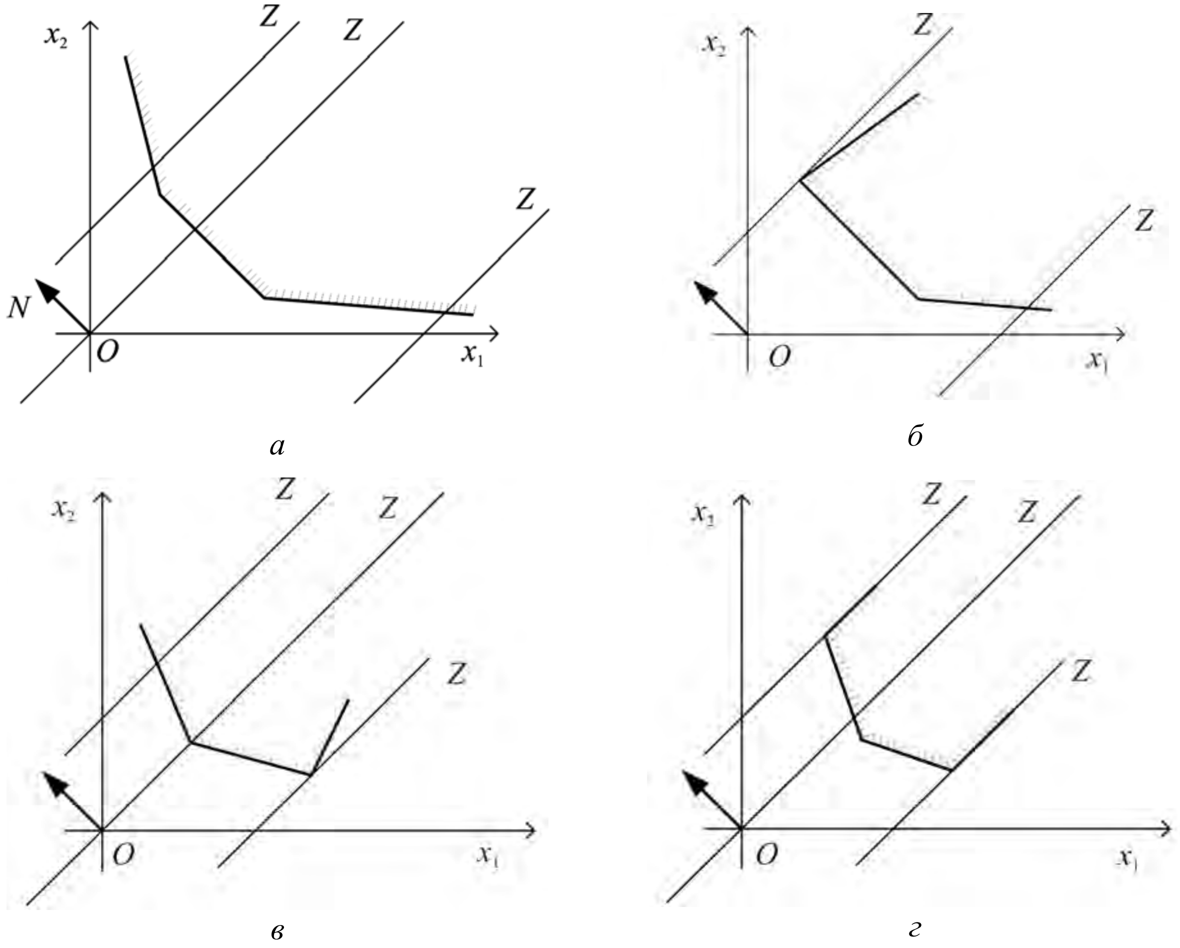


Рис. 1.2

В целом, с помощью графического метода может быть решена ЗЛП, система ограничений которой содержит n неизвестных и m независимых уравнений, если n и m связаны соотношением $n - m = 2$.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составить математическую модель задачи.

2. Построить многоугольник решений в системе координат x_1Ox_2.

3. Построить радиус-вектор и прямую $Z = 0$, проходящую через точку O (0; 0) перпендикулярно.

4. Провести прямые, параллельные прямой $Z = 0$, опорные по отношению к многоугольнику решений.

5. Найти оптимальные планы и значения Z_{min} и Z_{max}.

Пример выполнения лабораторной работы

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья — S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, записаны в постановке ЗЛП:

x_1 — количество единиц продукции P_1;

x_2 — количество единиц продукции P_2;

Z — функции цели (максимальная прибыль).

Решение. 1. Математическая модель задачи. Найти максимум функции

$$Z = 50x_1 + 40x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые (рис. 1.3):

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20\,(L_1), \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40\,(L_2), \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30\,(L_3); \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Взяв какую-либо точку, например $O\,(0; 0)$, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство.

Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник $OABCD$.

3. Для построения прямой $50x_1 + 40x_2 = 0$ строим радиус-вектор $N\,(50; 40) = 10\,(5; 4)$ и через точку O проводим прямую, перпендикулярную N.

4. Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рис. 1.3 видно, что прямая $Z = \text{const}$ становится опорной в точке C, где Z принимает максимальное значение.

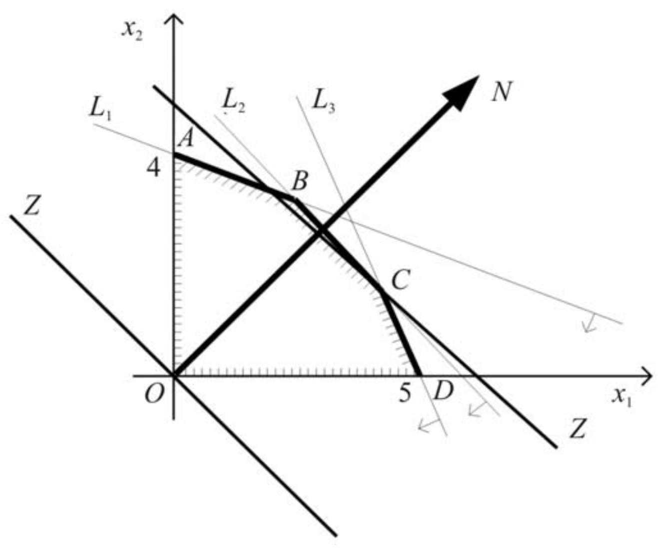


Рис. 1.3

5. Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 \approx 3{,}9$; $x_2 \approx 1{,}7$.

Подставляя x_1 и x_2 в Z, получаем $Z_{\max} \approx 260{,}3$.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, необходимо запланировать производство 3,9 единиц продукции P_1 и 1,7 единиц продукции P_2.

Варианты индивидуальных заданий

Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях.

Вариант 1

$$Z = x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 2

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17, \\ x_1 + 2x_2 \le 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 3

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 4

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 5

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 3x_1 - x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \ge 40; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 6

$$Z = 5x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 7

$$Z = 6x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 8

$$Z = x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 9

$$Z = x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 26; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 10

$$Z = 3x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 16, \\ 11x_1 + 2x_2 \ge 48, \\ x_1 + 2x_2 \ge 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 11

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 5, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 40; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 12

$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 13

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 17x_1 + x_2 \ge 53, \\ 2x_1 + x_2 \le 23, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 14

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 - 10x_2 \le 17, \\ 13x_1 + 2x_2 \ge 41, \\ x_1 + 3x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 15

$$Z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 16

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 17

$$Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48, \\ 2x_1 + x_2 \le 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 18

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -10x_1 + 9x_2 \le 17, \\ 2x_1 + 13x_2 \ge 41, \\ 3x_1 + x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Требования к отчету

Отчет должен содержать:
1) титульный лист;
2) условие задачи;
3) чертеж с графической иллюстрацией решения задачи, пояснения к нему;
4) все промежуточные окончательные вычисления;
5) вывод и анализ полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
3. Каким может быть многоугольник решений?
4. Что геометрически означает каждое неравенство в системе ограничений?

Лабораторная работа 2
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Цель работы — усвоение симплекс-метода и приобретение практических навыков его применения.

Программное обеспечение — табличный процессор (ТП) MS Excel.

Теоретическое введение

Решение любой ЗЛП можно найти лишь симплексным методом или методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из методов, необходимо записать ЗЛП в канонической форме.

Симплексный метод основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает или убывает (при условии, что заданная ЗЛП имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Переход возможен, если известен какой-либо опорный план.

Количество опорных планов определяется числом C_n^m. При больших n и m найти оптимальный план, перебирая все опорные планы, трудно. Поэтому необходимо иметь схему, по которой осуществляется упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплексный метод решения ЗЛП.

Пусть дана ЗЛП. Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \qquad (2.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1; n}. \qquad (2.3)$$

Здесь a_{ij}, b_j и c_j $\left(i = \overline{1; m};\ j = \overline{1; n}\right)$ — заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Векторная форма данной задачи: найти максимум функции

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_i \qquad (2.4)$$

при условиях

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + \ldots + x_nA_n = A_0; \qquad (2.5)$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1;\, n}. \qquad (2.6)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix};\ \ldots;\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix};\ A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};\ \ldots;\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1A_1 + b_2A_2 + \ldots + b_mA_m = A_0$, то по определению опорного плана $X = (b_1;\ b_2;\ \ldots;\ 0;\ldots;\ 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компоненты вектора X равны 0). Этот план определяется системой единичных векторов A_1, A_2, …, A_m, а также вектором A_0, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса.

Пусть

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}A_i,$$

где $j = \overline{1;\, n}$.

Положим,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij};$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j,$$

где $j = \overline{1;\, n}$.

Так как векторы A_1, A_2, …, A_m единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и $Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}a_{ij}$, а также $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij}a_{ij} - C$.

Т е о р е м а 2.1. Опорный план $X^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots;\ x_m^*;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ задачи (2.4—2.6) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j = \overline{1;\, n}$.

Т е о р е м а 2.2. Если $\Delta_k < 0$ для некоторого $j = k$ и среди чисел $a_{ik} \leq 0$ $(i = \overline{1;\, m})$ нет положительных $\left(a_{ik} \leq 0\right)$, то целевая функция (2.4) задачи (2.4—2.6) не ограничена на множестве ее планов.

Т е о р е м а 2.3. Если опорный план X задачи (2.4—2.6) не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X', такой, что $Z(X') > Z(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать в симплексную таблицу.

Порядок выполнения работы

1. Составить математическую модель задачи.

2. Решить ЗЛП симплекс-методом, используя для расчетов ТП MS Excel. Алгоритм метода включает следующие этапы:

1) найти первоначальный опорный план;

2) составить симплекс-таблицу, используя для расчетов ТП MS Excel;

3) выяснить, имеется ли хотя бы одно положительное (при минимуме) или отрицательное (при максимуме) число Δj; если нет, то найденный опорный план оптимален; если же среди чисел Δj имеются положительные (отрицательные), то либо установить неразрешимость задачи, либо перейти к новому опорному плану;

4) найти направляющие столбец и строку; направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине числом Δj, а направляющая строка — минимальным из отношений компонент столбца A_0 к положительным компонентам направляющего столбца;

5) используя метод исключения неизвестных Жордана — Гаусса, сделать новый базисный вектор A_j единичным; при этом определить компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов A_j по векторам нового базиса и числа Z' и Δ'_j; все эти числа записать в новой симплекс-таблице;

6) проверить найденный опорный план на оптимальность; если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то следует снова искать разрешающий элемент и далее действовать по алгоритму, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости — закончить процесс решения.

3. Проверить полученный результат с помощью инструментального средства Solver (Решатель) ТП MS Excel (команда «Сервис/Поиск решения»).

Пример выполнения лабораторной работы

Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия, р.	9	10	16	—

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* — через x_2, изделий *C* — через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \tag{2.7}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C* составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \tag{2.8}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2 и x_3 могут принимать только неотрицательные значения: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2.7) требуется найти такое, при котором функция (2.8) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 — это неиспользуемое количество сырья 1-го вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$,

где $P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$.

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0; 0; 0; 360; 192; 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для 1-й итерации (табл. 2.2), подсчитываем значения F_0, $(z_j - c_j)$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C, P_0) = 0;\ z_1 = (C, P_1) = 0;\ z_2 = (C, P_2);\ z_3 = (C, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;\ \ z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\ \ z_3 - c_3 = 0 - 16 = -16.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 2.2

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4	—	—	0	–9	–10	–16	0	0	0

Примечание. Вычисления во всех симплекс-таблицах выполнены в ТП Excel.

Этот план не оптимален, так как в 4-й строке имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9$; $z_2 - c_2 = -10$; $z_3 - c_3 = -16$. На основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца P_3, в базис введем вектор P_3.

Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим

$$\theta_0 = \min\left(b_i / a_{i3}\right)$$

для $a_{i3} > 0$, т. е.

$$\theta_0 = \min\left(360/12;\ 192/8;\ 180/3\right) = 192/8 = 24.$$

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса.

Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для 2-й итерации (табл. 2.3), используя вычислительные возможности ТП MS Excel (ввод формульных данных с абсолютными и относительными адресами, копирование формул, форматирование числовых данных).

Таблица 2.3

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–1,50	0
2	P_3	16	24	0,75	0,5	1	0	0,125	0
3	P_6	0	108	2,75	1,50	0,00	0,00	–0,38	1
4	—	—	384	3	–2	0	0	2	0

Найденный на 2-й итерации план задачи не является оптимальным, необходимо повторить все действия (табл. 2.4).

Таблица 2.4

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	0,111111	–0,16667	0
2	P_3	16	20	0,25	0	1	–0,05556	0,208333	0
3	P_6	0	96	1,25	0	0	–0,16667	–0,125	1
4	—	—	400	5	0	0	0,222222	1,666667	0

В табл. 2.4 в 4-й оценочной строке все числа неотрицательные. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{max} = 400$.

Проверим шаги вычисления, пользуясь командой ТП MS Excel «Сервис/Поиск решения».

Введем необходимые данные и ограничения (рис. 2.1).

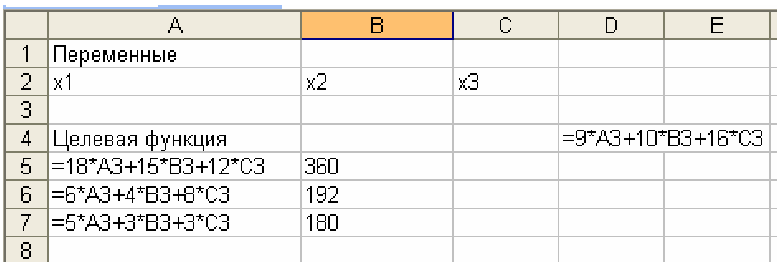


Рис. 2.1

Выберем команды «Сервис/Поиск решения». Заполним окно диалога «Поиск решения» (рис. 2.2).

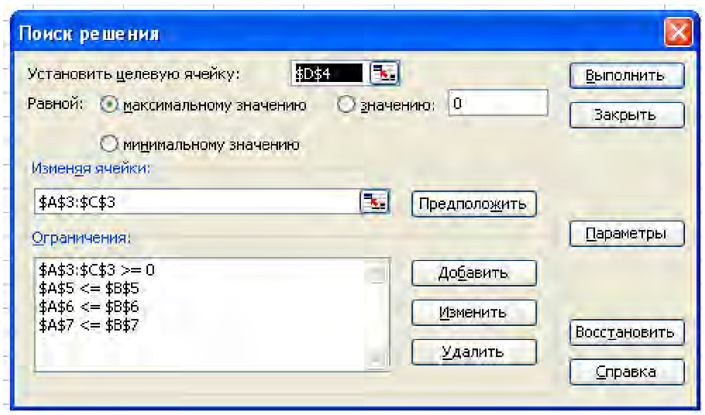


Рис. 2.2

Установим параметры в окне «Параметры поиска решения» (рис. 2.3).

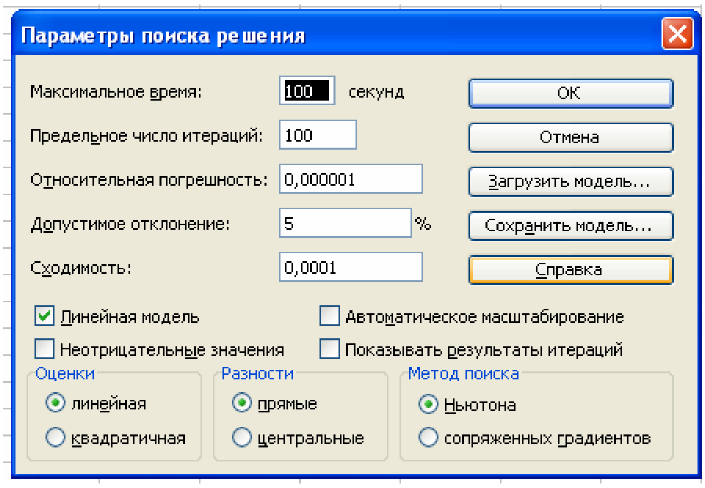


Рис. 2.3

После команды «Выполнить» откроется окно диалога «Результаты поиска решения», которое сообщит, что решение найдено (рис. 2.4).

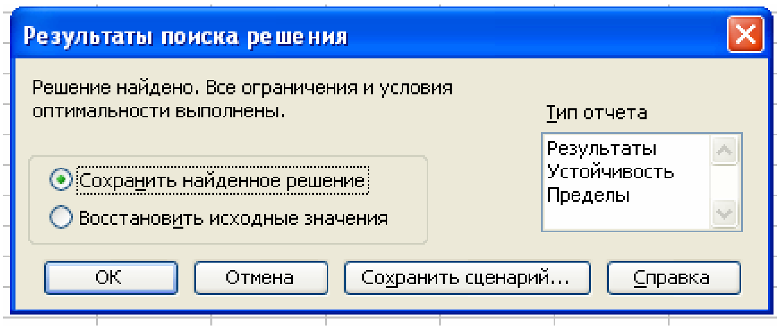


Рис. 2.4

Оптимальный план и максимальное значение целевой функции появятся в соответствующих ячейках таблицы (рис. 2.5).

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2	x3	
3	0	8	20	
4	Целевая функция			400
5	360	360		
6	192	192		
7	84	180		

Рис. 2.5

Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1—9. Предположим, что для производства двух видов продукции *A* и *B* можно использовать только материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида *A* расходуется a_1 кг материала первого сорта, a_2 кг материала второго сорта, a_3 кг материала третьего сорта. На изготовление единицы изделия вида B расходуется b_1 кг материала первого сорта, b_2 кг материала второго сорта, b_3 кг материала третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта c_1 кг, материала второго сорта c_2 кг, материала третьего сорта c_3 кг. От реализации единицы готовой продукции вида A фабрика имеет прибыль α р., продукции вида B — β р. Определить, исходя из данных, представленных в табл. 2.5, максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B.

Таблица 2.5

№ варианта	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β
1	20	15	14	28	9	1	758	526	541	10	2
2	15	15	9	33	25	3	571	577	445	8	10
3	11	13	13	21	15	3	741	741	822	5	3
4	14	12	8	8	4	2	624	541	376	7	3
5	19	16	19	26	17	8	868	638	853	5	4
6	14	15	20	40	27	4	1200	993	1097	5	13
7	9	15	15	27	15	3	606	802	840	11	6
8	13	13	11	2	11	1	608	614	575	5	7
9	8	14	14	7	8	1	417	580	591	5	5

Варианты 10—18. Предположим, что в производстве двух видов товаров продукции A и B принимают участие три предприятия. При этом на изготовление единицы изделия A первое предприятие тратит a_1 ч, второе — a_2 ч, третье — a_3 ч. На изготовление единицы изделия B первое предприятие тратит b_1 ч, второе — b_2 ч, третье — b_3 ч. На производство всех изделий первое предприятие может затратить не более чем c_1 ч, второе — не более чем c_2 ч, третье — не более чем c_3 ч. От реализации единицы готовой продукции вида A прибыль составляет α р., а вида B — β р. Определить, исходя из данных, представленных в табл. 2.6, максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B.

Таблица 2.6

№ варианта	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β
10	7	6	5	8	3	1	476	364	319	11	10
11	10	9	3	18	15	1	1238	1118	523	11	13
12	8	7	7	12	9	5	612	492	562	11	9
13	8	7	7	10	5	2	459	379	459	9	9
14	10	9	5	6	3	1	735	765	355	8	4
15	5	6	7	7	6	1	256	283	363	9	7
16	3	9	10	5	3	2	414	723	788	12	16
17	7	7	8	13	8	2	363	327	429	6	4
18	7	7	8	5	2	1	347	300	357	11	7

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

3) анализ полученных результатов и вывод.

Контрольные вопросы

1. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования и проверить его на оптимальность?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана задачи линейного программирования на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?
7. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?
8. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

Лабораторная работа 3
ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Цель работы — приобретение навыков решения транспортной задачи с составлением первоначального плана распределения поставок различными методами.

Программное обеспечение — табличный процессор MS Excel.

Теоретическое введение

Понятие двойственности. Каждую ЗЛП можно определенным образом сопоставить с некоторой другой ЗЛП, называемой двойственной или сопряженной по отношению к исходной (прямой). Исходная задача сформулирована как стандартная ЗЛП: найти максимальное значение целевой функции

$$z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + q_{mn}x_n \le b_m; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } \; j = \overline{1; n}. \tag{3.3}$$

Двойственная задача формулируется так: найти минимальное значение целевой функции

$$f = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \qquad (3.4)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \ge c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$y_i \ge 0, \text{ где } i = \overline{1;\, m}. \qquad (3.6)$$

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача по отношению к исходной составляется по следующим правилам:

1) целевая функция исходной задачи (3.1—3.3) задается на максимум, а целевая функция двойственной (3.4—3.6) — на минимум;

2) матрица A коэффициентов при неизвестных в (3.2) и аналогичная матрица в (3.5) выводятся друг из друга транспонированием;

3) число пременных $(y_1, \ldots, y_m)$ в задаче (3.4—3.6) равно числу соотношений в системе (3.2) исходной задачи, а число ограничений в двойственной задаче равно числу переменных в исходной задаче;

4) коэффициентами при неизвестных в целевой функции $f(x)$ являются свободные члены из системы (3.2) исходной задачи, а свободными членами в (3.5) являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции $Z(x)$ исходной задачи.

Двойственные пары обычно подразделяют на симметричные и несимметричные.

Виды математических моделей двойственных пар представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Несимметричная задача		Симметричная задача	
исходная	двойственная	исходная	двойственная
$Z_{\min} = CX$ 1. $AX = A_0$ $X \ge 0$	$f_{\max} = YA_0$ $YA \le C$ $Y \ge 0$	$Z_{\min} = CX$ 3. $AX \ge A_0$ $X \ge 0$	$f_{\max} = YA_0$ $YA \le C$ $Y \ge 0$
$Z_{\max} = CX$ 2. $AX = A_0$ $X \ge 0$	$f_{\min} = YA_0$ $YA \le C$ $Y \ge 0$	$Z_{\max} = CX$ 4. $AX \ge A_0$ $X \ge 0$	$f_{\min} = YA_0$ $YA \le C$ $Y \ge 0$

Таким образом, прежде чем записать двойственную задачу для исходной, систему ограничений исходной задачи нужно привести к соответствующему виду.

Пример. Записать математическую модель двойственной задачи для следующей исходной:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } \; j = \overline{1;3}.$$

Это симметричная задача; чтобы привести ее к модели 3, нужно умножить 1-е неравенство на (–1):

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6. \end{cases}$$

Двойственная задача записывается следующим образом:

$$f = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1, \\ y_1 + y_2 + 2yx_3 \le 5; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \text{ где } \; j = \overline{1;3}.$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач. Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной ЗЛП и двойственной ей.

Исходная:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \tag{3.7}$$

$$\text{при } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \text{ где } i = \overline{1;m}, \tag{3.8}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } \; j = \overline{1;n}. \tag{3.9}$$

Двойственная:

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{3.10}$$

$$\text{при } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge C_j, \text{ где } \; j = \overline{1;n}, \tag{3.11}$$

$$y_i \ge 0, \text{ где } \; i = \overline{1;m}. \tag{3.12}$$

Каждая из задач фактически является ЗЛП независимо одна от другой, однако при нахождении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится и решение другой задачи.

Существующие зависимости между решениями двойственной пары задач характеризуются следующими теоремами.

Т е о р е м а 3.1 (1-я теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач (3.7—3.9) и (3.10—3.12) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, а значения целевых функций при их оптимальных планах равны между собой, т. е. $z(X_{\text{опт}}) = f(Y_{\text{опт}})$.

Если же целевая функция одной из пары задач не ограничена (сверху или снизу), то другая задача вообще не имеет планов.

Т е о р е м а 3.2 (2-я теорема двойственности). План $X^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*)$ задачи (3.7—3.9) и план $Y^* = (y_1^*,\ y_2^*,\ ...,\ y_m^*)$ задачи (3.10—3.12) являются оптимальными тогда и только тогда, когда для любого $j = \overline{1;n}$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}y_i^* - C_j)x_j^* = 0.$

Нахождение решения двойственных задач. Рассмотрим пару двойственных задач (3.7—3.9) и (3.10—3.12). Предположим, что с помощью симплексного метода найден оптимальный план X^*и это план определяется базисом, образованным векторами $A_{i1},\ A_{i2},\ ...,\ A_{im}$.

Обозначим через $C_\sigma = (C_{i1}, C_{i2},\ ...,\ C_{im})$ коэффициенты в *Z*; через A^{-1} — матрицу, обратную *A*, составленную из компонент векторов $A_{i1},\ A_{i2},\ ...,\ A_{im}$ базиса.

Тогда будет иметь место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.3. Если основная ЗЛП имеет максимальный план X^*, то $Y^* = C_\sigma A^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.

В том случае, когда среди векторов $A_1, A_2, ..., A_n$ имеется m единичных, матрицу A^{-1} образуют числа первых *m*-строк последней симплекс-таблицы, стоящие в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости вычислять $Y^* = C_\sigma A^{-1}$, так как компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами строки $(m + 1)$ столбцов единичных векторов, если $C_j = 0$, и равны сумме $(\Delta_j + C_j),\ C_j \neq 0$.

Двойственный симплекс-метод. Этот метод, как и симплекс-метод, используется для решения ЗЛП, записанной в канонической форме, для которой в системе ограничений имеется *m* единичных вектовров A_j. Вместе с тем свободные члены в системе ограничений могут быть любыми членами (при решении симплекс-методом $b_i \geq 0$).

Такую задачу и рассмотрим:

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \to \max \qquad (3.13)$$

при $x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m + ... + x_nA_n = A_0,$ (3.14)

$x_j \geq 0,$ где $j = \overline{1; n},$ (3.15)

где $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ — единичные вектора.

Среди b_i могут быть меньше 0. В данном случае $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ есть решение системы (3.14). Однако это решение не является планом задачи (3.13—3.15), так как среди b_i есть меньше 0.

Поскольку вектора $A_1, A_2, ..., A_m$ единичные, то любой A_j можно представить в виде линейной комбинации единичных векторов. Коэффициентами разложения A_j по $A_1, A_2, ..., A_m$ служат числа $x_{ij} = a_{ij}$. Таким образом, можно найти $\Delta_j = Z_j - C_j = C\sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij} - C_j,$ где $j = \overline{1; n}.$

Т е о р е м а 3.4. Решение $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ системы (3.14), определяемое базисом $A_1, A_2, ..., A_m,$ называется *псевдопланом задачи* (3.13—3.15), если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j = \overline{1; n}.$

Т е о р е м а 3.5. Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ есть хотя бы одно $b_i < 0$, такое, что все $a_{i,j} \geq 0$ для любого $j = \overline{1; n},$ то задача (3.13—3.15) вообще не имеет планов.

Т е о р е м а 3.6. Если в псевдоплане $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ имеются $b_i < 0,$ такие, что для любого из них существует $a_{i,j} \leq 0,$ то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение Z не уменьшится.

Сформулированные теоремы дают основания для построения алгоритма двойственного симплекс-метода. Он включает в себя следующие этапы:

1. Находят псевдоплан задачи.

2. Проверяют этот псевдоплан на оптимальность. Если псевдоплан оптимален $(b_i \geq 0)$, то решение задачи найдено. В противном случае либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому псевдоплану.

3. Выбирают разрешающую строку с помощью определения наибольшего по модулю отрицательного числа столбца A_0 и разрешающий столбец с помощью нахождения наименьшего по модулю отношения элементов строки $(m + 1)$ к соответствующим отрицательным элементам разрешающей строки.

4. Находят новый псевдоплан и повторяют действия, начиная с пункта 2.

Если не все, то разрешающий элемент ищется следующим образом:

1) строку с наибольшим по модулю отрицательным числом в столбце A_0 обозначают через l;

2) для выбора вектора, включаемого в базис исходной задачи, просматривают l-ю строку: если в ней нет $a_{ij} < 0,$ то $f(x)$ не ограничена на множестве решений, а исходная задача не имеет решений; если же некоторые $a_{ij} < 0,$ то для столбцов, содержащих эти отрицательные числа, вычисляют

$\theta_{oj} = \min(x_i / a_{ij}) \geq 0$ и определяют вектор, соответствующий $\max(\theta_{oj}\,\Delta_j)$ при решении ЗЛП на минимум и $\min(\theta_{oj}\,\Delta_j)$ при решении ЗЛП на максимум. Этот вектор и включают в базис исходной задачи. Вектор, который необходимо исключить из базиса исходной задачи, определяется как $\theta_{oj} = \min(x_i / a_{ij})$.

В процессе вычисления по алгоритму двойственного симплекс-метода условие $\Delta_j \geq 0$ можно не учитывать до исключения всех $x_i < 0$, затем оптимальный план находится обычным симплекс-методом.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Для исходной задачи записать модель двойственной задачи.
2. Привести модель исходной задачи к каноническому виду.
3. Определить начальные значения компонента вектора *X*.
4. Применить двойственный симплекс-метод для решения двойственной пары задач. Решение выполнить в ТП MS Excel, руководствуясь вышеизложенным алгоритмом метода.
5. Результаты проверить инструментальным средством ТП MS Excel — Solver (команда «Сервис/Поиск решения») для исходной или двойственной задачи.

Пример выполнения лабораторной работы

Найти максимальное значение функции

$$z = 4x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 3x_1 - x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 \leq 40; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение. 1. Прежде чем записать модель двойственной задачи, нужно исходную задачу привести к одному из видов математических моделей двойственных пар:

$$z = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

при

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 3x_1 - x_2 \geq 10, \\ -2x_1 - x_2 \geq -40; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Это будет 4-я модель. Ей соответствует двойственная задача такого вида: найти

$$f = 5y_1 + 10y_2 - 40y_4 \to \min$$

при

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_2 - 2y_3 \le 4, \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \le 3; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \text{ где } i = \overline{1; 3}.$$

2. Умножая первое и второе уравнения системы на (–1) и переходя к основной форме задачи линейного программирования, приходим к задаче нахождения максимального значения функции

$$z = 4x_1 + 3x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 \le 40; \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_5 \ge 0.$$

3. Первоначальным решением исходной задачи будет вектор $X = (0; 0; -5; -10; 40)$. Базисными векторами в системе ограничений ЗЛП будут векторы A_3, A_4, A_5, им соответствуют базисные неизвестные x_3, x_4, x_5. Базисным неизвестным присваиваются значения компонент вектора A_0, а свободным неизвестным x_1 и x_2 присваиваются нули.

4. Взяв в качестве базиса векторы A_3, A_4, A_5, составляем симплекс-таблицу (табл. 3.2).

Таблица 3.2

i	Базис	C_s	A_0	4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	–5	1	–2	1	0	0
2	A_4	0	–10	–3	1	0	1	0
3	A_5	0	40	2	1	0	0	1
m + 1	—	—	0	–4	–3	0	0	0

Так как в столбце A_0 имеются отрицательные числа, то из них выбираем наибольшее по модулю. Оно находится во второй строке. Для выбора вектора, включаемого в базис, просматриваем вторую строку: если в ней не содержатся отрицательные значения, то линейная функция не ограничена на многограннике решений. Если же некоторые значения отрицательны, то для столбцов, содержащих эти отрицательные значения, вычисляем

$\theta_{oj} = \min(x_i / a_{ij}) \geq 0$ и определяем вектор, соответствующий $\max\theta_{oj}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на минимум и $\min\theta_{oj}(Z_j - C_j)$ при решении исходной задачи на максимум. Этот вектор и включаем в базис исходной задачи. Вектор, который необходимо исключить из базиса исходной задачи, определяется направляющей строкой. Таким образом, вектор A_4 исключаем из базиса, а вектор A_1 включаем в базис. Переходим к следующей симплекс-таблице (табл. 3.3).

Таблица 3.3

i	Базис	C_s	A_0	4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	–8,33	0	–1,67	1	0,33	0
2	A_1	4	3,33	1	–0,33	0	–0,33	0
3	A_5	0	33,33	0	1,67	0	0,67	1

Так как в столбце вектора A_0 имеется отрицательное число, то для выбора вектора, включаемого в базис, просматриваем первую строку. В ней есть отрицательное значение, поэтому находим разрешающий элемент в соответствии с алгоритмом, изложенным выше, и переходим к следующей симплекс-таблице (табл. 3.4).

Таблица 3.4

i	Базис	C_s	A_0	4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_2	3	5	0	1	–0,6	–0,2	0
2	A_1	4	5	1	0	–0,2	–0,4	0
3	A_5	0	25	0	0	1,0	1,0	1
$m + 1$	$Z_j – C_j$	—	35	0	0	–2,6	–2,2	0

В связи с тем что в столбце вектора A_0 больше нет отрицательных чисел, то далее мы применяем обычный симплекс-метод. В строке (m + 1) есть отрицательные числа. Находим максимальное по абсолютной величине отрицательное число $\Delta_j = Z_j - C_j$ строки (m + 1). Оно стоит в столбце вектора A_3. Определим вектор, подлежащий исключению из базиса. Это будет вектор A_5. Получаем симплекс-таблицу (табл. 3.5).

Таблица 3.5

i	Базис	C_s	A_0	4	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_2	3	20	0	1	0	0,4	0,6
2	A_1	4	10	1	0	0	–0,2	0,2
3	A_3	0	25	0	0	1	1,0	1,0
$m + 1$	$Z_j – C_j$	—	100	0	0	0	0,4	2,6

В строке $(m + 1)$ нет отрицательных чисел. Следовательно, задачи решены:
для исходной задачи $X_{\text{опт}} = (10;\ 20)$, $Z_{\max} = 100$;
для двойственной задачи $Y_{\text{опт}} = (0;\ 0{,}4;\ 2{,}6)$, $f_{\min} = 100$.

5. Далее проверим наши вычисления, пользуясь ТП MS Excel и его инструментальным средством Solver (Решатель).

Решение задачи начнем с подготовки данных. Введем необходимые данные и ограничения (рис. 3.1).

	A	B	C
1	Переменные		
2	x_1	x_2	
3			
4	Целевая функция		=4*A3+3*B3
5			
6	Ограничения		
7	=-A3+2*B3	5	
8	=3*A3-B3	10	
9	=2*A3+B3	40	
10			

Рис. 3.1

Выберем команды «Сервис/Поиск решения». Заполним окно диалога «Поиск решения» (рис. 3.2).

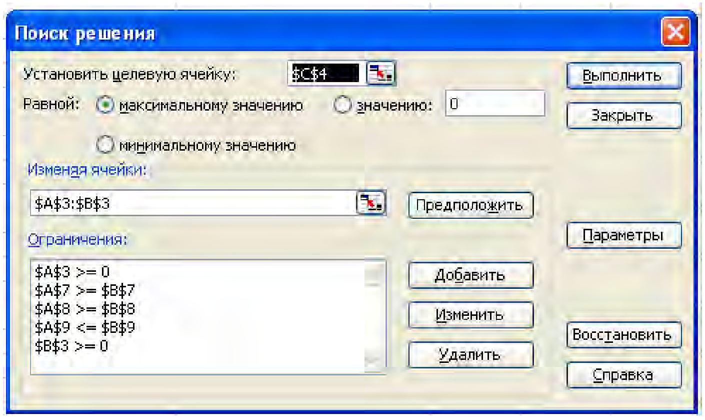


Рис. 3.2

Установим параметры в окне «Параметры поиска решения» (рис. 3.3)

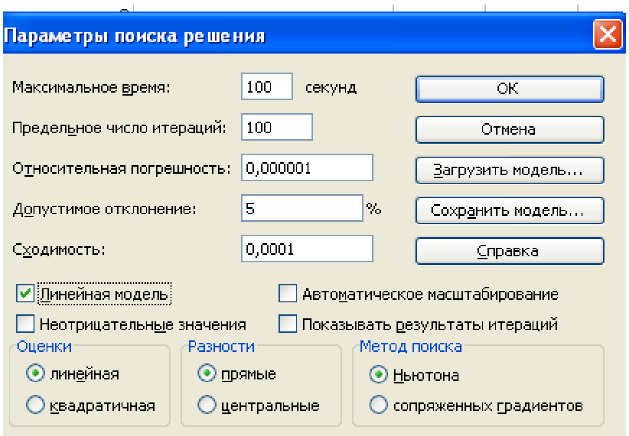


Рис. 3.3

После команды «Выполнить» откроется окно диалога «Результаты поиска решения», которое сообщит, что решение найдено (рис. 3.4).

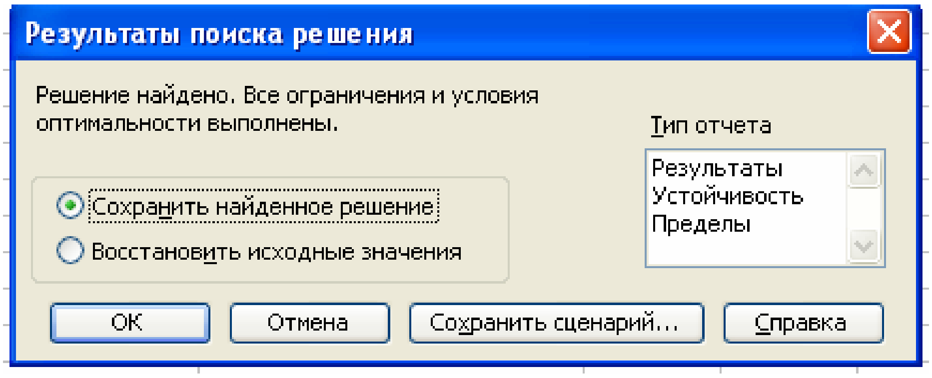


Рис. 3.4

Оптимальный план и максимальное значение целевой функции появятся в соответствующих ячейках таблицы (рис. 3.5).

	A	B	C
1	Переменные		
2	x_1	x_2	
3	10	20	
4	Целевая функция		100
5			
6	Ограничения		
7	30	5	
8	10	10	
9	40	40	
10			

Рис. 3.5

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

$$Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 2

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq 17, \\ x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 17; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 3

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 4

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 5

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 3x_1 - x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + x_2 \ge 40; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 6

$$Z = 5x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 7

$$Z = 6x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 8

$$Z = x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 9

$$Z = x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 26; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 10

$$Z = 3x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 16, \\ 11x_1 + 2x_2 \ge 48, \\ x_1 + 2x_2 \ge 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 11

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 5, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 40; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 12

$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 13

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 17x_1 + x_2 \ge 53, \\ 2x_1 + x_2 \le 23, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 14

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 - 10x_2 \le 17, \\ 13x_1 + 2x_2 \ge 41, \\ x_1 + 3x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 15

$$Z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 16

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 17

$$Z = 7x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48, \\ 2x_1 + x_2 \le 28; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 18

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 9x_2 \le 17, \\ 2x_1 + 13x_2 \ge 41, \\ 3x_1 + x_2 \ge 43; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

3) анализ полученных результатов и вывод.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность двойственности в линейном программировании?
2. Пусть исходная задача состоит в оптимальном использовании ресурсов. Дайте экономическую интерпретацию двойственной задачи.
3. Какие задачи линейного программирования относятся к несимметричным и симметричным, в чем их отличие?
4. Как по решению исходной (двойственной) задачи найти решение двойственнной (исходной)?
5. Запишите возможные виды математических моделей двойственной задачи.
6. В чем состоит сущность двойственного симплексного метода?

Лабораторная работа 4
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы — приобретение навыков решения транспортной задачи с составлением первоначального плана распределения поставок различными методами.

Программное обеспечение — табличный процессор MS Excel.

Теоретическое введение

Транспортная задача в общем виде формулируется следующим образом.

Пусть имеется m пунктов отправления грузов (или пунктов производства) A_1, A_2, A_3, …, A_m и n пунктов назначения (или пунктов потребления) B_1, B_2, B_3, …, B_n. Обозначим запасы груза (или ресурсы производства) в i-м пункте отправления через a_i (i = 1, 2, …, m), а потребность каждого j-го пункта потребления через b_j (j = 1, 2, …, n).

Заданы стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого i-го пункта до каждого j-го пункта потребления, чтобы:

1) вывезти грузы всех поставщиков;

2) удовлетворить всех потребителей;

3) достичь минимального значения общей стоимости перевозок.

Условие задачи можно записать в виде таблицы, называемой матрицей планирования перевозок (табл. 4.1).

Строки таблицы соответствуют поставщикам, а столбцы — потребителям. В последней строке записаны заявки каждого потребителя, а в последнем столбце — запасы каждого поставщика.

В верхних правых углах внутренних клеток таблицы записываются истинные тарифы c_{ij}, а в нижних левых углах — планируемые перевозки x_{ij}.

Целью решения задачи является составление плана перевозок грузов, обеспечивающих минимальные транспортные расходы.

Модель транспортной задачи, для которой количество груза у всех поставщиков равно потребностям всех потребителей в данном грузе, называется закрытой, а сама транспортная задача — сбалансированной. Модели, для которых суммарные запасы не равны суммарным потребностям, называются открытыми, а задачи — несбалансированными. Разрешимыми являются только закрытая модель или сбалансированная транспортная задача. Чтобы решить любую транспортную задачу, надо свести ее к закрытой модели, а затем найти решение сбалансированной задачи. Отметим, что любую открытую модель можно свести к закрытой введением фиктивного потребителя либо фиктивного поставщика.

Таблица 4.1

Поставщики	Потребители						Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{21} x_{21}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{nj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_j	…	b_m	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение функции цели

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ где } i = 1, 2, ..., m; \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ где } j = 1, 2, ..., n; \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ где } i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n. \tag{4.4}$$

В рассматриваемой модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.5}$$

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (4.2) и (4.3), определяемое матрицей $X = (x_{i,j})$, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, называется *планом транспортной задачи*.

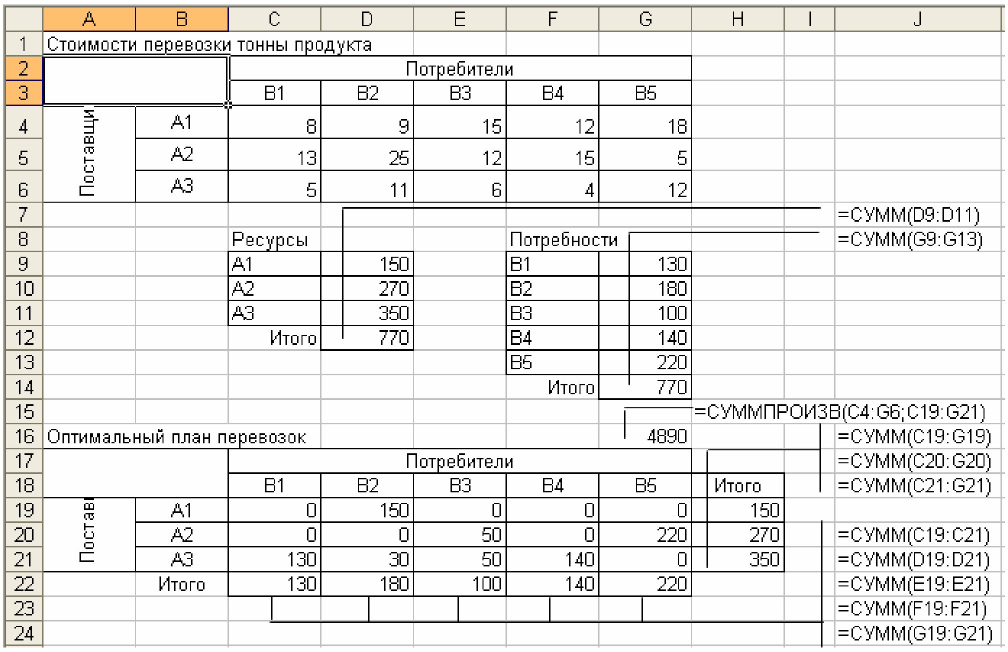
План $X^* = (x^*_{i,j})$, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, при котором функция (4.1) принимает минимальное значение, называется *оптимальным планом*.

Любое решение транспортной задачи называется распределением поставок.

При распределительном методе решения транспортной задачи последовательно используются расчетные таблицы, соответствующие тому или иному шагу решения. Каждая такая таблица включает определенное распределение поставок, так как распределение поставок должно соответствовать базисному решению, то и клетки таблицы должны соответствовать основным (положительным) и неосновным (равным нулю) переменным. На практике в клетки, соответствующие основным переменным, записываются поставки, а клетки, которые соответствуют неосновным переменным, оставляют незаполненными (свободными). Решение транспортной задачи состоит в переходе от одного распределения поставок к другому распределению: от одной таблицы к другой. Новое распределение поставок не должно увеличивать общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено их оптимальное распределение. Чтобы осуществлять переход от одного распределения поставок к другому, надо иметь исходное (первоначальное) распределение поставок.

Решение транспортной задачи вручную обычно проводится в два этапа. На первом этапе находят какое-нибудь решение, удовлетворяющее системе линейных ограничений, или убеждаются, что такого решения не существует. Этот этап называется отысканием исходного опорного плана. На втором этапе проводится последовательное улучшение данного плана по определенным правилам до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение и не станет возможным дальнейшее улучшение. Мы рассмотрим решение данной задачи с помощью электронных таблиц.

На рис. 4.1 представлено решение данной задачи в ТП MS Excel с помощью инструментального средства «Поиск решения».



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Стоимости перевозки тонны продукта									
2			Потребители							
3			B1	B2	B3	B4	B5			
4	Поставщи	A1	8	9	15	12	18			
5		A2	13	25	12	15	5			
6		A3	5	11	6	4	12			
7										=СУММ(D9:D11)
8			Ресурсы			Потребности				=СУММ(G9:G13)
9			A1	150		B1	130			
10			A2	270		B2	180			
11			A3	350		B3	100			
12			Итого	770		B4	140			
13						B5	220			
14						Итого	770			
15								=СУММПРОИЗВ(C4:G6;C19:G21)		
16	Оптимальный план перевозок						4890			=СУММ(C19:G19)
17			Потребители							=СУММ(C20:G20)
18			B1	B2	B3	B4	B5	Итого		=СУММ(C21:G21)
19	Постав	A1	0	150	0	0	0	150		
20		A2	0	0	50	0	220	270		=СУММ(C19:C21)
21		A3	130	30	50	140	0	350		=СУММ(D19:D21)
22		Итого	130	180	100	140	220			=СУММ(E19:E21)
23										=СУММ(F19:F21)
24										=СУММ(G19:G21)

Рис. 4.1. Решение транспортной задачи с помощью ТП Excel

Последовательность решения:

1) подготовить таблицы и заполнить их исходными данными: «Стоимости перевозки тонны продукта» (D), «Ресурсы» (A) и «Потребности» (B);

2) с помощью функции СУММ найти суммы ресурсов (ячейка D12) и потребностей (G14);

3) подготовить таблицу оптимальных перевозок. Диапазон C19:G21 заполнить начальными значениями — нулями;

4) с помощью функции СУММ найти суммы перевозок по потребителям (C22:G22) и поставщиками (H19:H21);

5) в ячейку G16 ввести выражение стоимости оптимального плана перевозок;

6) запустить инструментальное средство «Поиск решения» (меню «Сервис/Поиск решения») и ввести необходимые параметры — адрес целевой ячейки, изменяемые ячейки и ограничения (рис. 4.2).

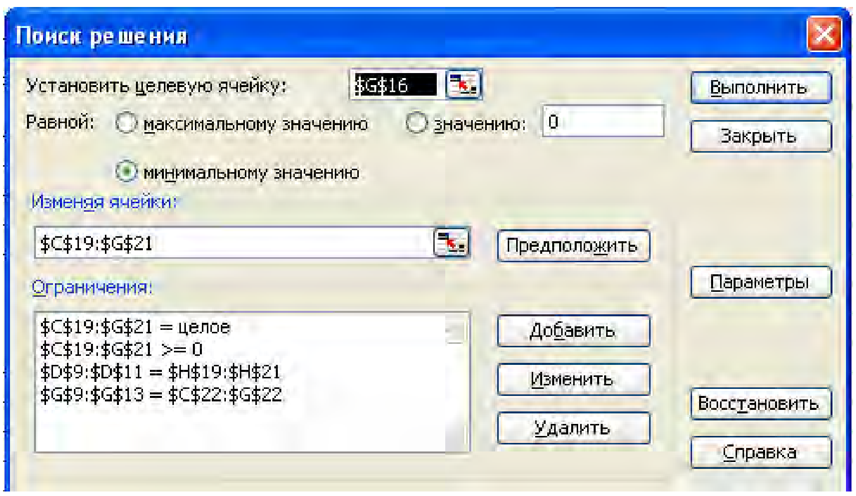


Рис. 4.2

На рисунке 4.3 представлено решение задачи в системе Mathcad.

ORIGIN := 1

$$C \equiv \begin{pmatrix} 8 & 9 & 15 & 12 & 18 \\ 13 & 25 & 12 & 15 & 5 \\ 5 & 11 & 6 & 4 & 12 \end{pmatrix} \quad a \equiv \begin{pmatrix} 150 \\ 270 \\ 350 \end{pmatrix} \quad b \equiv \begin{pmatrix} 130 \\ 180 \\ 100 \\ 140 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Определим затраты на перевозку, введя целевую функцию

$$f(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} C_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

Зададим начальное приолижение и введем вспомогательную матрицу

$$x := \begin{pmatrix} 130 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 160 & 100 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 & 220 \end{pmatrix} \qquad f(x) = 9730$$

$$i := 1..3 \qquad j := 1..5 \qquad e_{j,i} := 1$$

Начнем вычислительный блок с ключевого слова Given. Введем ограничения:

Given

$(x \cdot e)^{\langle 1 \rangle} = a$ Равенство вывозимого продукта ресурсам поставщиков

$\left((e \cdot x)^T\right)^{\langle 1 \rangle} = b$ Равенство вывозимого продукта потребностям потребителей

$x \ge 0$ Условие неотрицательности объема поставок

Проводим минимизацию функции f

Y := Minimize(f, x)

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 220 \\ 130 & 30 & 50 & 140 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(Y) = 4890$$

Рис. 4.3

Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1—6. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков A_1, A_2, A_3 в количестве a_1, a_2, a_3 т соответственно, необходимо доставить потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 т. Стоимость C_{ij} перевозки тонны груза от i-го поставщика j-му потребителю задана матрицей D. Составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребности.

Варианты 7—12. Пусть на предприятии имеется m видов станков, максимальное время работы которых соответственно равно a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) ч. Каждый из станков может выполнять n видов операций. Суммарное время выполнения каждой операции соответственно b_j ($j = 1, 2, ..., n$) ч. Известна производительность C_{ij} i-го станка при выполнении j-й операции. Определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

Для решения этой задачи линейную функцию умножить на –1, т. е. считать в таблице все значения C_{ij} отрицательными.

Варианты 13—18. Пусть имеется m лиц A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), которые могут выполнять B_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) различных работ. Известна производительность C_{ij} i-го лица на j-й работы. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждое лицо может быть назначено только на одну работу.

Умножая линейную функцию на (–1), приводим задачу к транспортной, в которой объем запасов каждого поставщика и каждого потребителя равны единице.

Вариант 1

b_j \ a_i	150	50	200	150	150
100	2	10	8	8	5
250	9	17	15	14	11
350	10	20	15	20	13

Вариант 2

b_j \ a_i	300	200	50	150	100
250	5	3	15	1	10
250	10	10	20	6	15
300	13	10	22	8	7

Вариант 3

b_j \ a_i	150	50	250	50	200
150	5	10	13	23	13
200	2	2	4	15	3
350	4	11	11	22	10

Вариант 4

b_j \ a_i	100	250	100	150	200
250	13	17	2	14	5
250	15	16	2	15	7
300	4	7	1	4	2

Вариант 5

b_j \ a_i	250	50	150	50	200
150	3	9	4	8	4
200	9	13	10	13	12
350	5	10	6	10	6

Вариант 6

b_j \ a_i	200	100	50	400	100
400	7	11	4	4	3
200	11	13	7	6	5
250	13	18	10	10	9

Вариант 7

b_j \ a_i	100	200	200	50	300
350	3	3	2	4	5
300	7	7	6	8	10
200	4	4	3	5	6

Вариант 8

b_j \ a_i	50	250	100	150	50
150	4	2	2	3	2
200	6	3	3	4	4
250	6	4	4	6	4

Вариант 9

b_j \ a_i	200	50	200	50	100
50	3	1	1	1	2
200	5	3	3	3	6
350	17	16	15	16	16

Вариант 10

b_j \ a_i	350	200	100	50	50
100	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
300	6	6	8	6	8

Вариант 11

b_j \ a_i	350	200	100	50	50
200	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
200	6	6	8	6	8

Вариант 12

b_j \ a_i	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	6	26	12	20

Вариант 13

b_j \ a_i	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	6	26	17	20

Вариант 14

b_j \ a_i	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

Вариант 15

b_j \ a_i	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

Вариант 16

b_j \ a_i	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

Вариант 17

b_j \ a_i	180	120	90	105	105
150	14	6	4	9	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	13	8

Вариант 18

b_j \ a_i	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) название лабораторной работы;
2) ее цель;
3) задание;
4) результат решения в ТП MS Excel.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Опишите общий вид матрицы планирования перевозок.
3. Какой вид имеет математическая модель транспортной задачи?
4. Какие модели транспортной задачи называются открытыми и закрытыми?
5. Когда транспортная задача является разрешимой?

6. Что называется планом транспортной задачи?

7. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?

8. Какие существуют способы отыскания исходного опорного плана?

9. Опишите алгоритм применения поиска нахождения оптимального плана перевозок в транспортной задачи с помощью «Поиска решений» в электронных таблицах.

Лабораторная работа 5
ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Цель работы — получение навыков обработки экспериментальных данных методами аппроксимации с применением системы Mathcad.

Программное обеспечение — интегрированная система Mathcad.

Теоретическое введение

Математическая модель исследуемого процесса. Современные методы решения инженерных задач предполагают численные эксперименты с математической моделью исследуемого процесса.

Модель — это образ реального объекта, воспроизводящий объект с той или иной степенью достоверности и подробности. Это новый объект, отражающий не все, а только существенные особенности изучаемого объекта или явления. Модель считается адекватной, если она описывает все существенные свойства объекта, процесса или явления.

В задачу математического моделирования входит установление связи между входными и выходными переменными процесса с помощью математических соотношений (рис. 5.1).

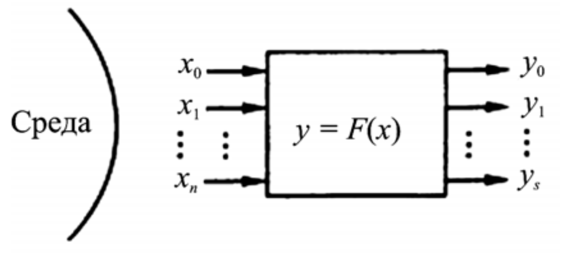


Рис. 5.1

В данном случае $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ — вектор входных переменных, $y = (y_0, y_1, ..., y_s)$ — вектор выходных переменных; $y = F(x)$ — вектор-функция, определяющая математическую модель, т. е. связь между входными и выходными переменными.

Математические модели можно разделить на динамические и статические. В динамических моделях входные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и выходные $y_0, y_1, \ldots, y_s$ переменные — непрерывные функции времени. В дискретных (статических) моделях входные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и выходные $y_0, y_1, \ldots, y_s$ переменные являются постоянными во времени величинами. Каждой комбинации значений входных переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$ функция F ставит в соответствие комбинацию значений выходных переменных $y_0, y_1, \ldots, y_s$. Часто теоретических знаний оказывается недостаточно для построения статической математической модели объекта. В этих условиях можно воспользоваться данными эксперимента — наблюдением за его функционированием.

Метод наименьших квадратов. Одним из наиболее известных приемов построения эмпирических зависимостей является *метод наименьших квадратов*.

Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости F (табл. 5.1).

Таблица 5.1

x	x_0	x_1	…	x_n
$F(x)$	y_0	y_1	…	y_n

Необходимо найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически, при этом следует учесть характер исходной функции — найти функцию заданного вида

$$y = F(x), \tag{5.1}$$

которая в точках x_0, x_1, …, x_n принимает значения как можно более близкие к табличным значениям y_0, y_1, … y_n. Эта задача называется *задачей аппроксимации*.

Практически вид приближающей функции F можно определить следующим образом. По табл. 5.1 строится точечный график функции F, а затем проводится плавная кривая, по возможности наиболее точно отражающая характер расположения точек (рис. 5.2).

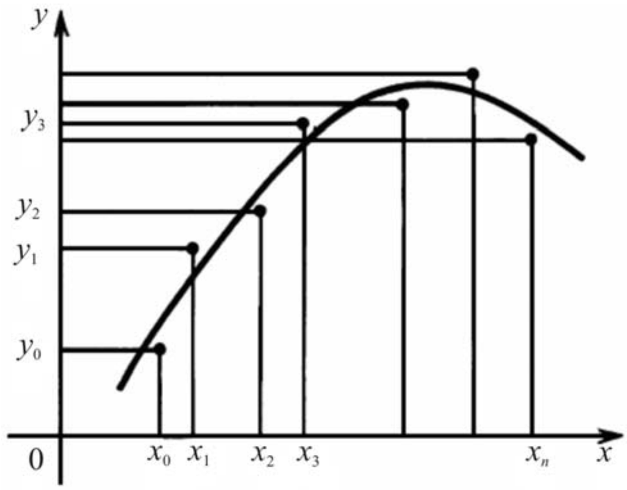


Рис. 5.2

По полученной таким образом кривой устанавливается вид приближающей функции (обычно из числа простых по виду аналитических функций).

Следует заметить, что строгая функциональная зависимость для экспериментально полученной табл. 5.1 наблюдается редко, ибо каждая из участвующих в ней величин может зависеть от многих случайных факторов. Однако формула (5.1) (ее называют эмпирической формулой или уравнением регрессии y на x) интересна тем, что позволяет находить значения функции F для нетабличных значений x, «сглаживая» результаты измерений величины y. Оправданность такого подхода определяется в конечном счете практической полезностью полученной формулы.

Рассмотрим один из распространенных способов нахождения формулы (5.1). Предположим, что приближающая функция F в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ имеет значения

$$\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n. \tag{5.2}$$

Требование близости табличных значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$ и значений (5.2) можно истолковать следующим образом. Будем рассматривать совокупность значений функции F из табл. 5.1 и совокупность (5.2) как координаты двух точек (n + 1)-мерного пространства. С учетом этого задача приближения функции может быть переформулирована следующим образом: найти такую функцию F заданного вида, чтобы расстояние между точками $M(y_0, y_1, ..., y_n)$ и $\tilde{M}(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)$ было наименьшим. Воспользовавшись метрикой евклидова пространства, приходим к требованию, чтобы величина

$$\sqrt{\left(y_0-\tilde{y}_0\right)^2+\left(y_1-\tilde{y}_1\right)^2+...+\left(y_n-\tilde{y}_n\right)^2} \tag{5.3}$$

была наименьшей, что равносильно следующему: сумма квадратов

$$\left(y_0-\tilde{y}_0\right)^2+\left(y_1-\tilde{y}_1\right)^2+...+\left(y_n-\tilde{y}_n\right)^2 \tag{5.4}$$

должна быть наименьшей.

Итак, задача приближения функции теперь формулируется следующим образом: для функции, заданной табл. 5.1, найти функцию F определенного вида, так чтобы сумма квадратов (5.4) была наименьшей.

Эта задача носит название *приближения функции методом наименьших квадратов*.

Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Рассмотрим метод нахождения параметров приближающей функции F в общем виде

$$y = F(x, a_0, a_1, ..., a_m). \tag{5.5}$$

Итак, имеем

$$F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = \tilde{y}_i,$$

где $i = 0, 1, ..., n.$

Сумма квадратов разностей соответствующих значений функций будет иметь вид

$$\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - F\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right)\right)^2 = Q\left(a_0, a_1, ..., a_m\right).$$

Эта сумма является функцией $Q(a_0, a_1, ..., a_m)$ $(m + 1)$ переменных (параметров $a_0, a_1, ..., a_m$). Задача сводится к отысканию ее минимума. Используем необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0,$$

....

$$\frac{\partial Q}{\partial a_m} = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - F\left(x_i, a_1, a_1, ..., a_m\right)\right)\frac{\partial}{\partial a_0}Q\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - F\left(x_i, a_0 a_1, ..., a_m\right)\right),\frac{\partial}{\partial a_1}Q\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(y_i - F\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right)\right)\frac{\partial}{\partial a_m}Q\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Решив эту систему $(m + 1)$ уравнений с $(m + 1)$ неизвестными относительно параметров $a_0, a_1, ..., a_m$, мы получим конкретный вид искомой функции. Естественно ожидать, что значения найденной функции $F(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ будут отличаться от табличных значений $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Значения разностей

$$y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = \varepsilon_i^2, \text{ где } i = 0, 1, ..., n, \tag{5.7}$$

называются отклонениями (или уклонениями) измеренных значений y от вычисленных по формуле (5.5). Для найденной эмпирической формулы (5.5) в соответствии с исходной табл. 5.1 можно, следовательно, найти сумму квадратов отклонений

$$\xi = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i^{\,2}, \tag{5.8}$$

которая, согласно принципу наименьших квадратов, для заданного вида приближающей функции (и найденных значений параметров $a_0, a_1, ..., a_m$) должна быть наименьшей.

Из двух разных приближений одной и той же табличной функции, следуя принципу наименьших квадратов, лучшим следует считать то, для которого сумма (5.8) имеет наименьшее значение.

Полиномиальная аппроксимация методом наименьших квадратов. Пусть аппроксимирующая функция представляет собой полином степени m:

$$F\left(x,\, a_0,\, a_1,\, ...,\, a_m\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m. \tag{5.9}$$

Тогда

$$Q\left(a_0,\, a_1,\, ...,\, a_m\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_m x^m\right)^2. \tag{5.10}$$

Находя частные производные от $Q(a_0,\, a_1,\, ...,\, a_m)$ по каждому параметру a_j и группируя члены, содержащие неизвестные $a_0,\, a_1,\, ...,\, a_m,$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + ... + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\,, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + ... + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i y_i\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + ... + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m y_i\,. \end{cases}$$

В системе Mathcad решение этой системы имеет вид:
$i := 0...n;$
$j := 0...k,$ где j — номер строки в системе уравнений (матрицы);
$m := 0...k,$ где k — номер столбца в системе уравнений (матрицы).
Элементы матрицы системы уравнений

$$X_{j,\, m} := \sum_i \left(x_i\right)^{j+m}.$$

Элементы вектор-столбца свободных членов системы уравнений

$$Y_j := \sum_i \left(x_i\right)^j\, y_i.$$

Решение системы уравнений запишем в виде

$$a := X^{-1}Y.$$

Таким образом, получим вектор-столбец

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Элементы этого вектора являются коэффициентами искомого полинома (5.9).

Величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{n+1}}$$

называется *среднеквадратическим отклонением*.

Регрессионный анализ. Пусть имеются два ряда чисел $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \ldots, y_n$, при этом предполагается, что ряд y каким-либо образом зависит от ряда x. Задача регрессионного анализа состоит в восстановлении математической зависимости (регрессии) $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i), $i = 0, 1, ..., n$.

Система Mathcad содержит ряд функций для вычисления регрессии. Функции отличаются, прежде всего, типом кривой, которую они используют, чтобы аппроксимировать данные.

Линейная регрессия. Чаще всего используется линейная регрессия, при которой функция $y(x)$ описывает отрезок прямой и имеет вид

$$y(x) = a + bx.$$

Для проведения линейной регрессии в системе Mathcad имеется ряд приведенных ниже функций:

corr (*Vx*, *Vy*) — возвращает скаляр — коэффициент корреляции Пирсона;

intercept (*Vx*, *Vy*) — возвращает значение параметра *a* (смещение линии регрессии по вертикали);

slope (*Vx*, *Vy*) — возвращает значение параметра *b* (угловой коэффициент линии регрессии).

Чем ближе коэффициент корреляции к единице, тем точнее зависимость приближается к линейной.

Полиномиальная регрессия. В системе Mathcad имеется функция для обеспечения полиномиальной регрессии при произвольной степени полинома регрессии regress (*Vx*, *Vy*, *n*), которая возвращает вектор *Vs*, запрашиваемый функцией interp (*Vs*,*Vx*, *Vy*, *n*) и содержащий коэффициенты многочлена *n*-й степени, который наилучшим образом приближает совокупность точек с координатами, хранящимися в векторах *Vx* и *Vy*.

Функция regress создает единственный приближающий полином, коэффициенты которого вычисляются по всей совокупности заданных точек. Не рекомендуется делать степень аппроксимирующего полинома выше 4…6, поскольку погрешности реализации регрессии сильно возрастают.

Иногда полезна другая функция полиномиальной регрессии, дающая локальные приближения отрезками полиномов второй степени, — loess (*Vx*, *Vy*, span), которая возвращает вектор *Vs*, запрашиваемый функцией interp (*Vs*, *Vx*, *Vy*, *n*) для наилучшего приближения данных векторов *Vx* и *Vy* отрезками полиномов второй степени. Аргумент span > 0 указывает размер локальной области приближаемых данных (рекомендуется начальное значение 0,75). Чем больше span, тем сильнее сказывается сглаживание данных. При больших значениях span эта функция приближается к функции regress (*Vx*, *Vy*, 2).

Обобщенная регрессия. Линейная или полиномиальная регрессия не во всех случаях подходят для описания зависимости данных. Бывает, что нужно искать эту зависимость в виде линейных комбинаций произвольных функций, ни одна из которых не является полиномом. Исходные данные моделируются в виде линейной комбинации произвольных функций

$$F(x) = a_0F_0(x) + a_1F_1(x) + \ldots + a_nF_n(x),$$

причем эти функции могут быть нелинейными, что сильно расширяет возможности такой аппроксимации и распространяет ее на нелинейные функции.

Для реализации обобщенной регрессии используется функция linfit (Vx, Vy, F), возвращающая вектор коэффициентов линейной регрессии общего вида a, при котором среднеквадратическая погрешность приближения совокупности исходных точек, координаты которых хранятся в векторах Vx и Vy, оказывается минимальной.

Вектор F должен содержать функции $F_0(x)$, $F_1(x)$, …, $F_n(x)$, записанные в символьном виде. Расположение координат исходного массива точек может быть любым, но вектор Vx должен содержать координаты, упорядоченные в порядке их возрастания. Вектор Vy должен содержать координаты, соответствующие абсциссам в векторе Vx.

Нелинейная регрессия общего вида. Под нелинейной регрессией общего вида подразумевается нахождение вектора $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ параметров произвольной функции $F(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$, при котором обеспечивается минимальная среднеквадратическая погрешность приближения совокупности исходных точек.

Для проведения нелинейной регрессии используется функция genfit (Vx, Vy, Vs, F), которая возвращает вектор u параметров функции F, дающий минимальную среднеквадратическую погрешность приближения функцией $F(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ исходных данных.

Вектор F должен быть вектором с символьными элементами, причем они должны содержать аналитические выражения для исходной функции и ее производных по всем параметрам. Вектор Vs должен содержать начальные значения элементов вектора u, необходимые для решения системы нелинейных уравнений регрессии итерационным методом.

Порядок выполнения работы

1. Создать таблицу экспериментальных данных (см. далее табл. 5.2).

2. Аппроксимировать многочленами 1, 2, и 3-й степени по методу наименьших квадратов функцию, заданную таблицей значений x_i и y_i, и сравнить качество приближений. Построить графики многочленов и отметить узловые точки (x_i, y_i).

3. Для исходных данных (x_i, y_i) определить параметры линейной регрессии, используя встроенные функции Mathcad slope и intercept. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной линейной регрессии. Сравнить полученные результаты с результатами задания 2.

4. Аппроксимировать данные из векторов x_i и y_i:

1) полиномами 2 и 3-й степени при помощи функций regress и interp;

2) наборами полиномов второго порядка с помощью функций loess и interp (при span = 0,75 и span = 2,75).

Отобразить графически результаты аппроксимации.

5. Аппроксимировать экспериментальные исходные данные (x_i, y_i) линейной комбинацией функций

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x).$$

Функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ выбрать из табл. 5.3 (см. далее) согласно своему варианту.

Коэффициенты вектора a найти с помощью функции linfit. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной линейной регрессии общего вида.

6. Аппроксимировать экспериментальные исходные данные (x_i, y_i) функцией вида

$$f(x) = e^{u_0 + u_1 x + u_2 x^2}.$$

Параметры вектора u найти с помощью функции genfit. Отобразить графически совокупность точек векторов x_i и y_i и результаты проведенной нелинейной регрессии общего вида.

Пример выполнения лабораторной работы

Задание 1. Для создания таблицы экспериментальных данных используем нижеприведенные формулы

$x_i = a + hi$, где $i = 0, 1, \ldots, 10$, и $h = (b - a) / 10$

на отрезке $[a, b]$. Пример выполнения задания в системе Mathcad приведен на рис. 5.3.

Задание 2. Фрагмент примера выполнения задания для степени полинома $k = 1$ в системе Mathcad приведен на рис. 5.4. Аналогично выполняются расчеты при $k = 2$ и $k = 3$.

Задание 3. Пример выполнения задания в системе Mathcad приведен на рис. 5.5.

Задание 4а. Фрагмент примера выполнения задания для степени полинома $k = 2$ в системе Mathcad приведен на рис. 5.6. Аналогично выполняются расчеты при $k = 3$.

Задание 4б. Фрагмент примера выполнения задания для параметра span = 0,75 в системе Mathcad приведен на рис. 5.7. Аналогично выполняются расчеты при span = 0,75.

Задание 5. Пример выполнения задания в системе Mathcad приведен на рис. 5.8.

Задание 6. Пример выполнения задания в системе Mathcad приведен на рис. 5.9.

Задание 1

$a := 3 \qquad b := 4 \qquad N := 10$

$h := \dfrac{b-a}{N} \qquad h = 0.1$

$i := 0, 1 .. N \qquad x_i := a + i \cdot h$

$$y := \begin{pmatrix} 2.35 \\ 2.16 \\ 2.39 \\ 2.39 \\ 2.18 \\ 2.09 \\ 2.44 \\ 2.56 \\ 3.35 \\ 3.22 \\ 2.65 \end{pmatrix} \qquad x =$$

	0
0	3
1	3.1
2	3.2
3	3.3
4	3.4
5	3.5
6	3.6
7	3.7
8	3.8
9	3.9
10	4

Рис. 5.3

Задание 2

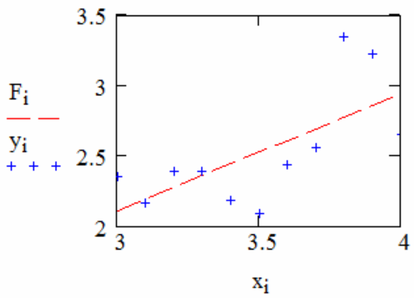
Аппроксимация методом наименьших квадратов

$k := 1 \qquad i := 0 .. N$

$j := 0 .. k \qquad m := 0 .. k$

$X_{j,m} := \sum_i (x_i)^{j+m} \qquad Y_j := \sum_i (x_i)^j \cdot y_i \qquad a := X^{-1} \cdot Y$

$F_i := \sum_j a_j \cdot (x_i)^j$



$$a = \begin{pmatrix} -0.408 \\ 0.838 \end{pmatrix}$$

$Q := \sum_i \left[y_i - (F_i)\right]^2 \qquad Q = 0.923$

$\sigma := \sqrt{\dfrac{Q}{N+1}} \qquad \sigma = 0.29$

Рис. 5.4

Линейная регрессия

Вычисление коэффициентов a и b линейной регрессии

$a := \mathrm{intercept}(x, y) \quad b := \mathrm{slope}(x, y)$

$i := 0 .. N$

$f(x) := a + b \cdot x$

$a = -0.408 \qquad b = 0.838$

$\mathrm{corr}(x, y) = 0.675$

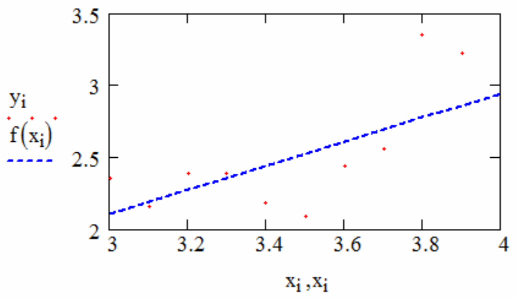


Рис. 5.5

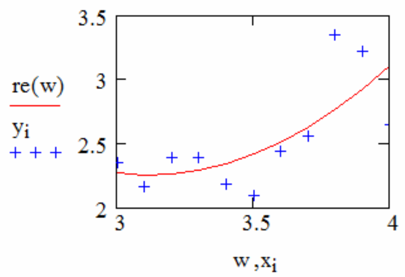
Задание 4a

Полиномиальная регрессия

$k := 2 \qquad z := \mathrm{regress}(x, y, k) \qquad w := 3, 3.1 .. 4$

$re(w) := \mathrm{interp}(z, x, y, w)$

График полинома и исходные точки



$Q := \sum_i \left(y_i - re(x_i)\right)^2 \qquad Q = 0.821$

$\sigma := \sqrt{\dfrac{Q}{N+1}} \qquad \sigma = 0.273$

Рис. 5.6

Задание 4b

Регрессия набором полиномов второй степени

$span1 := 0.75$

$vs1 := loess(x, y, span1)$

$w := 3, 3.1 .. 4$ $\qquad lo1(w) := interp(vs1, x, y, w)$

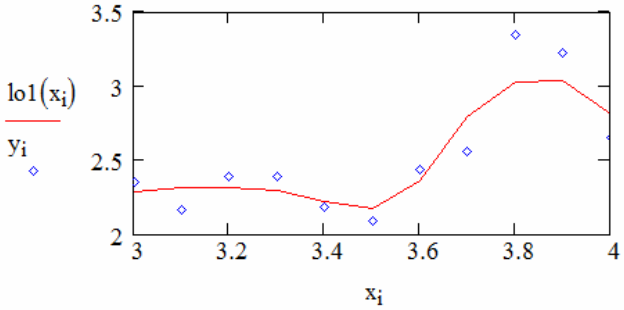


Рис. 5.7

Задание 5

Линейная регрессия общего вида

$$F(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x + x^2 + 1} \\ \cos\left(\dfrac{x}{10}\right) \\ \sin\left(\dfrac{x}{10}\right) \end{pmatrix}$$

$a := linfit(x, y, F)$ $\qquad g(x) := F(x) \cdot a$

$w := 3, 3.1 .. 4$

$$a = \begin{pmatrix} 112.855 \\ -18.197 \\ 37.224 \end{pmatrix}$$

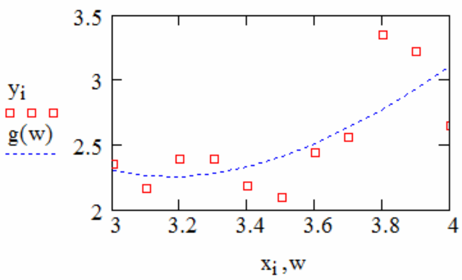


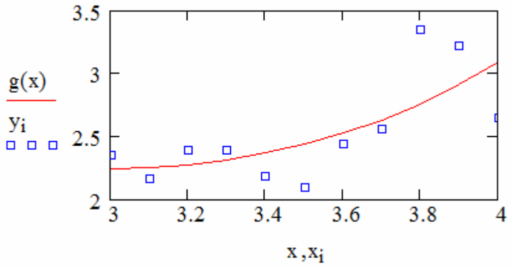
Рис. 5.8

Задание 6

Нелинейная регрессия общего вида

$$F(x,u) := \begin{pmatrix} e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ x\cdot e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \\ x^2\cdot e^{u_0+u_1\cdot x+u_2\cdot x^2} \end{pmatrix} \qquad vs := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u := \mathrm{genfit}(x, y, vs, F) \qquad g(x) := F(x,u)_0$$



$$u = \begin{pmatrix} 3.523 \\ -1.826 \\ 0.307 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.9

Варианты индивидуальных заданий

Варианты задания 1 представлены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

№ варианта	y_i	$[a, b]$
1	2,86; 2,21; 2,96; 3,27; 3,58; 3,76; 3,93; 3,67; 3,90; 3,64; 4,09	[0, 1]
2	1,14; 1,02; 1,64; 1,64; 1,96; 2,17; 2,64; 3,25; 3,47; 3,89; 3,36;	[–1, 1]
3	4,70; 4,64; 4,57; 4,45; 4,40; 4,34; 4,27; 4,37; 4,42; 4,50; 4,62	[2, 4]
4	0,43; 0,99; 2,07; 2,54; 1,67; 1,29; 1,24; 0,66; 0,43; 0,35; 0,70	[2, 4]
5	1,55; 1,97; 1,29; 0,94; 0,88; 0,09; 0,02; 0,84; 0,81; 0,09; 0,15	[1, 4]
6	3,24; 1,72; 1,95; 2,77; 2,47; 0,97; 1,75; 1,55; 0,12; 0,70; 1,19	[0, 4]
7	2,56; 1,92; 2,85; 2,94; 2,39; 2,16; 2,51; 2,10; 1,77; 2,28; 1,70	[–1, 2]
8	1,77; 0,92; 2,21; 1,50; 3,21; 3,46; 3,70; 4,02; 4,36; 4,82; 4,03	[–1, 3]
9	1,53; 0,45; 1,68; 0,12; 0,68; 2,36; 2,58; 2,53; 3,45; 2,70; 2,82	[4, 8]
10	2,50; 3,90; 3,54; 4,63; 3,87; 5,25; 4,83; 3,24; 3,08; 3,00; 4,70	[0, 5]
11	2,95; 3,38; 2,71; 2,37; 2,29; 2,75; 2,76; 2,74; 2,57; 2,40; 2,99	[1, 5]
12	–0,23; –0,03; –0,98; –0,97; –0,43; –0,91; –0,27; –0,19; 0,88; 1,06; 0,72	[2, 4]
13	2,36; 0,03; –0,38; –1,33; 0,25; –1,36; 0,95; 3,16; 4,03; 4,92; 4,20	[0, 2]
14	3,82; 4,07; 3,53; 4,83; 5,53; 5,04; 5,09; 5,87; 5,53; 4,72; 4,73	[3, 4]
15	2,35; 2,16; 2,39; 2,39; 2,18; 2,09; 2,44; 2,56; 3,35; 3,22; 2,65	[–3, 4]
16	2,93; 3,28; 2,61; 2,27; 2,39; 2,65; 2,66; 2,64; 2,47; 2,50; 2,98	[2, 4]
17	2,66; 1,99; 2,75; 2,84; 2,49; 2,26; 2,61; 2,20; 1,87; 2,18; 1,80	[1, 2]
18	1,63; 1,45; 1,68; 1,12; 1,68; 2,36; 2,48; 2,33; 2,45; 2,60; 2,72	[1, 3]

Варианты задания 5 представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

№ варианта	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	e^x	$1/\sqrt{1+2\cos^2 x}$	$\sin x$
2	$1/(1+x^2)$	e^x	$\sin 3x$
3	$1/(1+x^2)$	$e^{\sin x}$	x
4	$\operatorname{arctg} x$	$\ln x$	$\sin x$
5	$e^{-x^2/2}$	$1/x$	e^{-x}
6	$(1+x)/(2+x)$	$\cos(x/10)$	$\cos x$
7	$1/\left(1+e^{x^2}\right)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\sin x$
8	$\cos(x/2)$	$2-\cos x$	$\sin(x/2)$
9	$1/(1+e^x)$	$\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$\sin 3x$
10	$\ln(x+5)$	$\sqrt{1+x}$	$\sin x$
11	$1/x$	$\sqrt{1+x}$	$1/x^2$
12	$\cos x$	$1/(1+x+x^2)$	$1/(1+x)$
13	e^x	$\cos 4x$	$e^{-x/2}$
14	$\sqrt{1+e^{-x}}$	$e^x/3$	$\sin^2 3x$
15	$1/(1+x+x^2)$	$\cos(x/10)$	$\sin(x/2)$
16	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$\sin x$
17	$\ln(x+2)$	$e^{\sin x}$	$\sqrt{1+x}$
18	$\cos x$	$1/(1+x)$	$\sqrt{1+e^{-x}}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

3) анализ полученных результатов и вывод.

Контрольные вопросы

1. Что входит в задачу математического моделирования?
2. Что такое модель? Какая модель считается адекватной?
3. Чем отличаются динамические модели от статических?
4. Назовите наиболее известный метод построения эмпирических зависимостей.
5. Какая задача называется задачей аппроксимации?
6. Как определить вид приближающей функции?
7. Приведите уравнение регрессии y на x.
8. Постановка задачи аппроксимации функции методом наименьших квадратов.
9. Как получить решение задачи о вычислении коэффициентов аппроксимирующего полинома с помощью метода наименьших квадратов?

10. Как реализуется метод наименьших квадратов в системе Mathcad?
11. В чем состоит задача регрессионного анализа?
12. Как реализуется линейная регрессия в системе Mathcad?
13. Как реализуется полиномиальная регрессия в системе Mathcad?
14. Как реализуется обобщенная регрессия в системе Mathcad?
15. Как реализуется нелинейная регрессия общего вида в системе Mathcad?

Библиографический список

1. *Акулич, И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И. Л. Акулич. — 3-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2011. — 352 с.

2. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование : учебное пособие / под общ. ред. А. В. Кузнецова и Р. А. Рутковского. — 3-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2010. — 448 с.

3. *Лесин, В. В.* Основы методов оптимизации : учебное пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. — 3-е изд., испр. — СПб. : Лань, 2011. — 352 с.

4. *Охорзин, В. А.* Прикладная математика в системе Mathcad : учебное пособие / В. А. Охорзин. — 3-е изд., стер. — СПб. : Лань, 2009. — 352 с.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2013 г., поз. 43

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *Н. Э. Фотина*
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Подписано в свет 11.09.2013.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 2,9. Объем данных 7,8 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru