Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет
Кафедра высшей математики

Введение в математический анализ. Производная и ее приложения

Методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе 2

Волгоград 2011

Составили Н.А. Болотина, К.В. Катеринин, Р.К. Катеринина, А.П. Поздняков, И.П. Руденок

УДК 517(076.5)

Введение в математический анализ. Производная и ее приложения : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе 2 [Электрон. ресурс]. Электронные текстовые и графические данные (273 кБ) / сост. Н.А. Болотина, К.В. Катеринин, Р.К. Катеринина и др. // Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет : официальный сайт. Волгоград : ВолгГАСУ, 2011. 19 с. Систем. требования: программное обеспечение Adobe Reader 6.0. Режим доступа: http:// www.vgasu.ru/publishing/on-line/

№ гос. регистрации

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов сокращенной формы обучения института дистанционного обучения всех специальностей техники и технологии по дисциплине «Математика».

План выпуска учеб.-метод. документ. 2011 г., поз. 26

Начальник РИО *О.Е. Горячева*
Зав. редакцией *М.Л. Песчаная*
Редактор *О.А. Шипунова*
Компьютерная правка и верстка *О.В. Горячева*

Подписано в свет 10.03.11. Гарнитура Таймс. Уч.-изд. л. 0,6. Объем данных 273 кБ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1.1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1.1. Основные определения

Пусть $y = f(x)$ — функция непрерывного аргумента x, и пусть x неограниченно приближается к x_0. При этом говорят, что x стремится к x_0, и пишут $x \to x_0$.

Если x неограниченно возрастает, то говорят, что x стремится к положительной бесконечности, и пишут $x \to +\infty$. Если x неограниченно убывает, то говорят, что x стремится к отрицательной бесконечности и пишут $x \to -\infty$. Аргумент функции, изменяющийся таким образом, называют бесконечно большим.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, исключая, быть может, эту точку.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от числа x_0, значения функции как угодно мало отличаются от числа A. Коротко это записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Если аргумент функции $y = f(x)$ бесконечно большой, то пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

или

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$, если она неограниченно возрастает по абсолютной величине при $x \to x_0$. При этом пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

Если бесконечно большая функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ принимает только положительные или только отрицательные значения, то пишут соответственно

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

или

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty .$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

1.1.2. Основные теоремы о пределах функций (правила вычисления пределов)

Теорема 1. Предел постоянной величины равен этой величине:

$$\lim_{x \to x_0} C = C. \qquad (1)$$

Теорема 2. Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ бесконечно большая величина, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая величина; если $\varphi(x)$ — бесконечно малая величина, не обращающаяся в нуль в некоторой окрестности точки x_0, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая величина.

Символически это можно записать так:

если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$; если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty$.

Теорема 3. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, тогда функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ также имеют пределы и справедливы формулы

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B; \qquad (2)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = AB; \qquad (3)$$

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x); \qquad (4)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B} \text{ (если } B \neq 0). \qquad (5)$$

Замечание. Формулы (2) и (3) справедливы для алгебраической суммы и произведения любого конечного числа функций.

Теорема 4. Если k — любое натуральное число, то

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^k = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^k. \qquad (6)$$

Теорема 5 (первый замечательный предел). Функция $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (7)$$

Справедливы также формулы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

П р и м е р 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2x+7\right)$.

Решение. Применяя теоремы о пределах (формулы (1), (2), (4), (6)), получим

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2-2x+7\right)=3\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-2\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}7=3\cdot 2^2-2\cdot 2+7=15.$$

П р и м е р 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to 3}\left(3x^2-1\right)=3\cdot 9-1=26;\ \lim_{x\to 3}\left(2x^3+6x^2-5\right)=2\cdot 27+6\cdot 9-5=103.$$

Пользуясь теоремой о пределе частного (формула (5)), получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-1}{2x^3+6x^2-5}=\frac{26}{103}.$$

П р и м е р 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2+3x-1}=\frac{0}{9}=0.$$

П р и м е р 4. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$.

Решение. Предел знаменателя равен нулю и применять теорему о пределе частного нельзя. Так как знаменатель есть бесконечно малая величина при $x\to 3$, то по теореме 2 обратная величина $\dfrac{1}{x-3}$ есть бесконечно большая и $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(x^2-2x+1\right)\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=4\infty=\infty.$$

П р и м е р 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

Решение. Применять теорему о пределе частного нельзя, так как предел знаменателя и числителя равен нулю. В этом случае говорят о неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, где $\dfrac{0}{0}$ — символическая запись отношения двух бесконечно малых величин, и вычисление предела сводится к раскрытию этой неопределенности.

Выполним тождественные преобразования, а именно, числитель и знаменатель дроби умножим на выражение, сопряженное числителю, т.е. перенесем иррациональность в знаменатель. Потом сократим полученную дробь на x и перейдем к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

Здесь сокращение на x законно, так как условие $x\to 0$ предполагает $x\neq 0$.

П р и м е р 6. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. Непосредственная подстановка значения $x = 4$ в заданную функцию приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, умножим числитель и знаменатель на произведение $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$ и затем сократим дробь на множитель $(4-x)$, полагая, $x\neq 4$,

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{(9-2x-1)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{2(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{3}{4}.$$

П р и м е р 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$.

Решение. Теорему о пределе частного здесь применять нельзя, так как числитель и знаменатель конечных пределов не имеют. В этом случае говорят о неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разделим на x^3, а затем перейдем к пределу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{5}.$$

Здесь функции $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{2}{x}$ являются бесконечно малыми при $x \to \infty$ и их пределы равны нулю.

П р и м е р 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскроем ее, используя первый замечательный предел (теорема 5). Для этого преобразуем данное выражение и по формуле (7) получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}3\right)^2=\frac{9}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=\frac{9}{5}1=\frac{9}{5}.$$

1.2. ПРОИЗВОДНАЯ

1.2.1. Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Для обозначения производной используют символы y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$.

Таким образом, по определению

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной называется *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в некоторой точке, называют *дифференцируемой* в этой точке.

1.2.2. Производные основных элементарных функций

В любой точке области определения основных элементарных функций справедливы формулы

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \text{ в частности } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad (8)$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \text{ в частности } \left(e^x\right)' = e^x; \quad (9)$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}, \text{ в частности } (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (10)$$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x; \quad (11)$$

$$\left(\cos x\right)' = -\sin x; \quad (12)$$

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{13}$$

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \tag{14}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{15}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{16}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{17}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{18}$$

1.2.3. Правила вычисления производных

Пусть функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы в точке x и C — постоянная величина. Тогда

$$C' = 0; \tag{19}$$

$$\left(CU\right)' = CU'; \tag{20}$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V'; \tag{21}$$

$$\left(UV\right)' = VU' + UV'; \tag{22}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2},\ V \neq 0. \tag{23}$$

П р и м е р 9. Найти y', если $y = 7^x - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Используя формулы (21), (9), (20), (8) получим

$$y' = \left(7^x\right)' - 5\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 7^x \ln 7 + \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} = 7^x \ln 7 + \frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

П р и м е р 10. Найти производную функции $y = x^3 \log_5 x$.

Решение.

$$y' = \left(x^3\right)' \log_5 x + x^3\left(\log_5 x\right)' = 3x^2 \log_5 x + x^3 \frac{1}{x\ln 5} = x^2\left(3\log_5 x + \frac{1}{\ln 5}\right).$$

Здесь использованы формулы (22), (10), (8).

П р и м е р 11. Найти производную функции $y = \dfrac{x}{2-\cos x}$.

Решение. Производную частного находим по формуле (23)

$$y' = \frac{x'(2-\cos x) - x(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2} = \frac{2-\cos x - x\sin x}{(2-\cos x)^2}.$$

1.2.4. Производная сложной функции

Если *y* является функцией от *u*, а *u* зависит от *x*, то *y* также зависит от *x*.

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ называется функцией от функции или сложной функцией переменной *x*. Переменная *u* называется промежуточным аргументом, а *x* — основным.

Теорема 6. Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке *x*, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке *u*, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке *x* и справедлива формула

$$y' = f'(u)\varphi'(x).$$

Правило дифференцирования сложной функции может быть записано в другой форме:

$$y'_x = y'_u u'_x, \tag{24}$$

здесь индексы *u* и *x* указывают, по какой переменной берется производная.

П р и м е р 12. Найти производную функции $y = \mathrm{tg}^5 x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u^5$, $u = \mathrm{tg}\, x$. Найдем

$$y'_u = \left(u^5\right)' = 5u^4;\ u'_x = (\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тогда по формуле (24)

$$y'_x = 5u^4 \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\mathrm{tg}^4 x}{\cos^2 x}.$$

Замечание. Если число простейших функций, из которых составлена сложная функция, больше двух, то ее производная вычисляется последовательным применением формулы (24).

П р и м е р 13. $y = \mathrm{arctg} \ln \sin x$. Вычислить y'_x.

Решение.

$$y'_x = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\left(\ln \sin x\right)' = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x}\frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\mathrm{ctg}\, x}{1+\ln^2 \sin x}.$$

1.2.5. Производная неявной функции

Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если зависимость между x и y выражена уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{25}$$

не разрешенным относительно y.

Чтобы найти производную от неявной функции, надо данное уравнение (25) продифференцировать по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и полученное уравнение разрешить относительно y'.

П р и м е р 14. Найти производную функции y, заданной уравнением $e^y + xy = e$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения по x, учитывая, что y есть функция от x,

$$e^y y' + y + xy' = 0.$$

Из полученного уравнения находим y':

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$

1.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

1.3.1. Возрастание и убывание функций

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности* функции.

Теорема 7 (достаточный признак возрастания и убывания функции). Если во всех точках некоторого интервала выполняется условие $f'(x) > 0$, то в этом интервале функция $f(x)$ возрастает, если же во всех точках некоторого интервала $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Замечание. Теорема остается справедливой, если производная $f'(x)$ обращается в нуль в отдельных точках интервала, не заполняющих никакого отрезка.

1.3.2. Экстремумы функций

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует. Сформулированное условие называется *необходимым условием существования экстремума*.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками* (первого рода).

Замечание. Необходимое условие экстремума не является достаточным, так как наличие у функции критической точки вовсе не означает, что функция в этой точке обязательно достигает экстремума.

Теорема 8 (достаточный признак существования экстремума). Если x_0 — критическая точка функции $f(x)$ и при переходе через x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума функции, а если с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

1.3.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в некотором интервале, если он расположен ниже любой своей касательной в этом интервале.

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* в некотором интервале, если он расположен выше любой своей касательной в этом интервале.

Теорема 9 (достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой). Если во всех точках некоторого интервала $f''(x) > 0$, то в этом интервале график функции $y = f(x)$ вогнутый, если $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый.

Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Необходимое условие существования точки перегиба состоит в том, что если M_0 (x_0; y_0) — точка перегиба кривой, то вторая производная в точке x_0 равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками* (второго рода).

Теорема 10 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть x_0 — критическая точка второго рода функции $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка графика функции с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба.

П р и м е р 15. Исследовать функцию $y = \frac{1}{5}x^3(4 - x)$ и построить ее график.

Решение. Функция определена и непрерывна в интервале $(-\infty; +\infty)$. Исследуем функцию на монотонность. Для этого найдем ее производную

$$y' = \frac{1}{5}\left(4x^3 - x^4\right)' = \frac{1}{5}\left(12x^2 - 4x^3\right)' = \frac{4}{5}x^2(3 - x)$$

и решим уравнение $f'(x) = 0$.

Получим $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Это критические точки. Других критических точек у функции нет, так как производная существует на всей числовой оси.

Точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$ разбивают область существования функции на интервалы $(-\infty;\, 0)$, $(0; 3)$, $(3; +\infty)$. В каждом из них функция монотонна и производная сохраняет свой знак.

Для определения знака производной в каждом интервале выберем точки, например, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$ и найдем

$$f'(-1) = \frac{16}{5} > 0;\;\; f'(1) = \frac{8}{5} > 0;\;\; f'(5) = -40 < 0.$$

По теореме 7 заключаем, что в интервалах $(-\infty;\, 0)$ и $(0;\, 3)$ функция возрастает, а в интервале $(3; +\infty)$ — убывает.

Определим точки экстремума. По необходимому условию существования экстремума их следует искать среди критических точек первого рода.

При переходе через точку $x = 0$ производная знак не меняет, следовательно, по теореме 8 экстремума в ней нет.

При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно в точке $x = 3$ функция имеет максимум. Вычислим

$$y_{\max} = f(3) = \frac{27}{5}.$$

Определим интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Для этого найдем

$$y'' = \frac{1}{5}\left(12x^2 - 4x^3\right)' = \frac{12}{5}x(2 - x).$$

Полученная производная всюду существует, а в точках $x = 0$ и $x = 2$ обращается в нуль. Это и есть критические точки второго рода. Они разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; 0)$, $(0;\, 2)$, $(2; +\infty)$.

Возьмем какие-нибудь точки из этих интервалов, например, $x = -1$, $x = 1$, $x = 5$ и найдем

$$f''(-1) = -\frac{36}{5} < 0;\;\; f''(1) = \frac{12}{5} > 0;\;\; f''(5) = -36 < 0.$$

По теореме 9 заключаем, что в интервалах $(-\infty;\, 0)$, $(2; +\infty)$ кривая выпуклая, в интервале $(0;\, 2)$ — вогнутая.

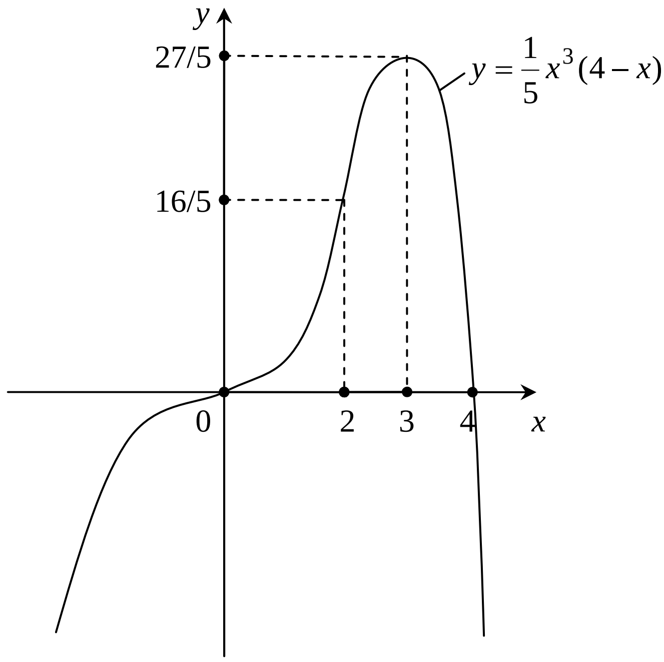
Так как при переходе через точки $x = 0$ и $x = 2$ вторая производная меняет знак, то график функции имеет две точки перегиба с абсциссами $x = 0$ и $x = 2$ (теорема 10). Вычислим

$$f(0) = 0;\;\; f(2) = \frac{16}{5}.$$

Следовательно, точки (0; 0) и $\left(2;\; \frac{16}{5}\right)$ — точки перегиба.

Точки пересечения кривой с осью Ox найдем из уравнения $y = 0$. В данном примере $\frac{1}{5}x^3(4-x)=0$. Получим точки пересечения кривой с осью Ox: $x = 0$ и $x = 4$.

По результатам исследования строим график функции (рис.).



2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти пределы функций.

Вариант 1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{5x^2}$.

Вариант 2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}$.

Вариант 3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Вариант 4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\operatorname{arctg} x}$.

Вариант 5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$.

Вариант 6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$.

Вариант 7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$.

Вариант 8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

Вариант 9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg} x}$.

Вариант 10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}5x\operatorname{ctg} 3x$.

Вариант 11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$.

Вариант 12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$.

Вариант 13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$.

Вариант 14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+7x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\operatorname{tg} x}{\sin^2 x}$.

Вариант 15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x-2}{5x^3-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$.

Вариант 16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+7}{5x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$.

Вариант 17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+3x+1}{6x^3+x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$.

Вариант 18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-5}{\sqrt{3+x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$.

Вариант 19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-2}{x^3+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}$.

Вариант 20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x+3}{x^5+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg} 3x$.

Вариант 21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

Вариант 22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Вариант 23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

Вариант 24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 3x}$.

Вариант 25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

Вариант 26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3}{6+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Вариант 27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^2}{5x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{5x}$.

Вариант 28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+6}{5x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x\sin 3x}$.

Вариант 29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+4}{4-x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

Вариант 30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^4-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

Задание 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

Вариант 1. а) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; б) $y = \sin^4 5x + \cos^4 5x$; в) $x^2 y - yx = 5$.

Вариант 2. а) $y = -\dfrac{1}{\left(1-x^2\right)^5}$; б) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$; в) $\ln\left(x+y\right) = xy^2$.

Вариант 3. а) $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x}}$; б) $y = \ln\sin(2x + 5)$; в) $x^2 - 6y + y^3 = 5$.

Вариант 4. а) $y = 2\sqrt[3]{\left(2 - x^3\right)^2}$; б) y = arctg e^x; в) $y\sin x = \cos\left(x + y\right)$.

Вариант 5. а) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$; б) $y = 2\operatorname{tg}^3\left(x^2 + 1\right)$; в) $xe^y + 1 - y = 0$.

Вариант 6. а) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + x}$; б) $y = \ln^2(3x + 1)$; в) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

Вариант 7. а) $y = \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$; б) $y = 10^{x^2 + x + 1}$; в) $y\ln x - x\ln y = 1$.

Вариант 8. а) $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$; в) $x^3 + xy^2 + y^3 = 8$.

Вариант 9. а) $y = \dfrac{\ln x}{4 - 3\cos x}$; б) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}^2 x$; в) $y^2 - 1 = 2xy$.

Вариант 10. а) $y = \dfrac{3^{\sqrt{x}} - 7}{\sqrt{x}}$; б) $y = \dfrac{1}{12}\ln^4\left(x^3 + 3\right)$; в) $y\sin x - \cos y = 0$.

Вариант 11. а) $y = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$; б) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$; в) $e^y - xy = 0$.

Вариант 12. а) $y = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$; б) $y = \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; в) $y = \sin\left(x + 2y\right)$.

Вариант 13. а) $y = \left(\dfrac{x^2}{3x + 1}\right)^9$; б) $y = \ln\left(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}\right)$; в) $x - y + \sin y = 0$.

Вариант 14. а) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$; б) $y = \ln\left(x^2 + 5x + \sqrt{x}\right)$; в) $x^2 + y^2 = 5e^x$.

Вариант 15. а) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{3x + 5}$; б) $y = \sin(x + \sin x)$; в) $e^y + xy = e$.

Вариант 16. а) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; б) $y = \ln\dfrac{e^x}{x^2 + 1}$; в) $\operatorname{arctg} y = x + y$.

Вариант 17. а) $y = \dfrac{x^8}{8\left(1 - x^2\right)^4}$; б) $y = \ln\arcsin 5x$; в) $10^y = 8^x$.

Вариант 18. а) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - \left(\arcsin x\right)^3$; б) $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$; в) $2y\ln y = x$.

Вариант 19. а) $y = \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}$; б) $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$; в) $\operatorname{tg} y = xy$.

Вариант 20. а) $y = e^{x}\left(\sin 3x - 3\cos\ 3x\right)$;) $y = \ln \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}$; в) $2y = 1 + xy^3$.

Вариант 21. а) $y = \frac{3}{\left(1-x^2\right)\left(1-2x^3\right)}$;б) $y = \ln\left(1 + x + \sqrt{2x + x^2}\right)$;в) $\cos\left(x + y\right) = x$.

Вариант 22. а) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$; б) $y = \sin e^{x^2+3x-2}$; в) $y \ln y = x^3$.

Вариант 23. а) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$; б) $y = \ln \cos^2 3x$; в) $x - y = \arccos y$.

Вариант 24. а) $\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$; б) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\ln\left(y - x\right) = x^2$.

Вариант 25. а) $y = \frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; б) $y = \ln\left(3 - 2x^3\right)$; в) $2^y + xy = 2$.

Вариант 26. а) $y = x^2\sqrt{1+\sqrt{x}}$; б) $y = \sin\frac{1-\ln x}{x}$; в) $y \ln y = x^3 + x + y$.

Вариант 27. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y = 10^{3-\ln^2 5x}$; в) $\ln\left(x^2 + y^2\right) = x$.

Вариант 28. а) $y = \sqrt[5]{\left(1 + xe^{\sqrt{x}}\right)^3}$; б) $y = \ln\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}$; в) $y^3 + 2^x = x$.

Вариант 29. а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$; б) $y = \ln\frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$; в) $5^x + 5^y = 5^{x+y}$.

Вариант 30. а) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$; б) $y = \sin^2 \cos 3x$; в) $x^2 + y^2 = \ln y$.

Задание 3. Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$.

Вариант 2. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

Вариант 3. $y = 9x^2(1 - x)$.

Вариант 4. $y = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$.

Вариант 5. $y = \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x$.

Вариант 6. $y = 2x^4 - x^2 + 1$.

Вариант 7. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Вариант 8. $y = \frac{1}{2}\left(x^4 - 6x^2 + 5\right)$.

Вариант 9. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Вариант 10. $y = x^4 - 2x^2 + 10$.

Вариант 11. $y = \frac{1}{20}\left(x^3 - 6x^2 - 36x + 5\right)$

Вариант 12. $y = 2 + x^2 - \frac{1}{2}$.

Вариант 13. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 7.$

Вариант 14. $y = \frac{1}{4}\left(x^3 - 3x^2 + 4\right).$

Вариант 15. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 11.$

Вариант 16. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x.$

Вариант 17. $y = 36x - 3x^2 - 2x^3.$

Вариант 18. $y = x^4 - 8x^2 - 9.$

Вариант 19. $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 9x - 2.$

Вариант 20. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$

Вариант 21. $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 5.$

Вариант 22. $y = 2x^3 - 3x^2.$

Вариант 23. $y = (x - 1)^2 (x + 2).$

Вариант 24. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 4.$

Вариант 25. $y = \frac{1}{5}\left(x^3 - 6x^2 + 25\right).$

Вариант 26. $y = x(2 - x)^2.$

Вариант 27. $y = x^3 - 5x^2 + 8x.$

Вариант 28. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}.$

Вариант 29. $y = x^2(4 - x)^2.$

Вариант 30. $y = x^3 - 12x^2 + 36x.$

Список рекомендуемой литературы

1. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» ; Мир и образование, 2003. 304 с.

2. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н.С. Пискунов. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. Т. 1. — 432 с. Т. 2. — 560 с.

3. *Шипачев, В.С.* Высшая математика / В.С. Шипачев. М. : Высш. шк., 2005. 479 с.