Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Конспект лекций

Учебное пособие

Составитель Т.В. Соловьева

Волгоград
ВолгГАСУ
2012

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Л 591

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук *А. В. Игнатьев*, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;

кандидат педагогических наук *Н. Ф. Жбанова*, доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

Л 591 **Линейная** алгебра. Конспект лекций [Электронный ресурс] : учебное пособие / сост. Т. В. Соловьева ; М-во образования и науки Росс. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Электрон. текстовые дан. (2,63 Мб). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — Учебное электронное издание комбинированного распространения: 1 DVD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод DVD -ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. — Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-497-3

Настоящий курс, состоящий из 11 лекций, предназначен для студентов-бакалавров экономических специальностей очной и заочной форм обучения. Изложение теоретического материала по всем темам сопровождается рассмотрением большого числа примеров и задач.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73

Публикуется в авторской редакции.
Подписано в свет 10.05.2012. Гарнитура «Таймс». Объем данных 2,63 Мб.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекции 1–3
1. Матрицы и определители

1.1 Основные сведения о матрицах

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики — матричная алгебра — имеют чрезвычайно важное значение для экономистов, так как значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов описывается в матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы принято обозначать прописными буквами латинского алфавита, а элементы матрицы обозначают строчными буквами с двумя индексами, первый из которых указывает номер строки, а второй — номер столбца. Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

или в сокращенной записи $A = (a_{ij})$, $i = 1,\dots, m;$ $j = 1,\dots, n$. Наряду с круглыми скобками для обозначения матриц можно использовать следующие символы: [ ], ‖ ‖.

Две матрицы A и B одного размера называются *равными*, если у них равны элементы, стоящие на одних и тех же местах, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей – строкой*, а из одного столбца — *матрицей – столбцом*.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ —матрица – строка, $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ — матрица – столбец.

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно числу n, то матрица называется *квадратной* n–го порядка.

Элементы матрицы, у которых номер строки равен номеру столбца, называются *диагональными* и образуют главную диагональ матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}.

Квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, называется *диагональной*, а если в диагональной матрице все диагональные элементы равны 1, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой E.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$ — диагональная матрица третьего порядка.

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ — единичная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица называется *симметричной*, если $a_{ij}=a_{ji}$ для любых i и j.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\3&2&8\\-1&8&4\end{pmatrix}$$ — симметричная матрица.

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрица называется нулевой или нуль матрицей.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю.

$$A=\begin{pmatrix}2&4&1&0\\0&-2&1&2\\0&0&-1&-4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$ — треугольная матрица.

1.2 Действия над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций.

1. Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу на число, необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

Пример 1.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&5&7\\11&0&2\end{pmatrix}$. Найдите $3A$.

Решение. $3A=\begin{pmatrix}9&6&3\\6&15&21\\33&0&6\end{pmatrix}$.

Следствия. 1) Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

$$\begin{pmatrix}3&9&12\\21&24&30\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1&3&4\\7&8&10\end{pmatrix}.$$

2) Произведение матрицы на число нуль есть нулевая матрица.

2. <u>Сложение и вычитание матриц.</u> Суммой (разностью) двух матриц A и B одинакового размера называется матрица $C = A \pm B$ того же размера, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

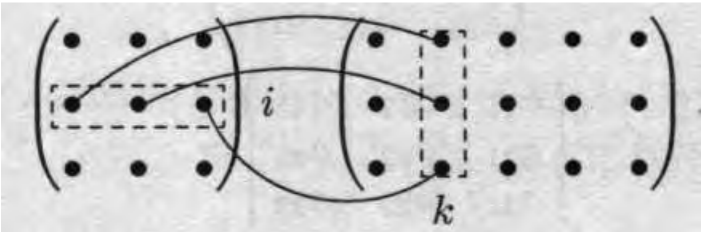
Пример 1.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите сумму матриц.

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

В частности, $A + 0 = A$, где 0 — нулевая матрица.

3. <u>Умножение матриц.</u> Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матриц A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times p$ называется матрица C размера $m \times p$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i–ой строки матрицы А на соответствующие элементы k–го столбца матрицы B: $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$, где $i = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, p}$.

Получение элемента c_{ik} схематично можно изобразить так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведение AB и BA всегда существуют. Легко убедиться, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите произведение AB.

Решение. $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $\beta(A + B) = \beta A + \beta B$;
4) $A(B + C) = AB + AC$;
5) $(A + B)C = AC + BC$;
6) $\beta(AB) = (\beta A)B = A(\beta B)$;
7) $A(BC) = (AB)C$.

Операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

2) если произведение матриц AB существует, то произведение BA может не существовать;

2) если же произведения AB и BA существуют, то $AB \neq BA$.

Рассмотрим пример 1.3 и найдем $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, т.е. $AB \neq BA$ и, следовательно, коммутативный закон не выполняется.

Пример 1.4. Даны матрицы $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите произведения AX и XA.

Решение. $AX = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, произведение XA не существует.

4. Возведение в степень. Целой положительной степенью A^m ($m > 1$) квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A:

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m \text{ раз}}.$$

Следствия. 1) $A^0 = E$; 2) $A^1 = A$; 3) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$; 4) $(A^m)^k = A^{mk}$.

Операция возведения в степень определена только для *квадратных матриц.*

5. Транспонирование матрицы. Матрица A^T, в которой строки и столбцы поменяли местами с сохранением порядка, называется *транспонированной матрицей* к матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если исходная матрица A имеет размер $m \times n$, то транспонированная к ней матрица имеет размер $n \times m$.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

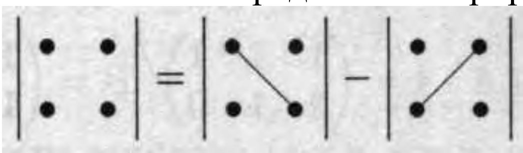
1.3 Определители квадратных матриц

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 2-го порядка.

Определителем квадратной матрицы 2-го порядка, или определителем 2-го порядка, называется число, которое определяется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Вычисление определителей 2-го порядка иллюстрируется схемой:

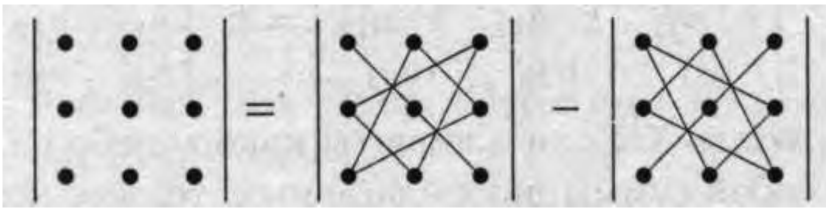


Определителем квадратной матрицы 3-го порядка, или определителем 3-го порядка, называется число, которое определяется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически записывается так:



В первом определителе основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали, а во втором параллельны побочной диагонали.

Пример 1.5. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 6 - 6\cdot 3\cdot 4 - 5\cdot 5\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 4 = -39.$$

Пусть дана квадратная матрица A n–го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Пример 1.6. Найдите миноры M_{13} и M_{22} матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Решение.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31};\ M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i + j)$ — четное число и отличается от минора знаком, когда $(i + j)$ — нечетное число.

Важное значение для вычисления определителя имеет следующая теорема.

Теорема 1.1. (теорема Лапласа). Определитель квадратной матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$ — разложение определителя по элементам i-ой строки.

$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$ — разложение определителя по элементам j-го столбца.

Для разложения определителя выбирают ту строку или столбец, где есть нулевые элементы, так как соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

Пример 1.7. Вычислите определитель треугольной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-2) = 8.$$

Определитель треугольной матрицы (очевидно, что и диагональной) равен произведению элементов главной диагонали.

1.4 Свойства определителей

1) Если, какая-либо строка (столбец) определителя состоит из одних нулей, то определитель равен нулю.

2) Общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

3) При транспонировании матрицы величина её определителя не изменяется:

$$|A| = |A^T|.$$

4) При перестановке двух строк (столбцов) местами, знак определителя меняется на противоположный.

5) Если в определителе — две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю.

6) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$ для всех $i \neq j$.

7) Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8) Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Перечисленные свойства позволяют существенно упростить вычисление определителей, особенно определителей высоких порядков.

Пример 1.8. Вычислите определитель четвертого порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойство 7, в последнем столбце получим три нуля. Для чего вторую строку сначала умножим на (–2) и прибавим к первой, затем её же умножим на (–3) и прибавим к третьей, и умножим на (–5) и прибавим к четвертой.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 14 & -13 & 0 \\ 3 & -4 & 4 & 1 \\ -7 & 9 & -7 & 0 \\ -11 & 18 & -19 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -2 & 14 & -13 \\ -7 & 9 & -7 \\ -11 & 18 & -19 \end{vmatrix} = -343.$$

1.5 Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева, получается единичная матрица того же порядка.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Если определитель матрицы отличен от нуля, то квадратная матрица называется *невырожденной* или *неособенной*, в противном случае матрица называется *вырожденной* или *особенной*.

Теорема 1.2. (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы).

Обратная матрица существует и притом единственная тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1) Вычисляем определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, то обратная матрица не существует, если же отличен от нуля, то обратная матрица существует.

2) Находим транспонированную матрицу к исходной матрице.

3) Вычисляем алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы и составляем из них матрицу, которую будем называть *присоединенной матрицей* и обозначать $\widetilde{A}$.

4) Вычисляем обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$.

5) Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формуле:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Пример 1.9. Найдите обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) Вычислим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5.$$

2) Найдем транспонированную матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Вычислим алгебраические дополнения всех элементов транспонированной матрицы и составим присоединенную матрицу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}4 \\ -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

5) Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}4\\ -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично, находим, что $A\cdot A^{-1}=E$.

1.6 Ранг матрицы

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. *Минор*, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*.

Ранг матрицы принято обозначать: $rang\ A$ или $r(A)$.

Из определения ранга следует:

1) если матрица A размера $m\times n$, то $rang\ A\le \min(m, n)$;
2) $rang\ A = 0$ тогда и только тогда, когда A — нуль матрица;
3) если A — квадратная матрица n–го порядка, то $rang\ A = n$ тогда и только тогда, когда A — невырожденная матрица.

Пример 1.10. Вычислите ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Решение. В нашем случае $rang\ A \le \min(3, 4) = 3$. Легко убедиться, что все миноры третьего порядка равны нулю, которые получаются вычеркиванием одного из столбцов.

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Так как все миноры третьего порядка равны нулю, то $rang\ A\le 2$. Вычислим миноры 2-го порядка: $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2-9=-7\neq 0$.

Если есть хотя бы один минор второго порядка, отличный от нуля, то $rang\ A = 2$.

Ранг матрицы удобно вычислять, используя элементарные преобразования матрицы.

Элементарные преобразования матрицы

1) Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2) Умножение всех элементов строки (столбца) на число, не равное нулю.
3) Изменение порядка строк (столбцов).
4) Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5) Транспонирование матрицы.

Теорема 1.3. Элементарные преобразования матрицы не изменяют её ранга.

2. Системы линейных уравнений

2.1 Основные понятия и определения

Пусть дана система линейных m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где числа a_{ij} называются коэффициентами при неизвестных, а b_i — свободными членами, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Решением системы (2.1) называется такая совокупность n чисел: c_1, $c_2, \ldots c_n$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство или тождество.

Если система (2.1) имеет хотя бы одно решение, то она называется *совместной*, в противном случае, т.е. когда не имеет ни одного решения, она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и, *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и тоже множество решений.

Систему (2.1) можно записывать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ — матрица из коэффициентов при неизвестных или матрица системы.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — матрицы-столбцы неизвестных и правых частей системы.

Тогда система (2.1) примет вид

$$A \cdot X = B. \tag{2.2}$$

Расширенной матрицей $\overline{A}$ системы называется матрица системы A, дополненная столбцом свободных членов:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

2.2 Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть в системе (2.1) $m = n$, т.е. число уравнений системы совпадает с числом неизвестных. Тогда матрица системы A — квадратная, а её определитель называют определителем системы.

Метод обратной матрицы. Предположим, что матрица системы A невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля. Тогда у неё существует обратная матрица A^{-1}. Умножим обе части равенства (2.2) на A^{-1} слева:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, но так как $A^{-1}\cdot A = E$ и $E\cdot X = X$, тогда решение системы примет вид

$$X = A^{-1}\cdot B. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. (формулы Крамера). Пусть Δ — определитель матрицы системы A, а Δ_j — определитель матрицы, получаемый из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \tag{2.4}$$

Пример 2.1. Найдите решение системы методом обратной матрицы и по формулам Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Решение. 1) Найдем решение системы методом обратной матрицы. Вычислим определитель системы и алгебраические дополнения для всех элементов транспонированной матрицы системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \qquad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$A_{11} = 2,\quad A_{12} = 0,\quad A_{13} = -2,$

$A_{21} = 2,\quad A_{22} = -1,\quad A_{23} = -1,$

$A_{31} = -4,\quad A_{32} = -1,\quad A_{33} = 3.$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Т.о. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$. Легко убедиться, что решение найдено верно, для этого полученные значения неизвестных необходимо подставить в левые части уравнений исходной системы.

2) Найдем решение системы по формулам Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-2} = 4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

2.3 Метод Жордана-Гаусса

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Метод Жордана-Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений (2.5) приводится к равносильной системе вида:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = c_2, \\ \;\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_n, \end{cases} \tag{2.6}$$

если определитель матрицы системы отличен от нуля. Для преобразования системы (2.5) к виду (2.6) необходимо проделать n шагов.

<u>1-ый шаг.</u> Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Тогда будем называть коэффициент a_{11} — ведущим элементом этого шага. Если $a_{11} = 0$, то поменяем местами первое и i–ое уравнения, где $a_{i1} \neq 0$. Разделим первое уравнение на ведущий элемент a_{11} и получим новое уравнение:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} \quad \text{или}$$

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \text{ где } a_{1i}^{(1)} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}, \; i = \overline{1, n}.$$

Умножая, полученное уравнение последовательно на a_{21} и вычитая из 2-го уравнения системы (2.5), на a_{31} и вычитая из 3-го уравнения и т.д., на a_{n1} и вычитая из n-го уравнения, исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы кроме 1-го. Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)}a_{i1}; \quad b_j^{(1)} = b_j - b_j^{(1)}a_{j1}; \quad i, j = \overline{2, n}.$$

2-ой шаг. Рассмотрим 2-ое уравнение последней системы и предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Тогда $a_{22}^{(1)}$— ведущий элемент 2-го шага. Разделим 2-ое уравнение на $a_{22}^{(1)}$, а затем умножая полученное уравнение последовательно на $a_{12}^{(1)}$, $a_{32}^{(1)}$, …, $a_{n2}^{(1)}$ и вычитая его из 1-го, 3-го и т.д. из n-го уравнения, получим систему в которой исключено неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме 2-го.

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}^{(2)}x_3 + \ldots.. + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots.. + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots.. + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots.. + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)}a_{i2}^{(1)}$, $\quad b_j^{(2)} = b_j^{(1)} - b_j^{(2)}a_{j2}^{(1)}$, $i = 1, 3, 4, \ldots, n$, $j = 2, 3, \ldots, n$.

На третьем шаге исключим неизвестное x_3 из всех уравнений системы, кроме 3-го и т.д. После n-го шага система уравнений примет вид (2.6), т.е. будет получено решение системы.

Замечание. Если на i- ом шаге окажется, что $a_{ii}^{(i-1)} = 0$ и все нижележащие уравнения имеют коэффициенты тоже равные нулю, т.е. $a_{i+1i}^{(i-1)} = a_{i+2i}^{(i-1)} = \ldots = a_{ni}^{(i-1)} = 0$, то это говорит о том, что определитель системы равен нулю, т.е. система или несовместна или неопределенна. Если же получится уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i$, то система несовместна.

Пример 2.2. Решите систему уравнений примера 2.1 методом Жордана-Гаусса.

Решение. Метод Жордана-Гаусса удобнее всего оформлять в виде расширенной матрицы, выполняя все элементарные преобразования над её строками. Поменяем местами 1-ое и 2-ое уравнения.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -14 \\ 0 & -4 & -2 & -20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 14/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы дает теорема Кронекера-Капелли.

Теорема 2.2. (теорема Кронекера-Капелли). Система m линейных уравнений с n неизвестными *совместна* тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Причем, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение, а если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система имеет бесконечно много решений.

Пример 2.3. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Выясните, имеет ли она решение и если да, то найдите его.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы по методу Жордана-Гаусса, поставив второе уравнение на первое место.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2$, где $\overline{A}$ — расширенная матрица системы, $n = 4$, так как r < n, то система неопределенна. Найдем еѐ решение. От расширенной матрицы перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17. \end{cases}$$

Разность $n - r = 2$, это означает, что две неизвестные должны быть *свободными*, а две другие *базисными*, т.е. они должны выражаться через свободные неизвестные.

В качестве *свободных неизвестных* выберем x_3 и x_4, тогда неизвестные x_1 и x_2 будут *базисными*. Выразим из второго уравнения x_2 и подставим его значение в первое уравнение. Получим множество решений исходной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{5}x_4, \\ x_2 = -\dfrac{17}{5} + x_3 - \dfrac{7}{5}x_4, \\ x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2. \end{cases}$$

Неизвестные x_3 и x_4 могут принимать любые значения.

2.4 Системы линейных однородных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными называется однородной, если все свободные члены равны нулю.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Система линейных однородных уравнений всегда *совместна*, так как она всегда имеет нулевое решение, или *тривиальное* решение (0, 0, …, 0).

Теорема 2.3. Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных, $r < n$.

Теорема 2.4. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы её определитель равнялся нулю, $\Delta = 0$.

Пример 2.4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ранг матрицы $r_A = 2$, а число неизвестных $n = 3$. Так как $r < n$, следовательно, система имеет ненулевые решения. Найдем разность $n - r = 1$. Это означает, что одна неизвестная может быть свободной, а две другие должны выражаться через неѐ, т.е. быть базисными. Перенесем неизвестную x_3 в правую часть системы и решим полученную систему по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 2x_3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3,$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = 3x_3, \end{cases} \qquad \text{где} \quad x_3 = c \text{ — любое.}$$

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1) Если строка $e_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ — решение системы (2.7), то и строка $ke_1 = (kc_1, kc_2, \dots, kc_n)$ – так же решение этой системы.

2) Если строки $e_1 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $e_2 = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — решения системы (2.7), то для любых k_1 и k_2 их линейная комбинация $k_1e_1 + k_2e_2 = (k_1c_1 + k_2b_1, k_1c_2 + k_2b_2, ..., k_1c_n + k_2b_n)$ так же решение этой системы.

Эти свойства легко доказываются непосредственной подстановкой в систему.

Решения e_1, e_2, …, e_k системы (2.7) называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа β_1, β_2, …, β_k, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация решений системы равна нулевой строке:

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_k e_k = \mathbf{0}, \text{ где } \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \qquad (2.8)$$

Если же линейная комбинация решений (2.8) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты β_i равны нулю, т.е. $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$, то решения e_1, e_2, …, e_k называются *линейно независимыми*.

Замечание. Линейная зависимость решений означает, что хотя бы одно решение системы является линейной комбинацией остальных решений.

Система линейно независимых решений e_1, e_2, …, e_k называется *фундаментальной*, если каждое решение системы (2.7) является линейной комбинацией решений e_1, e_2, …, e_k.

Теорема 2.5. Если ранг r_A матрицы системы линейных однородных уравнений (2.7) меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы (2.7) состоит из $(n - r)$ решений.

Таким образом, общее решение системы (2.7) можно записать в виде:

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_k e_k,$$

где e_1, e_2, …, e_k — фундаментальная система решений; β_1, β_2, …, β_k — произвольные числа, а $k = n - r$.

Построение фундаментальной системы решений

1) Найти общее решение однородной системы.
2) Взять систему $k = n - r$ линейно независимых векторов $\boldsymbol{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e_k} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
3) Подставить в общее решение вместо свободных неизвестных координаты вектора $\boldsymbol{e_1}$ и найти значения остальных неизвестных. Полученная совокупность значений неизвестных является решением F_1.
4) Аналогично с помощью векторов $\boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_k}$ находят решения $F_2, \ldots, F_k$.
5) Решения $F_1, F_2, \ldots, F_k$ и образуют фундаментальную систему решений.

Пример 2.5. Найдите фундаментальную систему решений системы однородных линейных уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Решение. Найдем ранг матрицы системы, для чего преобразуем левые части системы по методу Жордана-Гаусса, поменяв местами первое уравнение со вторым.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы $r_A = 3$, а число неизвестных $n = 4$, тогда $k = n - r = 1$. После преобразований исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \text{— общее решение системы.}$$

В качестве свободного неизвестного выберем x_4 и рассмотрим вектор $\boldsymbol{e}_1 = (1)$. Тогда подставляя в общее решение вместо x_4 единицу, получим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Фундаментальную систему образует всего одно решение $F_1 = (-1, 1, -1, 1)$.

Лекция 4

3. Основы планирования межотраслевого баланса

Модель межотраслевого баланса — одна из самых простых экономико-математических моделей. Она представляет собой единую взаимоувязанную систему информации о взаимных поставках продукции между всеми отраслями производства, а также об объеме и отраслевой структуре основных производственных фондов, об обеспеченности многоотраслевого хозяйства трудовыми ресурсами и т. д.

Такая модель позволяет рассчитать сбалансированный план на основе точного учета всех межотраслевых связей и рассмотреть при этом множество возможных вариантов.

Постановка задачи. Пусть весь производственный сектор многоотраслевого хозяйства разделен на n чистых отраслей.

Чистая отрасль — это условное понятие — некоторая часть многоотраслевого хозяйства, более менее цельная (например, энергетика, с/х, машиностроение и т.д.).

Цель балансового анализа — ответить на вопрос, каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли? При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой — как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями.

Связь между отраслями отражается в таблицах *межотраслевого баланса*, а математическая модель, позволяющая их анализировать, разработана в 1936 г. американским экономистом В. Леонтьевым.

Пусть каждая из n отраслей производит свою продукцию. Часть, которой идет на *внутрипроизводственное потребление* данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей *непроизводственного потребления*, которую принято называть *конечным продуктом.*

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени, например, за год.

Введем следующие обозначения: x_i — общий (валовой) объем продукции i – ой отрасли ($i = 1, 2,\ldots, n$);

x_{ij} — объем продукции i – ой отрасли, потребляемой j – ой отраслью в процессе производства ($i, j = 1, 2,\ldots, n$);

y_i — объем конечного продукта $i-$ой отрасли для непроизводственного потребления.

Так как валовой объем продукции любой $i-$ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\,, \quad (i = 1, 2,\ldots, n). \tag{3.1}$$

Уравнения (3.1) называются *соотношениями баланса*. Будем рассматривать *стоимостный межотраслевой баланс*, когда все величины, входящие в (1), имеют стоимостное выражение.

Введем *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.2}$$

показывающие затраты продукции $i-$ой отрасли на производство единицы продукции j – ой отрасли.

Можно полагать, что в некотором промежутке времени коэффициенты a_{ij} будут постоянными и зависящими от сложившейся технологии производства. Это означает *линейную зависимость* материальных затрат от валового выпуска, т.е.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) выражает межотраслевые потоки средств производства. Теперь соотношения баланса примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Перепишем равенство (3.4) в матричной форме, для чего введем в рассмотрение матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

где X — вектор валового выпуска продукции, Y — вектор конечного продукта, A — матрица прямых затрат (*технологическая* или *структурная* матрица).

Матрица A — матрица прямых затрат содержит весьма много информации: её $i-$ая строка характеризует использование продукции $i-$ой отрасли по всему м/о хозяйству, а $j-$ый столбец характеризует $j-$ую отрасль, а именно, что в каких количествах она использует. Таким образом, матрица A по существу определяет структуру экономики.

Равенство (3.4) в матричной форме примет вид:

$$X = AX + Y, \text{ или}$$

$$(E - A)X = Y. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) называется моделью межотраслевого баланса Леонтьева. Если матрица $(E – A)$ — невырожденная, т.е. её определитель отличен от нуля, то равенство (5) можно записать в виде

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{3.6}$$

Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Каждый элемент матрицы S есть величина валового выпуска продукции $i-$ой отрасли, необходимого для обеспечения единицы конечного продукта $j-$ой отрасли, т.е. $y_j = 1$ (j = 1, 2,…, n).

Модель межотраслевого баланса позволяет решить следующие задачи:

1) определить объем конечной продукции отраслей по заданным объемам валовой продукции (3.5);
2) по заданной матрице прямых затрат определить матрицу полных затрат, элементы которой служат важными показателями для планирования развития отраслей;
3) определить объемы валовой продукции отраслей по заданным объемам конечной продукции (3.6).

Прямые затраты не отражают в полной мере сложных количественных взаимосвязей, наблюдающихся в м/о хозяйстве. Они, в частности, не отражают обратных связей, имеющих далеко не маловажное значение. Очень часто возникают так называемые косвенные затраты. Например, на изготовление трактора в виде прямых затрат расходуется чугун, сталь и т.д. Но для производства стали также нужен чугун. Таким образом, кроме прямых затрат чугуна, имеются и косвенные затраты чугуна. Косвенные затраты могут иногда существенно превышать прямые затраты.

Матрица $C = S - A - E$ называется *матрицей коэффициентов косвенных затрат.*

В соответствии с экономическим смыслом задачи все величины X, A и Y должны быть неотрицательны.

Матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения (3.5). В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A, рассмотрим наиболее простой из них:

матрица A *продуктивна*, если максимум сумм элементов еѐ столбцов не превосходит единицы, причем хотя бы для одного из столбцов сумма элементов строго меньше единицы, т.е. матрица A продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых i, j = 1, 2,…, n и $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ и существует номер j такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Пример 3.1. Составьте межотраслевой баланс производства и распределения продукции для трехотраслевой экономической системы, заданной матрицей коэффициентов прямых затрат A и вектором конечной продукции Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}03 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix},$$

для чего найдите:

- коэффициенты полных затрат;
- плановые объемы валовой продукции;
- величину межотраслевых потоков;
- матрицу косвенных затрат.

По заданному вектору увеличения конечного выпуска продукции $\Delta Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ определите изменения плана ΔX.

Решение. Убедимся, что матрица A продуктивна, для чего найдем суммы элементов каждого её столбца:

столбец	1– ый	2 – ой	3 – ий
сумма	0,55	0,42	0,31

Т.е. $\max(0{,}55;\, 0{,}42;\, 0{,}31) = 0{,}55 < 1$.

Рассмотрим порядок составления межотраслевого баланса производства и распределения продукции для экономической системы, заданной матрицей коэффициентов прямых затрат A и вектором конечной продукции Y с помощью математического пакета MathCAD. Программа будет иметь вид:

ORIGIN:=1 n:=3

1. Вводим исходные данные задачи: матрицу A — матрицу коэффициентов прямых затрат и матрицу Y— матрицу выпуска конечной продукции.

$$A := \begin{bmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.2 \\ 0.15 & 0.12 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.08 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 56 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$$

2. Вычисляем матрицу X — матрицу столбец плановых объемов валовой продукции.

K:=identity(3) – A $\qquad K = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.25 & -0.2 \\ -0.15 & 0.88 & -0.03 \\ -0.1 & -0.05 & 0.92 \end{bmatrix}$

$S := K^{-1}$ $\qquad S = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.469 & 0.359 \\ 0.276 & 1.22 & 0.1 \\ 0.187 & 0.117 & 1.131 \end{bmatrix}$

X:=$S\cdot Y$ $\qquad X = \begin{bmatrix} 102.197 \\ 41.047 \\ 26.383 \end{bmatrix}$

3. Вычисляем матрицу межотраслевых потоков средств производства.

i:= 1..n j:= 1..n

$$X1_{i,j} := A_{i,j} \cdot X_j$$

$$X1 = \begin{bmatrix} 30.659 & 10.262 & 5.277 \\ 15.33 & 4.926 & 0.791 \\ 10.22 & 2.052 & 2.111 \end{bmatrix}$$

4. Определяем чистую продукцию или общие доходы.

$$O := X^T - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X1 \qquad O = \begin{bmatrix} 45.989 & 23.807 & 18.204 \end{bmatrix}$$

5. Вычисляем матрицу коэффициентов полных затрат.

$$Aeinv := S \qquad Aeinv = \begin{bmatrix} 1.58 & 0.469 & 0.359 \\ 0.276 & 1.22 & 0.1 \\ 0.187 & 0.117 & 1.131 \end{bmatrix}$$

6. Найдем матрицу косвенных затрат.

$$C := S - A - \text{identity}(3) \qquad C = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.219 & 0.159 \\ 0.126 & 0.1 & 0.07 \\ 0.087 & 0.067 & 0.051 \end{bmatrix}$$

7. Определяем изменение плана по заданному вектору увеличения выпуска продукции.

$$\Delta Y := \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \Delta X := Aeinv \cdot \Delta Y \qquad \Delta X = \begin{bmatrix} 38.096 \\ 18.218 \\ 10.566 \end{bmatrix}$$

Результаты вычислений представим в форме таблицы межотраслевого баланса (табл. 3.1)

Таблица 3.1

Потребляющие отрасли / Производящие отрасли	1	2	3	Конечная продукция	Валовая продукция
1	30,7	10,2	5,3	56	102,2
2	15,3	4,9	0,8	20	41
3	10,2	2,1	2,1	12	26,4
Чистая продукция	46	23,8	18,2	—	—
Валовая продукция	102,2	41	26,4	—	169,6

Величина чистой продукции определяется как разница между валовой продукцией отрасли и суммой межотраслевых потоков в каждом столбце.

На основе заданных матриц Y и A по уровню конечного продукта и коэффициентов прямых затрат получен полностью сбалансированный план общего производства продукции и её распределения как между отраслями в качестве средств производства, так и для конечного пользования.

Лекции 5–6

4. Векторы

4.1 Основные понятия

Величины называют *скалярными* (*скалярами*), если они после выбора единиц измерения полностью характеризуются одним числом.

Примером скалярных величин могут служить угол, площадь, объем, плотность среды, сопротивление, температура.

Величина называется *вектором* (*векторной*), если она определяется двумя элементами различной природы: алгебраическим элементом — числом, показывающим длину вектора и являющимся скаляром, и геометрическим элементом, указывающим направление вектора.

Геометрически принято изображать вектор направленным отрезком. Для обозначения векторных величин используют малые латинские буквы, выделенные жирным шрифтом (***a***), либо со стрелочкой вверху ($\vec{a}$), либо две заглавные буквы с черточкой вверху ($\overline{AB}$), где A — начало вектора, B — его конец (рис. 4.1). Заметим, что зная координаты начала и конца вектора, можно найти координаты вектора, определяемого этими точками $\overline{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$, т.е. от координат конца вычитают координаты начала вектора.

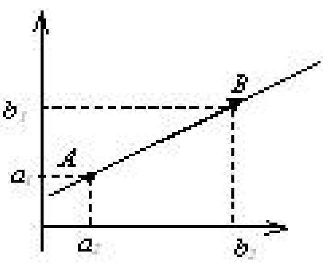


Рис. 4.1.

Вектор называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают. Нулевой вектор обозначают: $\vec{0}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарность векторов ***a*** и ***b*** выражают записью: ***a***||***b***. Коллинеарные векторы могут быть разной длины (рис. 4.2), (векторы AB и A_1B_1), поэтому одна только коллинеарность не гарантирует равенства векторов.

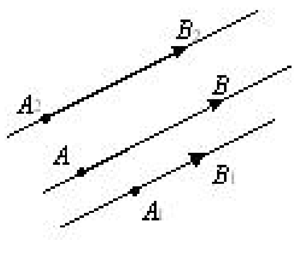


Рис. 4.2.

В дальнейшем будем рассматривать только *свободные векторы*, т.е. такие векторы, которые можно перемещать в пространстве параллельно их направлению. Для свободного вектора его начало можно совмещать с любой точкой пространства.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Равенство векторов обозначают $\vec{a} = \vec{b}$. Для неравных векторов используют запись: $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ назовем *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны или $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то такие векторы называют *линейно независимыми* соответственно на плоскости или в пространстве.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *ортогональны*, если они перпендикулярны (проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ и проекция вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$ равны нулю). Тогда записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$. Такие векторы всегда линейно независимы.

4.2 Операции над векторами

1. Произведение вектора на скаляр.

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) α называется вектор $\alpha\vec{a}$, который имеет длину $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\alpha > 0$ и противоположное направление, если $\alpha < 0$.

2. Проекция вектора на ось.

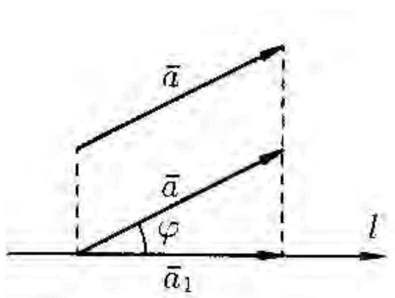


Рис. 4.3.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l (рис. 4.3) называется положительное число $|a_1|$, если вектор $\vec{a}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|a_1|$, если вектор $\vec{a}$ и ось l противоположно направлены и обозначается $\text{пр}_l\bar{a}$.

Рассмотрим некоторые свойства проекций.

а) Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т.е. $\text{пр}_l\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\varphi$.

б) Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось: $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \text{пр}_l\,\vec{a} + \text{пр}_l\,\vec{b} + \text{пр}_l\,\vec{c}$.

в) При умножении вектора $\bar{a}$ на число α его проекция умножается на это число: $\text{пр}_l(\alpha\,\vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l\,\vec{a}$.

3. Сложение и вычитание.

Сложение векторов производят математически (по формулам) или геометрически (4.4). Геометрический способ более известен, как *правило треугольника*.

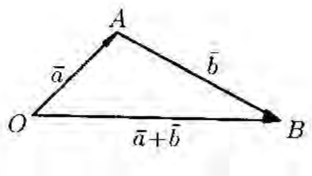


Рис. 4.4.

Математически сложение записывают $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ или $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если речь идет о вычитании векторов (4.4).

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух геометрических векторов называется новый вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Складывать векторы можно и по правилу *параллелограмма*: сумма $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, есть вектор $\vec{c}$, представляющий собой диагональ параллелограмма, построенного на данных векторах (рис. 4.5).

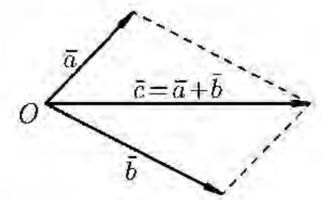


Рис. 4.5.

Линейные операции над векторами обладают теми же свойствами, что и вещественные числа.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$; 2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$; 4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5. $\alpha\cdot\left(\beta\vec{a}\right)=\alpha\cdot\beta\cdot\vec{a}$; 6. $\alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, есть вектор $\vec{c}$, идущий из конца вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$ (рис. 4.6).

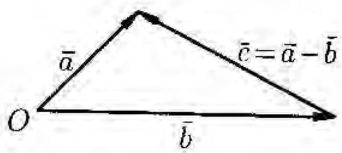


Рис. 4.6.

Если модуль вектора $\vec{a}$ равен единице, то такой вектор называют *единичным*, или *ортом*.

Орт вектора всегда имеет то же направление, что и рассматриваемый вектор. Единичные векторы координатных осей $0x$, $0y$, $0z$ обычно обозначают соответственно как $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (или $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$).

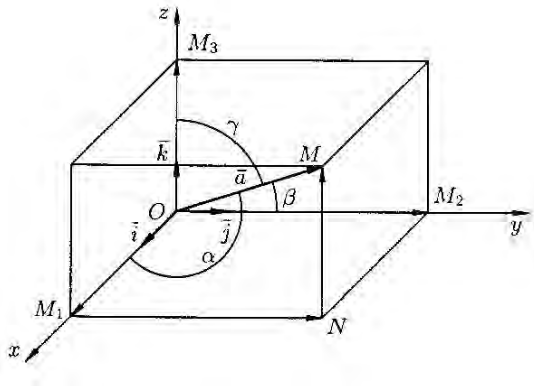


Рис. 4.7.

Тройка указанных векторов образует так называемый *ортонормированный базис* пространства векторов. Это означает, что любой другой вектор $\vec{a}$ (рис. 4.7) может быть единственным образом разложен по данному базису. Покажем это. Выберем произвольный вектор $\vec{a}$ и совместим его начало с началом координат: $\vec{a}=\overline{OM}$. Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями координат обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $\text{пр}_x \bar{a} = \left|\overline{OM}_1\right| = a_x$, $\text{пр}_y \bar{a} = \left|\overline{OM}_2\right| = a_y$, $\text{пр}_z \bar{a} = \left|\overline{OM}_3\right| = a_z$. По определению суммы векторов имеем $\vec{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$, так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, $\overline{NM} = \overline{OM}_3$. Но

$$\overline{OM}_1 = \left|\overline{OM}_1\right| \cdot \vec{i}\,;\ \overline{OM}_2 = \left|\overline{OM}_2\right| \cdot \vec{j}\,;\ \overline{OM}_3 = \left|\overline{OM}_3\right| \cdot \vec{k}\,.$$

Тогда получаем

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\,. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) называется *разложением вектора по ортам координатных осей* или разложением вектора по ортонормированному базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Числа a_x, a_y, a_z называются компонентами или координатами вектора $\vec{a}$ в данном базисе.

Задание вектора координатами в данном базисе может быть записано в символическом виде: $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$.

Рассмотрим два вектора $\vec{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}\,(b_x, b_y, b_z)$. Справедливы следующие утверждения.

1. Равные векторы имеют одинаковые координаты

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z. \tag{4.2}$$

2. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны. Действительно, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \alpha\,\vec{b}$, т.е. $\vec{a} = (\alpha b_x, \alpha\, b_y, \alpha b_z)$, где $\alpha \neq 0$,

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \alpha. \tag{4.3}$$

3. Каковы бы ни были две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, координаты вектора $\overline{AB}$ определяются по формулам

$$\overline{AB}\ (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{4.4}$$

4. Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{4.5}$$

5. Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями $0x$, $0y$, $0z$ соответственно равны α, β, γ (рис. 4.7). По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha,\ a_y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta,\ a_z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma\,.$$

Откуда находим

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \ \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \ \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}. \qquad (4.6)$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Легко убедиться в справедливости равенства:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.

Координатами некоторого единичного вектора $\vec{e}$ являются числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, т.е. $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

6. Сумма и разность векторов, заданных своими координатами определяются по формулам:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z), \qquad (4.7)$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z). \qquad (4.8)$$

Пример 4.1. Даны векторы $\vec{a} = (1; -1; 2)$; $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Найдите векторы: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Используя формулы (4.7) и (4.8) получим:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (1+2; -1+0; 2-1) = (3; -1; 1),$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (1-2; -1-0; 2-(-1)) = (-1; -1; 3).$$

Для того чтобы найти третий вектор $\vec{p}$, необходимо выполнить промежуточные вычисления, а именно сначала найти координаты векторов $3\vec{a}$ и $2\vec{b}$.

$$3\vec{a} = (3\cdot 1; 3\cdot(-1); 3\cdot 2) = (3; -3; 6); \ \ 2\vec{b} = (2\cdot 2; 2\cdot 0; 2\cdot(-1)) = (4; 0; -2).$$

Теперь можно вычислить искомый вектор $\vec{p}$ как

$$\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = (3+4; -3+0; 6-2) = (7; -3; 4).$$

Пример 4.2. Даны проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси как $x = 4, y = 4, z = -4\sqrt{2}$. Найдите величину силы $\vec{F}$ и направление ее действия.

Решение. Вектор $\vec{F}$ имеет координаты (по условию) $\vec{F} = (4; 4; -4\sqrt{2})$. Так как в задаче речь идет о "величине" силы, следовательно, необходимо определить модуль найденного вектора, который найдем по формуле (4.5).

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-4\sqrt{2})^2} = 8.$$

Направление действия силы $\vec{F}$ определяют, используя направляющие косинусы, которые вычисляют по формулам (4.6):

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \;\; \cos\beta = \frac{y}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \;\; \cos\gamma = \frac{z}{\left|\vec{F}\right|} = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, сила $\vec{F}$, модуль которой равен 8, действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы α=60°; β=60°; γ=135°.

Линейно независимые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют *правую тройку векторов* (рис. 4.8), если они имеют такую же ориентацию, как соответственно большой, указательный и средний палец правой руки. Это значит, что если смотреть с конца третьего вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ должен происходить против часовой стрелки. В противном случае говорят о *левой тройке* векторов (рис. 4.9).

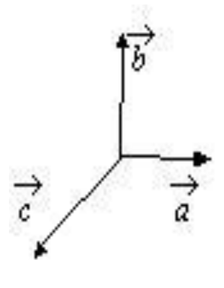


Рис. 4.8.

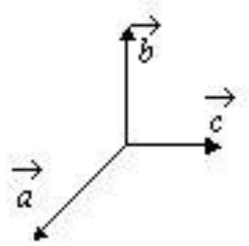


Рис. 4.9.

Три единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ попарно ортогональные друг другу и образующие правую тройку векторов, называют *прямоугольной декартовой системой координат*.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой угол α, не превосходящий π, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$, чтобы совместить его с направлением вектора $\vec{b}$, начало вектора $\vec{b}$ должно совпадать с началом $\vec{a}$. Угол между векторами обозначается $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ или $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$.

4.3 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число *S*, равное $S=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$. Эта операция обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$, т.е.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right). \tag{4.9}$$

В частности, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т.е.

$$\left(\vec{a}\right)^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\vec{a}\right|^2=a^2. \tag{4.10}$$

Если один из перемножаемых векторов единичный, то:

$$\vec{a}\cdot\vec{i}=a\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{i}\right)=\text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}. \tag{4.11}$$

Из определения скалярного произведения следует, что любой вектор, независимо от типа, можно представить в виде:

$$\vec{a}=\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}+\left(\vec{a}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}+\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)\vec{k},$$

где $\left(\vec{a}\cdot\vec{i}\right)$, $\left(\vec{a}\cdot\vec{j}\right)$ и $\left(\vec{a}\cdot\vec{k}\right)$ есть скалярное произведение вектора $\vec{a}$ с ортами осей координат. Тогда из последнего равенства имеем

$$\vec{a}=\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\alpha\right)\vec{i}+\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\beta\right)\vec{j}+\left(\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\gamma\right)\vec{k}=\left|\vec{a}\right|\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}\right),$$

где α, β и γ — углы, которые составляет вектор $\vec{a}$ соответственно с осями *0x*, *0y* и *0z*.

Можно заметить, что скалярное произведение *коммутативно и дистрибутивно*, т.е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ и $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$. Можно убедиться самостоятельно в том, что всегда выполняется равенство

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\alpha=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\,\alpha\right)=\left(\alpha\,\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

Если скалярное произведение двух векторов *равно нулю*, то эти *векторы ортогональны.*

Действительно, если ни один из векторов не нулевой, то, по определению скалярного произведения, последнее может быть равно нулю только тогда, когда

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=0, \quad \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\pi}{2}. \tag{4.12}$$

Следовательно, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$,

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы (орты) осей координат, а

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

Скалярное произведение векторов в координатной форме (необходимо раскрыть скобки, перемножая их как многочлены):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{4.13}$$

Используя формулу скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти выражение косинуса угла между этими векторами через их проекции на орты:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{4.14}$$

Если $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)<0$, то это значит, что угол между векторами больше 90°, т.е. тупой, а если $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)>0$, то угол острый.

Механический смысл скалярного произведения векторов состоит в следующем: скалярное произведение силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{S}$ равно работе A этой силы при перемещении материальной точки по вектору $\vec{S}$, т.е. $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Пример 4.3. Даны два вектора $\vec{a}=n\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+n\vec{j}-2\vec{k}$. Определите, при каком значении *n*, эти векторы будут перпендикулярны?

Решение. Условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=2n+2n-16=4n-16=0.$$

Из уравнения $4n-16=0$ находим, что $n=4$, т.е. при этом значении n $\vec{a}\perp\vec{b}$.

4.4 Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называется новый вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) он перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (рис. 4.8).

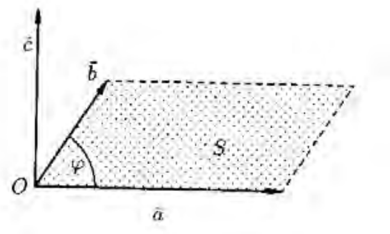


Рис. 4.10.

Векторное произведение обозначают: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Рассмотрим свойства векторного произведения.

1. Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Докажем первое равенство:

а) $\vec{k} \perp \vec{i}$ и $\vec{k} \perp \vec{j}$;

б) $\left|\vec{k}\right| = 1$, $\left|\vec{i} \times \vec{j}\right| = \left|\vec{i}\right| \cdot \left|\vec{j}\right| \cdot \sin 90^0 = 1$;

в) векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют правую тройку.

2. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, так как векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ противоположно направлены.

3. $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\,\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\,\vec{b}\right)$ (сочетательное свойство).

4. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е.

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то угол между ними равен 0^0 или 180^0, тогда $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin 0^0 = 0$, следовательно, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

В частности, $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

5. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

6. Векторное произведение в координатной форме имеет вид:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad (4.15)$$

7. Из определения векторного произведения можно записать формулы для определения площади параллелограмма и треугольника:

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (4.16)$$

8. Справедливо равенство $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$.

Пример 4.4. Найдите площадь треугольника, заданного вершинами $A(1;\ 1;\ 0)$; $B(3;\ 0;\ -3)$; $C(3;\ 2;\ 4)$.

Решение. Формула для нахождения площади треугольника ABC имеет вид:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

Для определения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выберем в качестве вершины любую точку, например, A, и найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Для этого вычтем из соответствующих координат "конца" вектора (точка B) соответствующие координаты "начала" вектора (точка A). В результате получим:

$$\overline{AB} = (3-1;\ 0-1;\ -3-0) = (2;\ -1;\ -3).$$

Аналогично находим и координаты вектора $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (3-1;\ 2-1;\ 4-0) = (2;\ 1;\ 4).$$

Теперь найдем векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле (4.15)

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 4\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(-4+3\right)-\vec{j}(8+6)+\vec{k}(2+2)=-\vec{i}-14\vec{j}+4\vec{k}.$$

Воспользуемся свойством векторного произведения и найдем площадь искомого треугольника.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-14)^2+4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{213}\approx 7{,}3\text{ (кв.ед.).}$$

4.5 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется векторно-скалярное произведение вида $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Смешанное произведение представляет собой некоторое число, которое принято обозначать $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначим $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ (рис. 4.11). Тогда $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\cdot\text{пр}_{\vec{d}}\,\vec{c}$, так как $\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S_{\text{пар}}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ а $\text{пр}_{\vec{d}}\,\vec{c}=H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\vec{d}}\,\vec{c}=-H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=S\cdot\left(\pm H\right)=\pm V$, где V — объем параллелепипеда.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

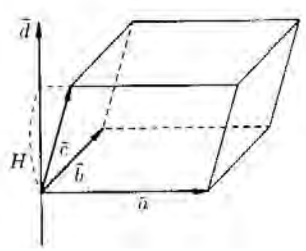


Рис. 4.11.

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножений: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b},\ \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c},\ \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарны.

5. Смешанное произведение в координатах имеет вид:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.17}$$

6. Если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, если же $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — левая тройка.

7. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле $V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$, а объем треугольной пирамиды $V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$.

Пример 4.5. Вычислите объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(1;\,1;\,2)$; $B(2;\,3;\,-1)$; $C(2;\,-2;\,4)$; $D(-1;\,1;\,3)$.

Решение. $V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|$. Определим векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB}=(2-1;\,3-1;\,-1-2)=(1;\,2;\,-3);$$

$$\overline{AC}=(2-1;-2-1;\,4-2)=(1;-3;\,2);$$

$$\overline{AD}=(-1-1;\,1-1;\,3-2)=(-2;\,0;\,1).$$

$$V_{\text{тетр}}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 5=\frac{5}{6}\text{(куб. ед.)}.$$

Пример 4.6. Объем тетраэдра равен 16. Три его вершины находятся в точках $A(2;\ 0;\ 4)$; $B(-1;\ 3;\ 6)$; $C(4;\ 5;\ -2)$. Найдите координаты четвертой вершины, если известно, что она лежит на оси $0y$.

Решение. Так как точка D лежит на оси $0y$, то еѐ абсцисса и аппликата равны нулю. Тогда точка D будет иметь координаты $D(0;\ y;\ 0)$. Определим векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-1-2; 3-0; 6-4) = (-3; 3; 2);$$
$$\overline{AC} = (4-2; 5-0; -2-4) = (2; 5; -6);$$
$$\overline{AD} = (0-2; y-0; 0-4) = (-2; y; -4).$$

По условию $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right| = 16$, откуда $\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\right| = 96$.

Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & y & -4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 140 - 14y.$$

Следовательно, получаем уравнение $|140-14y| = 96$. Решим его, рассмотрев два случая:

1) $140-14y = 96$;
$-14y = -44$;
$$y = \frac{44}{14} = \frac{22}{7};$$

2) $140-14y = -96$;
$-14y = -236$;
$$y = \frac{236}{14} = \frac{118}{7}.$$

Лекции 7–8

5. Элементы матричного анализа

5.1 n – мерный вектор и векторное пространство

Упорядоченный набор n действительных чисел $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *n-мерным вектором*. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$, составляющие n-мерный вектор $\boldsymbol{x}$, называются *координатами* или *компонентами* вектора.

Два n-мерных вектора *равны* тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т.е. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Leftrightarrow x_i = y_i$ ($i = 1, 2,\ldots, n$).

Произведением вектора $\boldsymbol{x}$ на действительное число α называется вектор $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x}$, координаты которого определяются формулой $z_i = \alpha x_i$ (i = 1, 2,…, n).

Суммой двух векторов одинаковой размерности n называется вектор $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, координаты которого определяются формулой $z_i = x_i + y_i$ ($i = 1, 2,\ldots, n$).

Линейные операции над векторами удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам):

1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ — переместительное свойство суммы;
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ — сочетательное свойство суммы;
3. $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ — сочетательное свойство относительно числового множителя;
4. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ — распределительное свойство;
5. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ — распределительное свойство;
6. существует нулевой вектор $\boldsymbol{o} = (0, 0,\ldots, 0)$ такой, что $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$;
7. для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует противоположный вектор $(-\boldsymbol{x})$ такой, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \text{o}$;
8. для любого вектора $\boldsymbol{x}$ справедливо равенство $1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции умножения вектора на число и сложение векторов, удовлетворяющее аксиомам 1–8, называется *векторным пространством* и обозначается буквой R.

Замечание. Под $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ можно рассматривать не только векторы, но и элементы любой природы. Тогда соответствующее множество элементов называется *линейным пространством*.

Например, можно рассматривать пространство товаров и вектор цен. Под товаром понимается некоторое благо или услуга, поступившее в продажу в определенное время и в определенном месте.

Пусть имеется n различных товаров. Обозначим количество i–го товара через x_i, тогда некоторый набор товаров обозначим $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, который является n-мерным вектором. Множество всех наборов товаров называется *пространством товаров*, так как для него справедливы аксиомы 1–8. Каждый товар имеет цену. Пусть цена i–го товара c_i, тогда вектор $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ есть вектор цен.

5.2 Размерность и базис векторного пространства

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ линейного пространства называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_к$ не равные одновременно нулю, при которых выполняется:

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_к x_к = \boldsymbol{o}. \tag{5.1}$$

Если равенство (5.1) выполнимо лишь при всех $\alpha_i = 0$, то векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ называются *линейно независимыми*.

Если имеет место равенство $\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_к x_к = \boldsymbol{b}$, то говорят, что вектор $\boldsymbol{b}$ является *линейной комбинацией* векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ или *линейно* выражается через эти векторы.

Теорема 5.1. Если векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ линейно зависимы, то тогда, по крайней мере, один из векторов может быть линейно выражен через остальные. Верно и обратное утверждение. Если один из векторов линейно выражается через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы

Доказательство. Это вытекает из самого определения линейной зависимости векторов. По условию теоремы выполняется равенство (5.1). Так как, если хотя бы один из $\alpha_к \neq 0$, то на него можно поделить обе части равенства (5.1), тогда будем иметь

$$\beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + ... + \beta_{к-1}\boldsymbol{x}_{к-1} = \boldsymbol{x}_к, \text{ где } \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_к},\ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_к},\ \ldots,\ \beta_{к-1} = \frac{\alpha_{к-1}}{\alpha_к}.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}_к$ является линейной комбинацией остальных векторов. Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны или $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то такие векторы являются *линейно независимыми* соответственно на плоскости или в пространстве.

Верны следующие утверждения:

1. Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

2. Если часть векторов из набора $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_к$ линейно зависима, то и все векторы линейно зависимы.

Линейное пространство R называется *n-мерным,* если в нем можно найти n линейно независимых векторов, а всякая система, состоящая из большего количества векторов, является линейно зависимой в этом пространстве.

Т.е. размерность пространства — это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Число n называется *размерностью пространства* и обозначается $\dim R = n$ или R^n.

Например, векторы, лежащие на одной прямой, образуют одномерное пространство, в котором только один независимый вектор, а все остальные могут быть выражены линейными соотношениями через него. На плоскости множество векторов образует двумерное пространство, т.е. в этом пространстве определены только два независимых вектора.

Если пространство имеет конечное множество линейно независимых векторов, то его называют *конечномерным,* а если в нем можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, то — *бесконечномерным*.

Совокупность n линейно независимых единичных векторов n-мерного пространства называют *базисом* n-мерного пространства.

Заметим, что через базисные векторы могут быть выражены любые другие векторы, определяемые в данном базисе.

Теорема 5.2. Каждый вектор $\boldsymbol{x}$ линейного n-мерного пространства можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса: $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Сначала мы докажем возможность выразить любой произвольный вектор через базис линейного пространства, а затем, что разложение произвольного вектора по данному базису единственное.

Пусть даны произвольный базис n-мерного пространства R и некоторый произвольный вектор $\boldsymbol{x}\in R$. Так как каждые $n + 1$ векторов n-мерного пространства R линейно зависимы, то система, которую образуют векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ и $\boldsymbol{x}$ должна быть линейно зависимой. А это значит, что выполняется равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \tag{5.2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ — числа одновременно не равные нулю. При этом ясно, что $\alpha \neq 0$, так как в противном случае хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не равнялось бы нулю и тогда равенство (5.2) имело бы вид

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \boldsymbol{o}, \tag{5.3}$$

что, в свою очередь, показывало бы линейную зависимость базисных векторов.

Выразим $\boldsymbol{x}$ из равенства (5.2), разделив на α коэффициенты при $\boldsymbol{x}_i$ и, перенеся их в правую часть. После выполнения указанных преобразований имеем

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{x}_n.$$

Положим $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha}$,

$$\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{x}_n. \tag{5.4}$$

Докажем теперь, что разложение (5.4) вектора $\boldsymbol{x}$ по данному базису $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ единственное. Предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ в пространстве R имеет два различных разложения

$$\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{x}_1 + \beta_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{x}_n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{x}_n.$$

Вычтем из одного равенства другое, и так как в левых частях равенства стоит один и тот же вектор, то получим

$$\boldsymbol{o} = (\beta_1 - \alpha_1)\boldsymbol{x}_1 + (\beta_2 - \alpha_2)\boldsymbol{x}_2 + ... + (\beta_n - \alpha_n)\boldsymbol{x}_n. \tag{5.5}$$

Так как векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ линейно независимы, то равенство (5.5) возможно только тогда, когда $\beta_1 - \alpha_1 = 0$, $\beta_2 - \alpha_2 = 0$, …, $\beta_n - \alpha_n = 0$. Откуда следует, что $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$,…, $\beta_n = \alpha_n$.
Последнее выражение полностью доказывает теорему.

Числа α_1, α_2,…, α_n в разложении вектора $\boldsymbol{x}$ по базису $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$ называют *координатами вектора* в этом базисе и обозначают как $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2,…, \alpha_n)$.

Пример 5.1. Выясните, являются ли векторы $\boldsymbol{x} = (1, 1)$ и $\boldsymbol{y} = (-1, 1)$ базисом пространства R^2 и если да, то разложите вектор $\boldsymbol{z}$ по данному базису.

Решение. Если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ образуют базис пространства R^2, то они линейно независимы. Следовательно, существуют такие числа $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, что выполняется равенство $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Записывая последнее равенство в координатной форме, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1 = 0, \\ \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Из которой находим, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, т.е. векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ линейно независимы, т.е. образуют базис. Разложим вектор $\boldsymbol{z}$ по данному базису, т.е. представим его в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{z} = a_1\boldsymbol{x} + a_2\boldsymbol{y}$. В координатной форме получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 1 = -1, \\ a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 = 7. \end{cases}$$

Откуда находим $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, тогда $\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{x} + 4\boldsymbol{y}$.

Замечание. Линейную независимость векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно было бы доказать иначе, а именно показать, что эти два вектора не коллинеарны, т.е. их координаты не являются пропорциональными: $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$.

5.3 Переход к новому базису

Пусть в пространстве R^n имеются два базиса: $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,…, $\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$,…, $\boldsymbol{l}_n$. Каждый из векторов второго базиса можно разложить по векторам первого базиса, т.е. представить в виде их линейной комбинации векторов первого базиса.

$$\begin{cases} \vec{l}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + ... + a_{1n}\vec{e}_n, \\ \vec{l}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + ... + a_{2n}\vec{e}_n, \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{l}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + ... + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases} \tag{5.6}$$

Полученная система показывает, что переход от одного базиса к другому задается матрицей перехода

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем коэффициенты разложения новых базисных векторов по старому базису образуют столбцы этой матрицы. Матрица A — неособенная, так как в противном случае базисные векторы оказались бы линейно зависимыми. Обратный переход от нового базиса $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2,\dots, \boldsymbol{l}_n$ к старому базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\dots, \boldsymbol{e}_n$ осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Найдем зависимость между координатами некоторого вектора в разных базисах. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ имеет относительно старого базиса координаты $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и координаты $\boldsymbol{x} = (z_1, z_2, ..., z_n)$ относительно нового, т.е.

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2+\dots+x_n\boldsymbol{e}_n \quad \text{и} \quad \boldsymbol{x} = z_1\boldsymbol{l}_1 + z_2\boldsymbol{l}_2+\dots+z_n\boldsymbol{l}_n \quad \text{или}$$

$$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2+\dots+x_n\boldsymbol{e}_n = z_1\boldsymbol{l}_1 + z_2\boldsymbol{l}_2+\dots+z_n\boldsymbol{l}_n.$$

Подставляя значения $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2,\dots, \boldsymbol{l}_n$ из системы (5.6), получим

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \dots + a_{n1}z_n, \\ x_2 = a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{n2}z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \dots + a_{nn}z_n. \end{cases} \tag{5.7}$$

Систему (5.7) можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Пример 5.2. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ задан вектор $\boldsymbol{x} = (4, 0, -12)$. Найдите координаты этого вектора в базисе

$$\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3;\ \boldsymbol{l}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3;\ \boldsymbol{l}_3 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3.$$

Решение. Запишем матрицу перехода для нашего случая.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

По условию задачи $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 - 12\boldsymbol{e}_3$. Пусть в базисе $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = (z_1, z_2, z_3)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} будет иметь вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & 6 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-7 & 6 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ 5 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -8\\ 8\end{pmatrix}$, т.е. вектор $\boldsymbol{x}$ может быть разложен по базису $\boldsymbol{x}=-4\boldsymbol{l}_1-8\boldsymbol{l}_2+8\boldsymbol{l}_3$.

5.4 Евклидово пространство

В линейном пространстве R задано *скалярное произведение,* если каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из R поставлено в соответствие такое число

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

что выполняются следующие условия:

1) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ — коммутативное свойство;
2) $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}$ — дистрибутивное свойство;
3) $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$, где α — любое действительное число;
4) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}>0$, если $\boldsymbol{x}$ — ненулевой вектор; $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=0$, если $\boldsymbol{x}$ — нулевой вектор.

Линейное пространство, в котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым пространством* и обозначается E.

Длиной или *модулем* вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом пространстве называют корень квадратный из его скалярного квадрата и обозначают

$$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}.$$

Вектор $\boldsymbol{x}$, длина которого равна 1, называют *нормированным* вектором.

Угол φ между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|}. \qquad (5.8)$$

Из формулы (5.8) следует математическое выражение для скалярного произведения

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=\left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (5.9)$$

Два вектора евклидова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ евклидова пространства называется *ортогональным*, если векторы попарно ортогональны, т.е. $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0$ при $i\neq j$ $(i, j=1, 2,\ldots, n)$. Если базис евклидова пространства $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_r$ ортогонален и модули $|\boldsymbol{e}_i|=1$ при $i=1, 2, \ldots, n$, то базис называют *ортонормированным*.

Теорема 5.3. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис (примем без доказательства).

Например, легко убедиться, что система векторов $\boldsymbol{e}_1(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(0, 1, \ldots, 0, 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n(0, 0, \ldots, 0, 1)$ образует ортонормированный базис.

5.5 Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Если задано правило, по которому каждому вектору $\boldsymbol{x} \in R^n$ ставится в соответствие единственный вектор $\boldsymbol{y} \in R^m$, то говорят, что задан *оператор* (отображение) $\widetilde{A}(\bar{x})$, действующий из R^n в R^m и записывают $\bar{y} = \widetilde{A}(\bar{x})$.

Оператор называется *линейным*, если для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ и любого числа α выполняются соотношения:

$$1)\ \widetilde{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \widetilde{A}(\bar{x}) + \widetilde{A}(\bar{y}); \qquad 2)\ \widetilde{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\widetilde{A}(\bar{x}).$$

Вектор $\boldsymbol{x} \neq 0$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\widetilde{A}$, если найдется такое число λ, что $\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$. Число λ называется собственным значением оператора $\widetilde{A}$, соответствующим вектору $\boldsymbol{x}$.

Равенство $\widetilde{A}(\bar{x}) = \lambda\bar{x}$, как правило, записывают в матричной форме $AX = \lambda X$, где X — матрица столбец из координат вектора $\boldsymbol{x}$, A — матрица линейного оператора или в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \tag{5.10}$$

Данную систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases} \tag{5.11}$$

или в матричной форме $(A - \lambda E) \cdot X = 0$, где E — единичная матрица порядка n. Это однородная система уравнений, поэтому для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен 0, т.е.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.12}$$

Данный определитель есть многочлен n–ой степени и называется *характеристическим многочленом* матрицы A (оператора $\widetilde{A}$), а уравнение (5.12) — характеристическим уравнением.

Пример 5.3. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) Составляем характеристическое уравнение, используя формулу (5.12)

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0.$$

Решая полученное уравнение, найдем три собственных значения оператора $\tilde{A}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 3$.

2) Найдем собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 1$:

$$(A - E) \cdot X = 0 \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Для решения системы второе уравнение умножим на (–1) и сложим его с третьим уравнением:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как в системе получилось два одинаковых уравнения (первое и третье), то ранг системы $r = 2$, число неизвестных $n = 3$, следовательно, одна неизвестная должна быть свободной, так как $n - r = 1$. Пусть $x_3 = c$. Тогда из системы $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ найдем базисные неизвесные: $\begin{cases} x_2 = c, \\ x_1 = c - 3c = -2c. \end{cases}$

Получили первый собственный вектор линейного оператора $\tilde{A}$:

$\boldsymbol{x}^{(1)} = (-2c, c, c)$.

3) Аналогично, при $\lambda_3 = 3$, получаем систему уравнений

$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ полагая $x_3 = c_1$, находим второй собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(2)} = (0, c_1, c_1)$.

4) При $\lambda_2 = -3$ получаем систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_2 - 7x_3 = 0, \end{cases}$. Полагая $x_3 = 5c_2$, получим третий собственный вектор $\boldsymbol{x}^{(3)} = (16c_2, -7c_2, 5c_2)$.

Лекция 9

6. Квадратичные формы

Квадратичной формой называют однородный многочлен $L(x_1, x_2,..., x_n)$ второй степени относительно *n* переменных.

$$L(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,. \qquad (6.1)$$

Если все коэффициенты квадратичной формы действительные числа, то она называется *вещественной*.

Будем предполагать в дальнейшем, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} — действительные числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Для члена, содержащего $x_i x_j$, мы получаем следующую симметричную форму записи:

$$2a_{ij} x_i x_j = a_{ij} x_i x_j + a_{ji} x_j x_i.$$

Вся квадратичная форма может быть записана в виде:

$$L(x_1, x_2,..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n +$$
$$+ .... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2. \qquad (6.2)$$

Матрица $A = (a_{ij})$ (*i*, *j* =1, 2, …, *n*), составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица квадратичной формы.}$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица A — симметричная матрица, т.е. $A^T = A$.

Если две квадратичные формы имеют одну и ту же матрицу, то эти формы могут отличаться друг от друга только обозначением переменных. Две такие квадратичные формы можно считать одинаковыми. Таким образом, квадратичные формы вполне определяются своими матрицами.

Пример 6.1. Для квадратичной формы *L* составьте её матрицу.

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3.$$

Решение. Перепишем квадратичную форму в виде:

$$L = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_1 + 0\cdot x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + x_3x_1 + \frac{1}{2}x_3x_2 + 0\cdot x_3^2.$$

Следовательно, её матрица равна

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для квадратичной формы можно использовать компактную матричную запись: $L = X^T AX$, где X — матрица столбец переменных, т.е.

$$L = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что задано линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + ... + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + ... + c_{2n}y_n, \\ .... \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + ... + c_{nn}y_n, \end{cases} \tag{6.3}$$

выражающее переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ через новую систему переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Если через C обозначить матрицу преобразования (6.3), а через X и Y — столбцы из старых и новых переменных соответственно, то преобразование (6.3) примет следующую матричную форму $X = CY$. Выясним, как меняется матрица квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.

Подвергнем форму $L = X^T AX$ преобразованию (6.3). Так как $X^T = (CY)^T = Y^T C^T$, то получим: $L = X^T AX = (CY)^T A(CY) = Y^T \left(C^T AC\right)Y$.

Итак, при невырожденном линейном преобразовании $X = CY$ матрица квадратичной формы принимает вид:

$$A^* = C^T AC. \tag{6.4}$$

Пример 6.2. Дана квадратичная форма

$$L = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Найдите квадратичную форму, полученную из данной, линейным преобразованием

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Матрица данной квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, а матрица линейного преобразования $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. По формуле (6.4) найдем матрицу искомой квадратичной формы

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а квадратичная форма имеет вид $L(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

Квадратичная форма вида $L = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2$, не содержащая членов с произведением различных переменных и имеющая диагональную матрицу, называется *диагональной квадратичной формой*, которую часто называют также *канонической*.

Теорема 6.1. (теорема Лагранжа). Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к диагональному (каноническому) виду.

Пример 6.3. Приведите к диагональному виду форму

$$L = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Решение. Вначале выделим полный квадрат при переменной x_1, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L = \left(x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2\right) - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 +$$
$$+ 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2\left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) - 5x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 - 5x_3^2.$$

Следовательно, при помощи преобразования

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

форма приводится к виду $L = y_1^2 + 2y_2^2 - 5y_3^2$.

Рассмотрим еще один способ преобразования квадратичной формы к каноническому виду, используя следующую теорему.

Теорема 6.2. Каждая вещественная квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей A при помощи некоторого ортогонального преобразования переменных $X = BX'$ может быть приведена к каноническому виду

$$L = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2 \tag{6.5}$$

Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ при квадратах новых переменных с точностью до порядка определены формой $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно: они совпадают с корнями характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ матрицы A. Столбцы ортогональной матрицы B являются собственными векторами матрицы A, соответствующими собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Пример 6.4. Приведите к каноническому виду квадратичную форму $L = 15x_1^2 - 2\sqrt{55}\,x_1x_2 + 9x_2^2$.

Решение. В нашем случае $a_{11} = 15$, $a_{12} = a_{21} = -\sqrt{55}$, $a_{22} = 9$.

Составим характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} 15-\lambda & -\sqrt{55} \\ -\sqrt{55} & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ или $(15-\lambda)\cdot(9-\lambda) - 55 = 0$, $\lambda^2 - 24\lambda + 80 = 0$, находим собственные значения $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 20$.

Определяем собственные векторы. Если $\lambda_1 = 4$, то получаем систему уравнений $\begin{pmatrix} 11 & -\sqrt{55} \\ -\sqrt{55} & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$ или $\begin{cases} 11x_1 - \sqrt{55}\,x_2 = 0, \\ -\sqrt{55}\,x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$

Из системы находим, что $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} x_2$. Полагая $x_2 = c$, $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} c$, получаем первый собственный вектор $\vec{u} = c\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\vec{e_1} + \vec{e_2}\right)$.

Если $\lambda_2 = 20$, то приходим к системе $\begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{55} \\ -\sqrt{55} & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$ или $\begin{cases} -5x_1 - \sqrt{55}\,x_2 = 0, \\ -\sqrt{55}\,x_1 - 11x_2 = 0. \end{cases}$ Из системы находим, что $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} x_1$. Полагая $x_1 = c$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} c$, получаем второй собственный вектор $\vec{v} = c\left(\vec{e_1} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\vec{e_2}\right)$. Для того, чтобы пронормировать векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, примем $c = 1 \Big/ \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$. Таким образом, мы нашли нормированные собственные векторы $\vec{e_1'} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{5}\,\vec{e_1} + \sqrt{11}\,\vec{e_2}\right)$, $\vec{e_2'} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{11}\,\vec{e_1} - \sqrt{5}\,\vec{e_2}\right)$. Матрица перехода от ортонормированного базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ к ортонормированному базису $\vec{e_1'}, \vec{e_2'}$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/4 & \sqrt{11}/4 \\ \sqrt{11}/4 & -\sqrt{5}/4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем формулы для преобразования координат

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}\,x_1' + \sqrt{11}\,x_2'\right), \quad x_2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{11}\,x_1' - \sqrt{5}\,x_2'\right).$$

Подставляя данные формулы в квадратичную форму, получим

$$L = 15 \cdot \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{5} x_1' + \sqrt{11} x_2' \right) \right)^2 - 2\sqrt{55} \cdot \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{5} x_1' + \sqrt{11} x_2' \right) \right) \cdot \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{11} x_1' - \sqrt{5} x_2' \right) \right) +$$

$$+ 9 \cdot \left(\frac{1}{4} \left(\sqrt{11} x_1' - \sqrt{5} x_2' \right) \right)^2 = 4 \left(x_1' \right)^2 + 20 \left(x_2' \right)^2 .$$

Этот результат можно было бы получить сразу, так как согласно формуле (6.5) $L = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 = 4x_1'^2 + 20x_2'^2$.

Мы привели квадратичную форму к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования B.

Как видно из примеров, канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, так как одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств. Одно из этих свойств раскрывает следующая теорема.

Теорема 6.3. (закон инерции квадратичных форм). Число слагаемых с положительными (отрицательными) коэффициентами квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к этому виду.

Отметим, что ранг матрицы квадратичной формы, называемый *рангом квадратичной формы*, равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ и *отрицательно определенной*, если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$.

Например, квадратичная форма $L = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ является положительно определенной, а форма $L = -x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$ — отрицательно определенной.

Теорема 6.4. Для того, чтобы квадратичная форма $L = X^T A X$ была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ, матрицы A были положительны (отрицательны).

Пример 6.5. Покажите, что квадратичная форма $L = 27x_1^2 - 10x_1 x_2 + 3x_2^2$ является положительно определенной.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 27 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ или $\lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 28$. Так как корни характеристического уравнения положительны, то квадратичная форма положительно определенная.

Для установления знакоопределенности квадратичной формы в ряде случаев удобнее применять *критерий Сильвестра*.

Теорема 6.5. Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \ldots$, $\Delta_n > 0$, где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Для отрицательно определенных квадратичных форм знаки главных миноров чередуются, начиная со знака «минус» для минора первого порядка.

Пример 6.6. Выясните, является ли положительно определенной квадратичная форма $L = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Составим главные миноры этой матрицы, расположенные в левом верхнем углу: $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 28 > 0$. Так как все миноры положительные, то данная квадратичная форма положительно определенная.

Лекции 10-11

7. Кривые второго порядка

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (7.1)$$

Коэффициенты уравнения — действительные числа, но по крайней мере одно из чисел A, B или C отлично от нуля. Такие линии называются линиями (кривыми) второго порядка, к которым относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

7.1 Окружность

Простейшей кривой второго порядка является окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, отстоящих от некоторой фиксированной точки $M_0(x_0;\, y_0)$ (называемой центром окружности) на одинаковом расстоянии R (называемой радиусом окружности).

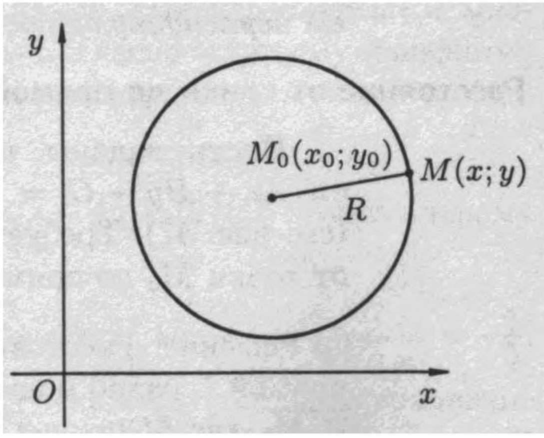


Рис. 7.1.

Составим уравнение окружности. Пусть точка $M(x,\, y)$— произвольная точка окружности, тогда по определению окружности $M_0M = R$ или $M_0M^2 = R^2$. Получаем уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \qquad (7.2)$$

которое называется *каноническим* уравнением окружности.

Раскроем скобки в уравнении (7.2).

$$x^2 - 2x_0x + x_0{}^2 + y^2 - 2y_0y + y_0{}^2 - R^2 = 0 \quad \text{или}$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0{}^2 + y_0{}^2 - R^2) = 0.$$

Введем обозначения: $D = -2x_0$; $E = -2y_0$; $F = x_0{}^2 + y_0{}^2 - R^2$, тогда получим

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (7.3)$$

Уравнение (7.3) второй степени относительно координат x и y. В нем коэффициенты перед x^2 и y^2 равны между собой, а члены с произведением xy отсутствуют. Уравнение (7.3) называется *общим* уравнением окружности.

Пример 7.1. Дано уравнение второй степени:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Найдите координаты центра окружности и еѐ радиус.

Решение. Данная линия есть окружность, преобразуем еѐ уравнение к каноническому виду, для чего проделаем алгебраические преобразования. $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0$ или $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$. Таким образом, центр окружности находится в точке (1, –2), а радиус равен 3.

7.2 Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место (рис. 7.2) точек $M(x; y)$, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, которая больше расстояния между фокусами.

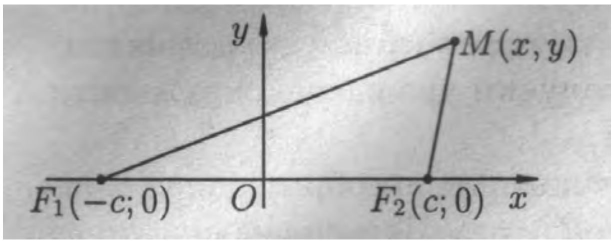


Рис. 7.2.

Выведем уравнение эллипса. Согласно определению эллипса, $F_1M + F_2M = r_1 + r_2 = 2a$. Пусть фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Легко проверить (по формуле расстояния между двумя точками), что верны следующие равенства: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Поэтому из равенства $r_1 + r_2 = 2a$ получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \text{ или}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Освободимся от радикалов, возведя обе части дважды в квадрат и приводя подобные:

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Разделив обе части уравнения на произведение $a^2(a^2 - c^2)$ (по условию $a > c$), получим $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Обозначим

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{7.4}$$

тогда уравнение эллипса будет иметь вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.5}$$

Это уравнение называется *каноническим* уравнением эллипса, величины r_1 и r_2 — фокальные радиусы точки $M(x; y)$, F_1, F_2 — фокусы эллипса,

$x = 0$, $y = 0$ — оси симметрии, величина $2a$ — большая ось, $2b$ — малая ось, $2c = F_1F_2$ — фокусное расстояние (рис. 7.3).

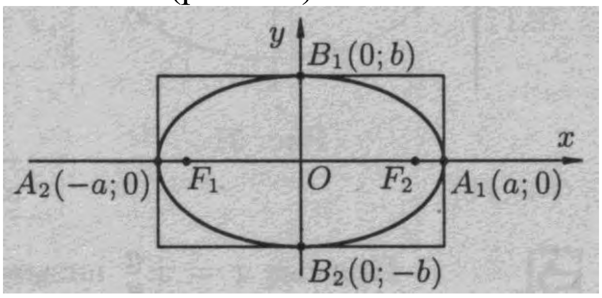


Рис. 7.3.

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом эллипса*, который характеризует форму эллипса (меру его сжатия).

Очевидно, что $0 < \varepsilon < 1$. Формулу для вычисления эксцентриситета эллипса можно переписать в виде $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$. Найдем из данного уравнения отношение $\dfrac{b}{a}$: $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Отсюда видно, чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если положить $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Фокальные радиусы-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам: $r_1 = a + \varepsilon x$ (левый фокальный радиус-вектор) и $r_2 = a - \varepsilon x$ (правый фокальный радиус-вектор).

Из равенства (7.4) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (7.5) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox (рис. 7.4). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

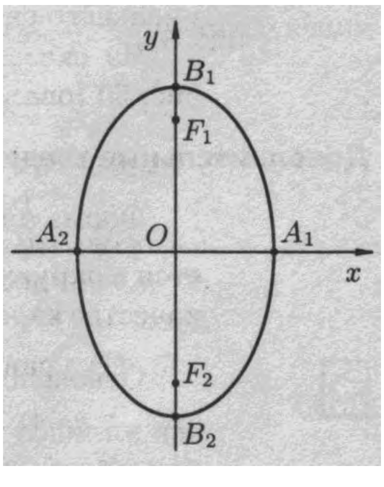


Рис. 7.4.

Уравнение эллипса может быть записано в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Для его построения необходимо выполнить параллельный перенос начала координат по формулам $\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0, \end{cases}$ т.е. поместить начало новой системы координат O_1 в точку $(x_0; y_0)$ (направление осей координат прежнее) (рис. 7.5).

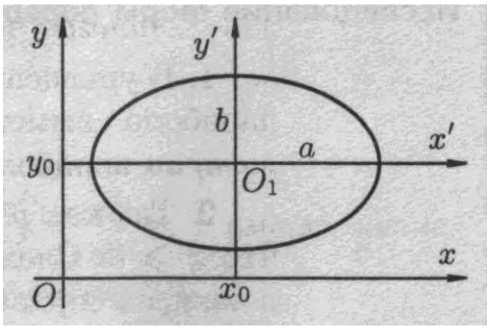


Рис. 7.5.

7.3 Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная. Эта постоянная должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами.

Пусть точка $M(x; y)$ — произвольная точка, принадлежащая гиперболе, и фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Тогда $F_2M - F_1M = \pm 2a$ или $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$.

Производя аналогичные действия, что и при выводе уравнения эллипса, получим $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$. Так как $c > a$, то введем обозначение

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{7.6}$$

тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7.7}$$

Уравнение (7.7) называется *каноническим* уравнением гиперболы. Чтобы более ясно представить себе вид гиперболы, рассмотрим две прямые. Перепишем уравнение (7.7) в виде $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. При достаточно больших значений x: $\sqrt{x^2-a^2}\approx\sqrt{x^2}\approx x$, т.е. при $x\to\infty$ $y=\pm\frac{b}{a}x$. Ветви гиперболы как угодно близко подходят к прямым $y = \pm \frac{b}{a} x$, *называемым асимптотами* гиперболы (рис. 7.6).

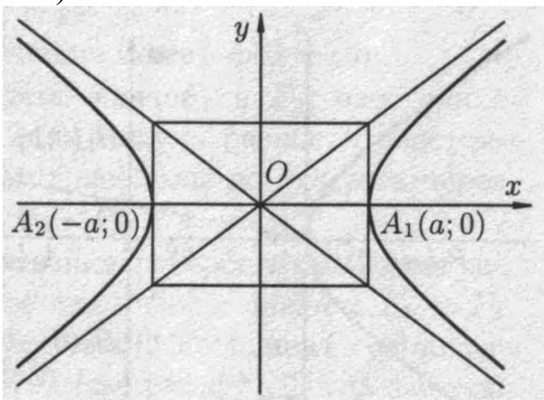


Рис. 7.6.

Точки $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$ называются вершинами гиперболы, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ — *действительной осью*, отрезок $OA_1 = OA_2 = a$ — *действительной полуосью* гиперболы. Отрезок $B_1B_2 = 2b$, соединяющий точки $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$ называется *мнимой осью*, число b — *мнимой полуосью.*

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется *основным прямоугольником гиперболы.*

При построении гиперболы целесообразно сначала построить основной прямоугольник гиперболы, провести прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, — асимптоты гиперболы и отметить вершины A_1 и A_2 гиперболы.

Гипербола называется *равносторонней*, если её полуоси равны ($a = b$). Её каноническое уравнение: $x^2 - y^2 = a^2$.

Асимптоты равносторонней гиперболы имеют уравнения $y = x$ и $y = -x$ и, следовательно, являются биссектрисами координатных углов.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ согласно формуле (7.6). Так как для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет гиперболы характеризует её форму. Действительно, из равенства (7.6) следует, что $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1$, т.е. $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ и $\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Отсюда следует, что чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем меньше отношение её полуосей, а значит, тем более вытянут её основной прямоугольник.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$.

Фокальные радиусы векторы правой ветви гиперболы: $r_1 = \varepsilon x + a$ (левый фокальный радиус-вектор) и $r_2 = \varepsilon x - a$ (правый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиусы векторы левой ветви гиперболы: $r_1 = -\varepsilon x - a$ (левый фокальный радиус-вектор) и $r_2 = -\varepsilon x + a$ (правый фокальный радиус-вектор).

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ — на оси Ox. Она изображена пунктиром на рис. 7.7.

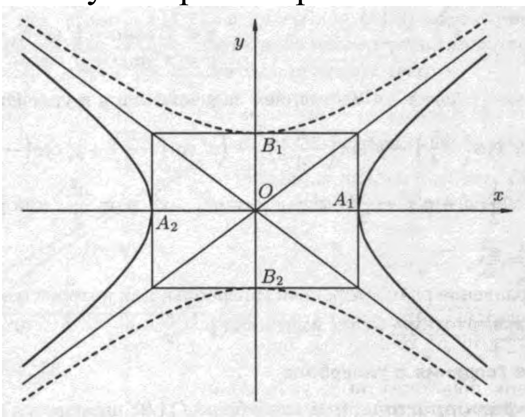


Рис. 7.7.

Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются *сопряженными*.

Уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ и полуосями a и b будет иметь вид: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (рис. 7.8).

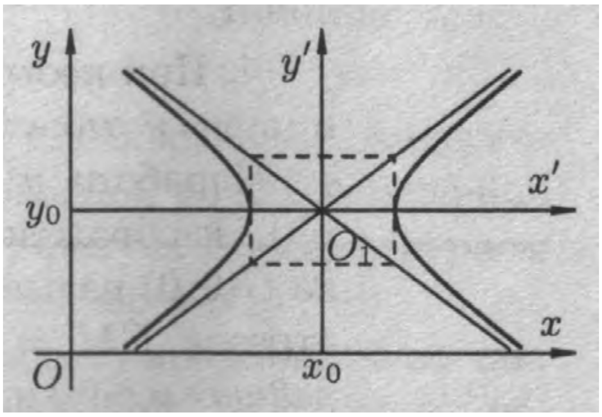


Рис. 7.8.

7.4 Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.
Расстояние от фокуса F до директрисы называется *параметром параболы* и обозначается p ($p > 0$).

Для вывода уравнения выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 7.9).

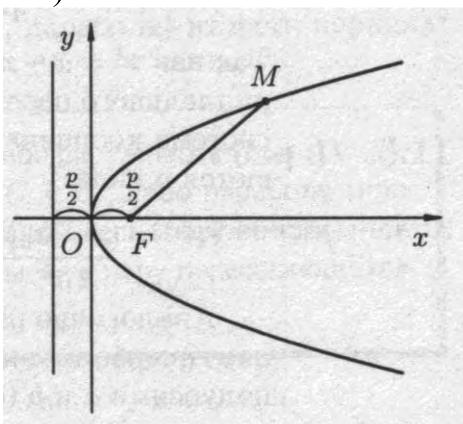


Рис. 7.9.

По определению параболы $KM=MF$, $K\left(-\frac{p}{2}; y\right)$, тогда

$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$. После возведения обеих частей в квадрат будем иметь: $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$ или

$$y^2=2px. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.8) называется *каноническим* уравнением параболы. Уравнения $y^2=-2px$, $x^2=2py$ и $x^2=-2py$ ($p > 0$) также определяют параболы, которые изображены на рис. 7.10.

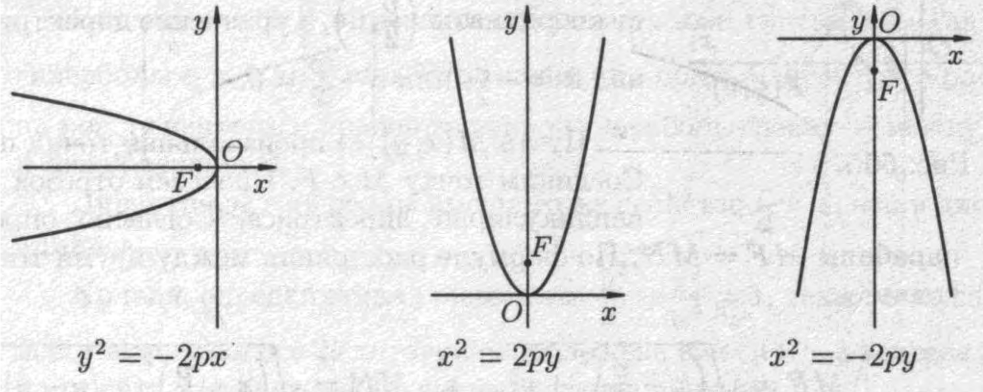


Рис. 7.10.

Параболы, изображенные на рис. 7.11, имеют соответствующие уравнения.

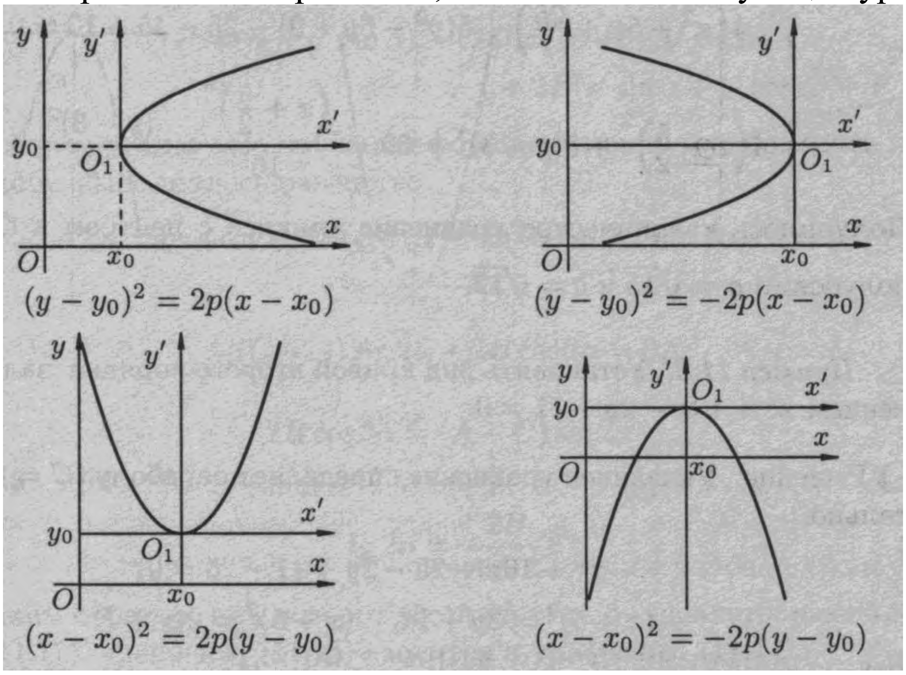


Рис. 7.11.

7.5 Общее уравнение линий второго порядка и его исследование

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы после преобразований можно записать с помощью единого уравнения вида

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (7.9)$$

где коэффициенты A и C не равны нулю одновременно.

Возникает вопрос: всякое ли уравнение вида (7.9) определяет одну из кривых второго порядка и как определить тип этой кривой? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 7.1. Уравнение (7.9) определяет:

– окружность при $A = C$, т.е. коэффициенты перед x^2 и y^2 равны между собой;

– эллипс при $A \cdot C > 0$, т.е. коэффициенты перед x^2 и y^2 должны иметь одинаковые знаки;

– гиперболу при $A \cdot C < 0$, т.е. коэффициенты перед x^2 и y^2 должны иметь разные знаки;

– параболу при $A \cdot C = 0$, т.е. либо $A = 0$, либо $C = 0$.

Пример 7.2. Установите вид кривой второго порядка и постройте её.

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$ б) $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение. а) Так как коэффициенты перед x^2 и y^2 противоположны по знаку, то это уравнение гиперболы. Приведем его к каноническому виду.

$$\left(16x^2 - 64x\right) - \left(9y^2 + 18y\right) - 89 = 0,$$

$$16\left(x^2 - 4x + 4\right) - 9\left(y^2 + 2y + 1\right) - 64 + 9 - 89 = 0,$$

$$16(x-2)^2-9(y+1)^2=144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{16}=1.$$

Для построения данной гиперболы начало координат необходимо поместить в точку (2; –1) и построить прямоугольник со сторонами $2a = 6$, $2b = 8$. Чертеж сделайте самостоятельно.

б) Указанное уравнение определяет параболу, так как $C = 0$. Действительно,

$$x^2+10x+25-2y+11-25=0,$$

$$(x+5)^2=2y+14, \quad (x+5)^2=2(y+7).$$

Получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(-5; -7)$ и $p=1$.

Рассмотрим теперь уравнение второй степени, в котором присутствует произведение координат xy:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (7.10)$$

Используя поворот координатных осей на угол α, можно преобразовать уравнение (7.10) так, чтобы в нем отсутствовал член с произведением координат.

При повороте осей координат на угол α (начало координат прежнее, угол α отсчитывается против часовой стрелки) зависимость между старыми координатами x, y и новыми x' и y' определяются формулами:

$$\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha, \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha, \\ y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Угол α выбирают таким образом, чтобы коэффициент при произведении $x'\cdot y'$ обратился в нуль. Тогда уравнение (7.10) сводится к уравнению (7.9).

Замечание. Для преобразования уравнения (7.10) к каноническому виду кривой второго порядка можно использовать также теорию квадратичных форм.

Пример 7.3. Приведите к каноническому виду уравнение $15x^2-2\sqrt{55}\,xy+9y^2=20.$

Решение. Преобразуем данное уравнение, используя формулы (7.11) поворота осей координат:

$$15\left(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\right)^2-2\sqrt{55}\left(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\right)\left(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\right)+$$
$$+9\left(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\right)^2=20,$$

или
$$\left(15\cos^2\alpha-2\sqrt{55}\cos\alpha\sin\alpha+9\sin^2\alpha\right)x'^2+$$
$$+\left(18\sin\alpha\cos\alpha-30\sin\alpha\cos\alpha-2\sqrt{55}\cos^2\alpha+2\sqrt{55}\sin^2\alpha\right)x'y'+$$
$$+\left(15\sin^2\alpha+2\sqrt{55}\sin\alpha\cos\alpha+9\cos^2\alpha\right)y'^2=20.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при произведении $x' \cdot y'$, имеем $12\sin\alpha\cos\alpha + 2\sqrt{55}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0$ или $2\sqrt{55}\,tg^2\alpha - 12tg\alpha - 2\sqrt{55} = 0$. Отсюда получаем два различных решения, $tg\alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$, $tg\alpha_2 = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$, которые соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям, поэтому, взяв $tg\alpha = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$ вместо $tg\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$, мы меняем местами оси x' и y'.

Примем $tg\alpha = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$ и вычислим $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha} = \frac{1}{1+5/11} = \frac{11}{16}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{1+11/5} = \frac{5}{16}$,

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{4},\ \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, тогда уравнение примет вид:

$$\left(15\cdot\frac{5}{16} - 2\sqrt{55}\cdot\frac{\sqrt{55}}{16} + 9\cdot\frac{11}{16}\right)x'^2 + \left(15\cdot\frac{11}{16} + 2\sqrt{55}\cdot\frac{\sqrt{55}}{16} + 9\cdot\frac{5}{16}\right)y'^2 = 20,$$

или после упрощения $4x'^2 + 20y'^2 = 20$. Разделив обе части уравнения на 20, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x'^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{y'^2}{1^2} = 1.$$

Данную задачу можно было решить, используя теорию приведения квадратичных форм к каноническому виду. В примере 6.4 мы привели квадратичную форму $L(x, y) = 15x^2 - 2\sqrt{55}\,xy + 9y^2$ к виду $L = 4x'^2 + 20y'^2$.

Приравнивая $L = 4x'^2 + 20y'^2$ к 20 и разделив обе части на 20, получим тот же результат.

Список литературы

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов. — М.: ЮНИТИ, 2009.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. ч. 1. — М.: Айрис-пресс, 2003.
3. Красс М.С. Основы математики и еѐ приложения в экономическом образовании. — М.: Дело, 2008.
4. Виленкин И.В. Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей. –Ростов н/Д: Феникс, 2008.