

**Г. В. Воронкова
С. С. Рекунов**

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
КУРС ЛЕКЦИЙ
С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

**В двух частях
Часть I**

**Статически
определимые системы**

Волгоград. ВолГАСУ. 2015



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2015

УДК 624.041(075.8)
ББК 38.112я73
В753

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор *В. А. Пиеничкина*,
директор Института строительства и жилищно-коммунального хозяйства
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;
кандидат технических наук, доцент *О. В. Душко*,
директор Института дистанционного обучения
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Воронкова, Г. В.

В753 Строительная механика. Курс лекций с примерами решения задач :
В 2-х частях. Ч. I. Статически определимые системы [Электронный ресурс] /
Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов ; М-во образования и науки Рос. Федерации,
Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические
данные (8,7 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2015. — Учебное электронное
издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33;
Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официаль-
ный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного уни-
верситета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с ти-
тул. экрана.

ISBN 978-5-98276-730-1

Изложен курс строительной механики статически определимых стержневых систем с примерами расчетов строительных конструкций и сооружений на действие подвижной и неподвижной нагрузок. Представлены основы кинематического анализа сооружений и теории определения перемещений.

Для студентов заочной формы обучения направления подготовки «Строительство» бакалавриата, а также специальности «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 624.041(075.8)
ББК 38.112я73

ISBN 978-5-98276-730-1



© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2015

Лекция 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Строительная механика — это наука, которая занимается исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений различного назначения.

Все сооружения, рассчитываемые в курсе строительной механики, заменяются их схемами.

Расчетная схема — упрощенное представление конструкции или сооружения, сохраняющее его основные свойства.

При формировании расчетной схемы сооружения производятся следующие преобразования: стержни заменяются осевыми линиями, реальные узловые соединения — идеальными шарнирами, реальные опорные устройства — идеальными связями.

Классификация расчетных схем:

1. Стержни (размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной) (рис. 1, *а*, *б*);



Рис. 1

2. Стержневые системы;

3. Плиты и оболочки (толщина несоизмеримо мала по сравнению с шириной и длиной) (рис. 2, *а*, *б*);



Рис. 2

4. Массивы (все три размера соизмеримы) (рис. 3).

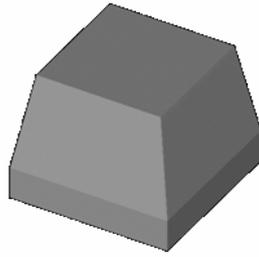


Рис. 3

Виды стержневых систем:

1. Балки: консольные (рис. 4), однопролетные (рис. 5 а, б), многопролетные (рис. 6), неразрезные (рис. 7).

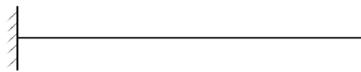


Рис. 4

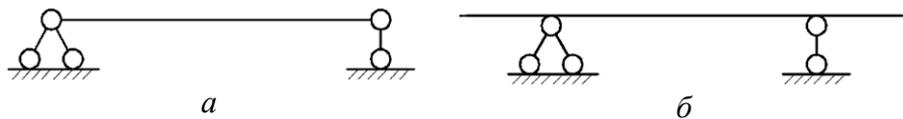


Рис. 5



Рис. 6

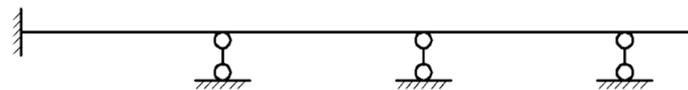


Рис. 7

2. Фермы:

по назначению: покрытия (рис. 8), мостовые (рис. 9), мачтовые (рис. 10);

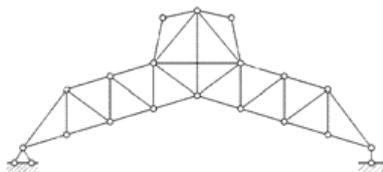


Рис. 8

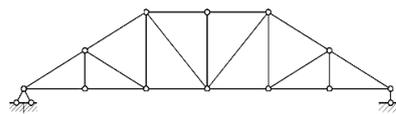


Рис. 9

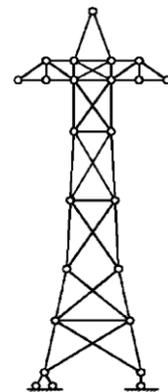


Рис. 10

по характеру очертания: с параллельными поясами (рис. 11), треугольные (рис. 12), трапециевидные (рис. 13);

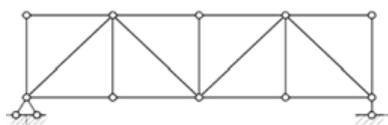


Рис. 11

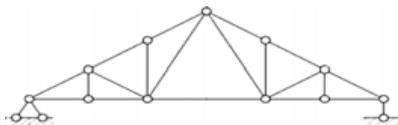


Рис. 12

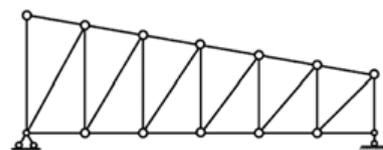


Рис. 13

по типу решетки: раскосные (рис. 8—13), безраскосные (рис. 14), ромбические (рис. 15), шпренгельные (рис. 16);

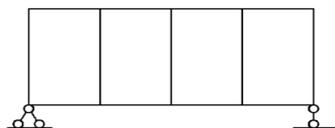


Рис. 14

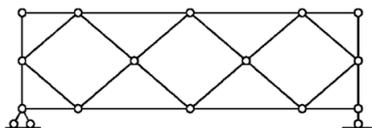


Рис. 15

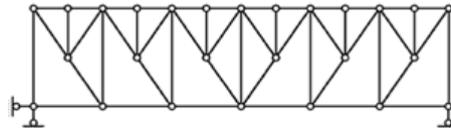


Рис. 16

по типу опирания: балочные (рис. 17), консольные (рис. 18), распорные (рис. 19);

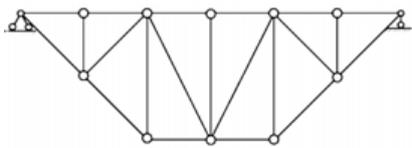


Рис. 17

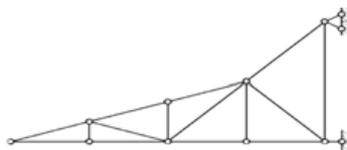


Рис. 18

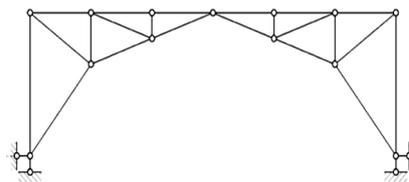


Рис. 19

по виду езды: по верху (рис. 19), по низу (рис. 20), по середине (рис. 21).

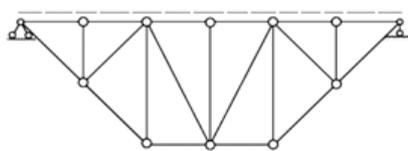


Рис. 20

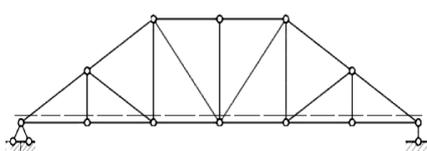


Рис. 21

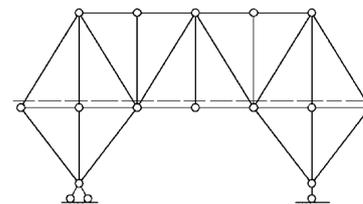


Рис. 22

3. Арки:

по количеству шарниров: трехшарнирные (рис. 23), двухшарнирные (рис. 24), одношарнирные (рис. 25), бесшарнирные (рис. 26);

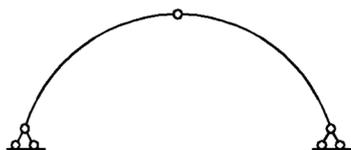


Рис. 23



Рис. 24

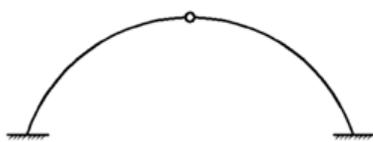


Рис. 25



Рис. 26

по наличию затяжки: без затяжки (рис. 23—26), с затяжкой на уровне опор (рис. 27), с затяжкой выше опор (рис. 28).

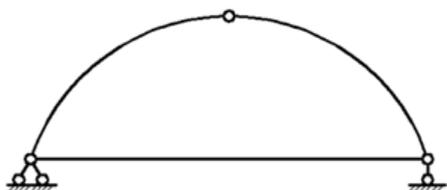


Рис. 27

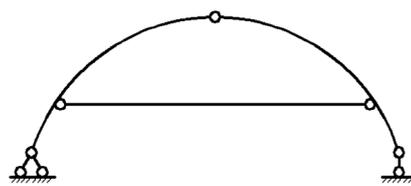
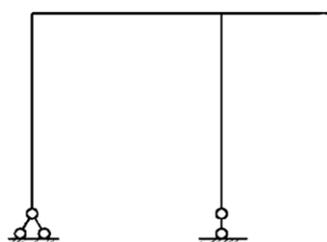


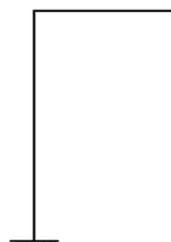
Рис. 28

4. Рамы:

однодисковые (рис. 28, а, б); распорные (рис. 30); многодисковые (рис. 31).



а



б

Рис. 29

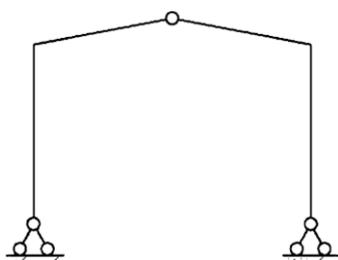


Рис. 30

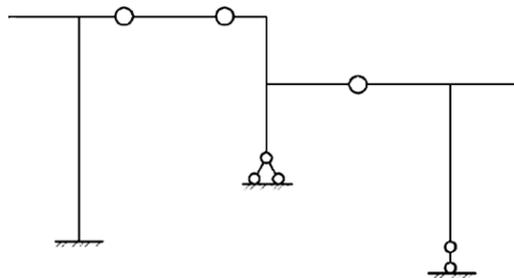


Рис. 31

Типы опор:

1. Шарнирно-подвижная. Возникает одна реакция: вертикальная или горизонтальная (рис. 32);

2. Шарнирно-неподвижная. Возникают одновременно две реакции: вертикальная и горизонтальная (рис. 33);

3. Жесткая заделка. Возникают одновременно три реакции: вертикальная, горизонтальная и опорный момент (рис. 34).



Рис. 32

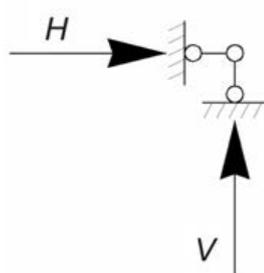


Рис. 33

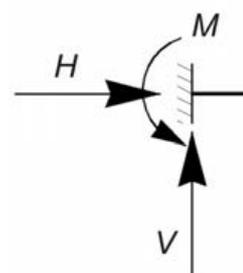


Рис. 34

Виды нагрузок:

1. Сосредоточенная сила (кН) (рис. 35);
2. Равномерно-распределенная нагрузка (кН/м) (рис. 36);
3. Сосредоточенный момент (кНм) (рис. 37).



Рис. 35



Рис. 36

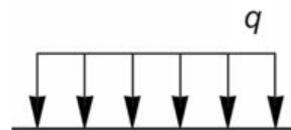


Рис. 37

Лекция 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. Термины и определения

Уровень сложности и точность расчета в большой степени зависят от выбора расчетной схемы сооружения, при формировании которой используются определенные допущения и гипотезы, лежащие в основе дальнейшего расчета исследуемого сооружения.

При анализе расчетных схем сооружений используются следующие понятия: степень свободы, геометрическая неизменяемость, диск, шарнир, кинематическая связь и другие.

Любая строительная конструкция или сооружение как система, состоящая из отдельных конструктивных элементов, способна воспринимать внешние нагрузки и воздействия только в том случае, когда она сохраняет свою форму и положение. Таким образом, рассчитываемое сооружение должно быть геометрически неизменяемым и неподвижным. Подвижность сооружения характеризуется его степенью свободы.

Степень свободы — количество независимых геометрических параметров, характеризующих положение элементов сооружения на плоскости или в пространстве.

Геометрически неизменяемыми называются такие сооружения, форма которых может изменяться только путем деформации их составных элементов.

Геометрически изменяемыми называются такие сооружения, форма которых может изменяться без деформации их составных элементов (механизм).

Мгновенно изменяемыми называются сооружения, допускающие без деформации только бесконечно малые смещения составных элементов.

Диск — любая геометрически неизменяемая система, в том числе земля. Диск имеет на плоскости три степени свободы: он может перемещаться в двух направлениях, а также поворачиваться относительно любой точки. Для обеспечения неподвижности диска на него необходимо наложить три связи.

Кинематическими связями чаще всего являются опорные стержни и шарниры. Стержень лишает диск одной степени свободы, запрещая перемещение диска в направлении стержня. Шарнир лишает диск двух степеней свободы, препятствуя перемещаться диску в двух направлениях, оставляя возможность углового смещения.

Шарнир — устройство, соединяющее диски между собой. Шарниры могут быть простыми и кратными.

Простой шарнир (цилиндрический) соединяет два диска (рис. 38).

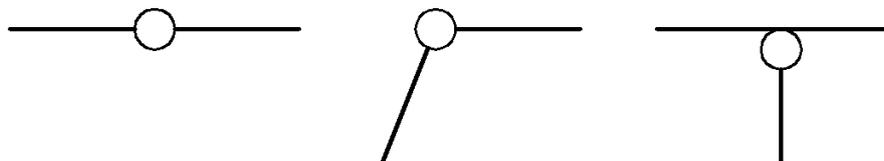


Рис. 38

Кратный (сложный) шарнир соединяет более двух дисков (рис. 39). Кратность шарнира подсчитывается по формуле

$$\text{Ш} = n - 1,$$

где n — количество соединяемых дисков.

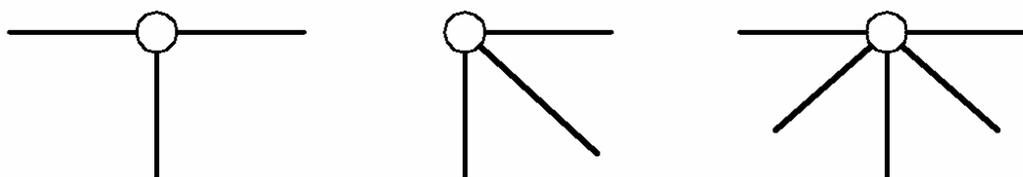


Рис. 39

Степень свободы любой стержневой системы (C_c) подсчитывается по формуле

$$C_c = 3Д - 2\text{Ш} - C_{\text{оп}},$$

где $Д$ — количество дисков; Ш — количество простых шарниров; $C_{\text{оп}}$ — количество реакций в опорных стержнях системы.

Степень свободы фермы подсчитывается по формуле

$$C_c = 2У - C_{\text{ф}} - C_{\text{оп}},$$

где $У$ — количество узлов фермы (включая опорные); $C_{\text{ф}}$ — количество всех стержней фермы; $C_{\text{оп}}$ — количество реакций, возникающих в опорных стержнях.

Если $C_c > 0$, связей недостаточно, система геометрически изменяема (обладает подвижностью).

Если $C_c = 0$, связей достаточно, система статически определима.

Если $C_c < 0$, система обладает избыточными связями, статически неопределима.

Полный кинематический анализ проводится только во втором и третьем случаях. Систему можно считать пригодной для безопасной эксплуатации только в случае правильного расположения связей, при этом особое значение имеет правильность образования геометрически неизменяемых систем.

2.2. Правила сборки геометрически неизменяемых систем

Правило 1. Два диска соединяются между собой при помощи трех стержней, не параллельных и не пересекающихся в одной точке (рис. 40).

Примечание: оси всех трех стержней не должны быть параллельны, не должны пересекаться в одной точке.

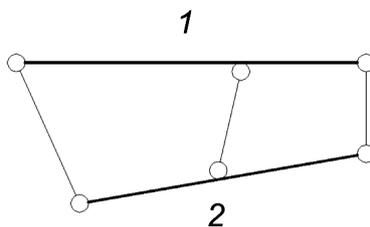


Рис. 40

Соединение дисков параллельными стержнями приводит к образованию геометрически изменяемой системы, обладающей подвижностью (рис. 41).

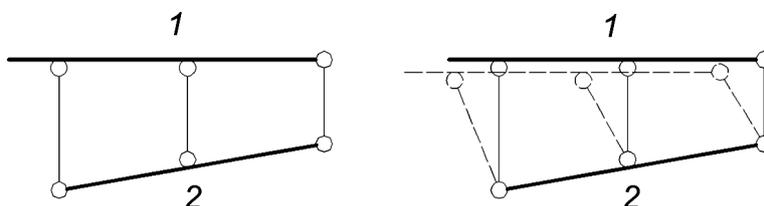


Рис. 41

Соединение дисков тремя стержнями, оси которых пересекаются в одной точке, приводит к образованию мгновенного центра вращения в этой точке — мгновенно изменяемой системы (рис. 42).

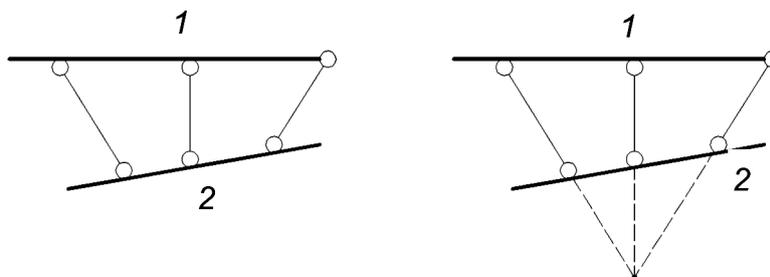


Рис. 42

Правило 2. Два диска соединяются между собой при помощи простого шарнира и стержня, при этом ось стержня не должна проходить через шарнир (рис. 43).

Если ось стержня проходит через шарнир, образуется мгновенно изменяемая система (рис. 44).

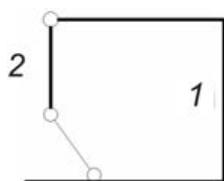


Рис. 43

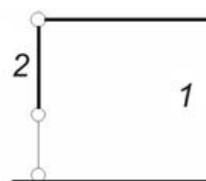


Рис. 44

Правило 3. Три диска соединяются между собой при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рис. 45).

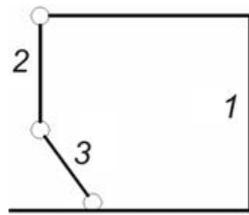


Рис. 45

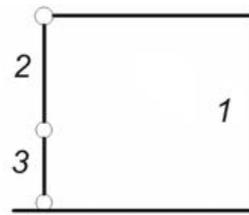


Рис. 46

Соединение дисков шарнирами, лежащими на одной прямой, приводит к образованию мгновенно изменяемой системы (рис. 46).

Правило 4 (частный случай Правила 3). Три диска соединяются между собой при помощи трех пар стержней, при этом точки пересечения в этих парах не должны лежать на одной прямой (рис. 47).

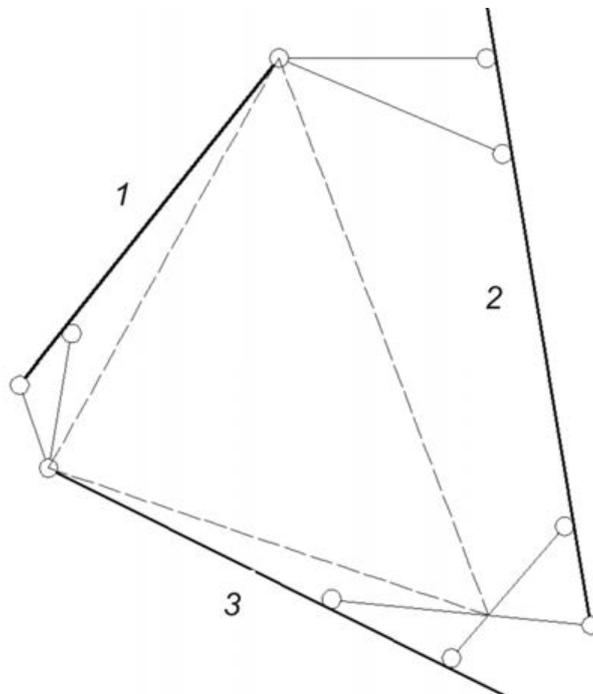


Рис. 47

Правило 5. Любой узел можно присоединить к диску при помощи двух стержней, не лежащих на одной прямой (рис. 48).

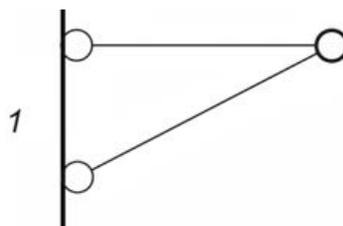


Рис. 48

Лекция 3. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

3.1. Преобразование расчетной схемы

Многопролетная статически определимая балка образуется из простых балок, соединенных между собой концами при помощи идеальных шарниров.

Для облегчения расчета многопролетных статически определимых балок целесообразно заданную расчетную схему преобразовать в статически эквивалентную *поэтажную схему*. С этой целью в заданной схеме мысленно удаляются все сквозные шарниры, соединяющие отдельные простые балки. Полученные простые балки могут быть *основными* или *второстепенными*.

Рассмотрим пример (рис. 49, *а*): консольная балка $A—Ш1$ является основной, так как может существовать самостоятельно (независимо от наличия других балок). Две следующие балки $Ш1—Ш2$ и $Ш2—Ш3$, лишенные необходимых связей, не могут существовать самостоятельно, они являются второстепенными. Балка $Ш3—D$ имеет шарнирно подвижные опорные связи C и D , она не будет перемещаться по вертикали, но будет перемещаться по горизонтали. Однако следует учесть, что в исходной схеме имеется горизонтальная связь в жесткой заделке A , не позволяющая перемещаться балке $Ш3—D$ горизонтально. Эта балка является *условно основной* (неизменяемой лишь в отношении вертикальных перемещений).

Основные балки находятся в основании поэтажной схемы. Второстепенные балки помещаются выше одна над другой. Второстепенная балка, не имеющая опорных связей с землей, находится на самом верху поэтажной схемы. Отброшенные шарниры заменяем шарнирно-неподвижными опорами.

Полученная таким образом «поэтажная схема» наглядно выявляет структуру исходной системы и помогает понять взаимодействие составляющих ее балок.

Нагрузки, приложенные к верхним балкам, передаются на нижние через реакции во введенных опорных связях. Нагрузки, действующие на нижних балках, не будут вызывать усилия в верхних балках, поэтому расчет многопролетной балки начинают с самой верхней.

Другие виды многопролетных балок, часто применяемых на практике, с соответствующими поэтажными схемами, изображены на рис. 49, *б*, *в*.

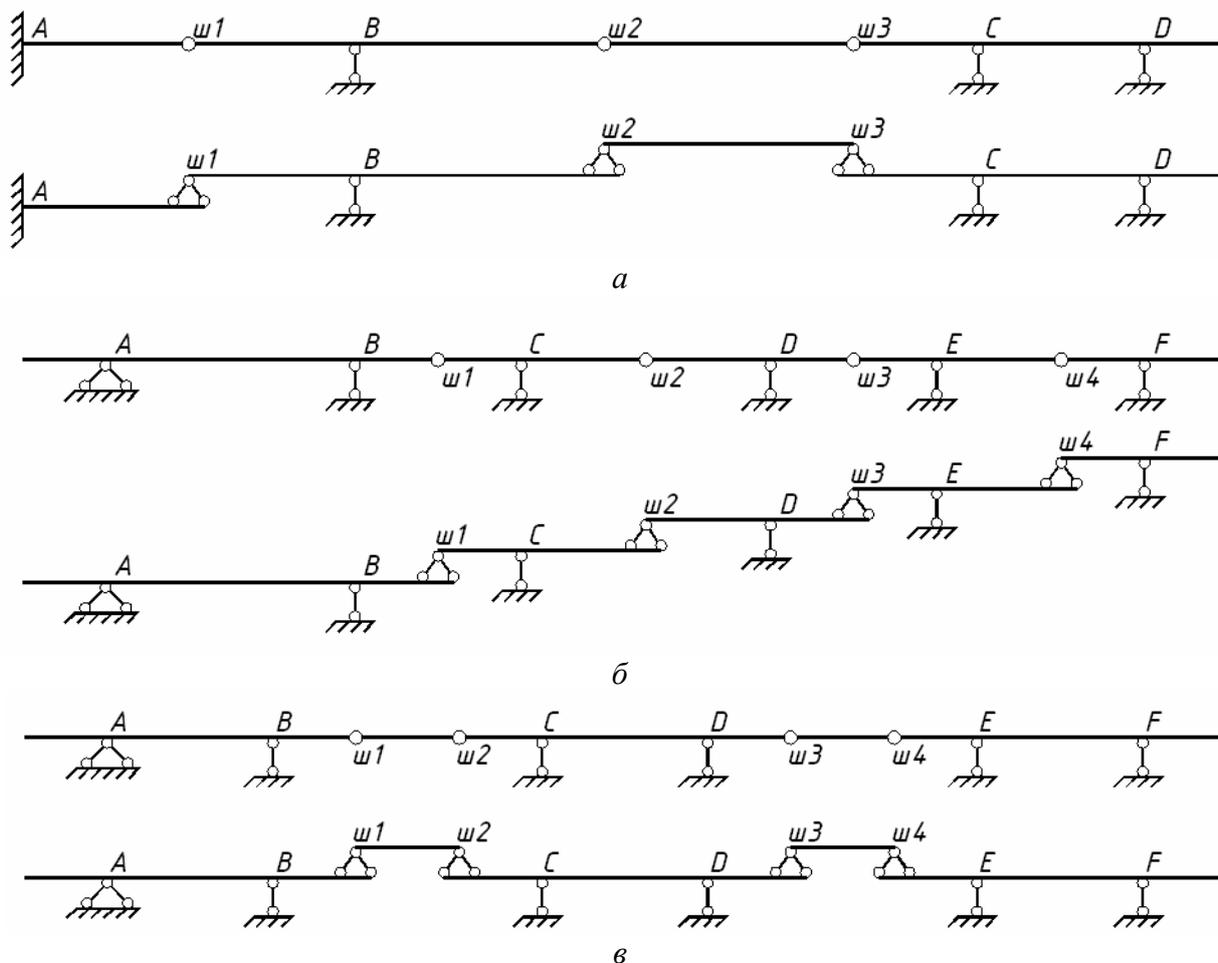


Рис. 49

3.2. Расчет на неподвижную нагрузку

Теория расчета многопролетных статически определимых балок была разработана русским инженером Г. Семиколоновым и опубликована в Петербурге еще в 1872 г. Общая последовательность расчета определяется структурой поэтажной схемы:

1. Сначала выделяются (вычерчиваются отдельно) балки самого верхнего яруса. Расчет их (определение реакций опорных связей, построение эпюр M и Q , подбор поперечных сечений) на заданные внешние нагрузки выполняется по правилам, изученным студентами в курсе сопротивления материалов. При этом ординаты эпюры M откладываются со стороны растянутых волокон (положительные от оси балки вниз, отрицательные — вверх). Знаки на эпюре моментов можно не ставить, но обязательно следует поставить численные значения всех характерных ординат. В эпюре поперечных сил Q положительные ординаты откладываются вверх, отрицательные — вниз и на участках эпюры обязательно ставятся знаки. Эпюра Q также должна иметь значения характерных ординат.

2. Затем последовательно проводится аналогичный расчет балок, расположенных ниже. При этом наряду с внешними нагрузками следует учиты-

вать опорные давления со стороны введенных опор, расположенных выше балок. Эти опорные давления равны вычисленным ранее опорным реакциям соответствующих балок, направленных в противоположную сторону.

3. Все полученные эпюры M и Q объединяются в расчетные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил исходной схемы.

Расчет составляющих балок

Приведенный выше порядок расчета проиллюстрируем на примере расчета балки, изображенной на рис. 50, а. Преобразование расчетной схемы балки в поэтажную схему показано на рис. 50, б.

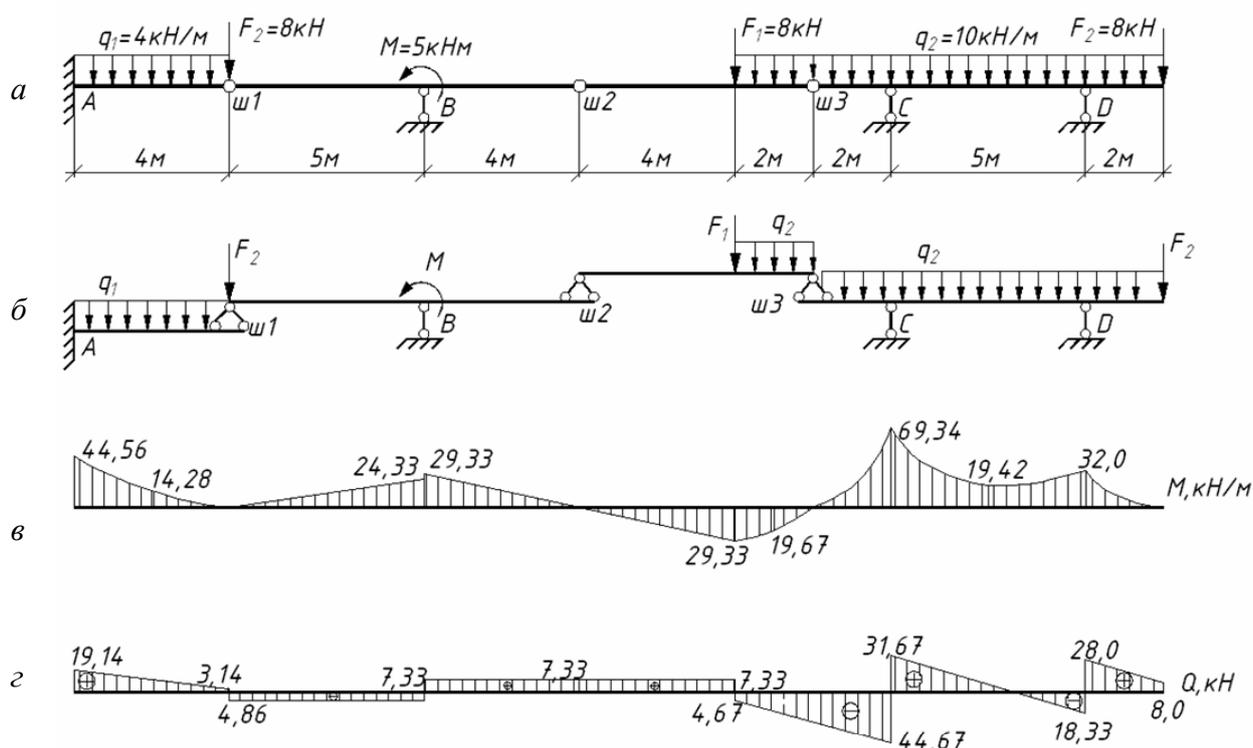


Рис. 50

Расчет начинаем с самой верхней балки Ш2—Ш3 (рис. 51, а).

Опорные реакции $V_{Ш2}$ и $V_{Ш3}$ определяем из уравнений равновесия:

$$\sum M_{Ш3} = 0; -V_{Ш2} \cdot 6 + 12 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 0; V_{Ш2} = 7,33 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{Ш2} = 0; V_{Ш3} \cdot 6 - 12 \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 5 = 0; V_{Ш3} = 24,67 \text{ кН.}$$

Контроль вычисления реакций:

$$\sum Y = 0; 7,33 - 12 - 2 \cdot 10 + 24,67 = 0.$$

Вычисление ординат эпюры M :

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 4 \text{ м}$; $M_1(x_1) = 7,33x_1$;

при $x_1 = 0$, $M = 0$;

при $x_1 = 4 \text{ м}$, $M = 29,33 \text{ кНм}$.

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq 2$ м; $M_2(x_2) = 7,33 \cdot (4 + x_2) - 12x_2 - 10x_2^2/2$;
 при $x_2 = 0$, $M = 29,33$ кНм;
 при $x_2 = 2$ м, $M = 0,02 \approx 0$.

Вычисление ординат эпюры Q :

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 4$ м; $Q_1(x_1) = 7,33$ кН.

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq 2$ м; $Q_2(x_2) = 7,33 - 12 - 10x_2 = -4,67 - 10x_2$;

при $x_2 = 0$, $Q_2 = -4,67$ кН;

при $x_2 = 2$ м, $Q_2 = -24,67$ кН.

По результатам вычислений строим эпюру изгибающих моментов M и эпюру поперечных сил Q (рис. 51, а).

Затем рассматриваем балку Ш1—В (рис. 51, б), расположенную ниже.

При расчете этой балки следует учесть опорное давление $F_{Ш2}$, передаваемое на балку через введенную опору Ш2 от нагрузок, приложенных к балке Ш2—Ш3 верхнего яруса. Опорное давление равно ранее вычисленной опорной реакции $F_{Ш2} = V_{Ш2} = 7,33$ кН, но направлено в противоположную сторону. Заметим также, что сосредоточенную силу $F_2 = 8$ кН, приложенную в шарнире Ш1, будем считать действующей на нижерасположенную балку А—Ш1.

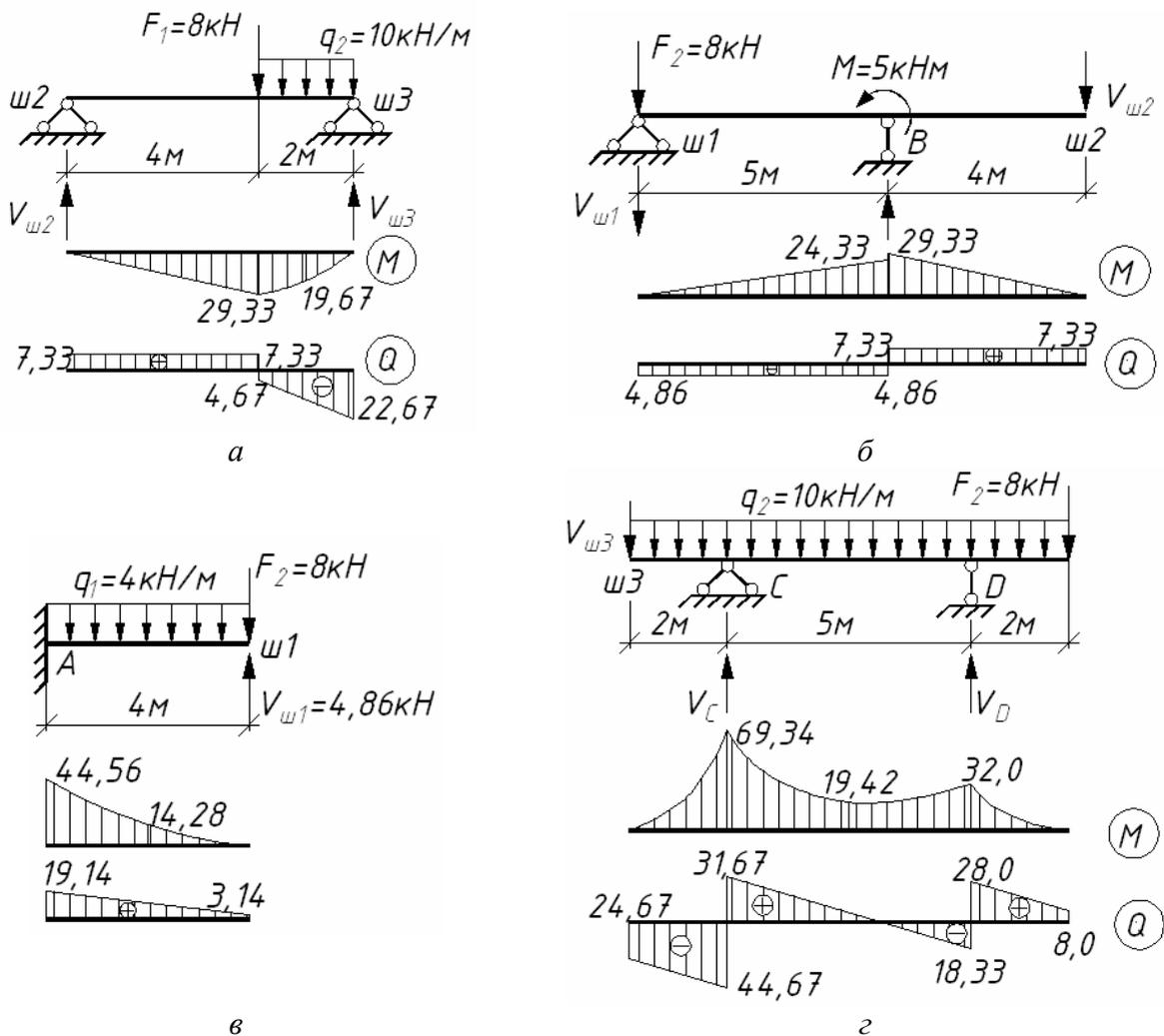


Рис. 51

Определение опорных реакций:

$$\sum M_B = 0; V_{III} \cdot 5 + 5 - 7,33 \cdot 4 = 0; V_{III} = 4,86 \text{ кН.}$$

$$\sum M_{III} = 0; V_B \cdot 5 + 5 - 7,33 \cdot 9 = 0; V_B = 12,19 \text{ кН.}$$

Контроль вычисления реакций:

$$\sum Y = 0; -4,86 + 12,19 - 7,33 = 0.$$

Вычисление внутренних усилий:

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq 5 \text{ м}; M_1(x_1) = -4,86x_1; Q_1(x_1) = -4,86 \text{ кН};$

при $x_1 = 0, M_1 = 0, Q_1 = -4,86 \text{ кН};$

при $x_1 = 5 \text{ м}, M_1 = -24,33 \text{ кНм}, Q_1 = -4,86 \text{ кН.}$

Участок 2: $0 \leq x_2 \leq 4 \text{ м}; M_2(x_2) = -7,33x_2; Q_2(x_2) = 7,33 \text{ кН};$

при $x_2 = 0, M_2 = 0, Q_2 = -7,33 \text{ кН};$

при $x_2 = 4 \text{ м}, M_2 = -29,33 \text{ кНм}, Q_2 = 7,33 \text{ кН.}$

Подбор поперечного сечения балки можно не проводить, так как расчетное усилие совпадает с прежним.

Далее рассматриваем нижние балки $A-III$ и $C-D$. Расчетные схемы и эпюры M и Q приведены на рис. 51, в и рис. 51, г соответственно. Порядок расчета аналогичен приведенному выше.

Построение и контроль общих расчетных эпюр

Все полученные эпюры M и Q следует привести к единому нулю графика, то есть объединить их на оси многопролетной балки (рис. 50, в , г). При этом нужно подобрать единый масштаб для внутренних усилий.

Полученные таким образом эпюры внутренних усилий должны удовлетворять закономерностям, известным из курса сопротивления материалов:

1. В эпюре изгибающих моментов M точкам приложения сосредоточенных сил (как внешних, так и реактивных) соответствуют изломы в направлении действия этих сил. Между сосредоточенными силами (в случае отсутствия между ними распределенных нагрузок) эпюра линейная. В сечениях, где действуют внешние сосредоточенные моменты, наблюдаются скачки эпюры на величину внешнего момента. На участках с распределенной нагрузкой q эпюра M криволинейная (параболическая) с выпуклостью, совпадающей с направлением нагрузки.

2. В эпюре поперечных сил точкам приложения сосредоточенных сил соответствуют скачки эпюр в направлении внешних сил. Между сосредоточенными силами (в случае отсутствия между ними распределенных нагрузок) эпюра сохраняет постоянное значение. На участках с равномерно распределенными нагрузками эпюра Q наклонная. При этом наклон возрастает с увеличением интенсивности нагрузки.

Рекомендуется проверить построение эпюры поперечных сил, следуя слева направо следующим образом: реакция V_A приводит в начале балки к скачку от нуля до 19,14 кН, затем на участке $A-III$ с распределенной нагрузкой имеем наклонную линию со снижением ΔQ на $4 \times 4 \text{ кН}$. В сечении

Ш2 сосредоточенная сила $F_2 = 8$ кН приводит к скачку вниз до значения $3,14 - 8 = -4,86$ кН. Далее на участке Ш2—В поперечная сила не меняется. Реакция V_B поднимает график на 12,19 кН, затем до F_1 поперечная сила не меняется и равна 7,33 кН. В точке приложения F_1 на эпюре скачок на 8 кН. От точки приложения силы F_1 до точки С от действия распределенной нагрузки имеем наклонную линию со снижением ΔQ на 10×4 кН. В точке С скачок на величину реакции и снова наклонная линия со снижением ΔQ на 10×5 кН. В точке D скачок на величину реакции, а затем наклонная линия со снижением ΔQ на 10×2 кН. В конце балки сила F_2 возвратит эпюру к нулю графика. Если этого не произойдет, то в расчетах имеется арифметическая ошибка и следует ее устранить.

3. Между эпюрами M и Q существует определенная взаимосвязь. В соответствии с теоремой Д. И. Журавского на участках с восходящими (при движении слева направо) ординатами эпюры M поперечные силы будут отрицательными, а с нисходящими — положительными. В сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающие моменты имеют экстремальные значения:

$$Q = 0 \sim M = M_{\max, \min}.$$

4. Кроме качественной проверки эпюр M и Q можно провести количественную проверку: площадь эпюры Q на любом участке $F_{Q_{\text{уч}}}$ численно равна разности изгибающих моментов $\Delta M_{\text{уч}}$ на том же участке балки:

$$F_{Q_{\text{уч}}} = \Delta M_{\text{уч}}.$$

При этом отрицательные значения площади соответствуют возрастанию ординат эпюры M (при движении слева направо), а положительные — их уменьшению.

3.3. Расчет на подвижную нагрузку

Сложность расчета балок на подвижные нагрузки обусловлена изменением их положения и качественным изменением вида подвижных нагрузок. Эта задача успешно преодолевается предварительным построением специальных графиков от простейшей подвижной нагрузки $\bar{F} = 1$, называемых линиями влияния. По этим графикам легко вычисляются соответствующие усилия от любых подвижных нагрузок.

Линией влияния некоторого фактора Z_k (например, опорной реакции в k -ой опорной связи или внутренних усилий M_k, Q_k в k -м сечении) называют график изменения Z_k в k -м сечении или опорной связи при перемещении по балке подвижной силы $\bar{F} = 1$. В многопролетных балках линии влияния строятся в соответствии с поэтажной схемой (без учета внешних подвижных нагрузок) в следующем порядке:

1. Для элемента, которому принадлежит данная опора или сечение, линии влияния строятся в соответствии с рис. 52. При этом, если k -е поперечное сечение расположено между опор, поддерживающих данную балку, используется первая типовая задача; если за пределами — вторая.

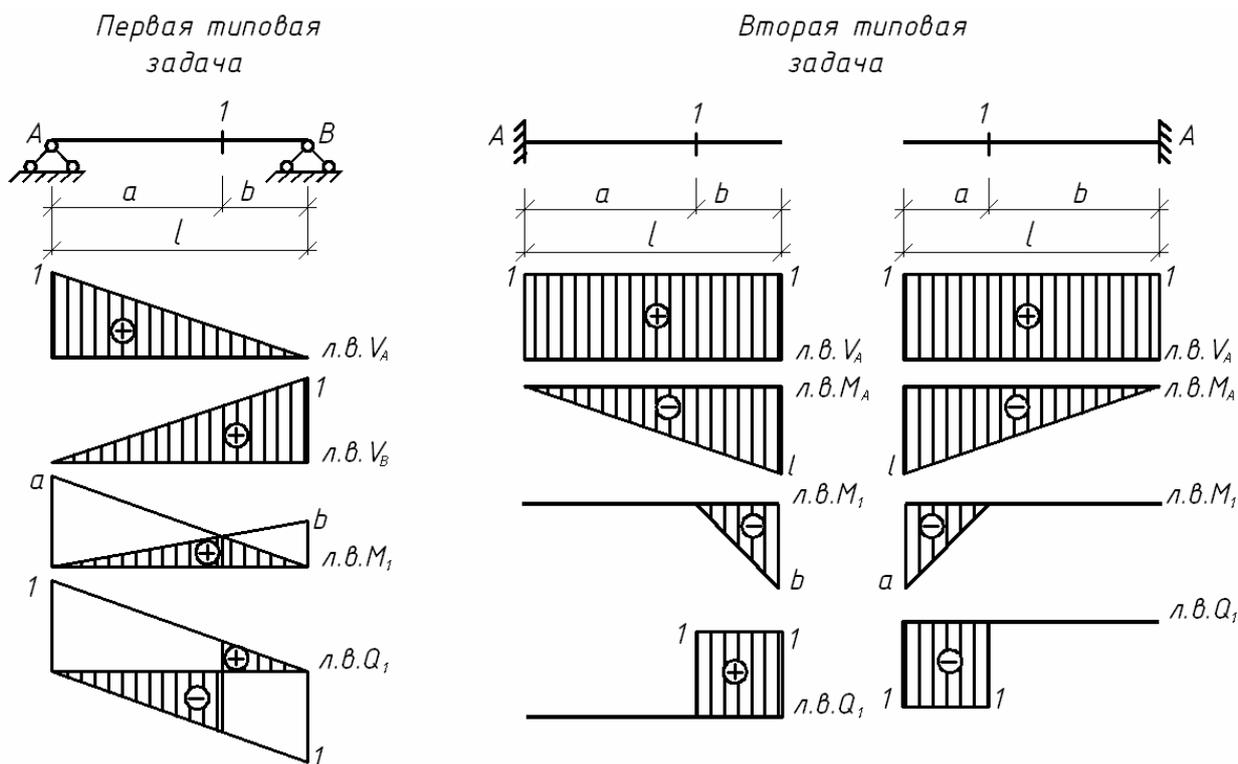


Рис. 52

2. Для балок, расположенных на нижних ярусах поэтажной схемы, обсуждаемые линии влияния будут принимать нулевые значения, так как сила $\bar{F} = 1$ при перемещении по балкам нижних ярусов не вызывает усилий в балках верхних ярусов.

3. Для балок верхних ярусов линии влияния строятся путем последовательного соединения ординат линии влияния балок нижнего яруса, в месте прикрепления к ней введенной опоры (поддерживающее балку верхнего яруса) с нулевой ординатой наземной опоры рассматриваемой балки верхнего яруса. При этом все характерные ординаты легко вычисляются из геометрических соображений (по подобию треугольников).

Технику построения линий влияния опорных реакций и внутренних усилий покажем на примере расчета балки на подвижные нагрузки (рис. 53). Расчетная схема балки и соответствующая поэтажная схема вычерчиваются в масштабе без указания внешних нагрузок, но с указанием сечений. Для построения линий влияния опорных реакций V_A , M_A и внутренних усилий M_1 , Q_1 в нижней (основной) балке обращаемся ко второй типовой задаче (см. рис. 52) и переносим требуемые линии влияния на общий график, приняв $l_1 = 4$ м и $C_1 = 2$ м.

После того, как подвижный груз $\bar{F} = 1$ перейдет на балку Ш1—Ш2, давление от него будет распределяться по закону рычага (по линейному закону) между концом консоли Ш1, где находится введенная опора, и наземной опорой В.

При расположении груза $\bar{F} = 1$ на опоре Ш1 опорное давление будет равно единице, поэтому искомые усилия будут выражаться ординатами линий влияния балки А—Ш1. При расположении груза $\bar{F} = 1$ над опорой В реакция в ней будет равна $V_B = 1$ и все другие реакции, а также усилия, будут равны нулю. Поэтому под каждой наземной опорой всех балок верхних ярусов на всех линиях влияния (кроме опорной реакции самой наземной опоры) будут нулевые точки. Между двумя обсуждаемыми ординатами все линии влияния линейны (в пределах соответствующих балок).

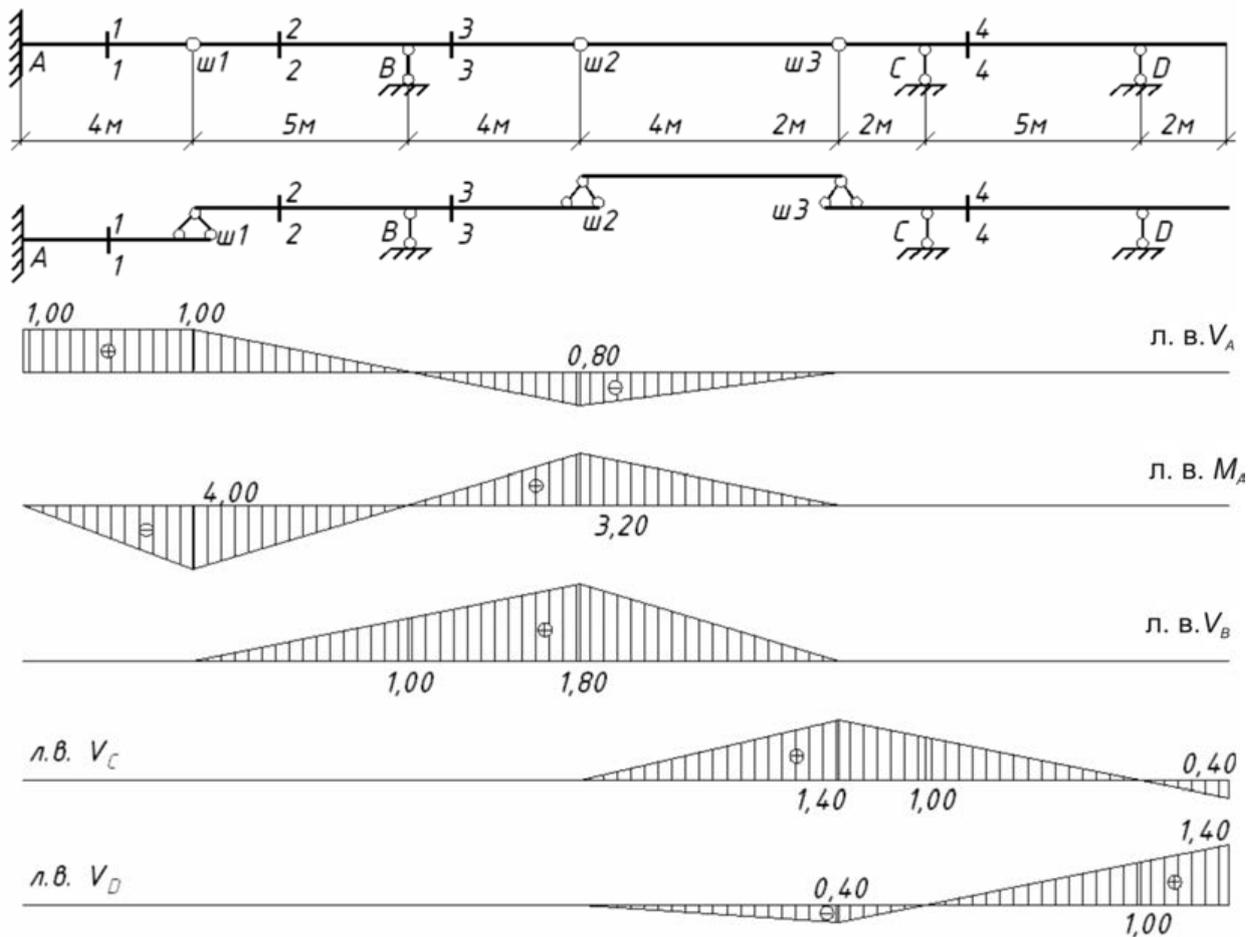


Рис. 53

При переходе $\bar{F} = 1$ на основную балку С—D все линии влияния оказываются нулевыми, так как балки, опирающиеся на балку А—Ш1, будут незагруженными.

При построении линий влияния реакций $V_{Ш1}$, V_B и усилий M_2 , Q_2 , M_3 , Q_3 следует иметь в виду, что балка второго яруса Ш1—Ш2 является двухопорной. Сечение «2» расположено между опорами Ш1 и В, то есть в пролетной части. Поэтому оно относится к первой типовой задаче. Сечение «3» расположено в консольной части (все опорные связи балки Ш1—Ш2 располагаются левее сечения), то есть это вторая типовая задача.

Примеры построения линий влияния приводятся на рис. 54.

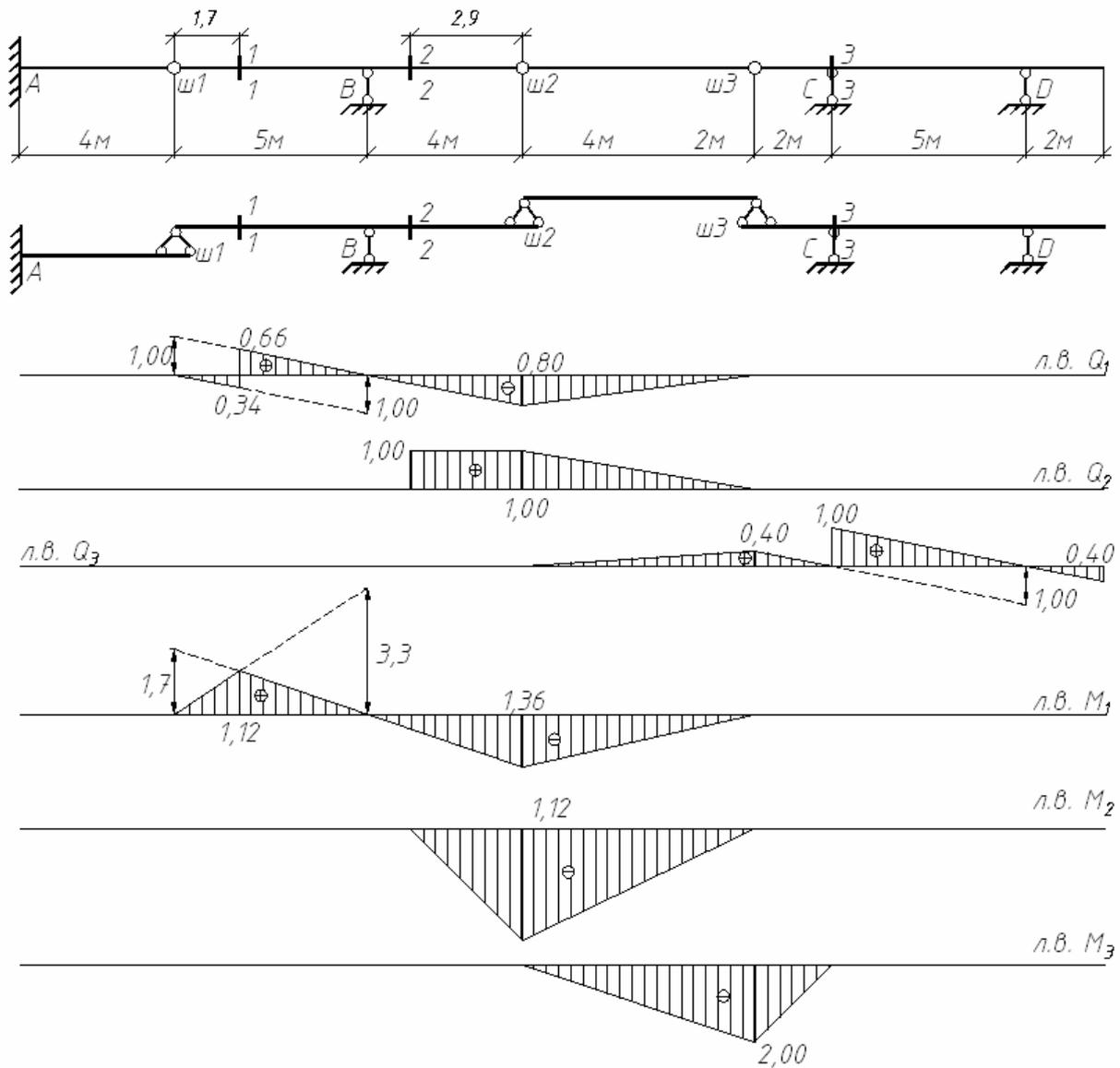


Рис. 54

Вычисление реакций и усилий по линиям влияния

Для вычисления по линиям влияния интересующего нас фактора Z_k (например, опорной реакции V_k или внутренних усилий M_k и Q_k) необходимо найти алгебраическую сумму произведений:

а) каждой внешней сосредоточенной силы F_i на ординаты соответствующей линии влияния y_i , расположенные под силой;

б) интенсивности каждой равномерно распределенной нагрузки q_i на площадь w_i соответствующей линии влияния, расположенную на участке действия q_i ;

в) сосредоточенного внешнего момента M_i на тангенс угла наклона линии влияния под сечением $\operatorname{tg} \alpha_i$, где приложен момент.

Для наглядности эти действия иллюстрируются на рис. 55, где все величины показаны положительными. Следует обратить внимание на положительные направления внешних моментов и углов.

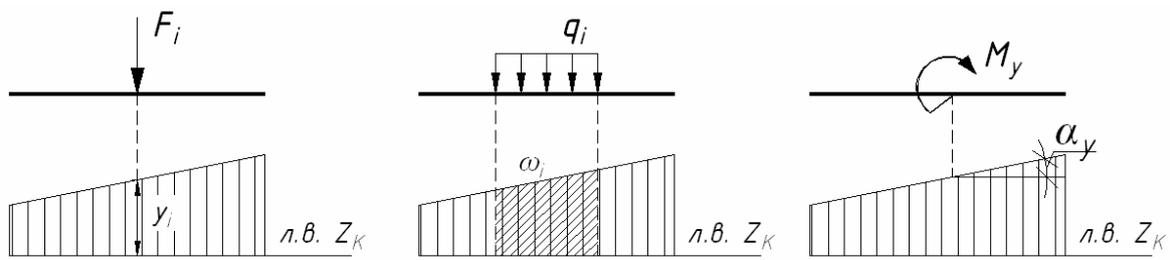


Рис. 55

В качестве примера определим ранее вычисленный опорный момент M_A по линии влияния M_A от действия заданной неподвижной нагрузки (рис. 56).

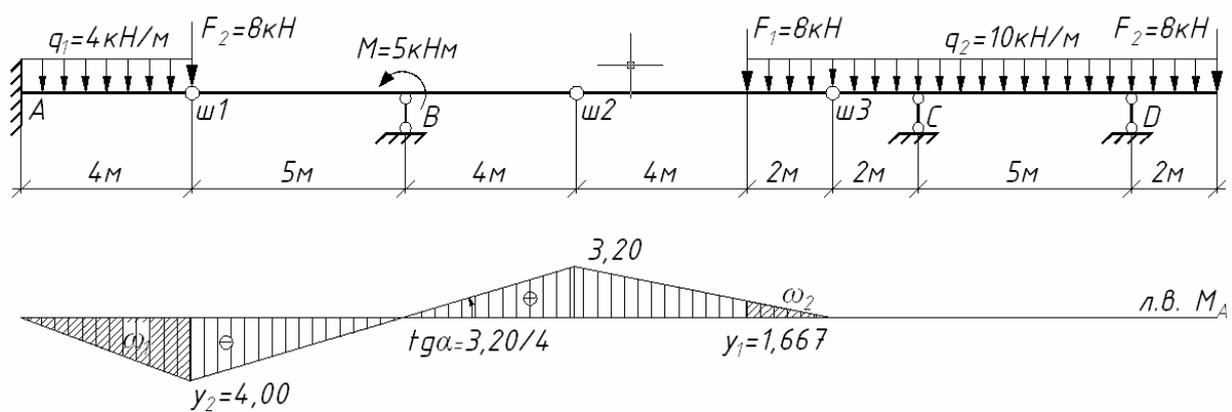


Рис. 56

$$\begin{aligned}
 M_A &= q_1 w_1 + F_2 y_2 + M \operatorname{tg} \alpha + F_1 y_1 + q_2 w_2 = \\
 &= -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - 8 \cdot 4 - 5 \cdot \frac{3,2}{4} + 12 \cdot \frac{3,2}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3,2}{3} \cdot 2 = -4,53 \text{ кНм.}
 \end{aligned}$$

Из расчета на неподвижные нагрузки $M_A = -4,56$ кНм. Погрешность $\delta = (44,46 - 44,53) / 44,53 \cdot 100 = 0,067$ % ничтожно мала и связана с округлением результатов.

Следует подчеркнуть, что введение каких-либо дополнительных нагрузок практически не усложняет расчета Z_k по линии влияния Z_k . Поэтому изложенная методика обладает определенной гибкостью и позволяет решать ряд новых задач на подвижные нагрузки.

Лекция 4. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

При строительстве мостов, большепролетных промышленных и общественных зданий и сооружений, высоковольтных линий электропередач, подъемных кранов и других сооружений применяются конструкции, называемые фермами. Подробная классификация ферм приведена в лекции 1.

Фермой называется геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах шарнирами (рис. 57).

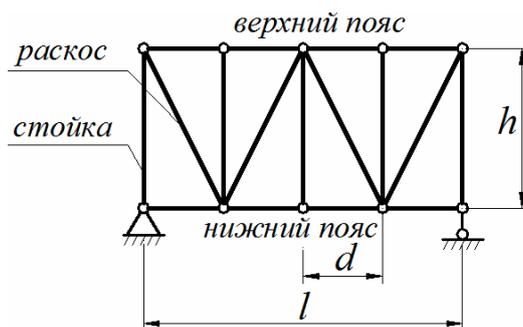


Рис. 57

На рис. 57 обозначены: l — длина пролета фермы; h — высота фермы; d — длина панели.

Плоской называется ферма, оси всех стержней которой лежат в одной плоскости.

При расчете ферм используются следующие допущения:

- вся внешняя нагрузка приводится непосредственно в узлы фермы и прикладывается в виде сосредоточенных сил;
- трение в шарнирах отсутствует;
- весом стержней можно пренебречь.

4.1. Определение внутренних усилий от действия неподвижной нагрузки

Алгоритм расчета плоской фермы на действие постоянной нагрузки:

1. Последовательно нумеруются все узлы фермы, в том числе опорные (рис. 58, а).

2. Вычисляются опорные реакции с использованием уравнений статики:

$$\sum X = 0 \rightarrow H_A \text{ (при действии только вертикальной нагрузки } H_A = 0\text{);}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A;$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B.$$

Выполняется проверка найденных значений опорных реакций V_A и V_B по уравнению $\sum Y = 0$.

3. Определяются усилия в стержнях фермы.

Усилия в стержнях фермы определяются способами моментной точки, проекций, вырезания узлов, использующих в своей основе принципы метода сечений:

1) исследуемая ферма разрезается сквозным сечением, разделяющим ее на две отдельные части (рис. 58, б). При этом необходимо руководствоваться следующими правилами:

сечение должно разрезать стержень, в котором необходимо найти усилие;

разрез необходимо проводить через три стержня. В частных случаях разрез можно проводить и через большее количество стержней, если все рассеченные стержни (кроме искомого) пересекаются в одной точке.

2) Усилия в разрезанных стержнях направляются от узлов фермы, принимая их изначально растягивающими (рис. 58, в).

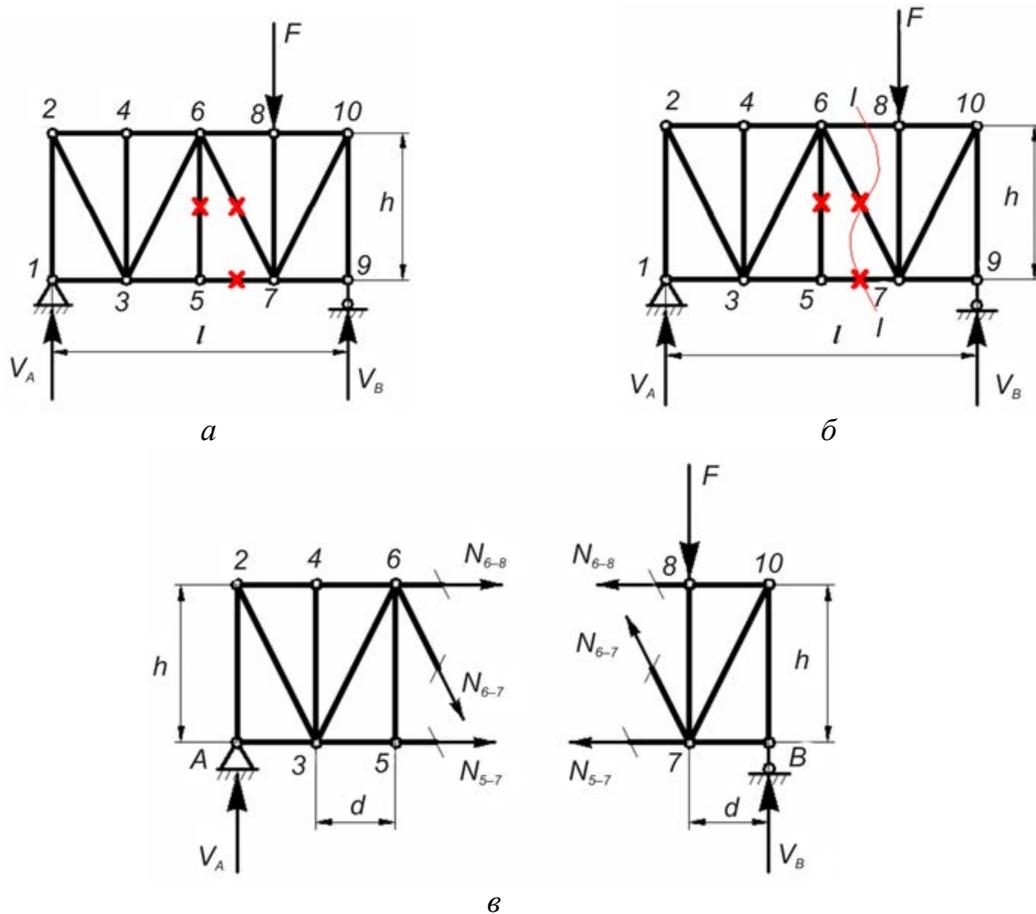


Рис. 58

Способ моментной точки

Для определения внутреннего усилия в стержне фермы способом моментной точки необходимо при рассмотрении одной из отсеченных частей фермы (рис. 59) исключить из уравнения равновесия два других усилия. При этом исключаемые усилия должны иметь общую точку пересечения (моментную точку).

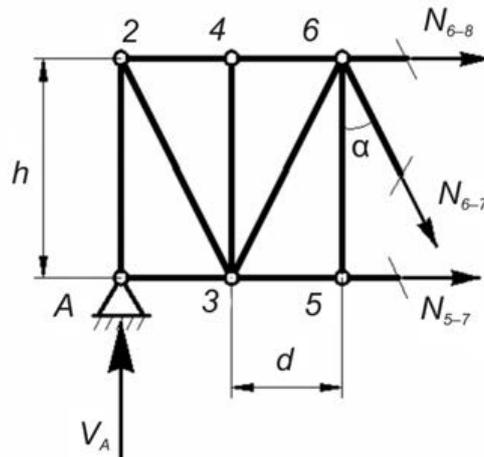


Рис. 59

Например, для определения усилия N_{5-7} необходимо «избавиться» от усилий N_{6-7} и N_{6-8} . Таким образом, для усилия N_{5-7} моментная точка находится в узле 6.

При составлении суммы моментов относительно точки 6 нетрудно заметить, что плечи усилий N_{6-7} и N_{6-8} равны нулю, следовательно, в данном уравнении равновесия эти усилия не участвуют.

$$\sum M_6^{\text{лев}} = 0; V_A \cdot 2d - N_{5-7} \cdot h = 0. \text{ Отсюда } N_{5-7} = \frac{V_A \cdot 2d}{h}.$$

Усилие N_{5-7} является растягивающим, так как в результате решения уравнения оно получилось со знаком «+».

Способ проекций

Если при определении неизвестного усилия линии действия двух других усилий, находящихся в рассматриваемом сечении, не пересекаются (точка их пересечения находится в бесконечности), то в этом случае применяется способ проекций. Для этого составляется сумма проекций на ось, перпендикулярную линиям действий двух усилий, находящихся в сечении.

Например, для определения усилия N_{6-7} (см. рис. 59) необходимо «избавиться» от усилий N_{5-7} и N_{6-8} , линии действия которых параллельны и лежат на горизонтальной оси. Проецируя всю внешнюю нагрузку, опорные реакции и внутренние усилия отсеченной части фермы на вертикальную ось, получим

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; V_A - N_{6-7} \cos \alpha = 0.$$

Величина $\cos \alpha$ определяется из рассмотрения треугольника 5—6—7:

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}. \text{ Таким образом, } N_{6-7} = \frac{V_A}{\cos \alpha} \text{ (стержень растянут).}$$

Способ вырезания узлов

Для определения внутреннего усилия в стержне фермы, через который невозможно провести сквозное сечение, удовлетворяющее условиям метода сечений, чаще всего применяется способ вырезания узлов. Из двух узлов, ограничивающих стержень с искомым усилием, выбирается тот, который составлен из наименьшего количества стержней. Далее рассматривается равновесие вырезанного узла путем составления сумм проекций на горизонтальную и вертикальную оси.

Например, усилие N_{5-6} (рис. 60) целесообразнее вычислять, рассматривая равновесие вырезанного узла 5, так как он состоит из трех стержней 3—5, 5—7, и 5—6 (в отличие от узла 6, состоящего из пяти стержней).

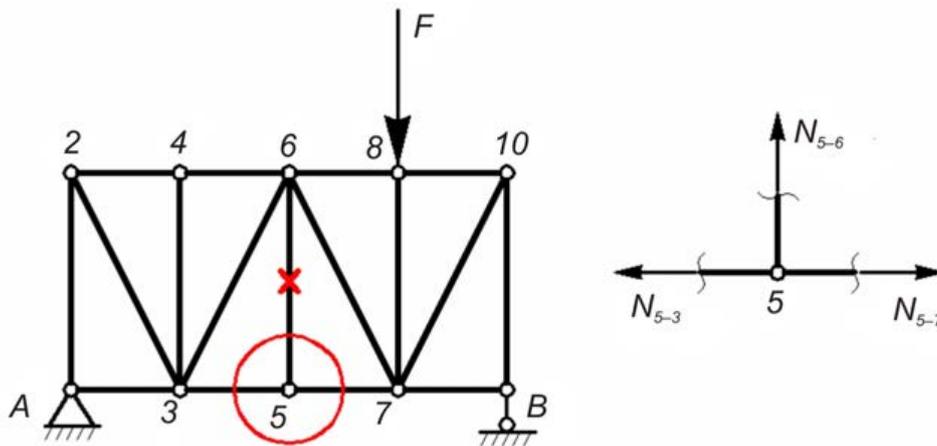


Рис. 60

1) $\sum X = 0, -N_{3-5} + N_{5-7} = 0$, отсюда $N_{3-5} = N_{5-7}$.

2) $\sum Y = 0, N_{5-6} = 0$.

Частные случаи определения нулевых стержней

1. Если узел состоит из двух стержней и не загружен, то усилия в этих стержнях равны нулю (рис. 61).

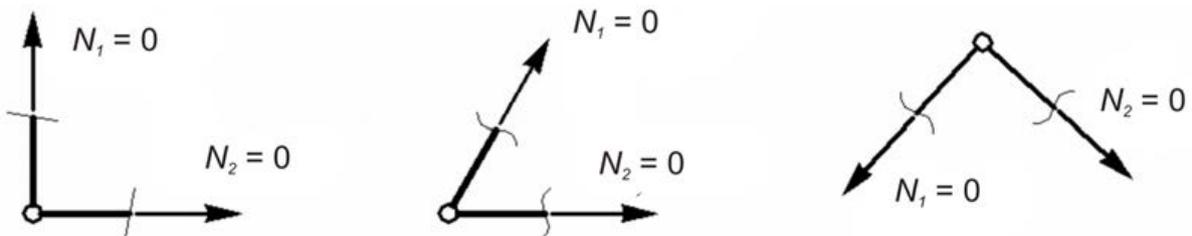


Рис. 61

2. Если узел состоит из трех стержней, два из которых лежат на одной прямой, и не загружен, то усилие в третьем стержне равно нулю (рис. 62).

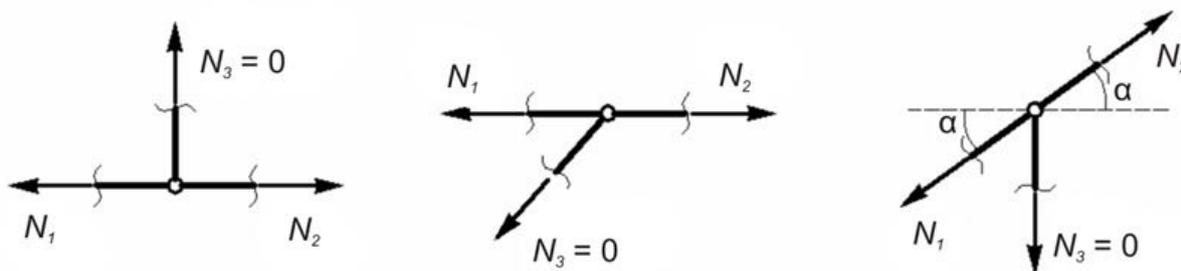


Рис. 62

4.2. Определение внутренних усилий от действия подвижной нагрузки

Построение линий влияния опорных реакций фермы выполняется в той же последовательности, что и в балке. При построении линии влияния опорной реакции V_A необходимо на опоре A отложить значение, равное $+1$ (вверх от оси), а на опоре B отложить 0 и соединить эти две точки (рис. 63). Линия влияния опорной реакции V_B строится аналогично.

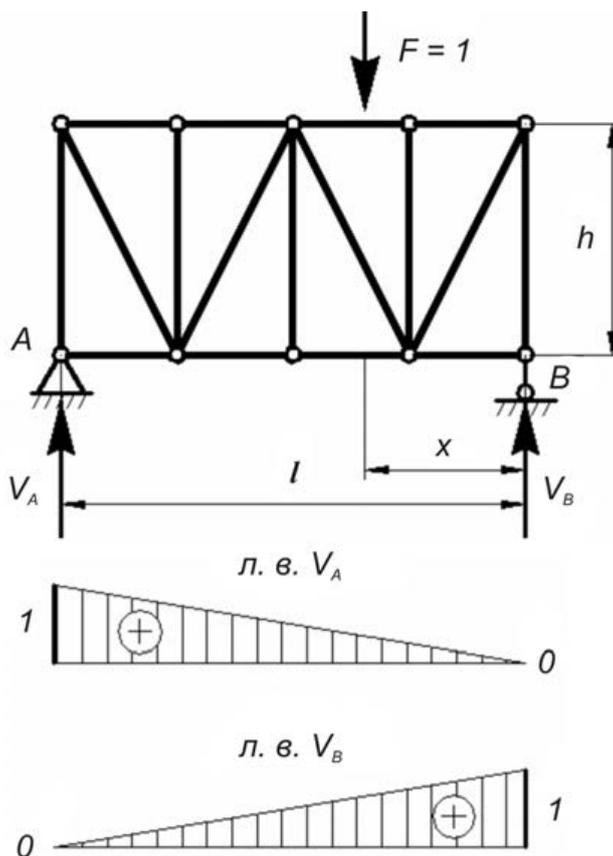


Рис. 63

Линии влияния внутренних усилий в стержнях фермы строятся в соответствии со способами определения искомых усилий. При этом действуют те же принципы, применяемые в методе сечений при статическом расчете ферм.

Для построения линии влияния внутреннего усилия необходимо рассмотрение равновесия обеих отсеченных частей фермы (рис. 64). Исследуя равновесие, например, левой отсеченной части фермы, будем считать, что подвижный груз $F = 1$ переместился в правую часть и, наоборот, исследуя равновесие правой части, принимаем, что груз находится в левой.

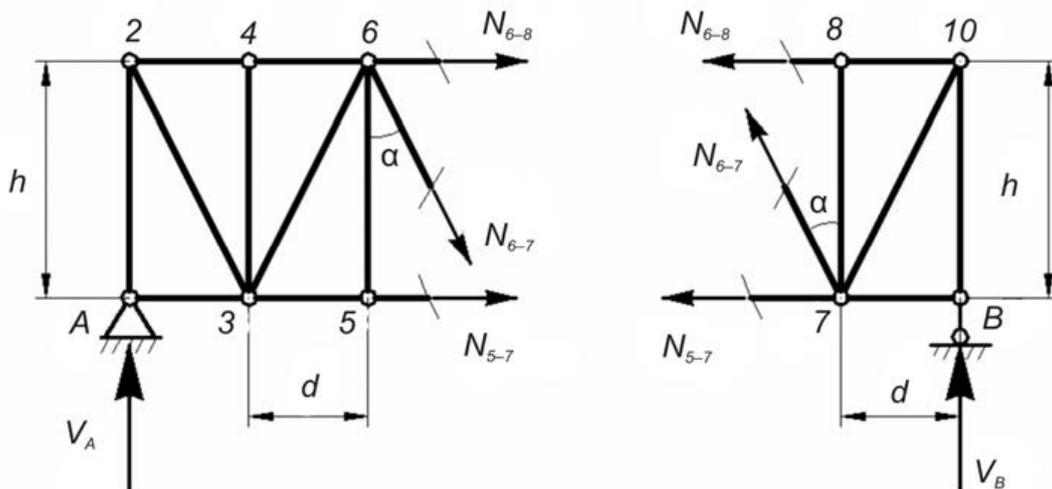


Рис. 64

Таким образом, для построения линии влияния N_{5-7} составим сумму моментов относительно моментной точки 6 для левой и правой отсеченных частей фермы:

$$\sum M_6^{\text{лев}} = 0; V_A \cdot 2d - N_{5-7} \cdot h = 0; \text{ л.в. } N_{5-7} = \frac{V_A \cdot 2d}{h} = \frac{2d}{h}.$$

$$\sum M_6^{\text{прав}} = 0; V_A \cdot 2d - N_{5-7} \cdot h = 0; \text{ л.в. } N_{5-7} = \frac{V_A \cdot 2d}{h} = \frac{2d}{h}.$$

Далее полученные значения с учетом знаков откладываются в масштабе соответственно на левой и правой опорах и соединяются с нулями на противоположных опорах (рис. 65, а). Внутренняя (заштрихованная) часть является линией влияния усилия N_{5-7} .

Характерной особенностью линий влияния, построенных с использованием способа моментной точки, является то, что правая и левая ветви пересекаются под моментной точкой.

На рис. 65, б показана линия влияния усилия N_{6-8} , построенная с применением способа моментной точки, находящейся в узле 7.

Для построения линии влияния N_{6-7} составим сумму проекций на ось Y всех сил левой и правой отсеченных частей фермы:

$$\sum Y^{\text{лев}} = 0; V_A - N_{6-7} \cos \alpha = 0; N_{6-7} = \frac{V_A}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\sum Y^{\text{прав}} = 0; V_B + N_{6-7} \cos \alpha = 0; N_{6-7} = -\frac{V_B}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\cos \alpha}.$$

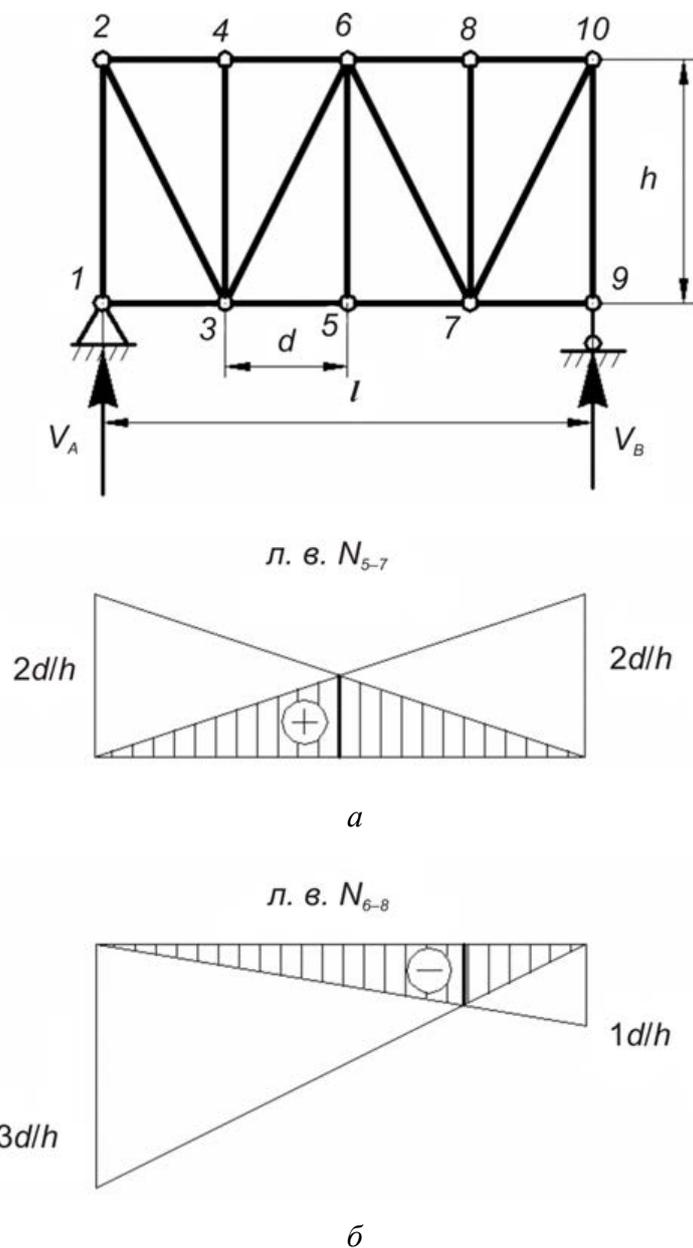


Рис. 65

Полученные значения с учетом знаков откладываются в масштабе соответственно на левой и правой опорах и соединяются с нулями на противоположных опорах (правая и левая ветви линии влияния). Затем параллельные ветви соединяются передаточной прямой в пределах панели, в которой находится искомый стержень (рис. 66).

При построении линии влияния усилия способом вырезания узлов рассматривается два состояния узла: когда единичный груз находится в вырезаемом узле (рис. 67, а) и когда единичный груз $F = 1$ вне узла (рис. 67, б).

Первое состояние (узел загружен единичной силой):

$$\sum Y = 0, N_{5-6} - F = 0, N_{5-6} = F = 1.$$

Второе состояние (единичная сила вне узла):

$$\sum Y = 0, N_{5-6} = 0.$$

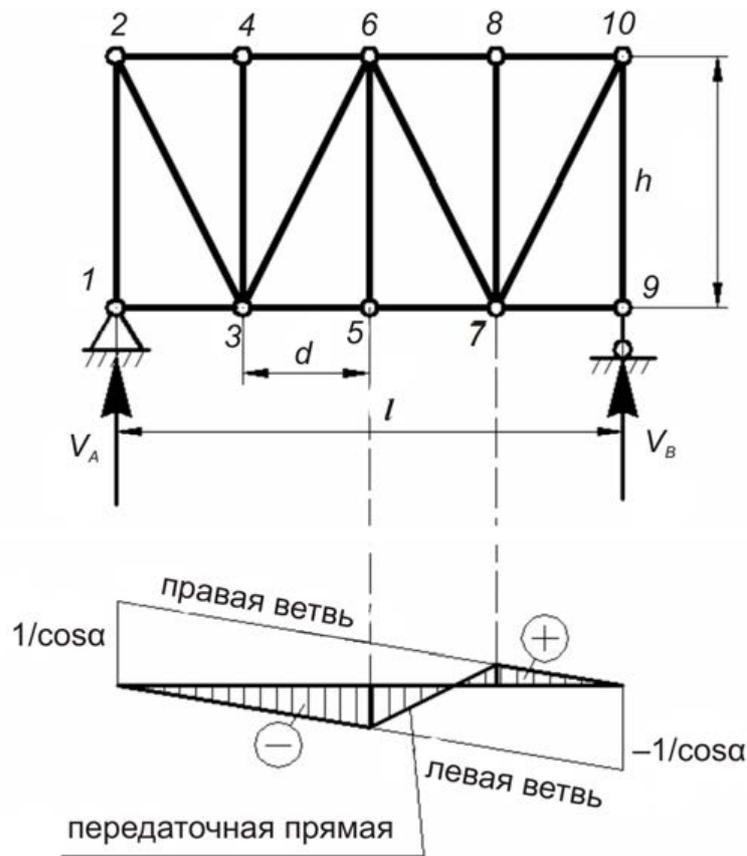


Рис. 66

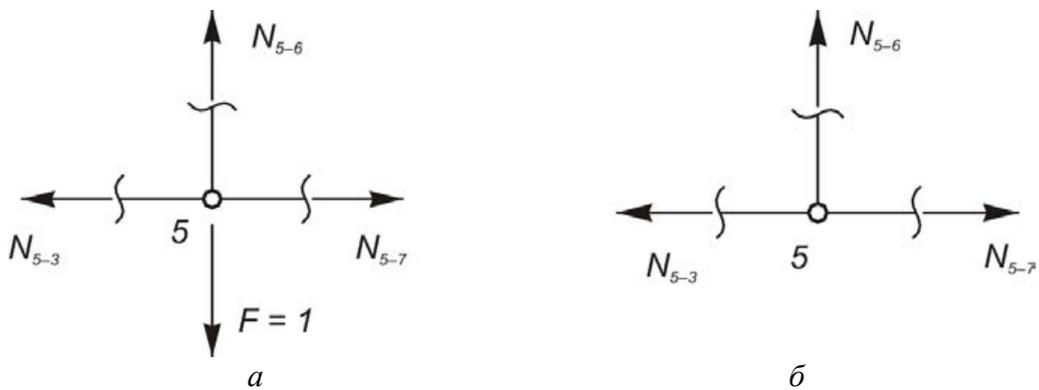


Рис. 67

При построении линии влияния в вырезанном узле откладывается координата $+1$ в остальных узлах — нули. Точки соединяются прямыми линиями (рис. 68).

По линиям влияния опорные реакции и внутренние усилия определяются по формуле $Z = \sum(Fy) + \sum(q\omega) + \sum(Mtg\varphi)$ (см. лекцию 3, п. 3.3), в которой используется только первое слагаемое, так как вся внешняя нагрузка на ферму прикладывается в виде сосредоточенных сил. Таким образом,

$$Z = \sum(Fy),$$

где y — ордината линии влияния под сосредоточенной силой.

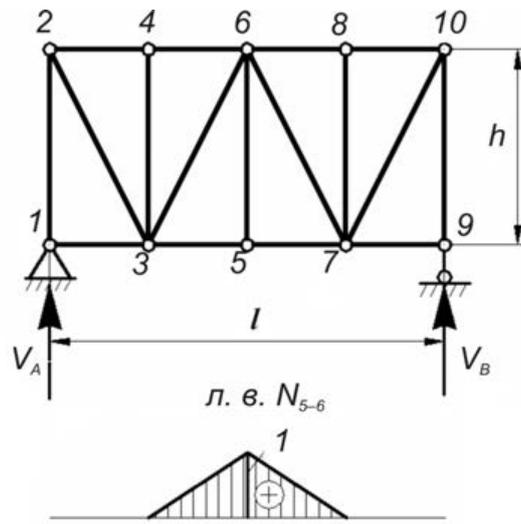


Рис. 68

Пример расчета плоской фермы

Необходимо для заданной фермы (рис. 69) определить усилия в пятой панели, построить линии влияния для этих стержней, сравнить полученные результаты. $F = 20$ кН, $h = 4$ м, $d = 2$ м.

1. Аналитический расчет. Определение внутренних усилий.

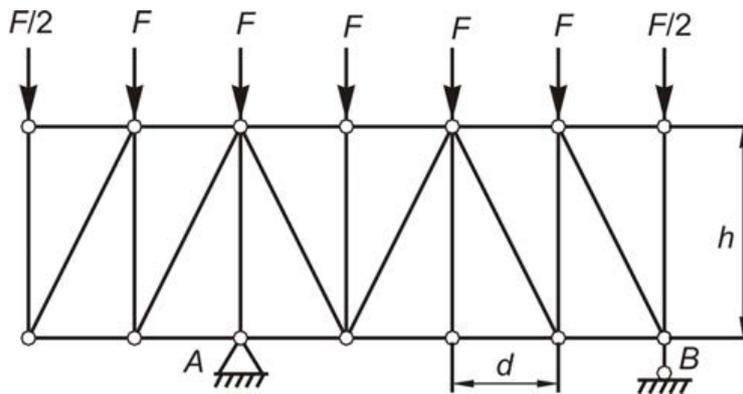


Рис. 69

Определяем опорные реакции (рис. 70) из уравнений равновесия.

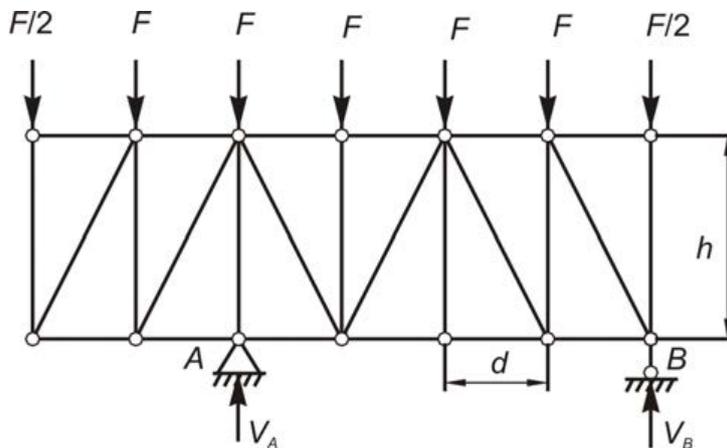


Рис. 70

$$\sum M_A = 0, \frac{F}{2} \cdot 2d + F \cdot d - F \cdot d - F \cdot 2d - F \cdot 3d - \frac{F}{2} \cdot 4d + V_B \cdot 4d = 0,$$

$$V_B = \frac{-10 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 10 \cdot 8}{8} = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, V_A \cdot 4d - \frac{F}{2} \cdot 6d - F \cdot 5d - F \cdot 4d - F \cdot 3d - F \cdot 2d - F \cdot d = 0,$$

$$V_A = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 10 + 20 \cdot 8 + 20 \cdot 6 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 2}{8} = 90 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0, H_A = 0.$$

Проверка реакций

$$\sum Y = 0, V_A + V_B - 6F = 90 + 30 - 20 \cdot 6 = 0.$$

Для удобства вычисления усилий нумеруем узлы фермы.

Через заданную панель проводим сечение I—I, которое делит ферму на две части (рис. 71).

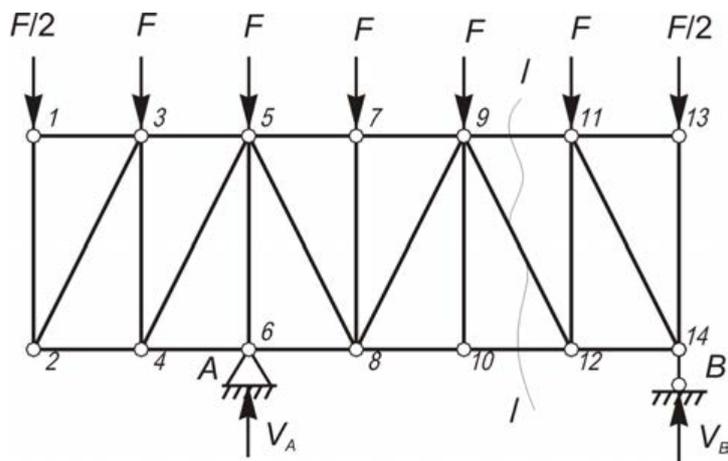


Рис. 71

Необходимо составить уравнения равновесия для одной из полученных частей. В данном случае удобнее будет рассматривать правое сечение. В разрезанных стержнях обнажились внутренние продольные усилия. Обозначим их буквой N с индексами узлов, к которым присоединен данный стержень (рис. 72).

N_{9-11} . **Способ моментной точки (аналитический расчет).** Оси стержней N_{9-12} и N_{10-12} пересекаются в узле 12 — моментной точке.

Составляем для правой части уравнение равновесия относительно узла 12.

$$\sum M_{12} = 0, V_B \cdot d - \frac{F}{2} \cdot d + N_{9-11} \cdot h = 0,$$

$$N_{9-11} = \frac{10 \cdot 2 - 30 \cdot 2}{4} = -10 \text{ кН.}$$

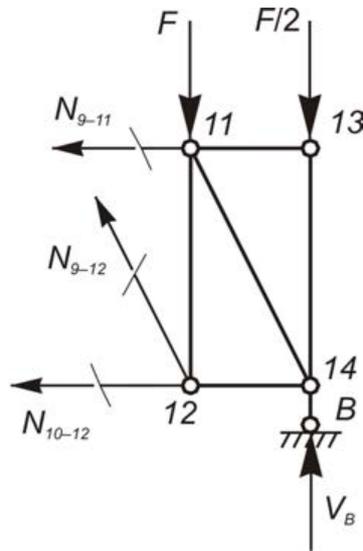


Рис. 72

Отрицательное значение усилия N_{9-11} означает, что стержень сжат.

N_{10-12} . **Способ моментной точки (аналитический расчет).** Оси стержней N_{9-12} и N_{9-11} пересекаются в узле 9 — моментной точке).

Составляем для правой части уравнение равновесия относительно узла 9.

$$\sum M_9 = 0,$$

$$V_B \cdot 2d - \frac{F}{2} \cdot 2d - F \cdot d - N_{10-12} \cdot h = 0,$$

$$N_{10-12} = \frac{-10 \cdot 4 - 20 \cdot 2 + 30 \cdot 4}{4} = 10 \text{ кН.}$$

Положительное значение усилия N_{10-12} означает, что стержень растянут.

N_{9-12} . **Способ проекций (аналитический расчет).** (Оси стержней N_{9-11} и N_{10-12} параллельны).

Составляем для правой части уравнение равновесия на ось Y .

$$\sum Y = 0,$$

$$V_B - \frac{F}{2} - F + N_{9-12} \cdot \cos(\angle 9, 12, 11) = 0,$$

$$N_{9-12} = \frac{10 + 20 - 30}{0,894} = 0 \text{ кН.}$$

$$\cos(\angle 9, 12, 11) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = 0,894.$$

Для определения усилия в стержне 11—12 проводим через него сечение II—II (рис. 73).

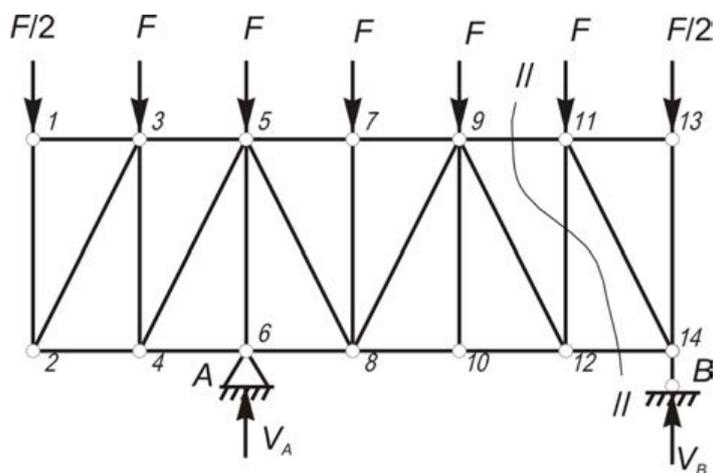


Рис. 73

Рассмотрим правое сечение (рис. 74).

N_{11-12} . *Способ проекций (аналитический расчет)*. Оси стержней N_{12-14} и N_{9-11} параллельны.

Составляем для правой части уравнение равновесия на ось Y .

$$\sum Y = 0, \quad V_B - \frac{F}{2} - F - N_{11-12} = 0,$$

$$N_{11-12} = -10 - 20 + 30 = 0 \text{ кН.}$$

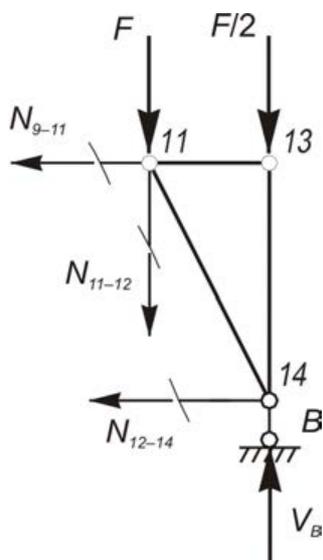


Рис. 74

Для определения усилия N_{10-9} вырезаем узел 10 (способ вырезания узлов) (рис. 75).

$$\sum Y = 0, \quad N_{10-9} = 0.$$

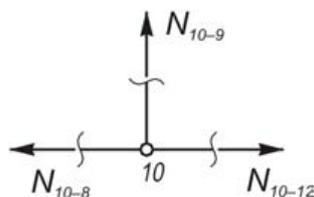


Рис. 75

2. Построение линий влияния.

Для построения линий влияния в заданных стержнях фермы воспользуемся способами и равенствами из аналитического расчета.

Рассмотрим сечение $I-I$.

Линии влияния N_{9-11} . Сила $F = 1$ слева от сечения, рассматриваем правую часть (рис. 76).

$$\sum M_{12}^{\text{прав}} = 0, \quad V_B \cdot d + N_{9-11} \cdot h = 0,$$

$$N_{9-11} = \frac{-V_B \cdot 2}{4} = -0,5V_B.$$

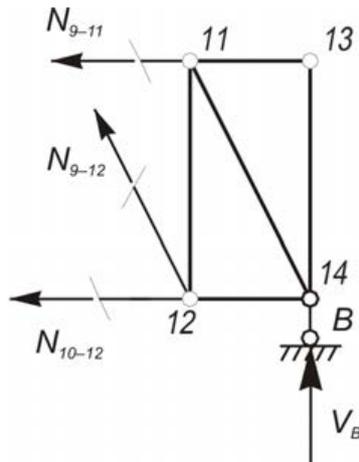


Рис. 76

Сила $F = 1$ справа от сечения, рассматриваем левую часть (рис. 77).

$$\sum M_{12}^{\text{лев}} = 0,$$

$$V_A \cdot 3d + N_{9-11} \cdot h = 0,$$

$$N_{9-11} = \frac{-V_A \cdot 6}{4} = -1,5V_A.$$

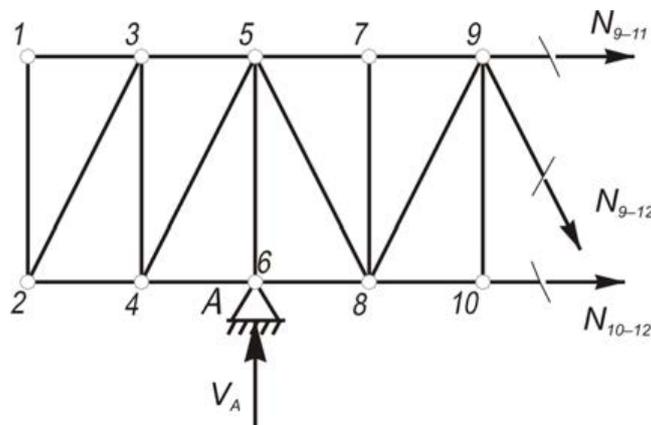


Рис. 77

Полученные числовые значения перед опорными вертикальными реакциями являются ординатами ветвей линии влияния на соответствующих опорах.

На опоре A откладываем ординату $-1,5$ и соединяем ее с нулем на опоре B . Так как аналитическое выражение получено, когда сила $F = 1$ была справа от сечения, то заштриховываем правую часть до рассеченной панели — правая ветвь линии влияния.

На опоре B откладываем ординату $-0,5$ и соединяем ее с нулем на опоре A . Так как аналитическое выражение получено, когда сила $F = 1$ была слева от сечения, то заштриховываем левую часть до рассеченной панели — левая ветвь линии влияния.

Полученные ординаты на границе рассеченной панели соединяем прямой линией, которая называется передаточной прямой (рис. 78).

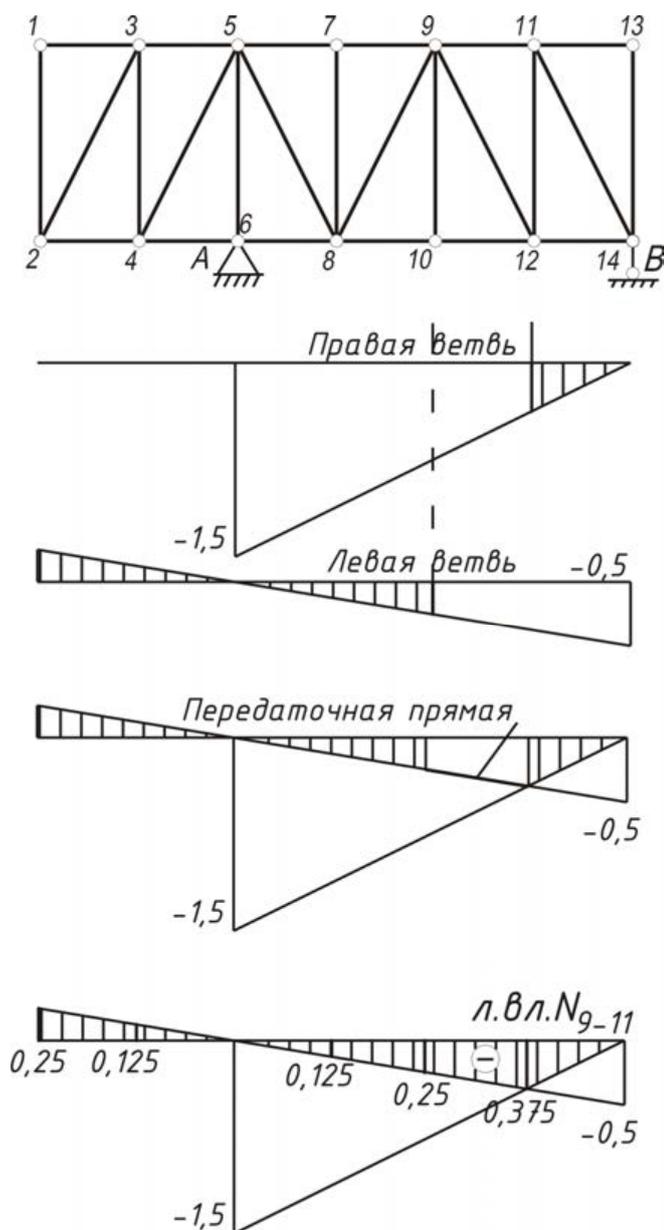


Рис. 78

Ветвь линии влияния необходимо продлевать на консольную часть фермы. **Линии влияния N_{9-12} и N_{10-12} .** Сила $F = 1$ слева от сечения, рассматриваем правую часть (см. рис. 76).

$$\sum M_9^{\text{прав}} = 0, \quad V_B \cdot 2d - N_{10-12} \cdot h = 0,$$

$$N_{10-12} = \frac{V_B \cdot 4}{4} = +1 \cdot V_B.$$

$$\sum X^{\text{прав}} = 0, \quad V_B + N_{9-12} \cdot \cos(\angle 9,12,11) = 0,$$

$$N_{9-12} = \frac{-V_B}{0,894} = -1,119V_B.$$

Сила $F = 1$ справа от сечения, рассматриваем левую часть (см. рис. 77).

$$\sum M_9^{\text{лев}} = 0, \quad V_A \cdot 2d - N_{10-12} \cdot h = 0,$$

$$N_{10-12} = \frac{V_A \cdot 4}{4} = +1 \cdot V_A.$$

$$\sum X^{\text{лев}} = 0, \quad V_A - N_{9-12} \cdot \cos(\angle 9,12,11) = 0,$$

$$N_{9-12} = \frac{V_A}{0,894} = +1,119V_A.$$

Линии влияния приведены на рис. 81.

Сечение II—II.

Сила $F = 1$ слева от сечения, рассматриваем правую часть (см. рис. 74).

$$\sum X^{\text{прав}} = 0, \quad V_B - N_{11-12} = 0, \quad N_{11-12} = +1 \cdot V_B.$$

Сила $F = 1$ справа от сечения, рассматриваем левую часть.

$$\sum X^{\text{лев}} = 0, \quad V_A + N_{11-12} = 0, \quad N_{11-12} = -1 \cdot V_B.$$

Сечение II—II одновременно рассекает две панели: пятую и шестую. Границы ветвей линии влияния необходимо принимать по расположению внешней нагрузки. В данном случае у фермы загружен верхний пояс, следовательно, передаточная прямая будет находиться под панелью, рассеченной вверху, то есть под пятой панелью (см. рис. 81).

Линии влияния N_{10-9} . При способе вырезания узлов рассмотрим два состояния узла.

Первое состояние: узел не загружен единичной силой (рис. 79):

$$\sum Y = 0, \quad N_{10-9} = 0.$$

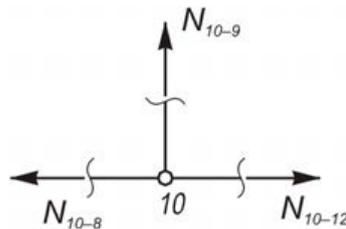


Рис. 79

Второе состояние: узел загружен единичной силой (рис. 80):

$$\sum Y = 0, N_{10-9} - F = 0, N_{10-9} = F = 1.$$

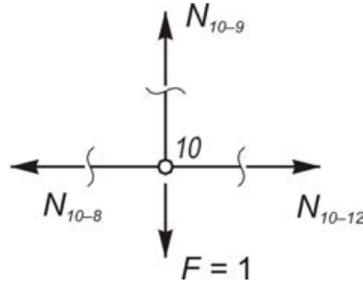


Рис. 80

При построении линии влияния в вырезанном узле откладываем координату +1 в остальных узлах — нуль. Соединяем прямыми линиями (рис. 81).

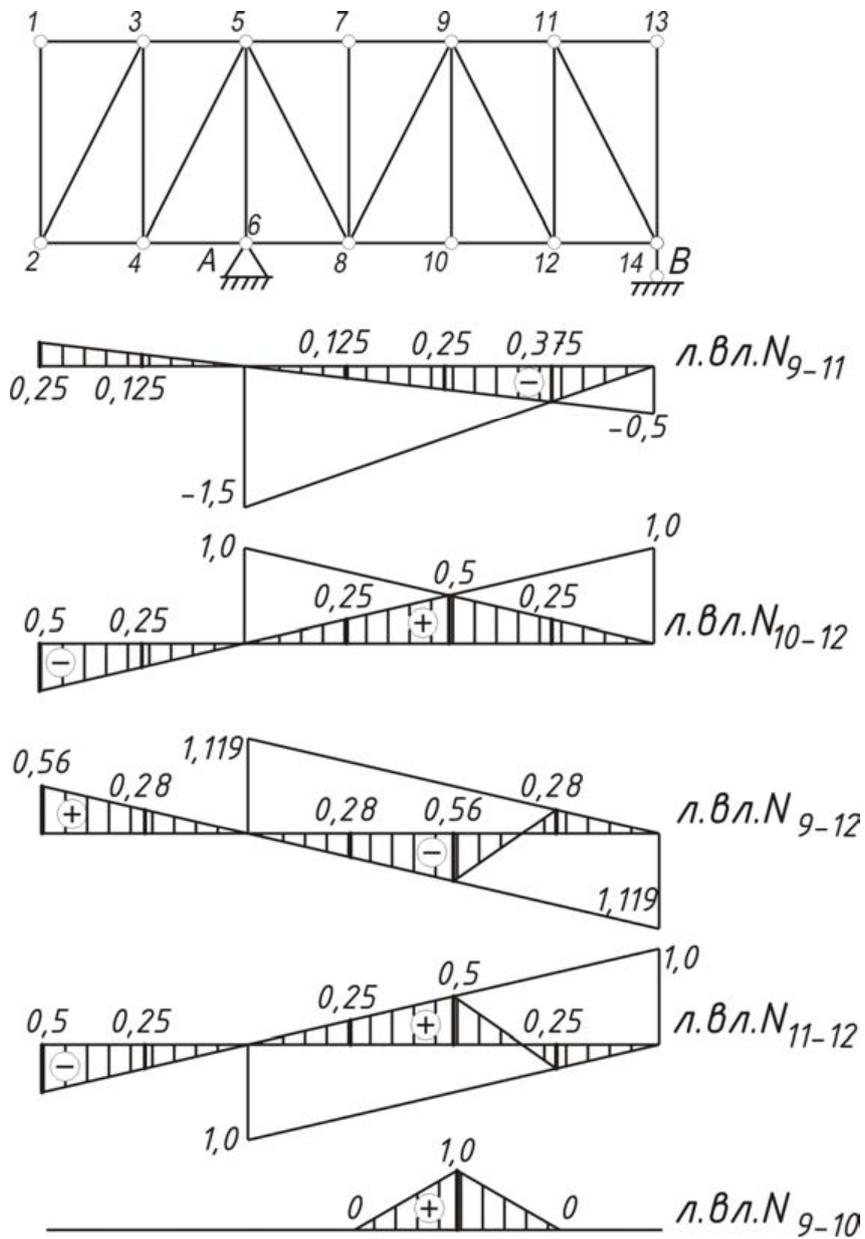


Рис. 81

По линиям влияния определяем усилия по формуле

$$Z = \sum(Fy),$$

где y — координата на линии влияния под сосредоточенной силой.

$$N_{9-11} = \frac{F}{2} \cdot 0,25 + F(0,125 - 0,125 - 0,25 - 0,375) = -10 \text{ кН};$$

$$N_{10-12} = \frac{F}{2}(-0,5) + F(-0,25 + 0,25 + 0,5 + 0,25) = 10 \text{ кН};$$

$$N_{9-12} = \frac{F}{2} \cdot 0,56 + F(0,28 - 0,28 - 0,56 + 0,28) = 0;$$

$$N_{11-12} = \frac{F}{2} \cdot (-0,5) + F(-0,25 + 0,25 + 0,5 - 0,25) = 0;$$

$$N_{10-9} = 0.$$

3. Сравнение результатов, полученных при аналитическом расчете и по линиям влияния, ведем в табличной форме:

	N_{9-11}	N_{10-12}	N_{9-12}	N_{11-12}	N_{10-9}
Аналитический расчет	-10	10	0	0	0
Линии влияния	-10	10	0	0	0
Погрешность, Δ , %	0	0	0	0	0

Примечание. Погрешность вычисляется как отношение разности значений расчетов (аналитического и по линиям влияния) к аналитическому расчету, умноженное на 100 %.

Лекция 5. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В РАМАХ

Алгоритм расчета плоских рам:

1. Определяются значения опорных реакций.
2. Заданная рама сквозным сечением делится на участки в характерных точках (места приложения внешней нагрузки, шарниры, геометрические изломы).
3. Для каждого участка записываются выражения для внутренних усилий (изгибающего момента, поперечной силы, продольной силы).
4. Строятся эпюры внутренних усилий.

Изгибающий момент M в поперечном сечении стержня рамы определяется как сумма моментов всех сил, взятых по одну сторону от сечения, разделяющего раму на две части, и вычисленных относительно точки, где сечение пересекает ось стержня.

Поперечная сила Q в поперечном сечении стержня равна сумме проекций на нормаль к оси стержня всех сил, взятых по одну сторону от сечения, разделяющего раму на две части.

Продольная сила N в поперечном сечении стержня равна сумме проекций на касательную к оси стержня всех сил, взятых по одну сторону от сечения, разделяющего раму на две части.

Рассмотрим пример расчета плоской рамы. Необходимо для заданной рамы (рис. 82) построить эпюры моментов, поперечных и продольных сил.

Определяем опорные реакции (рис. 83) из уравнений равновесия.

$$\sum M_A = 0, F \cdot 9 - q \cdot 8 \cdot 4 + H_B \cdot 8 = 0,$$

$$H_B = \frac{30 \cdot 8 \cdot 4 - 20 \cdot 9}{8} = 97,5 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0, V_A - F = 0, V_A = F = 20 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, F \cdot 3 + q \cdot 8 \cdot 4 + V_A \cdot 6 - H_A \cdot 8 = 0,$$

$$H_A = \frac{30 \cdot 8 \cdot 4 + 20 \cdot 9}{8} = 142,5 \text{ кН}.$$

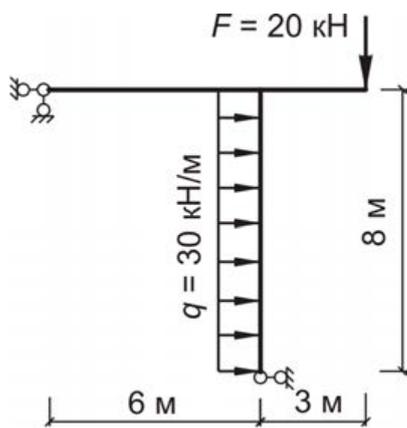


Рис. 82

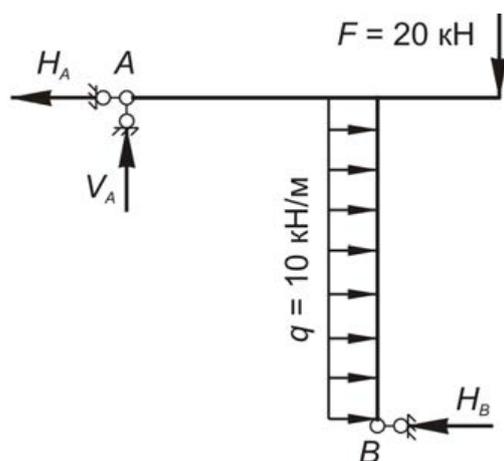
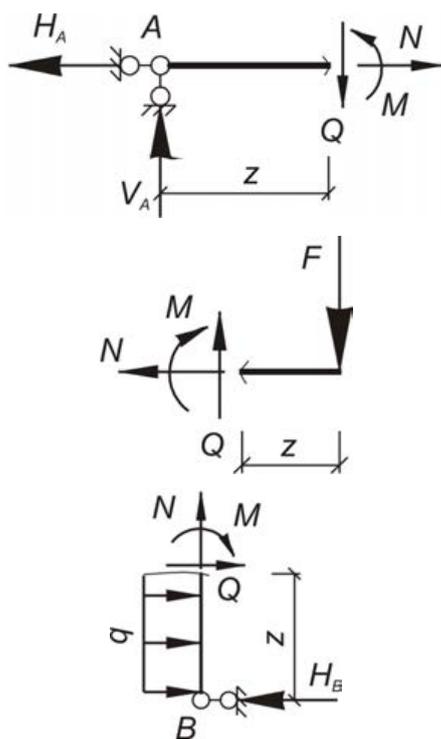


Рис. 83

Составляем выражения для внутренних усилий по участкам.

Согласно правилам сопротивления материалов, положительное направление для внутреннего усилия изгибающего момента мы выбираем сами, для поперечной силы положительное направление — это направление по часовой стрелке, для продольной силы — направление от сечения (продольная сила принимается положительной при растяжении).



1 участок $0 \leq z \leq 6$

$$M_z = V_A \cdot z$$

$$Q = V_A$$

$$N = H_A$$

2 участок $0 \leq z \leq 3$

$$M_z = -F \cdot z$$

$$Q = F$$

$$N = 0$$

3 участок $0 \leq z \leq 8$

$$M_z = q \cdot z \cdot \frac{z}{2} - H_B \cdot z$$

$$Q = H_B - q \cdot z$$

$$N = 0$$

По полученным выражениям строим эпюры внутренних усилий (рис. 84).

Ординаты эпюры M откладываются со стороны растянутого волокна в соответствии с принятым положительным направлением изгибающего момента M . Знаки на эпюре моментов не ставятся, но обязательно следует поставить численные значения всех характерных ординат. В эпюре поперечных сил Q и продольных сил N положительные ординаты откладываются с удобной для чтения эпюр стороны. На участках эпюр обязательно ставятся знаки и значения характерных ординат.

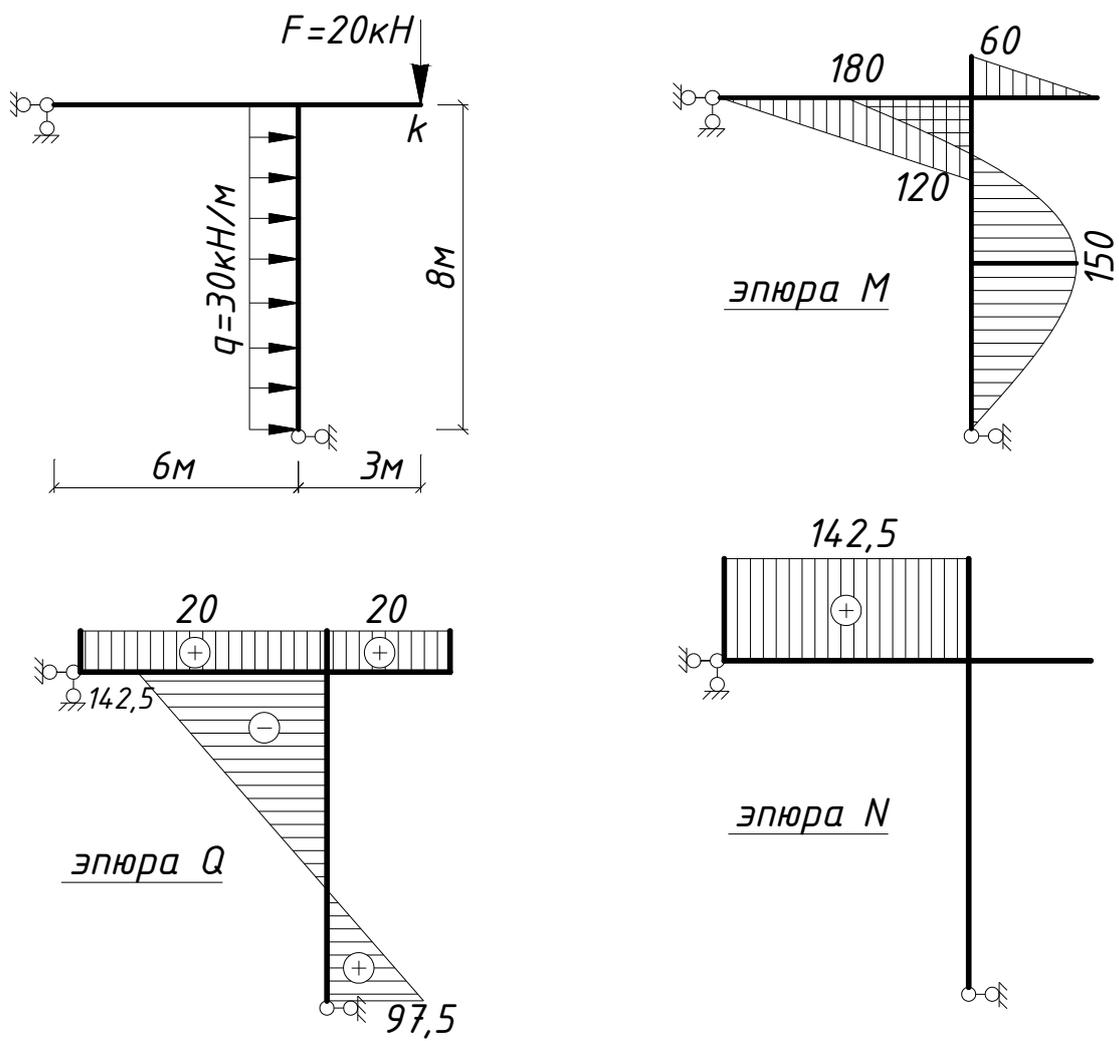


Рис. 84

Лекция 6. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Аркой называется криволинейный стержень, концы которого закреплены от взаимных линейных смещений, и направленный выпуклостью навстречу нагрузке.

На рис. 85 представлена расчетная схема трехшарнирной арки, в которой A и B — опорные (пятовые) шарниры; C — ключевой шарнир; l — длина пролета арки; f — высота (стрела подъема) арки.

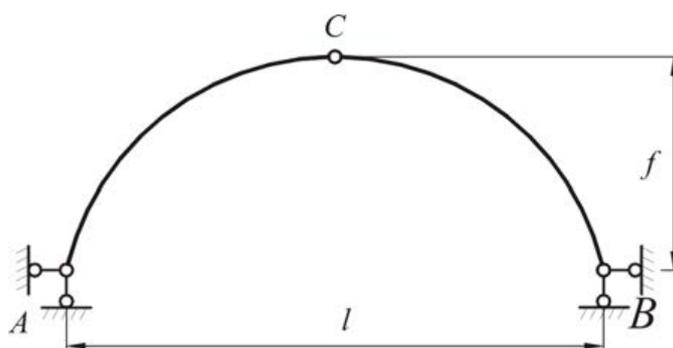


Рис. 85

Наиболее распространенными очертаниями осей арок являются параболические и очерченные по дуге окружности. В некоторых случаях (строительство тоннелей, возведение конструкций на слабых грунтах, покрытия зданий и сооружений и др.) применяют арки с затяжками.

Алгоритм расчета трехшарнирных арок на действие неподвижной вертикальной нагрузки:

- 1) определение опорных реакций;
- 2) построение балочной аналогии арки;
- 3) вычисление внутренних усилий в сечениях балки;
- 4) определение геометрических параметров арки;
- 5) вычисление внутренних усилий в сечениях арки.

При действии вертикальной нагрузки (рис. 86) вертикальные реакции опор трехшарнирной арки определяются из уравнений

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_A;$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_B.$$

Горизонтальные реакции определяются из уравнений

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \rightarrow H_A,$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0 \rightarrow H_B.$$

Составляя сумму проекций на горизонтальную ось, нетрудно доказать, что реакции H_A и H_B будут равны. Обычно они обозначаются H и называются *распором*.

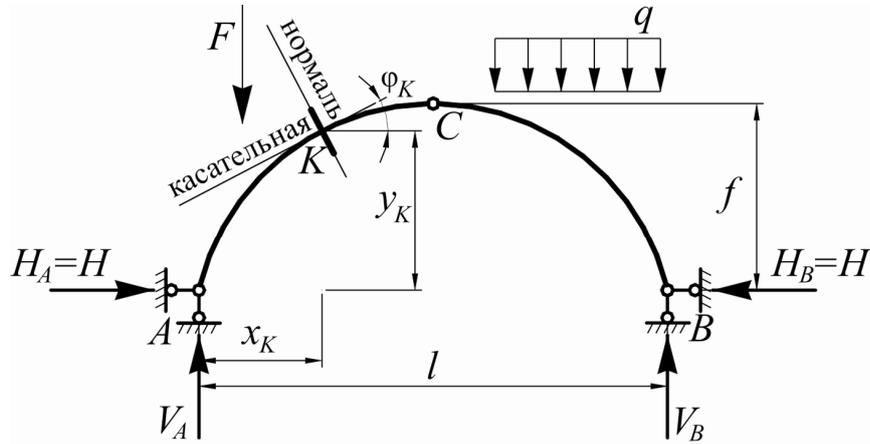


Рис. 86

Для дальнейшего расчета необходимо представить заданную трехшарнирную арку в виде однопролетной балки, то есть построить так называемую балочную аналогию: одну из шарнирно неподвижных опор заменить шарнирно подвижной и вырезать ключевой шарнир C (рис. 87).

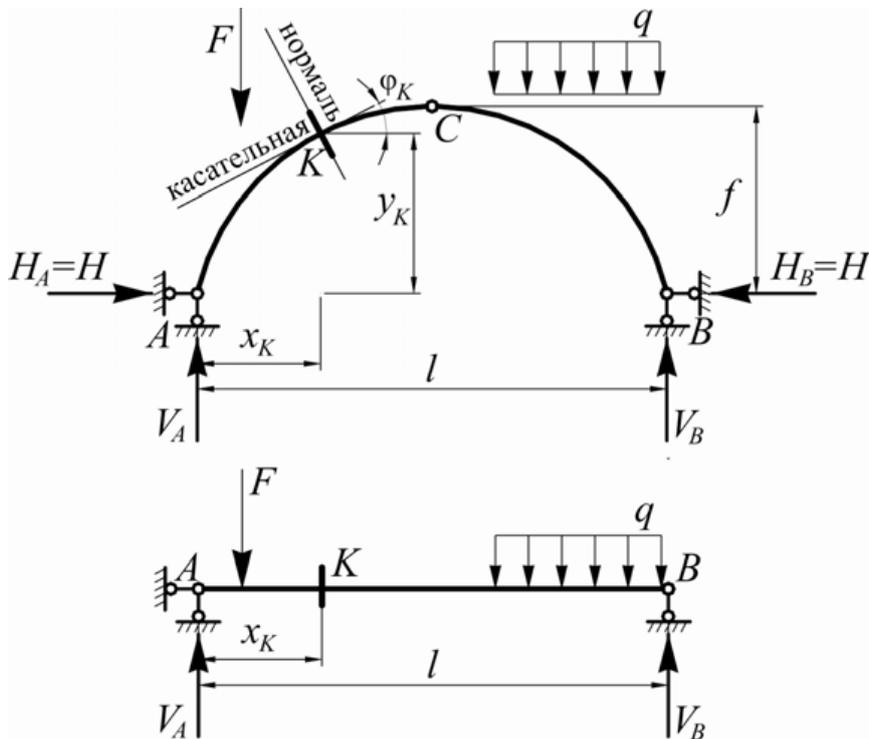


Рис. 87

Полученная таким образом балка разделяется на участки, в сечениях которых вычисляются внутренние усилия $M_K^{\text{бал}}$ и $Q_K^{\text{бал}}$ по правилам сопротивления материалов.

Определение геометрических параметров арки выполняется в зависимости от очертания ее оси.

Для параболических арок:

$$y_K = \frac{4f}{l^2} x_K (l - x_K) \text{ — высота арки в сечении } K;$$

x_K — расстояние от опоры A до сечения K ;

$$\operatorname{tg} \varphi_K = y'_K = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_K) \rightarrow \varphi_K \rightarrow \cos \varphi_K, \sin \varphi_K.$$

Для арок, ось которых описана по дуге окружности:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \text{ — радиус окружности арки;}$$

$$y_K = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x_K\right)^2} - R + f;$$

$$\cos \varphi_K = \frac{y_K + R - f}{R}, \sin \varphi_K = \frac{l - 2x_K}{2R}.$$

Внутренние усилия в сечении K арки при действии вертикальной нагрузки выражаются через балочные усилия и распор:

$$M_K^{\text{ар}} = M_K^{\text{бал}} - H \cdot y_K; \tag{1}$$

$$Q_K^{\text{ар}} = Q_K^{\text{бал}} \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \tag{2}$$

$$N_K^{\text{ар}} = Q_K^{\text{бал}} \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K. \tag{3}$$

Отсюда следует, что изгибающие моменты и поперечные силы в арке меньше балочных.

Эпюры $M_K^{\text{ар}}$, $Q_K^{\text{ар}}$, $N_K^{\text{ар}}$ имеют криволинейное очертание независимо от вида нагрузки и, как правило, строятся на горизонтальной оси под аркой.

При расчете арки на подвижную нагрузку воспользуемся выводами, полученными при статическом расчете. Линии влияния вертикальных реакций V_A и V_B (рис. 88) являются балочными.

Для построения линии влияния распора воспользуемся выражением

$$H = \frac{M_K^{\text{бал}}}{f_C}.$$

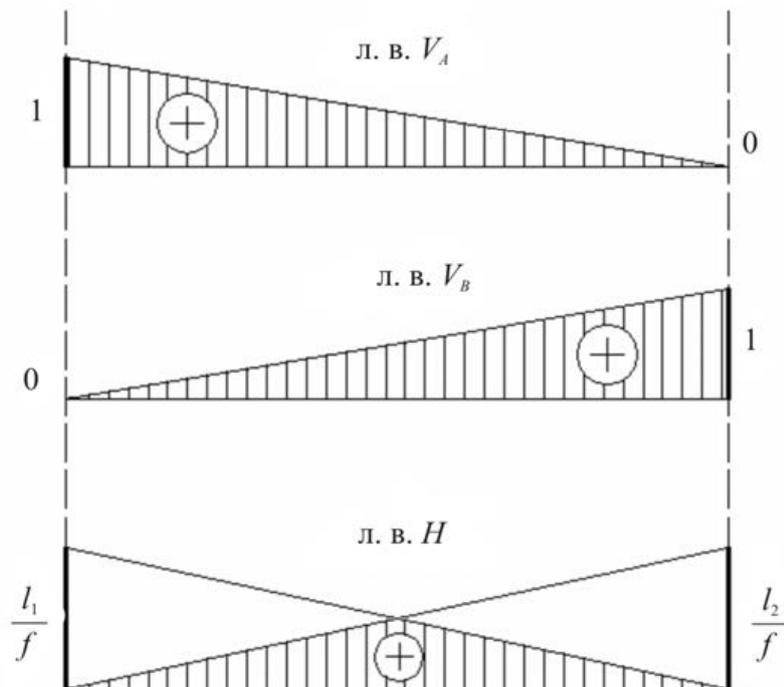
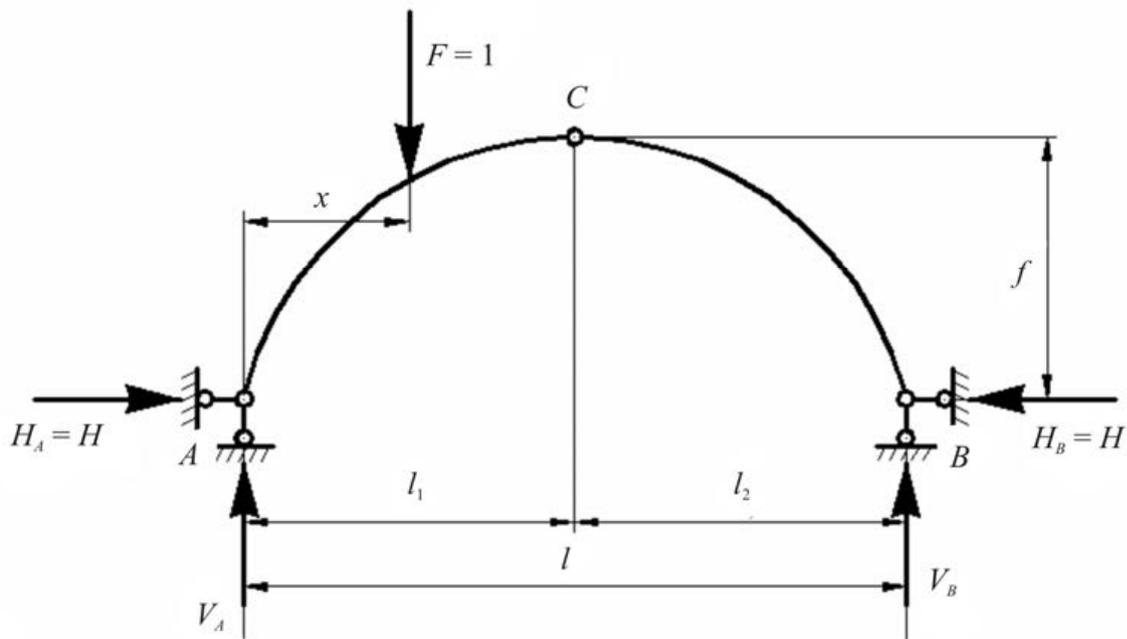


Рис. 88

Линия влияния изгибающего момента в сечении K строится на основании формулы (1) путем вычитания линии влияния распора, умноженной на ординату сечения y_K , из линии влияния балочного момента. Эта операция выполняется способом наложения линий влияния. Для этого на общей оси строятся линии влияния $M_K^{бал}$ и $H \cdot y_K$ (рис. 89).

Для построения линии влияния поперечной силы воспользуемся выражением (2).

Линия влияния балочной поперечной силы, процесс наложения и результирующая линия влияния показаны на рис. 90.

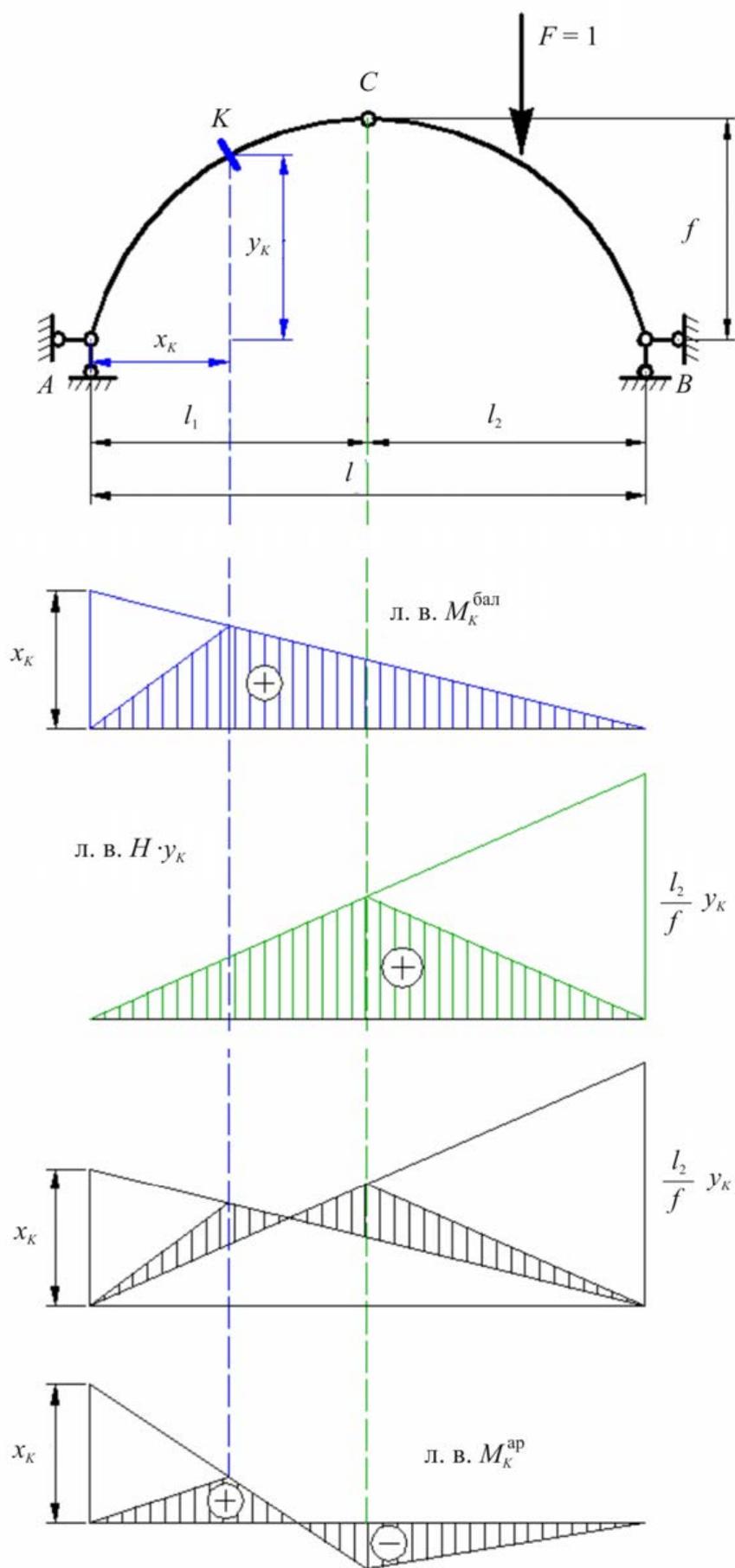


Рис. 89

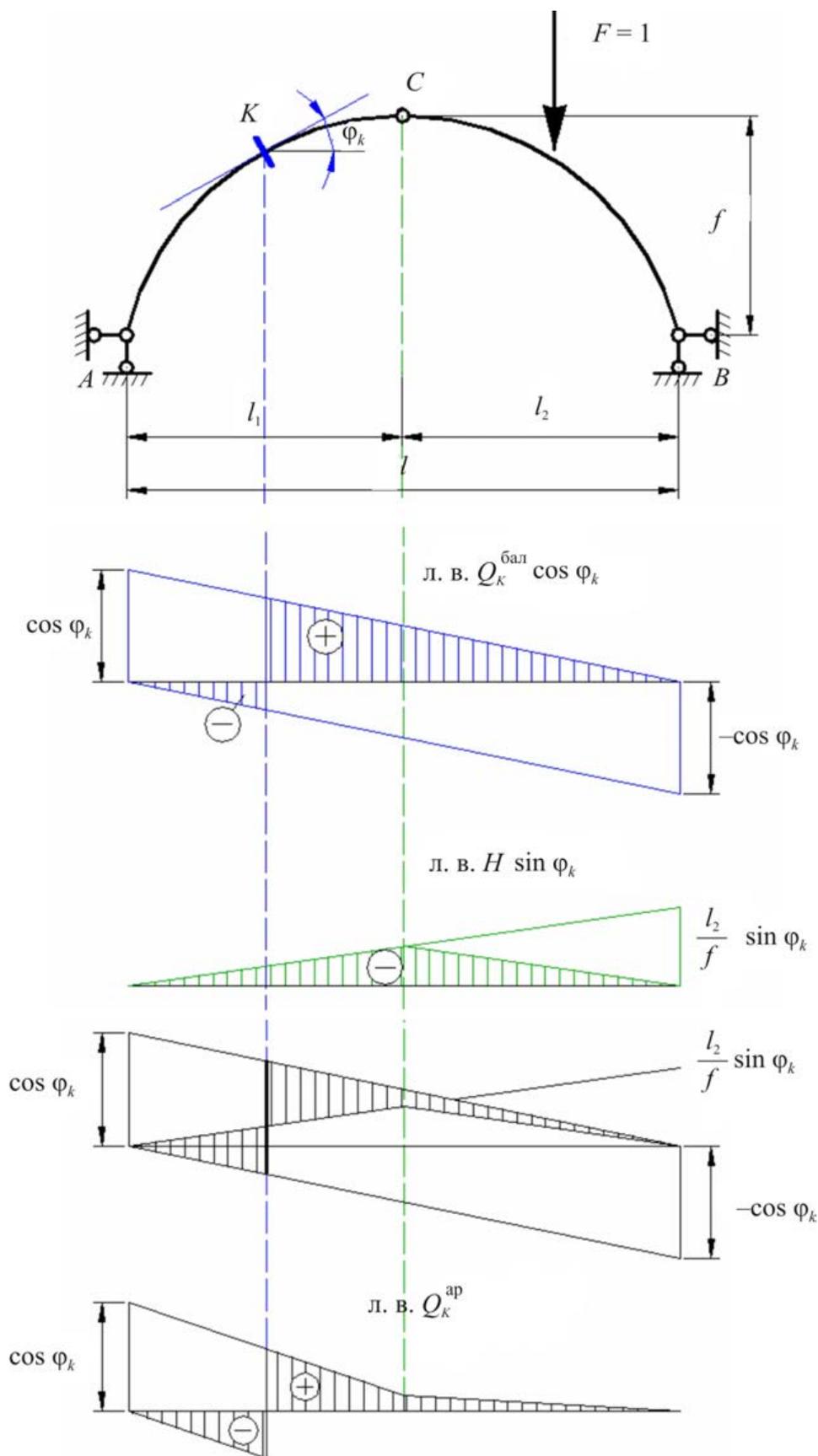


Рис. 90

Для построения линии влияния продольной силы воспользуемся выражением (3).

Линия влияния балочной поперечной силы, процесс наложения и результирующая линия влияния показаны на рис. 91.

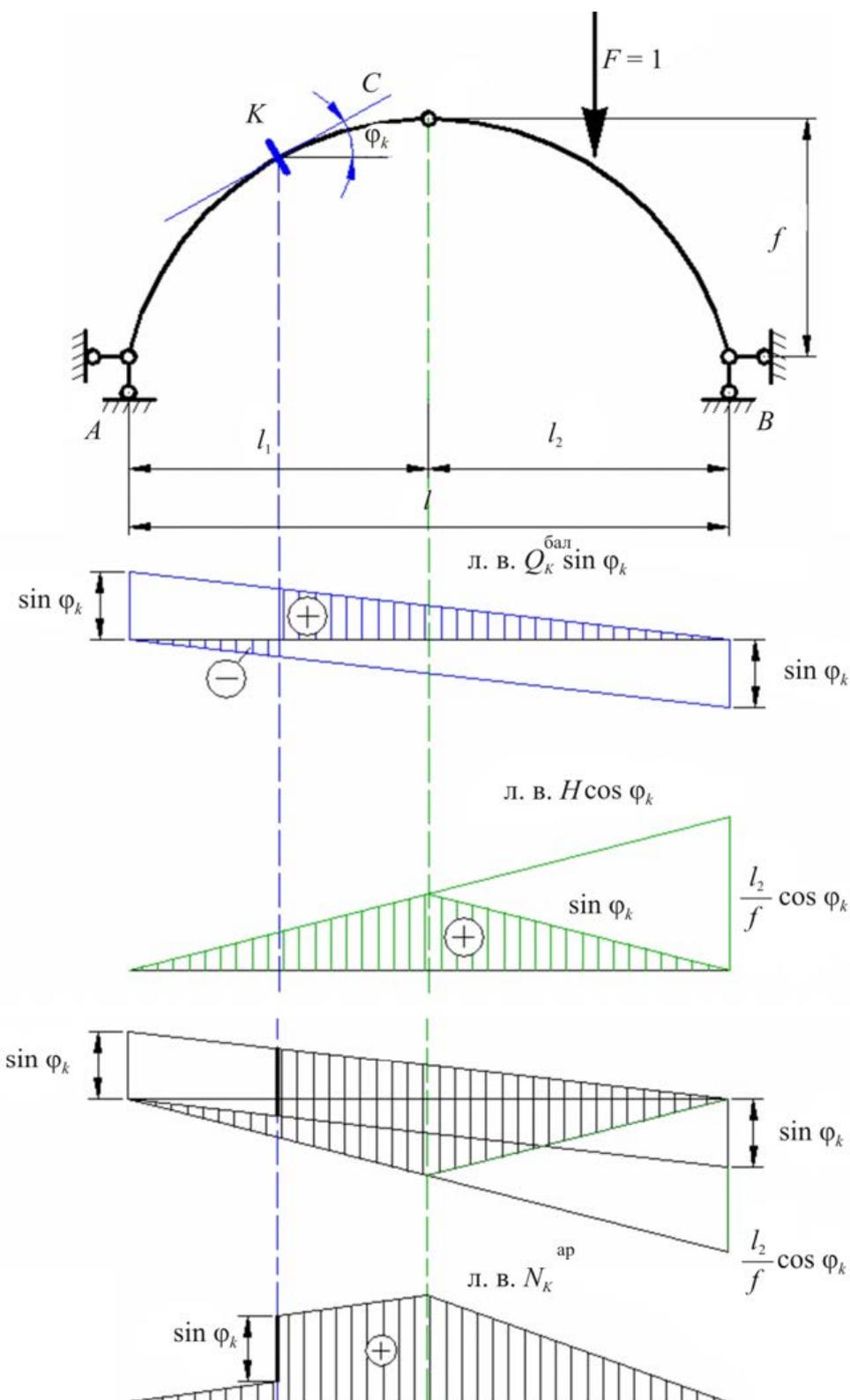


Рис. 91

Также линии влияния внутренних усилий в арке можно построить способом нулевых точек (рис. 92).

Опорные реакции и внутренние усилия арки определяются по линиям влияния по формуле $Z = \sum(Fy) + \sum(q\omega) + \sum(Mtg\varphi)$ (см. лекцию 3, п. 3.3).

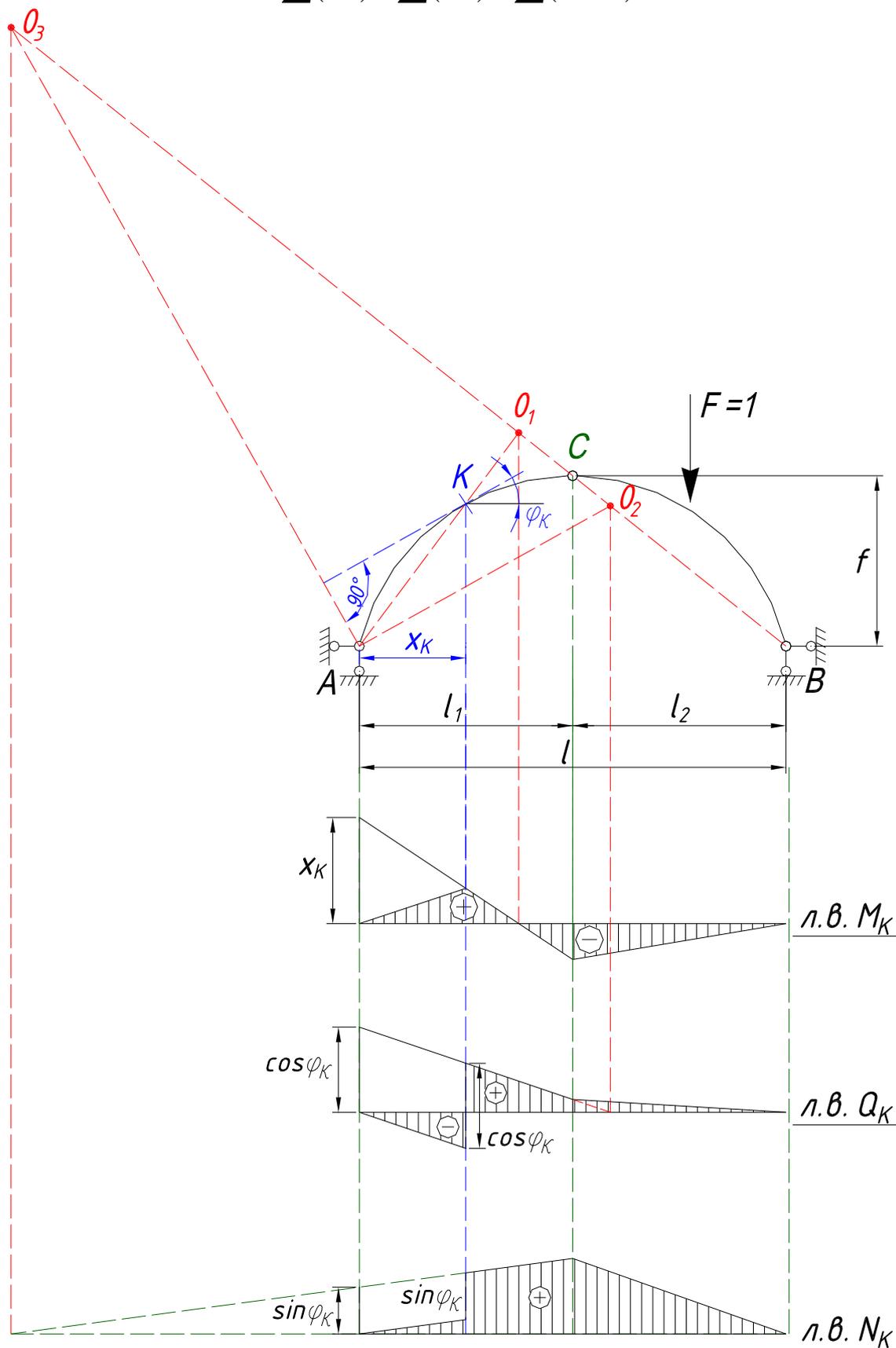


Рис. 92

Лекция 7. ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

7.1. Основные понятия теории определения перемещений

Работа внешних сил

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом процесс, при котором деформация совершается бесконечно медленно без заметных ускорений, называется статическим.

Перемещение — это изменение координат любой точки упругой системы в результате внешнего воздействия на это тело.

$$\Delta = \alpha F,$$

где Δ — перемещение по направлению действия силы F ; α — коэффициент, зависящий от свойств материала, схемы и размеров сооружения.

В случае, когда нагрузка на систему приложена вся сразу, выражение работы внешней силы принимает вид $A = F\Delta$.

При статическом нагружении выражение элементарной работы внешней силы на перемещении $d\Delta$:

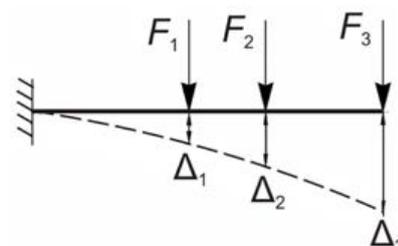
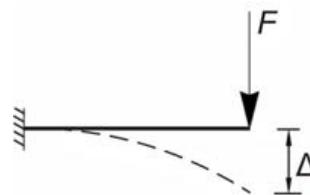
$$dA = dF\Delta = \alpha F dF.$$

$$\text{Полная работа внешней силы } A = \int_0^F F dF.$$

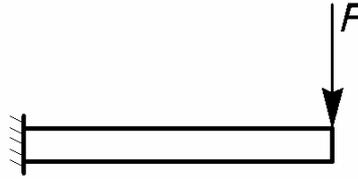
$$A = \frac{\alpha F^2}{2} = \alpha F \frac{F}{2} = \Delta \frac{F}{2} = \frac{F\Delta}{2}.$$

$$A = \frac{1}{2} F_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \Delta_2 + \frac{1}{2} F_3 \Delta_3 = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta_i.$$

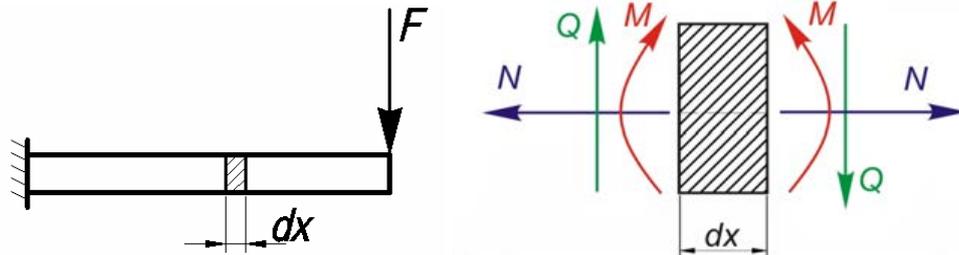
При статическом действии группы внешних сил работа равняется половине суммы произведений каждой силы на соответствующее ей перемещение. Суммарная работа не зависит от последовательности приложения внешних сил.



Выражение работы внешних сил через внутренние усилия



Выделим из тела рассматриваемой консольной балки бесконечно малый элемент длиной dx :

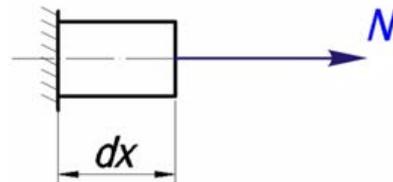


Для выделенного элемента усилия M , Q , N являются внешними силами, следовательно, работу A можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями M , Q , N на соответствующих деформациях элемента dx .

Рассмотрим действие продольного усилия N :

$$dA_N = \frac{N \Delta_N}{2} = \frac{N}{2} \alpha N,$$

где $\alpha = \frac{dx}{EA}$.



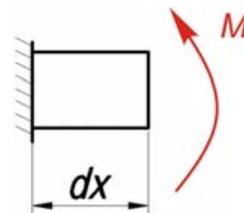
Таким образом,

$$dA_N = \left(\frac{N}{2} \right) \frac{N dx}{EA}. \quad (4)$$

Рассмотрим действие изгибающего момента M :

$$dA_M = \frac{M \Delta_M}{2} = \frac{M}{2} \alpha M,$$

где $\alpha = \frac{dx}{EI}$.



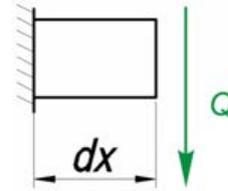
Таким образом,

$$dA_M = \left(\frac{M}{2} \right) \frac{M dx}{EI}. \quad (5)$$

Рассмотрим действие поперечного усилия Q :

$$dA_Q = \frac{Q\Delta_Q}{2} = \frac{Q}{2}\alpha Q, \text{ где } \alpha = \frac{dx}{GA}\eta,$$

где η — коэффициент, учитывающий неравномерность поперечной силы по сечению стержня.



Таким образом,

$$dA_Q = \left(\frac{Q}{2}\right)\frac{Qdx}{GA}\eta. \quad (6)$$

Полная работа на элементе dx будет равна

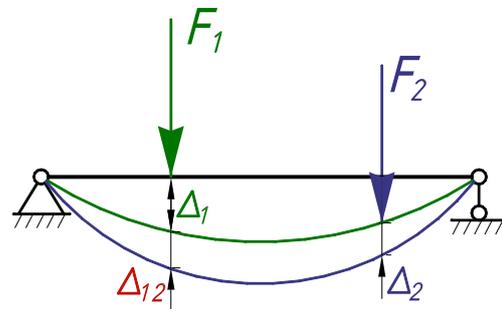
$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q$$

и окончательно получается интегрированием выражений (4), (5), (6):

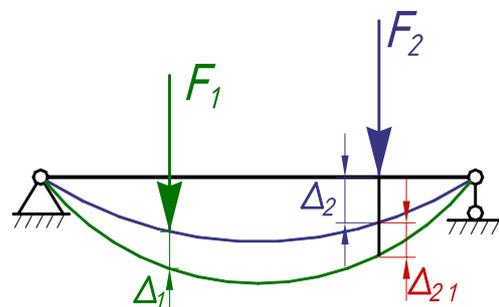
$$A = \sum \int_0^l \left(\frac{M}{2}\right) \frac{Mdx}{EI} + \sum \int_0^l \left(\frac{Q}{2}\right) \frac{Qdx}{GA} \eta + \sum \int_0^l \left(\frac{N}{2}\right) \frac{Ndx}{EA}.$$

Теорема о взаимности работ (теорема Бетти). Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

$$A_1 = \frac{F_1\Delta_1}{2} + \frac{F_2\Delta_2}{2} + F_1\Delta_{12}$$



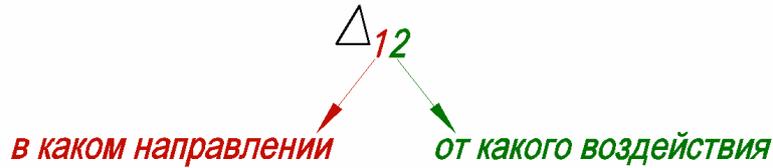
$$A_2 = \frac{F_2\Delta_2}{2} + \frac{F_1\Delta_1}{2} + F_2\Delta_{21};$$



$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{F_1\Delta_1}{2} + \frac{F_2\Delta_2}{2} + F_1\Delta_{12} = \frac{F_2\Delta_2}{2} + \frac{F_1\Delta_1}{2} + F_2\Delta_{21};$$

$$F_1\Delta_{12} = F_2\Delta_{21} \Rightarrow A_{12} = A_{21}.$$

Обозначение перемещения:



Выражение A_{12} через внутренние усилия

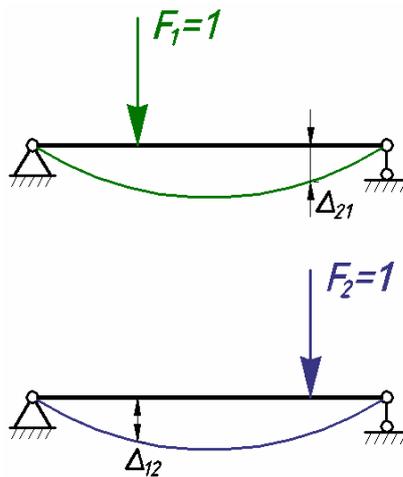
$$A_{12} = \sum \int_0^l M_1 \frac{M_2 dx}{EI} + \sum \int_0^l Q_1 \frac{Q_2 dx}{GA} \eta + \sum \int_0^l N_1 \frac{N_2 dx}{EA}.$$

Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла). Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

$$F_1 = F_2 = 1$$

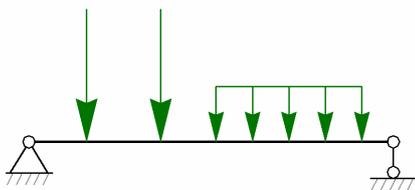
$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \Rightarrow \Delta_{12} = \Delta_{21};$$

$\Delta_{mn} = \Delta_{nm}$ — в общем случае действия любой единичной силы.



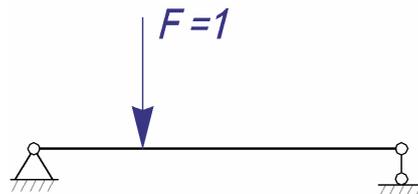
Интеграл Мора. Рассмотрим два состояния системы: действительное (рис. 93, а) и единичное (рис. 93, б).

Действительное состояние («F»)



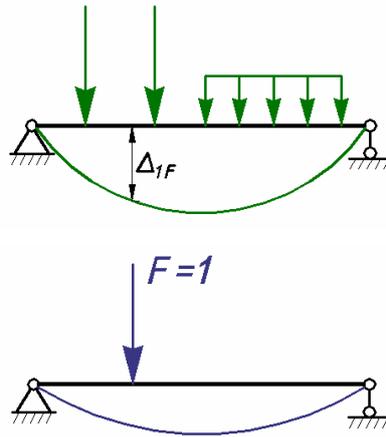
а

Единичное состояние («1»)



б

Рис. 93



$$A_{1F} = F \Delta_{1F} = 1 \cdot \Delta_{1F} = \Delta_{1F};$$

$$A_{1F} = \Delta_{1F} = \sum_0^l \int \overline{M}_1 \frac{M_F dx}{EI} + \sum_0^l \int \overline{Q}_1 \frac{Q_F dx}{GA} \eta + \sum_0^l \int \overline{N}_1 \frac{N_F dx}{EA};$$

$$A_{mn} = F_m \Delta_{mn} = \Delta_{mn};$$

$$\Delta_{mn} = \sum_0^l \int \overline{M}_m \frac{M_n dx}{EI} + \sum_0^l \int \overline{Q}_m \frac{Q_n dx}{GA} \eta + \sum_0^l \int \overline{N}_m \frac{N_n dx}{EA}.$$

7.2. Определение перемещений от внешней нагрузки в рамах

Алгоритм определения перемещений от внешней нагрузки с использованием интеграла Мора:

1. Определяются усилия от внешней нагрузки (строится грузовая эпюра M_F).
2. Отбрасывается внешняя нагрузка и прикладывается единичная нагрузка в зависимости от направления искомого перемещения:

$\Delta_{iF}^{\text{верт}}$ — единичная сосредоточенная сила, приложенная вертикально;

$\Delta_{iF}^{\text{гор}}$ — единичная сосредоточенная сила, приложенная горизонтально;

$\Delta_{iF}^{\text{угл}}$ — единичный сосредоточенный момент.

3. Определяются внутренние усилия от единичного смещения (строится единичная эпюра \overline{M}_i).

4. Раскрывается интеграл Мора (перемножаются эпюры M_F и \overline{M}_i).

Способы упрощения вычисления перемещений

Способ Симпсона — Маркина. Используется при перемножении эпюр, представленных различными видами геометрических фигур.

$$\Delta = \frac{l_{\text{уч}}}{6EI} (M_1^H M_2^H + 4M_1^C M_2^C + M_1^K M_2^K),$$

где $l_{\text{уч}}$ — длина рассматриваемого участка; EI — изгибная жесткость рассматриваемого участка; M_i^H, M_i^C, M_i^K — значения изгибающих моментов соответственно в начале, середине и конце перемножаемых эпюр.

Способ Верещагина. Используется при перемножении эпюр, представленных простыми геометрическими фигурами.

$$\Delta = Sy_{\text{ц.т}} \frac{1}{EI},$$

где S — площадь эпюры моментов 1 на рассматриваемом участке; $y_{\text{ц.т}}$ — ордината эпюры моментов 2 под центром тяжести эпюры моментов 1 на рассматриваемом участке.

Примечание. При вычислении перемещения описанными выше способами должно соблюдаться следующее правило знаков: если при перемножении двух эпюр моментов значения этих эпюр отложены с одной стороны от оси стержня (то есть растягивают одни и те же волокна), то знак перемещения будет положительным.

Продemonстрируем процесс определения величины перемещения от действия внешней нагрузки на примере рамы, рассмотренной в лекции 5, рис. 82.

Необходимо для заданной рамы (рис. 94) определить вертикальное и угловое перемещения в сечении k .

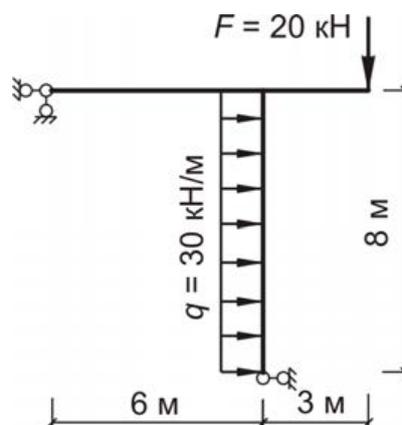


Рис. 94

Вертикальное перемещение. Для определения вертикального перемещения в сечении k прикладываем силу $F = 1$ вертикально (рис. 95) и строим единичную эпюру моментов $\bar{M}_k^{\text{верт}}$. Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0, F \cdot 9 - H_B \cdot 8 = 0, H_B = \frac{1 \cdot 9}{8} = 1,125;$$

$$\sum Y = 0, V_A - F = 0, V_A = F = 1;$$

$$\sum M_B = 0, F \cdot 3 + V_A \cdot 6 - H_A \cdot 8 = 0, H_A = \frac{1 \cdot 3 + 1 \cdot 9}{8} = 1,125.$$

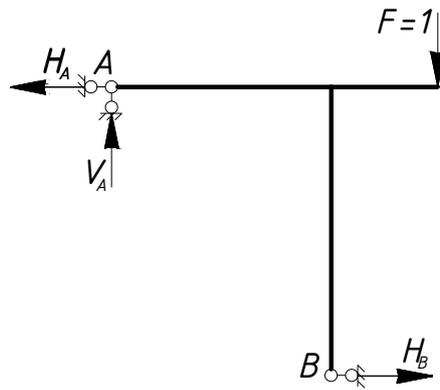
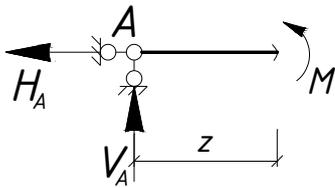
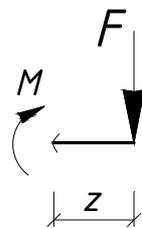


Рис. 95

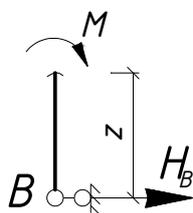
Составляем выражения для внутренних усилий.



1 участок $0 \leq z \leq 6$
 $M_z = V_A \cdot z$



2 участок $0 \leq z \leq 3$
 $M_z = -F \cdot z$



3 участок $0 \leq z \leq 3$
 $M_z = H_B \cdot z$

По полученным выражениям строим эпюру единичную моментов (рис. 96).

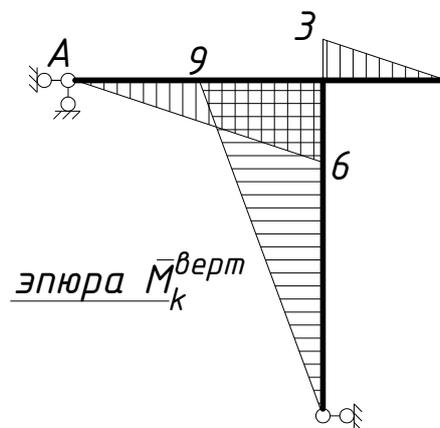


Рис. 96

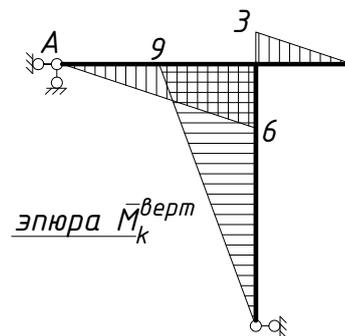
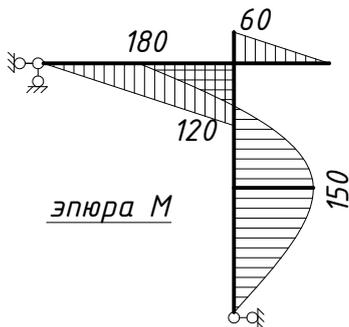
Грузовая эпюра моментов M_F для заданной рамы построена в лекции 5.

Перемещение определяем, используя интеграл Мора:

$$\Delta_{kF}^{\text{верт}} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_k^{\text{верт}}}{EI} ds.$$

Раскрывать интеграл Мора будем при помощи формул Верещагина и Симпсона — Маркина.

$$\begin{aligned} \Delta_{kF}^{\text{верт}} &= 120 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{EI} + 60 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} + \\ &+ \frac{8}{6EI} (180 \cdot 9 - 4 \cdot 150 \cdot 4,5 + 0 \cdot 0) = \frac{1440}{EI} + \frac{180}{EI} - \frac{1440}{EI} = \frac{180}{EI}. \end{aligned}$$



Угловое перемещение. Для определения углового перемещения в сечении k прикладываем момент $M = 1$ (рис. 97) и строим единичную эюру моментов $\bar{M}_k^{\text{угл}}$. Определяем опорные реакции.

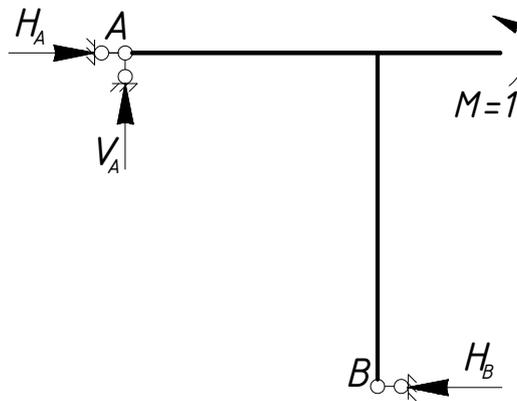


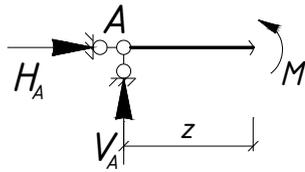
Рис. 97

$$\sum M_A = 0, M - H_B \cdot 8 = 0, H_B = \frac{1}{8} = 0,125;$$

$$\sum Y = 0, V_A = 0;$$

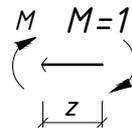
$$\sum M_B = 0, V_A \cdot 6 - M = 0, H_A = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Составляем выражения для внутренних усилий.



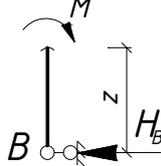
1 участок $0 \leq z \leq 6$

$$M_z = V_A \cdot z = 0$$



2 участок $0 \leq z \leq 3$

$$M_z = -M = -1$$



3 участок $0 \leq z \leq 8$

$$M_z = -H_B \cdot z$$

По полученным выражениям строим эпюру моментов (рис. 98).

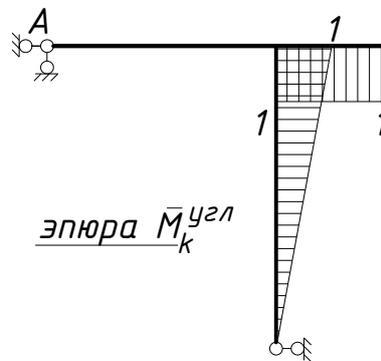
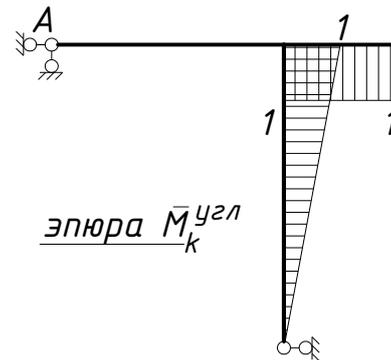
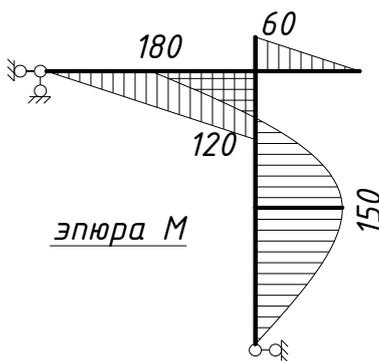


Рис. 98

Перемещение определяем по интегралу Мора с использованием формул Верещагина и Симпсона — Маркина.



$$\Delta_{kF}^{\text{верг}} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_k^{\text{угл}}}{EI} ds = -60 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} + \frac{8}{6EI} (-180 \cdot 1 + 4 \cdot 150 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0) = -\frac{90}{EI} + \frac{160}{EI} = \frac{70}{EI}.$$

Список рекомендуемой литературы

1. *Анохин, Н. Н.* Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по строит. спец. / Н. Н. Анохин. 2-е изд., доп. и перераб. М. : АСВ, 2007.
2. *Дарков, А. В.* Строительная механика : учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. СПб. : Лань, 2008.
3. *Кривошапко, С. Н.* Строительная механика : учеб. пособ. / С. Н. Кривошапко. М. : Юрайт-Издат, 2011.
4. Расчет статически определимых многопролетных балок [Электронный ресурс] : метод. указ. к практ. занят. / сост. Г. В. Воронкова, В. В. Габова. Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/>
5. Расчет сложных статически определимых плоских ферм. Методические указания по выполнению самостоятельных практических работ для студентов, обучающихся по специальностям АД, ГСХ и ПГС : метод. указ. к практ. занят. / С. С. Рекунов, Г. А. Никонина. Волгоград : ВолгГАСУ, 2010.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Основные понятия строительной механики	3
Лекция 2. Кинематический анализ	8
2.1. Термины и определения	8
2.2. Правила сборки геометрически неизменяемых систем	10
Лекция 3. Расчет многопролетных балок	12
3.1. Преобразование расчетной схемы	12
3.2. Расчет на неподвижную нагрузку	13
3.3. Расчет на подвижную нагрузку	17
Лекция 4. Расчет плоских ферм	22
4.1. Определение внутренних усилий от действия неподвижной нагрузки	22
4.2. Определение внутренних усилий от действия подвижной нагрузки	26
Лекция 5. Построение эпюр внутренних усилий в рамах	39
Лекция 6. Расчет трехшарнирных арок	42
Лекция 7. Теория перемещений	50
7.1. Основные понятия теории определения перемещений	50
7.2. Определение перемещений от внешней нагрузки в рамах	54
Список рекомендуемой литературы	59

Учебное электронное издание

Воронкова Галина Вячеславна
Рекунов Сергей Сергеевич

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.
КУРС ЛЕКЦИЙ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.
В двух частях
Часть I. Статически определимые системы

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Редактор *Р. В. Худадян*
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 03.04.2015.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 2,2. Объем данных 8,7 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
<http://www.vgasu.ru>, info@vgasu.ru