Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания к лабораторной работе

Составители Н. Н. Потапова, О. М. Забродина

**© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2013**

**Волгоград
ВолгГАСУ
2013**

УДК 517.988(076.5)
ББК 22.14я73
Р47

Решение нелинейных уравнений [Электронный ресурс] : методические
Р47 указания к лабораторной работе / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. Н. Н. Потапова, О. М. Забродина. — Электронные текстовые и графические данные (530 Кбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения: 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Рассмотрены численные методы решения нелинейных уравнений. Содержат краткий теоретический материал с соответствующими примерами решения задач как «вручную», так и с помощью ЭВМ.

Разработаны индивидуальные задания, направленные на приобретение навыков решения нелинейных уравнений, в том числе с использованием пакетов прикладных программ MathCAD и MS Excel. Сформулированы контрольные вопросы для проверки усвоения изучаемого материала.

Для студентов всех специальностей 3-го курса очной формы обучения по дисциплине «Использование пакетов прикладных программ в инженерных расчетах».

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 517.988(076.5)
ББК 22.14я73

Нелегальное использование данного продукта запрещено

Оглавление

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Общие положения

Решение некоторых строительных задач сводится к решению нелинейных уравнений. Например, такие задачи возникают при расчете сооружения на устойчивость или при проектировании очистных сооружений (зависимости, связывающие проектные параметры процесса очистки, являются чаще всего нелинейными).

Нелинейные уравнения можно разделить на два класса: алгебраические и трансцендентные. *Алгебраическими* называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные). В частности, многочлен является целой алгебраической функцией. Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.) называются *трансцендентными*.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на две группы: точные и итерационные.

Точные методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений.

Как известно, многие уравнения и системы уравнений не имеют аналитических решений. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нельзя построить формулу, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение степени выше четвертой. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются *итерационные методы* с заданной степенью точности.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, ..., x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

2. Постановка задачи

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Найти корни этого уравнения с точностью $\varepsilon > 0$.

Ограничимся обсуждением методов поиска лишь действительных корней, не затрагивая проблему корней комплексных.

Приближенное решение уравнения (1) обычно разбивается на два этапа:

1. Отделение корней, т. е. установление промежутков, содержащих по одному корню.

2. Уточнение корней, т. е. сужение отрезка, содержащего корень, до такой степени, что длина отрезка становится меньше требуемой точности.

На первом этапе, как правило, применяется графический метод решения уравнений. Уточнение корней опирается на свойства непрерывных функций:

а) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x)$ имеет на концах этого отрезка разные знаки ($f(a)f(b) < 0$), то на $[a, b]$ существует хотя бы один корень уравнения (1);

б) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна ($f'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$) и $f(a)f(b) < 0$, то на этом отрезке корень уравнения (1) единственный (рис. 1).

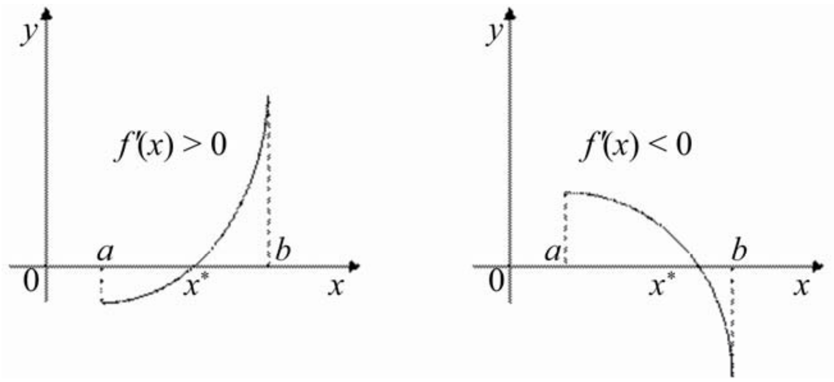


Рис. 1. Существование единственного корня на отрезке

Решить уравнение (1) *итерационным методом* значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней и найти значения корней с нужной точностью.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т. е. такое, что $f(\xi) = 0$, называется *корнем уравнения* (1) или *нулем* функции $f(x)$.

3. Отделение корней алгебраических и трансцендентных уравнений

В инженерной практике распространен *графический способ* отделения приближенных корней.

Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) — это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить точки пересечения $f(x)$ с осью Ox, или отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню (рис. 2).

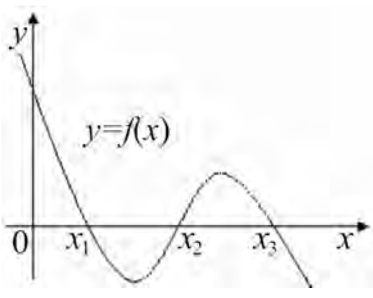


Рис. 2. График функции $f(x)$

Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1) *равносильным* ему уравнением:

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{2}$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — более простые, чем функция $f(x)$. Тогда, построив графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков (рис. 3).

Точность решения невысока и определяется масштабом системы координат Oxy, в которой строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

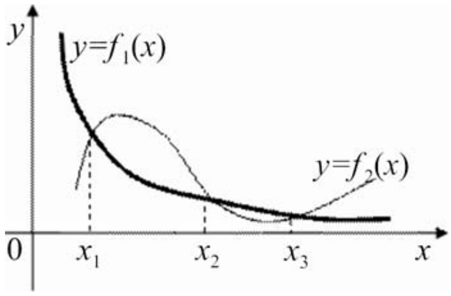


Рис. 3. Нахождение абсцисс точек пересечения графиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Пример 1. Графическим методом решить уравнение

$$x^3 - x^2 - 3 = 0. \tag{3}$$

Р е ш е н и е. Уравнение (3) запишем в виде $x^3 = x^2 + 3$. Обозначим $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2 + 3$. Строим графики функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 3$ (рис. 4). Находим абсциссу x_0 точки пересечения M этих графиков. Получаем $x_0 \approx 1{,}9$, т. е. $x_0 \in [a, b] = [1; 2]$.

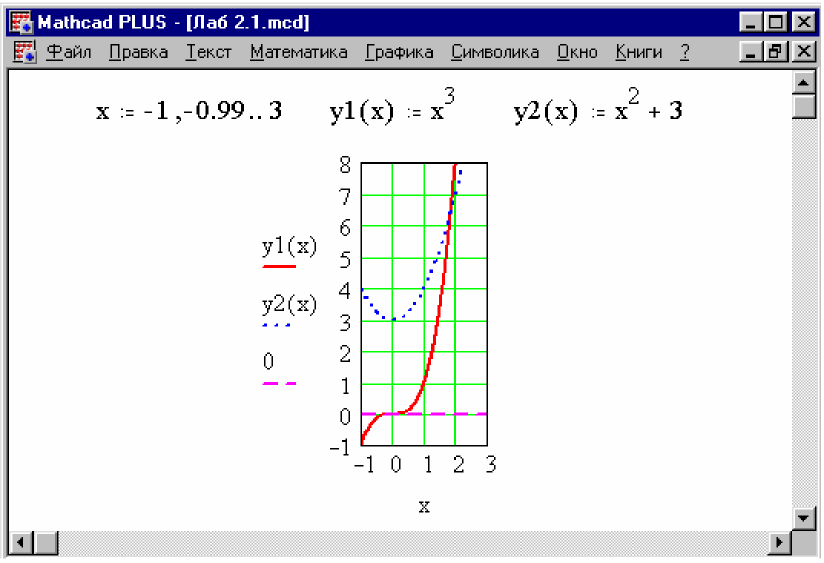


Рис. 4. Листинг решения примера 1

Пример 2. Графически отделить корни уравнения

$$\lg x - \frac{1}{x} = 0. \tag{4}$$

Р е ш е н и е. Уравнение (4) удобно переписать в виде равенства

$$\lg x = \frac{1}{x}.$$

Отсюда ясно, что корни уравнения (3) могут быть найдены как абсциссы точек пересечения логарифмической кривой $y = \lg x$ и гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Построив эти кривые, приближенно найдем единственный корень $x_0 = 2{,}5$ уравнения (4) или определим его содержащий отрезок [2, 3] (рис. 5).

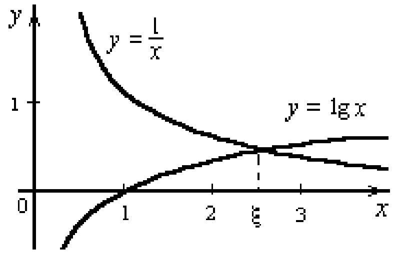


Рис. 5. Листинг решения примера 2

Ниже рассмотрим ряд методов приближенного решения уравнения (1).

4. Метод половинного деления

Отрезок $[a, b]$ делится пополам и выбирается та его половина, на которой функция $f(x)$ меняет знак. Из двух образовавшихся при делении отрезков переходим к той из его половин $[a, c]$ и $[c, b]$, на концах которой функция принимает значения разных знаков. При этом возможны два случая:

1) корень на отрезке $[a, c]$, $f(a)f(c) \le 0$, граница сдвигается влево — b заменяется на c (рис. 6, *1*);

2) корень на отрезке $[c, b]$, $f(a)f(c) > 0$, граница сдвигается вправо — a заменяется на c (рис. 6, *2*).

Продолжая процесс половинного деления дальше, можно получить сколь угодно малый отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий корень уравнения.

Принимая за приближенное значение корня число, равное середине отрезка $[\alpha, \beta]$, допускаем погрешность, не превосходящую половины длины этого отрезка.

Таким образом, процесс половинного деления заканчивается при выполнении условия $\frac{\beta - \alpha}{2} < \varepsilon$, где ε — заданная точность.

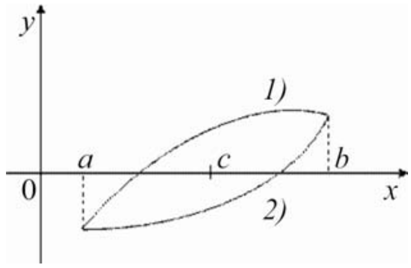


Рис. 6. Графическая иллюстрация метода половинного деления

Метод половинного деления практически удобно применять для грубого нахождения корня данного уравнения, метод прост и надежен, всегда сходится.

Программный блок, реализующий метод деления отрезка пополам для поиска корня на интервале [a0, b0], может иметь вид:

$$
x := \left|
\begin{array}{l}
a \leftarrow a0 \\
b \leftarrow b0 \\
\text{while } |b-a| > \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
c \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\
a \leftarrow c \text{ if } f(a)\cdot f(c) > 0 \\
b \leftarrow c \text{ otherwise}
\end{array}
\right. \\
\dfrac{a+b}{2}
\end{array}
\right.
$$

5. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольное значение $x_0 \in [a, b]$. В точке $(x_0, f(x_0))$ проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную $y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)$. Тогда пересечение касательной с осью Ox дает первое приближение $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Аналогично для точки $(x_1, f(x_1))$ находим $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и т. д. (рис. 7). Таким образом, получаем итерационную последовательность $\{x_n\}$ по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2,... \tag{5}$$

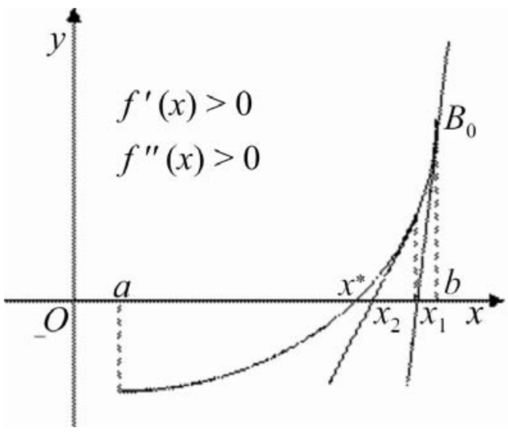


Рис. 7. Геометрическая интерпретация метода касательных

Обычно в качестве начального приближения x_0 выбирают тот конец отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие $f(x_0)f''(x_0) > 0$, т. е. в котором знак функции совпадает со знаком второй производной. Оценка погрешности приближенного значения корня, найденного методом Ньютона, производится с помощью неравенства

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| < \frac{\left[f\left(x_{n+1}\right)\right]^2}{2} \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}\right|,$$

где x^* — точный корень уравнения (1).

Метод касательных имеет квадратичную скорость сходимости. Его особенно удобно применять, когда график функции имеет большую кривизну в окрестности корня соответствующего уравнения. Если кривая $y = f(x)$ вблизи точки пересечения с осью Ox почти горизонтальна, то применять метод Ньютона не рекомендуется.

Метод Ньютона (касательных) предполагает вычисление производной. Если левая часть решаемого уравнения задана аналитически функцией $f(x)$, то производную можно вычислить средствами MathCAD, например:

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) := \mathrm{x} \cdot \sin(2\mathrm{x})$$

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{f}(\mathrm{x}) \rightarrow \sin(2 \cdot \mathrm{x}) + 2 \cdot \mathrm{x} \cdot \cos(2 \cdot \mathrm{x}).$$

Тогда программный код, реализующий метод Ньютона (касательных), может иметь вид:

$$\mathrm{x} := \left|\begin{array}{l} \mathrm{x}_1 \leftarrow \mathrm{a0} \\ \mathrm{x}_0 \leftarrow \mathrm{a0} + 2\varepsilon \\ \text{while } \left|\mathrm{x}_0 - \mathrm{x}_1\right| > \varepsilon \\ \quad \left|\begin{array}{l} \mathrm{x}_1 \leftarrow \mathrm{x}_0 \\ \mathrm{x}_1 \leftarrow \mathrm{x}_0 - \dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)}{\mathrm{p}(\mathrm{x}_0)} \end{array}\right. \\ \mathrm{x}_1 \end{array}\right.$$

6. Итерационный метод

Уравнение (1) приводим к виду

$$x = \varphi(x). \qquad (6)$$

Пусть известно приближенное, возможно весьма грубое, решение x_0 исходного уравнения. Последующие приближения вычисляем по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2,... \qquad (7)$$

Если итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу, то этот предел есть корень исходного уравнения. Условия сходимости итерационного процесса дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть уравнение (6) имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

1) функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

2) все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ принадлежат этому отрезку;

3) существует число $\alpha \in (0,1)$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| < \alpha$.

Тогда итерационная последовательность (7) сходится к корню уравнения (6) для любого $x_0 \in [a, b]$.

За приближенное значение корня можно взять любой член итерационной последовательности $\{x_{n+1}\}$, $n = 0, 1, 2,...$ При этом погрешность приближения определяется по формуле

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left|x_1 - x_0\right|,$$

где x^* — точное решение уравнения (6), а число α определено в теореме 1.

Критерием остановки итерационного процесса является выполнение условия

$$\left|x_{n+1} - x_n^*\right| \le \frac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon, \tag{8}$$

где ε — заданная точность решения уравнения.

Метод итераций является одним из самых надежных методов решения уравнений.

Уравнение (1) можно преобразовать к виду (6) различными способами, например, полагая $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$, где λ — некоторое число, выбираемое таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы 1.

Пусть, например, на отрезке $[a, b]$, где уравнение (1) имеет единственный корень, функция $f(x)$ монотонна. Предположим для определенности, что $f'(x) > 0$ на $[a, b]$ (если $f'(x) < 0$ на $[a, b]$, то вместо уравнения (1) берем уравнение $-f(x) = 0$), тогда $0 < m < f'(x) < M$, где M и m — наибольшее и наименьшее значение функции $f'(x)$ на $[a, b]$. В этом случае полагаем $\lambda = \frac{1}{M}$, а $\alpha = 1 - \frac{m}{M}$.

Вариант простейшего программного кода, реализующего метод простой итерации:

```
x := | x1 ← a0
     | x0 ← a0 + 2ε
     | while |x0 − x1| < ε
     |     | x0 ← x1
     |     | x1 ← ϕ(x0)
     | x1
```

7. Решение уравнений с помощью инструментальных средств

7.1. Использование пакета MathCAD

Пакет MathCAD обладает различными возможностями для решения уравнений. Результат решения может быть получен в аналитическом (символьном) или числовом виде.

1. Символьное решение уравнений осуществляется при помощи панели символьных вычислений «Символика», на которой необходимо выбрать кнопку «solve» (вычислить). При этом на экране появится сообщение

$$\blacksquare \ \text{solve}, \blacksquare \ \rightarrow ,$$

в котором вместо маркеров слева и справа от ключевого слова solve необходимо задать соответственно *выражение* (в нашем случае функция $f(x)$) и *имя переменной*, относительно которой ищется решение.

2. Получить аналитическое решение уравнения можно также, воспользовавшись пунктом «Simbolics» главного меню. При этом на рабочем листе должна быть записана левая часть уравнения (1) и выделена переменная, относительно которой его следует решать.

3. Для решения уравнения с одним неизвестным в системе MathCAD также применяют функцию root (выражение, имя переменной) или root (выражение, имя переменной, отрезок).

В первом случае переменной перед использованием функции root необходимо присвоить начальное приближение корня. Для поиска корня используется комбинация методов Ньютона и секущих.

Во втором случае функция root возвращает значение x, принадлежащее отрезку, при котором *выражение* обращается в 0. Используется метод половинного деления.

Решения получаются с погрешностью, заданной системной переменной *TOL*. При этом по умолчанию ее значение равно 0,001. При желании значение погрешности можно изменить.

Функция root может не найти решение (появится сообщение — Can’t converge to a solution — отсутствует сходимость) в следующих случаях: уравнение не имеет корней, начальное приближение расположено слишком далеко от корня, функция имеет локальный экстремум между начальным приближением и корнем, уравнение имеет комплексный корень, а начальное приближение задано вещественным числом.

Пример 3. Решить уравнение $x^4 - 2{,}3x^3 + 4{,}1x^2 - 2{,}7x - 4{,}6 = 0$, используя встроенные функции root для нахождения действительных корней и polyroots для вычисления всех корней уравнения (включая и комплексные).

Решение представлено на рис. 8.

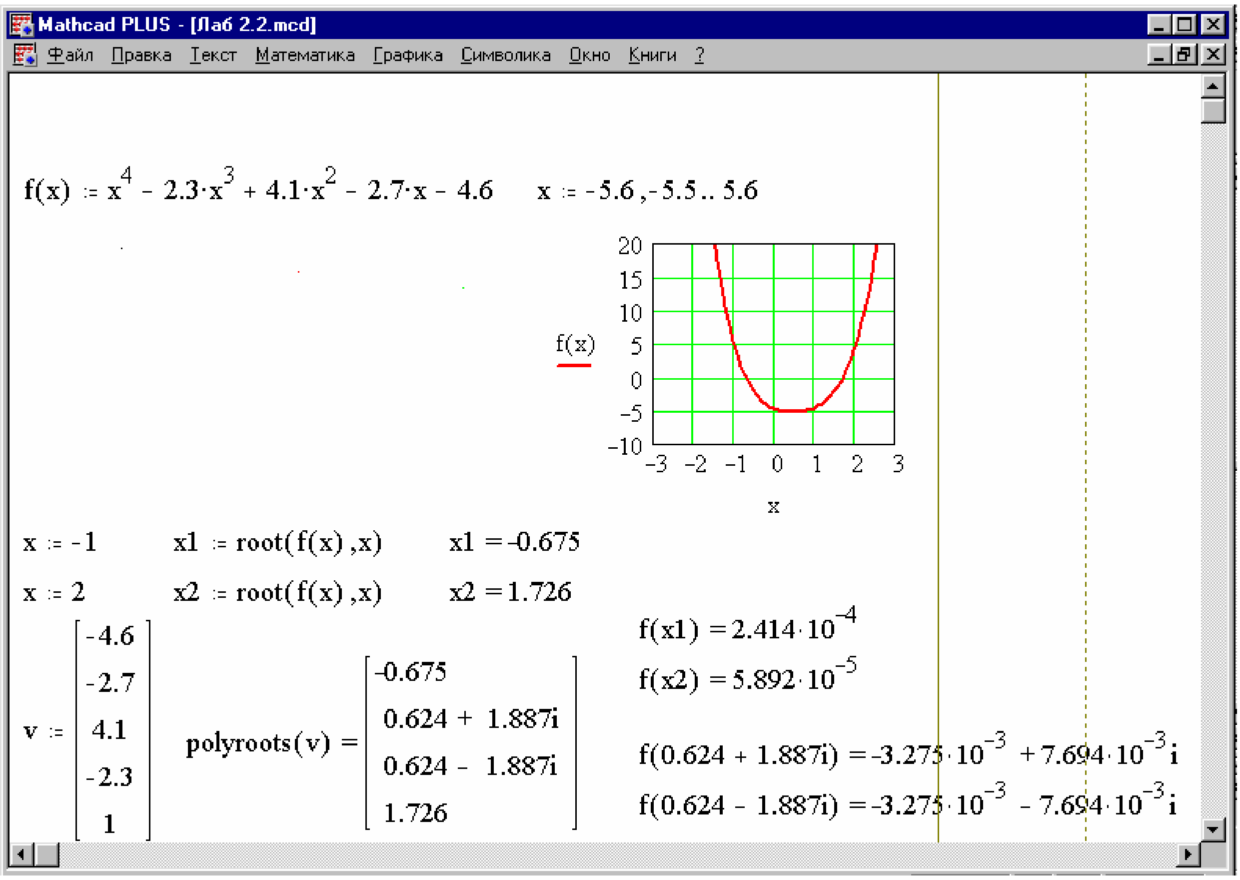


Рис. 8. Решение уравнения с использованием функции root

7.2. Использование надстройки «Подбор параметра» в Excel

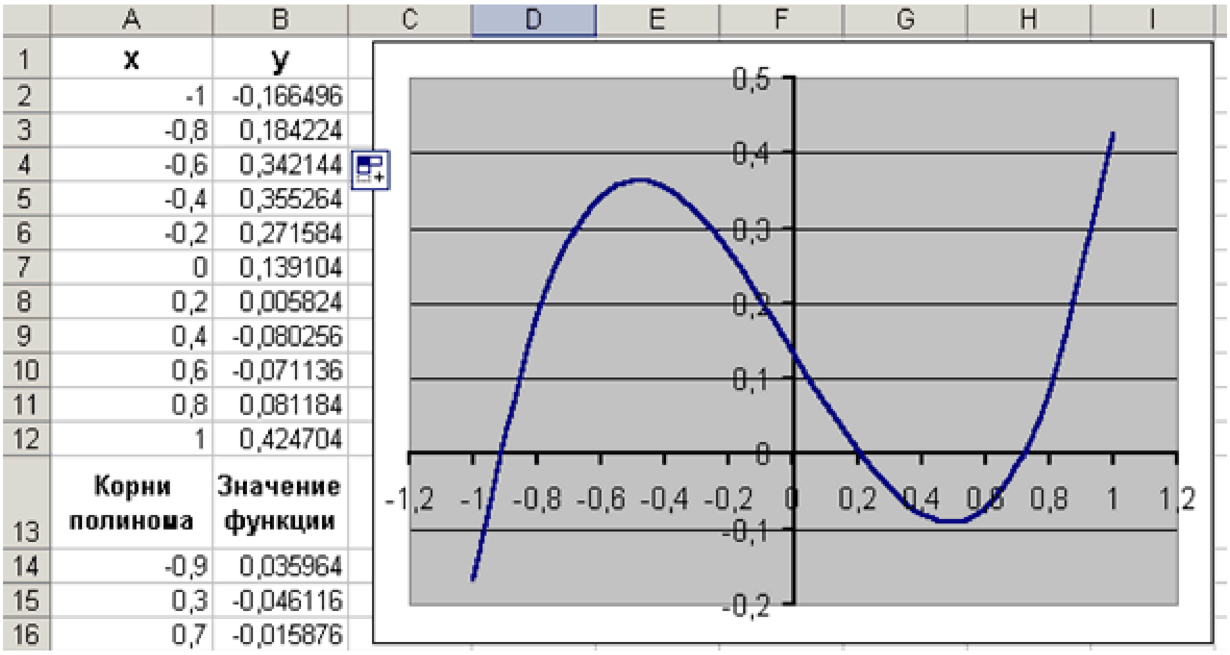
Решение нелинейных уравнений можно реализовать в приложении Excel с использованием надстройки «Подбор параметра».

Рассмотрим поиск решения нелинейного уравнения на примере.

Пример 4. Найти корни полинома $x^3 - 0{,}01x^2 - 0{,}7044x + 0{,}139104 = 0$.

Для начала решим уравнение графически. Известно, что графическим решением уравнения $f(x) = 0$ является точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, т. е. такое значение x, при котором функция обращается в нуль.

Проведем табулирование полинома на интервале от –1 до 1 с шагом 0,2. Результаты вычислений приведены на рис. 9, где в ячейку *B*2 была введена формула: = *A*2^3 – 0,01**A*2^2 – 0,7044**A*2 + 0,139104. На графике видно, что функция три раза пересекает ось *Ox*, а так как полином третьей степени имеет не более трех вещественных корней, то графическое решение поставленной задачи найдено. Иначе говоря, была проведена локализация корней, т. е. определены интервалы, на которых находятся корни данного полинома: [–1; –0,8], [0,2; 0,4] и [0,6; 0,8].



	A	B
1	x	y
2	-1	-0,166496
3	-0,8	0,184224
4	-0,6	0,342144
5	-0,4	0,355264
6	-0,2	0,271584
7	0	0,139104
8	0,2	0,005824
9	0,4	-0,080256
10	0,6	-0,071136
11	0,8	0,081184
12	1	0,424704
13	Корни полинома	Значение функции
14	-0,9	0,035964
15	0,3	-0,046116
16	0,7	-0,015876

Рис. 9. Отделение корней средствами Excel

Теперь можно найти корни полинома методом последовательных приближений с помощью команды «Сервис/Подбор параметра». Относительная погрешность вычислений и предельное число итераций (например, 0,00001 и 1000) задаются на вкладке «Сервис/Параметры».

После ввода начальных приближений и значений функции можно обратиться к пункту меню «Сервис/Подбор параметра» и заполнить диалоговое окно следующим образом (рис. 10).

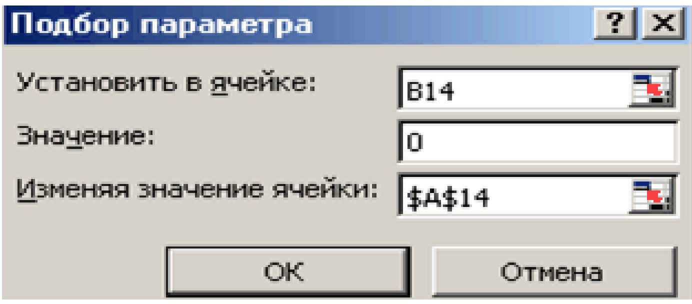


Рис. 10. Установка параметров в диалоговом окне «Подбор параметра»

В поле «Установить в ячейке» дается ссылка на ячейку, в которую введена формула, вычисляющая значение левой части уравнения (уравнение должно быть записано так, чтобы его правая часть не содержала переменную). В поле «Значение» вводим правую часть уравнения, а в поле «Изменяя значения ячейки» дается ссылка на ячейку, отведенную под переменную. Заметим, что вводить ссылки на ячейки в поля диалогового окна «Подбор параметров» удобнее не с клавиатуры, а щелчком на соответствующей ячейке.

После нажатия кнопки OK появится диалоговое окно «Результат подбора параметра» (рис. 11) с сообщением об успешном завершении поиска решения, приближенное значение корня будет помещено в ячейку *A14*.

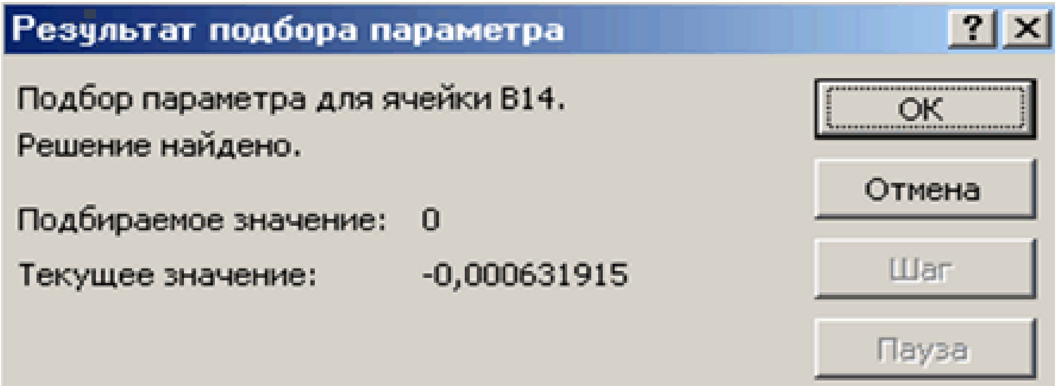


Рис. 11. Сообщение об успешном завершении поиска решения

Два оставшихся корня находим аналогично. Результаты вычислений будут помещены в ячейки *A15* и *A16* (рис. 12).

	A	B
13	**Корни полинома**	**Значение функции**
14	-0,92034081	-0,000632
15	0,210213539	-0,000123
16	0,720718302	0,0006019

Рис. 12. Результаты поиска корней уравнения

Контрольные вопросы

1. Перечислите различные методы решения уравнения с одной неизвестной. Дайте их краткую характеристику.
2. Какие свойства функции и как используются в приближенных методах решения уравнения $f(x) = 0$?
3. Как строится итерационная последовательность?
4. Каковы достаточные условия сходимости итерационной последовательности?
5. Как аналитически определить промежуток, на котором находятся корни уравнения $f(x) = 0$?
6. Оценка погрешности различных методов решения.

II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. Пример выполнения задания

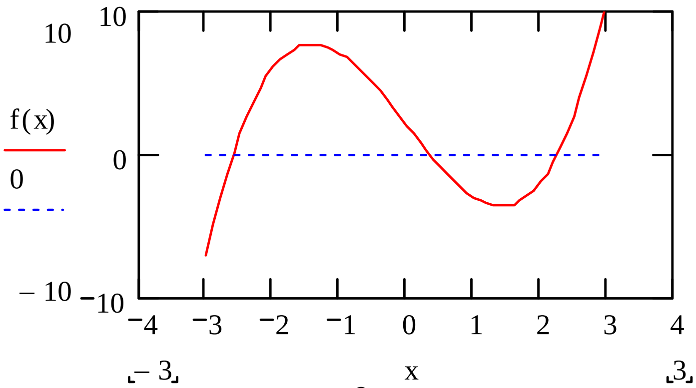
Задание. Решить уравнение $x^3 - 6x + 2 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ на интервале [0, 1].

Р е ш е н и е.

$$x := -3, -2.9..3$$

$$f(x) := x^3 - 6 \cdot x + 2$$

$$\varepsilon := 0.001$$



a:=0

b:=1

a0:=a

b0:=b

1. Метод половинного деления:

$$x := \begin{array}{|l} a \leftarrow a0 \\ b \leftarrow b0 \\ \text{while } |b-a| > \varepsilon \\ \quad \begin{array}{|l} c \leftarrow \dfrac{a+b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } f(a)\cdot f(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \end{array} \\ \dfrac{a+b}{2} \end{array}$$

$$x = 0.3403$$

2. Метод Ньютона (метод касательных):

$$p(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3\cdot x^2 - 6$$

$$x := \begin{array}{|l} x1 \leftarrow a0 \\ x0 \leftarrow a0 + 2\cdot\varepsilon \\ \text{while } |x0 - x1| > \varepsilon \\ \quad \begin{array}{|l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x0 - \dfrac{f(x0)}{p(x0)} \end{array} \\ x1 \end{array}$$

$$x = 0.3399$$

3. Метод итераций:

$$a := 0$$

$$b := 1$$

$$f(x) := x^3 - 6 \cdot x + 2$$

$$p(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow 3 \cdot x^3 - 6$$

$$p(0) = -6$$

$$p(1) = -3$$

$M := -3$ (максимальное значение производной)

$m := -6$ (минимальное значение производной)

$$\lambda := \frac{1}{M}$$

$$\lambda = -0.333$$

$$\alpha := 1 - \frac{m}{M}$$

$$\alpha = -1$$

$$x := \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow a \\ x1 \leftarrow a + 2 \cdot \varepsilon \\ \text{while } |x1 - x0| < \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow x0 - \lambda \cdot \left(x0^3 - 6 \cdot x0 + 2\right) \end{array} \right. \\ x1 \end{array} \right.$$

$$x = 0.3403$$

4. Использование функции root:

$$x1 := 0.3$$

$$x1 := \text{root}\ \left(f(x1), x1\right) f(x) := x^3 - 6 \cdot x + 2$$

$$x1 = 0.3399$$

2. Порядок выполнения работы

1. Подготовить данные для ввода в ПЭВМ.
2. Отделить вещественные корни уравнения.
3. Найти вещественные корни уравнения, используя методы, заданные вариантом.
4. Найти вещественные корни, используя команду root в MathCad или надстройку «Подбор параметра» в Excel.
5. Составить отчет о проделанной работе.

3. Содержание отчета

1. Название, цель работы и задание.
2. Графическое решение уравнения, отделение действительных корней.
3. Результаты расчета на ПЭВМ, полученные методами, заданными вариантом.
4. Результаты расчета на ПЭВМ, полученные с помощью инструментальных средств.
5. Выводы по работе.

4. Задание к лабораторной работе

Определить с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ действительные корни уравнений $f(x) = 0$ (табл. 1) методами, указанными преподавателем, предварительно определив интервал $[a, b]$, на котором существует решение уравнения. Сделать проверку решения.

№ варианта	Уравнение 1	Уравнение 2
1	$x^4 - 2x - 4 = 0$	$2 - \lg x - x = 0$
2	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	$\mathrm{tg}(1,9x) - 2,8x = 0$
3	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$	$\sin(2,2x) - x = 0$
4	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	$\ln(8x) = 9x - 3$
5	$x^3 - 0,2x^2 - 0,2x - 1,2 = 0$	$0,7e^{-0,59x} - x = 0$
6	$x^5 - x - 0,2 = 0$	$5,6\sin(4,8x) - 4,5x = 0$
7	$x^3 - 2x - 5 = 0$	$\mathrm{tg}\, x = x$
8	$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$	$x - \sin x = 0,25$
9	$x^3 + 2x - 7 = 0$	$\mathrm{tg}(0,58x + 0,1) = x^2$
10	$x^4 + 3x - 20 = 0$	$\sqrt{x} - \cos(0,387x) = 0$
11	$x^3 - x + 1 = 0$	$3x - \cos x - 1 = 0$
12	$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$	$x + \lg x = 0,5$
13	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 + 4\sin x = 0$
14	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	$\mathrm{tg}(0,5x + 0,2) = x^2$
15	$x^3 - 6x - 8 = 0$	$\mathrm{ctg}\, x - x/4 = 0$
16	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	$\mathrm{ctg}\, x - x/5 = 0$
17	$x^3 + 4x - 6 = 0$	$2\lg x - x/2 + 1 = 0$
18	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	$x^2 - 20\sin x = 0$
19	$x^4 - 4x - 1 = 0$	$x^2 = \sin x$
20	$x^3 + x - 5 = 0$	$x^3 = \sin x$
21	$x^3 + 2x^2 + 2 = 0$	$\ln x + (x+1)^3 = 0$
22	$x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$	$x \cdot 2^x = 1$
23	$x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$	$(2 - x)e^x = 0,5$

24	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}3x - 0{,}6 = 0$	$x(x+1)^2 = 1$
25	$x^4 + 5x - 3 = 0$	$x = (x+1)^3$
26	$x^4 - 2x - 1 = 0$	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$
27	$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$	$x^2 = \ln(x+1)$
28	$x^3 + 2x + 4 = 0$	$\lg(2+x) + 2x = 3$
29	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	$2{,}2x - 2^x = 0$
30	$x^4 + x - 3 = 0$	$3x - e^x = 0$

5. Тесты для самопроверки

I. Выберите из предложенных вариантов краткую характеристику метода:

1) половинного деления;

2) Ньютона;

3) итераций;

4) графического метода:

А. Уравнение $f(x) = 0$ приводится к виду $u(x) = v(x)$, где функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ являются простейшими элементарными и могут легко быть построены. Абсцисса x_0 точки пересечения $M(x_0, y_0)$ графиков функций $u(x)$ и $v(x)$ есть искомое решение уравнения.

Б. Отрезок $[a, b]$ делится пополам и выбирается та его половина, на которой функция $f(x)$ меняет знак. Продолжая процесс половинного деления дальше, можно получить сколь угодно малый отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий корень уравнения. Процесс заканчивается при выполнении условия $(\beta - \alpha)/2 < \varepsilon$, где ε заданная точность.

В. Возьмем произвольное значение $x_0 \in [a, b]$. В точке $(x_0, f(x_0))$ проведем к графику функции $y = f(x)$ касательную $y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда пересечение касательной с осью Ox дает первое приближение $x_1 = x_0 - f(x_0)/ f'(x_0)$. Аналогично для точки $(x_1, f(x_1))$ находим $x_2 = x_1 - f(x_1)/ f'(x_1)$ и т. д. Таким образом, получаем итерационную последовательность $\{x_n\}$ по формуле $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/ f'(x_n)$, $n = 0, 1, 2,...$ Обычно в качестве начального приближения x_0 выбирают тот конец отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Оценка погрешности приближенного значения корня, найденного этим методом, производится с помощью неравенства

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| < \frac{\left[f\left(x_{n+1}\right)\right]^2}{2} \max_{x \in [a,b]} \left|\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^3}\right|,$$

где x^* — точный корень уравнения $f(x) = 0$.

Г. Уравнение $f(x) = 0$ приводим к виду $x = \varphi(x)$. Пусть известно приближенное, возможно весьма грубое, решение x_0 исходного уравнения. Последующие приближения вычисляем по формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, 2,\ldots$$

Если итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу, то этот предел и есть корень исходного уравнения. Условия сходимости итерационного процесса дает следующая теорема. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ принадлежат этому отрезку;

существует число $\alpha \in [0, 1]$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| < \alpha$.

Погрешность приближения определяется по формуле

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\left|x_1 - x_0\right|.$$

Критерием остановки итерационного процесса является выполнение условия

$$\left|x_{n+1} - x_n^*\right| \le \frac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon.$$

Ответы: 1 — Б; 2 — Б; 3 — Г; 4 — А.

II. Перечислите номера свойств функций, использующихся в приближенных методах решения уравнения $f(x) = 0$:

1) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах этого отрезка разные знаки, т. е. $f(a)\,f(b) < 0$, то на $[a, b]$ существует хотя бы один корень уравнения $[a, b]$;

2) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна ($f'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$) и $f(a)\,f(b) < 0$, то на этом отрезке корень уравнения $f(x) = 0$ единственный;

3) если функция $f(x)$ непрерывна и монотонна ($f'(x)$ не меняет знак на отрезке $[a, b]$) и $f(a)\,f(b) > 0$, то на этом отрезке корень уравнения $f(x) = 0$ единственный;

4) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах этого отрезка одинаковые знаки, т. е. $f(a)\,f(b) > 0$, то на $[a, b]$ существует хотя бы один корень уравнения $[a, b]$:

1) 2, 4;

2) 1, 2;

3) 1, 3.

Ответ: 2.

III. Выберите из списка достаточные условия сходимости итерационного процесса:

1) функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

2) все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ принадлежат этому отрезку;

3) существует число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| < \alpha$;

4) функция $\varphi(x)$ определена и не дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

5) все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ не принадлежат этому отрезку;

6) существует число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| > \alpha$:

1) 5, 6;
2) 2, 3;
3) 1, 4, 6;
4) 1, 2, 3.

Ответ: 4.

IV. Какое условие является критерием остановки итерационного процесса?

1) $\left|x_{n+1} - x_n^*\right| \le \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon$;

2) $\left|x_{n+1} - x_n^*\right| \ge \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\varepsilon$;

3) $\left|x_{n+1} - x_n^*\right| \le \dfrac{1+\alpha}{\alpha}\varepsilon$.

Ответ: 1.

V. Решая графическим методом уравнение $x^3 - x^2 - 3 = 0$, получили корень уравнения, равный:

1) 1,6;
2) 1,7;
3) 1;
4) 1,9.

Ответ: 4.

VI. Итерационную последовательность $\{x_n\}$ получают по формуле:

1) $x_{n+1} = x_n \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2,\ldots$

2) $x_{n+1} = x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2,\ldots$

3) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, 2,\ldots$

Ответ: 3.

VII. Какая теорема дает условия сходимости итерационного процесса?

1. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ принадлежат этому отрезку;

существует число $\alpha \in (0,1)$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| < \alpha$.

Тогда итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$ для любого $x_0 \in [a, b]$.

2. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

все значения функции $\varphi(x)$ при $x = \varphi(x)$ не принадлежат этому отрезку;

существует число $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| < \alpha$.

Тогда итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$ для любого $x_0 \in [a, b]$.

3. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$;

все значения функции $\varphi(x)$ при $x \in [a, b]$принадлежат этому отрезку;

существует число $\alpha \in (0,1)$ такое, что для всех $x_0 \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi'(x)| > \alpha$.

Тогда итерационная последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения $x = \varphi(x)$ для любого $x_0 \in [a, b]$.

Ответ: 1.

Список рекомендуемой литературы

1. *Макаров, Е. Г.* Инженерные расчеты в MathCAD 14 / Е. Г. Макаров. — СПб. : Питер, 2007.

2. *Кирьянов, Д. В.* Самоучитель MathCAD 12 / Д. В. Кирьянов. — СПб. : БХВ — Петербург, 2004.

3. *Дьяконов, В. П.* MathCAD 2000 : Учебный курс / В. П. Дьяконов. — СПб : Питер, 2000.

4. *Дьяконов, В. П.* Компьютерная математика. Теория и практика / В. П. Дьяконов. — М. : Нолидж, 2001.

5. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 1987.

6. *Волков, Е. А.* Численные методы / Е. А. Волков. — М. : Наука, 1982.

7. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / Л. И. Турчак. — М. : Наука, 1987.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2013 г., поз. 37

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *Р. В. Худадян*
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Вишняков*

Подписано в свет 12.12.2013.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,0. Объем данных 530 Кбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru