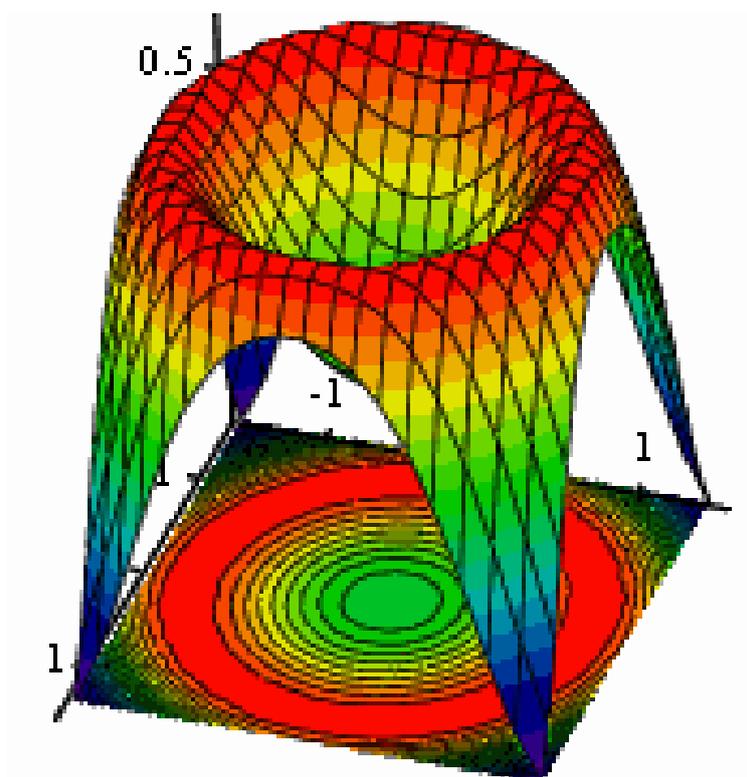


Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Н. А. Михайлова, О. М. Забродина, Т. В. Ерещенко

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Учебное пособие



Волгоград. ВолгГАСУ. 2015



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2015



УДК 519.6:69(075.8)
ББК 22.19я73
М692

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук *Н. Н. Потапова*,
доцент кафедры математики и информационных технологий
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;
доктор технических наук *Е. П. Богданов*,
профессор кафедры информационных систем и технологий
Волгоградского государственного аграрного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Михайлова, Н. А.

М692 Вычислительные методы в строительстве [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. А. Михайлова, О. М. Забродина, Т. В. Ерещенко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (1,8 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2015. — Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-793-6

Содержатся теоретические сведения, задания и примеры выполнения в среде MathCAD лабораторных работ и расчетно-графической работы. Приведены варианты индивидуальных заданий, сформулированы контрольные вопросы.

Для студентов-бакалавров 3-го курса профиля «Промышленное и гражданское строительство» очной формы обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader и системой ссылок.

**УДК 519.6:69(075.8)
ББК 22.19я73**

ISBN 978-5-98276-793-6



© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
1. Введение в численные методы.....	6
2. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	11
2.1. Постановка задачи.....	11
2.2. Метод Пикара.....	13
2.3. Метод Эйлера.....	15
2.4. Метод Рунге — Кутта.....	16
2.5. Применение метода Рунге — Кутта для приближенного решения систем дифференциальных уравнений.....	19
2.6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в MathCAD.....	20
3. Метод конечных элементов.....	23
3.1. Основная идея метода.....	23
3.2. Общая схема алгоритма метода конечных элементов.....	24
3.2.1. Основные этапы.....	24
3.2.2. Дискретизация рассматриваемой области.....	25
3.2.3. Построение интерполирующих функций.....	26
3.2.4. Вывод основных геометрических и физических соотношений.....	27
3.2.5. Построение матрицы жесткости конечного элемента.....	27
3.2.6. Получение системы уравнений метода конечных элементов.....	29
3.2.7. Определение деформаций и напряжений.....	30
3.3. Двумерный симплекс-элемент.....	30
4. Лабораторный практикум.....	35
4.1. Лабораторная работа 1. Приближенное решение дифференциальных уравнений в среде интегрированной системы MathCAD.....	35
4.1.1. Цель выполнения.....	35
4.1.2. Задания.....	35
4.1.3. Порядок выполнения.....	37
4.1.4. Примеры выполнения заданий.....	38
4.1.4.1. Задание 1.....	38
4.1.4.2. Задание 2.....	42
4.1.4.3. Задание 3.....	45
4.1.5. Отчет по лабораторной работе.....	49
Контрольные вопросы.....	49
4.2. Лабораторная работа 2. Применение дифференциальных уравнений в строительстве.....	49
4.2.1. Цель выполнения.....	49
4.2.2. Задания.....	49
4.2.3. Примеры выполнения заданий.....	54
4.2.3.1. Задание 1.....	54
4.2.3.2. Задание 2.....	55
4.2.3.3. Задание 3.....	58
4.2.3.4. Задание 4.....	61
4.2.4. Отчет по лабораторной работе.....	66
Контрольные вопросы.....	66
4.3. Лабораторная работа 3. Метод конечных элементов и его реализация в среде интегрированной системы MathCAD.....	67
4.3.1. Цель выполнения.....	67
4.3.2. Задание.....	67
4.3.3. Пример выполнения задания.....	68
4.3.4. Отчет по лабораторной работе.....	78
Контрольные вопросы.....	79

5. Расчетно-графическая работа.....	80
5.1. Задания.....	80
5.2. Примеры выполнения заданий.....	82
5.2.1. Задание 1.....	82
5.2.2. Задание 2.....	86
5.2.3. Задание 3.....	88
Библиографический список.....	93

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии кратко изложены основные численные методы, используемые в строительстве. Целесообразность изучения этих вопросов обусловлена широким внедрением в расчетную и проектную практику разнообразных средств электронно-вычислительной техники и интегрированных сред компьютерной математики, какой является система MathCAD.

В первую очередь рассматриваются вопросы погрешностей численного решения, а также понятия корректной постановки задач.

Три раздела посвящены математическим методам приближенного решения дифференциальных уравнений и применению их к расчету строительных конструкций. Численные методы построения решений дифференциальных уравнений выполнены в системе MathCAD и иллюстрируются простыми примерами. Проводится сравнение полученных результатов.

Особое внимание уделено методу конечных элементов, который имеет широкое распространение в расчетах на прочность, устойчивость и колебания строительных конструкций. Также этот метод применен к решению плоской задачи теории упругости.

Пособие содержит варианты индивидуальных заданий и примеры выполнения расчетно-графической работы.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для бакалавров направления «Строительство» очной формы обучения.

1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Появление и непрерывное совершенствование ЭВМ, а затем ПК привело к подлинно революционному преобразованию науки вообще и математики в особенности. Изменилась технология научных исследований, колоссально увеличились возможности теоретического изучения прогноза сложных процессов, проектирование инженерно-строительных конструкций. Решение крупных научно-технических проблем стало возможным лишь благодаря применению математического моделирования и новых численных методов, предназначенных для ЭВМ и ПК.

В настоящее время появился новый способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание — вычислительный эксперимент, т. е. исследование естественно-научных проблем средствами вычислительной математики.

Поясним существо этого способа исследования на примере решения какой-либо физической проблемы. Пусть требуется изучить некоторый физический процесс. Математическому моделированию предшествует выбор физического приближения, т. е. решение вопроса о том, какие факторы надо учесть, а какими можно пренебречь. После этого проводится исследование проблемы методом вычислительного эксперимента, в котором можно выделить несколько основных этапов.

На первом этапе формулируется задача, которую необходимо решить. Сначала выбирается физическое приближение или физическая модель процесса (например, модель точки или сплошной среды), решается вопрос о том, какие физические факторы надо учесть, а какими можно пренебречь.

Физической модели ставится в соответствие математическая модель, т. е. математическое описание процесса с помощью алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин (энергии, количества движения, массы и др.). Полученную математическую модель необходимо исследовать, т. е. установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи и единственно ли оно. На этом этапе используются методы классической математики. Часто на практике приходится решать такие задачи, для которых не имеется теорем существования и единственности.

Второй этап вычислительного эксперимента состоит в построении приближенного численного метода решения задач, т. е. в выборе вычислительного алгоритма. Под **вычислительным алгоритмом** понимают последовательность арифметических и логических операций, при помощи которых находится приближенное численное решение математической задачи, сформулированной на первом этапе. Этап поиска и разработки алгоритма решения называют **алгоритмизацией**. Здесь используются любые формы представления алгоритмов: словесные описания, математические формулы и блок-схемы.

На третьем этапе осуществляется программирование вычислительного алгоритма для ЭВМ и ПК, на четвертом — проведение расчетов на ЭВМ и ПК.

Разработка конкретных численных алгоритмов и их программирование должны быть тесно связаны.

В качестве пятого этапа вычислительного эксперимента можно выделить анализ полученных численных результатов и последующее уточнение математической модели. Модель может оказаться слишком груба (результат вычислений не согласуется с физическим экспериментом) или слишком сложна и решение с достаточной точностью можно получить при более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа, т. е. уточнить математическую модель и снова пройти все этапы.

Таким образом, процесс решения задачи с использованием ЭВМ в достаточно общем случае включает в себе следующие этапы:

- 1) постановка задачи и построение математической модели;
- 2) разработка алгоритма (алгоритмизация);
- 3) запись алгоритма на языке программирования;
- 4) исполнение программы на ЭВМ;
- 5) анализ полученных результатов.

Следует отметить, что вычислительный эксперимент — это, как правило, не однократный расчет по стандартным формулам, а прежде всего расчет серии вариантов для различных математических моделей.

Далее рассмотрим подробнее некоторые общие характеристики и требования, относящиеся к вычислительным алгоритмам.

Разработка и исследование вычислительных алгоритмов и их применение к решению конкретных задач составляют содержание огромного раздела современной математики — вычислительной математики.

Вычислительную математику в широком смысле этого термина определяют как раздел информатики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ и ПК, а более конкретно — как теорию численных методов и алгоритмов решения поставленных математических задач.

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной, что чаще всего достигается **дискретизацией исходной задачи**, т. е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи строится вычислительный алгоритм, т. е. указывается последовательность арифме-

тических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и дающих за конечное число действий решение дискретной задачи. Полученное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

При решении задачи на ЭВМ и ПК всегда получается не точное решение исходной задачи, а некоторое приближенное. Чем же обусловлена возникающая погрешность?

На общую погрешность решения задачи влияет целый ряд факторов. Например, пусть R — точное значение результата решения некоторой задачи. Из-за несоответствия построенной математической модели реальной ситуации, а также по причине неточности исходных данных вместо R будет получен результат, который обозначается R_1 . Образовавшаяся таким образом погрешность $\varepsilon = R - R_1$ уже не может быть устранена в ходе последующих вычислений, это так называемая **неустраняемая погрешность**.

При решении задачи в рамках математической модели избирается численный метод, т. е. исходная задача заменяется дискретной, и еще до вычислений допускается новая погрешность, приводящая к получению результата R_2 вместо R_1 . Погрешность $\varepsilon_2 = R_2 - R_1$ называют погрешностью метода или же **погрешностью дискретизации**.

Далее конечная разрядность чисел, представляемых в ЭВМ и ПК, приводит к получению результата R_3 , отличающегося от R_2 на величину вычислительной погрешности или **погрешности округления** $\varepsilon_3 = R_3 - R_2$, которая может нарастать в процессе вычислений.

Полная погрешность ε равняется сумме всех погрешностей:

$$\varepsilon = R - R_3 = (R - R_1) + (R_1 - R_2) + (R_2 - R_3);$$

$$\varepsilon \leq |(R - R_1) + (R_1 - R_2) + (R_2 - R_3)| \leq |(R - R_1)| + |(R_1 - R_2)| + |(R_2 - R_3)|;$$

$$\varepsilon \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Очевидно, что основное требование, предъявляемое к вычислительному алгоритму, — это требование точности. Оно означает, что вычислительный алгоритм должен давать решение исходной задачи с заданной точностью $\varepsilon \geq 0$ за конечное число $Q(\varepsilon)$ действий. Алгоритм должен быть реализуемым, т. е. давать решение задачи за допустимое машинное время или, в силу конечной скорости вычислений на ЭВМ и ПК, за допустимое число действий. Естественно добиваться, чтобы число действий $Q(\varepsilon)$ было минимальным для данной задачи. Для любой задачи можно предложить много алгоритмов, дающих одинаковую по порядку точность $\varepsilon > 0$, но за разное число действий $Q(\varepsilon)$. Среди этих эквивалентных по порядку точности алгоритмов выбирается тот, который дает решение с наименьшей затратой машинного времени. Такие алгоритмы называются экономичными.

Как было отмечено выше, при каждом вычислении появляются погрешности округления. В зависимости от алгоритма эти погрешности округления могут либо нарастать, либо затухать. Если в процессе вычислений погрешности округления неограниченно нарастают, то такой алгоритм называют неустойчивым. Если же погрешности округления не накапливаются, то алгоритм является устойчивым.

Пример 1.1. Пусть требуется найти $y_i (0 < i \leq i_0)$ по формуле $y_{i+1} = y_i + d, i \geq 0$ при заданных y_0 и d . Предположим, что при вычислении y_i была внесена погрешность (например, погрешность округления), имеющая величину δ_i , т. е. вместо точного значения y_i получено приближенное значение $\tilde{y}_i = y_i + \delta_i$. Тогда вместо точного значения будем иметь $\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + d = (y_i + \delta_i) + d = y_{i+1} + \delta_i$.

Таким образом, погрешность, допущенная на любом промежуточном шаге, не увеличивается в процессе вычислений. Следовательно, алгоритм устойчив.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение $y_{i+1} = qy_i, i \geq 0, y_0$ и q заданы. Пусть, как в примере 1, вместо y_i получено значение $\tilde{y}_i = y_i + \delta_i$. Тогда вместо y_{i+1} получим приближенное значение $\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i q = (y_i + \delta_i)q = y_{i+1} + q\delta_i$.

Отсюда видно, что погрешность $\delta_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$, возникающая при вычислении y_{i+1} , связана с погрешностью δ_i уравнением

$$\delta_{i+1} = q\delta_i, i = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, если $|q| > 1$, то в процессе вычислений абсолютное значение погрешности будет возрастать (алгоритм неустойчив). Если же $|q| \leq 1$, то погрешность не возрастает, т. е. алгоритм устойчив. Неустойчивость обычно связывают со свойством экспоненциального нарастания ошибки округления. Если же погрешность округления нарастает по степенному закону при переходе от одной операции к другой (от шага к шагу), то алгоритм считают условно устойчивым (устойчивым при некоторых ограничениях на весь объем вычислений и требуемую точность).

При решении любой задачи необходимо знать какие-либо входные (исходные) данные — начальные, граничные значения искомой функции, коэффициенты и правую часть уравнения и др.

Для каждой задачи ставятся одни и те же вопросы: существует ли решение, является ли оно единственным, как оно зависит от входных данных?

Возможны два случая:

1. Задача поставлена корректно (задача корректна). Это значит, что:
 - 1) задача разрешима при любых допустимых входных данных;
 - 2) имеется единственное решение;
 - 3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения), т. е. задача устойчива.

2. Задача поставлена некорректно (задача некорректна), если ее решение неустойчиво относительно входных данных (малому изменению входных данных может соответствовать большое изменение решения).

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи — задача дифференцирования.

Пример 1.3. Задача интегрирования.

Дана функция $f(x)$; найти интеграл $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Заменим f на \tilde{f} и рассмотрим $I = \int_0^1 \tilde{f}(x)dx$ и разность $\delta I = \tilde{I} - I = \int_0^1 \delta f dx$,

где $\delta f = \tilde{f}(x) - f(x)$. Отсюда видно, что $\left| \delta I \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |\delta f(x)| \right|$, $\delta I \leq \varepsilon$, если $\delta f \leq \varepsilon$,

т. е. I непрерывно зависит от f . Для вычисления интеграла I воспользуемся квадратурной формулой

$$I_N = \sum_{k=1}^N c_k f(x)_k; \quad c_k > 0; \quad \sum_{k=1}^N c_k = 1.$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

$$\delta I_N = \tilde{I}_N - I_N = \sum_{k=1}^N c_k (\tilde{f}_k - f_k) = \sum_{k=1}^N c_k \delta f_k;$$

$$|\delta I_N| \leq \sum_{k=1}^N c_k \max_{1 \leq k \leq N} |\delta f_k| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |\delta f_k| \sum_{k=1}^N c_k = \max_{1 \leq k \leq N} |\delta f_k|.$$

Таким образом, задача вычисления интеграла по квадратурной формуле корректна.

Пример 1.4. Задача дифференцирования.

Задача дифференцирования функции $u(x)$, заданной приближенно, является некорректной. В самом деле, пусть $\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{1}{N} \sin N^2 x$, где N достаточно велико. Тогда на некотором отрезке $0 \leq x \leq \delta$, ($\delta > \pi/N^2$) имеем

$$\max_{0 \leq x \leq \delta} |\delta u| = \max_{0 \leq x \leq \delta} |\tilde{u}(x) - u(x)| = \frac{1}{N} \leq \varepsilon \text{ при } N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Для погрешности производных $\delta u' = \tilde{u}' - u' = N \cos N^2 x$ имеем

$$\max_{0 \leq x \leq \delta} |\delta u'| = N \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, малому изменению функции $u(x)$ соответствует большое изменение ее производной.

2. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Постановка задачи

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (2.1)$$

Основная задача, связанная с этим уравнением, известна как задача Коши: найти решение уравнения (2.1) в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию:

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.2)$$

Геометрически это означает (рис. 1), что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ при выполнении равенства (2.1).

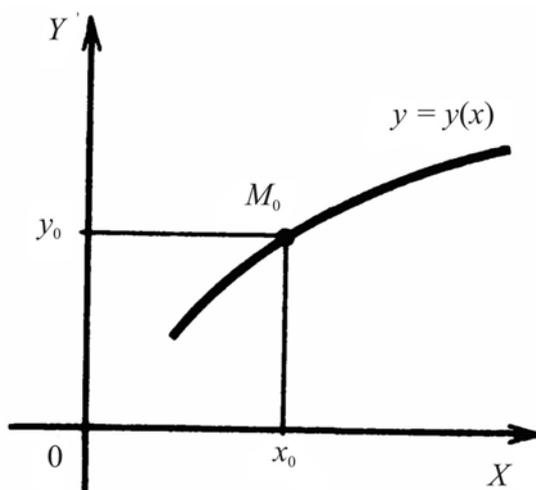


Рис. 1. Геометрическая интерпретация решения задачи Коши (2.1), (2.2)

Существование и единственность решения уравнения (2.1) обеспечиваются теоремой Пикара.

Теорема Пикара. Если функция f определена и непрерывна в некоторой области G , определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad (2.3)$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \leq h$, где h — положительное число, существует, и притом только одно, решение $y = y(x)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Здесь M — постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b . Если $f(x, y)$ имеет ограниченную в G производную $f'_y(x, y)$, то при $(x, y) \in G$ можно принять

$$M = \max |f'_y(x, y)|. \quad (2.4)$$

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные (или специальные) функции. Однако весьма часто при решении практических задач эти методы оказываются либо совсем беспомощными, либо их решение связывается с недопустимыми затратами усилий и времени.

По этой причине для решения задач практики созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Весьма условно, в зависимости от формы представления решения, эти методы подразделяются на три основные группы:

1) *аналитические методы*, применение которых дает решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения;

2) *графические методы*, дающие приближенное решение в виде графика;

3) *численные методы*, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Далее рассмотрим относящиеся к указанным группам некоторые избранные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида (2.1). Что же касается дифференциальных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.5)$$

то для них задача Коши ставится следующим образом: найти решение уравнения (2.5) в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальным условиям

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа. Дифференциальное уравнение n -го порядка можно свести к системе n дифференциальных уравнений первого порядка. Так, например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений основываются на соответствующих методах решения одного уравнения.

2.2. Метод Пикара

Этот метод позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения (2.1) в виде функции, представленной аналитически. Метод Пикара возник в связи с доказательством теоремы существования и единственности решения уравнения (2.1) и является, по сути, одним из применений принципа сжимающих отображений.

Пусть в условиях теоремы существования требуется найти решение уравнения (2.1) с начальным условием (2.2). Проинтегрируем обе части уравнения (2.1) от x_0 до x :

$$\int_{x_0}^x dy = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (2.6)$$

Очевидно, решение интегрального уравнения (2.6) будет удовлетворять дифференциальному уравнению (2.1) и начальному условию (2.2). Действительно, при $x = x_0$ получим

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y) dx = y_0.$$

Вместе с тем интегральное уравнение (2.6) позволяет применить метод последовательных приближений. Положив $y = y_0$, получим из (2.6) следующее первое приближение:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx.$$

Интеграл в правой части содержит только переменную x , после нахождения этого интеграла будет получено аналитическое выражение приближения $y_1(x)$ как функции переменной x . Заменяя теперь в уравнении (2.6) y найденным значением $y_1(x)$, получим второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx$$

и т. д. В общем случае итерационная формула имеет вид

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.7)$$

Циклическое применение формулы (2.7) дает последовательность функций

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x). \quad (2.8)$$

Так как функция f непрерывна в области G , то она ограничена в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку (x_0, y_0) , т. е.

$$|f(x, y)| \leq N. \quad (2.9)$$

Применяя к уравнению (2.7) в условиях теоремы существования принцип сжимающих отображений, нетрудно показать что последовательность (2.8) сходится (имеется в виду сходимость по метрике $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$) в пространстве непрерывных функций φ , определенных на сегменте $|x - x_0| \leq d$, таких, что $|\varphi(x) - y_0| \leq Nd$. Ее предел является решением интегрального уравнения (2.7), а следовательно, и дифференциального уравнения (2.1) с начальными условиями (2.2). Это означает, что k -й член последовательности (2.8) является приближением к точному решению уравнения (2.1) с определенной степенью точности.

Оценка погрешности k -го приближения дается формулой

$$|y(x) - y_k(x)| \leq M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (2.10)$$

где M — константа Липшица (2.4); N — верхняя грань модуля функции f из неравенства (2.9); величина d для определения окрестности $|x - x_0| \leq d$ вычисляется по формуле

$$d = \min\left(a, \frac{b}{N}\right). \quad (2.11)$$

Пример 2.1. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 + 3y,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Запишем для данного случая формулу вида (2.7):

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x (x^2 + 3y_{n-1}) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Начальным приближением будем считать $y_0(x) = 2$. Имеем

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x (x^2 + 6) dx = 2 + 6x + \frac{x^3}{3}.$$

Далее получаем

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x \left(x^2 + 3\left(2 + 6x + \frac{x^3}{3}\right)\right) dx = 2 + 6x + 9x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

Аналогично получаем

$$y_3(x) = 2 + 6x + 9x^2 + 9x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{3x^5}{20} \text{ и т. д.}$$

Оценим погрешность третьего приближения. Для определения области G , заданной неравенствами (2.3), примем, например, $a = 1$, $b = 2$. В прямоугольнике G функция $f(x, y) = x^2 + 3y$ определена и непрерывна, причем (см. (2.4), (2.9))

$$M = \max |f'_y(x, y)| = 3;$$

$$N = \max |f(x, y)| = 7.$$

По формуле (2.11) находим $d = 2/7$. Используя оценочную формулу (2.10), получаем

$$|y(x) - y_3(x)| \leq \frac{3^3 \cdot 2^4}{7^3 \cdot 4!} \approx 0,053.$$

2.3. Метод Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение (2.1) с начальным условием (2.2). Выбрав достаточно малый шаг h , построим, начиная с точки, систему равностоящих точек $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0; x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$ (обозначим ее L_1) с уравнением $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ (рис. 2).

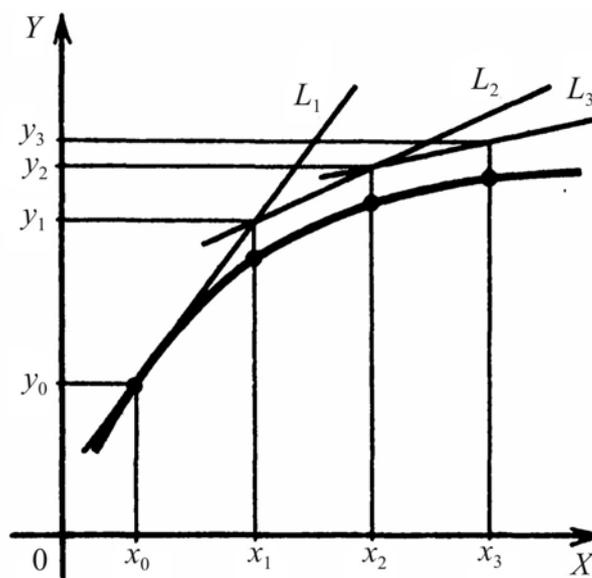


Рис. 2. Замена интегральной кривой на отрезке $[x_0; x_1]$ отрезком касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$

Положим

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h) = z(h). \quad (2.14)$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров $\alpha_i, p_i, \beta_{ij}$. Обозначим $\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$.

Будем предполагать, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(s)}(0) = 0$$

при любых функциях $f(x, y)$, а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой функции $f(x, y)$. По формуле Тейлора справедливо равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad (2.15)$$

где $0 < \theta < 1$. Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а s — порядком погрешности метода. При $q = 1$ будем иметь

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(h) - p_1 h f(x, y);$$

$$\varphi(0) = 0;$$

$$\varphi'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1);$$

$$\varphi''(0) = y''(x+h).$$

Ясно, что равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для любых функций $f(x, y)$ лишь при условии, что $p_1 = 1$. Легко видеть, что при этом значении p_1 из формулы (2.14) получается формула (2.12), т. е. в этом случае мы получаем метод Эйлера. Для погрешности этого метода на шаге согласно (2.15) будем иметь

$$\varphi(h) = \frac{\varphi''(x+\theta h)h^2}{2}.$$

Рассмотрим случай $q = 2$, тогда

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(h) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $\bar{x} = x + \alpha_2 h$, $\bar{y} = y + \beta_{21} h f(x, y)$.

Согласно исходному дифференциальному уравнению

$$y' = f, \quad y'' = f_x + f_y f, \quad y''' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y y'', \quad (2.16)$$

где для краткости через y и f обозначены $y(x)$ и $f(x, y)$ соответственно.

Вычисляя производные функции $\varphi(h)$ и подставляя в выражения для $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, $\varphi''(h)$ значение $h = 0$, получим (с учетом соотношений (2.16)):

$$\varphi(0) = 0;$$

$$\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f;$$

$$\varphi''(0) = (1 - 2p_2 \alpha_2) f_x + (1 - 2p_2 \beta_{21}) f_y f.$$

Очевидно, что требование

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$$

будет выполняться для всех $f(x, y)$ лишь в том случае, если одновременно будут справедливы следующие три равенства относительно четырех параметров:

$$\begin{aligned} 1 - p_1 - p_2 &= 0; \\ 1 - 2p_2\alpha_2 &= 0; \\ 1 - 2p_2\beta_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Произвольно задавая значение одного из параметров и определяя значения остальных из системы (2.17), будем получать различные методы Рунге — Кутты с порядком погрешности $s = 2$.

Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ из (2.17):

$$p_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_{21} = 1.$$

Для этих значений параметров формула (2.14) принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)}{2}.$$

(Следует учесть, что y_{i+1} записано вместо $y(x+h)$, y_i — вместо $y(x)$, а через y_{i+1}^* обозначено выражение $y_i + h f(x_i, y_i)$). Таким образом, в рассматриваемом случае мы приходим к расчетным формулам (2.13), соответствующим методу Эйлера — Коши. Из (2.15) следует, что главная часть погрешности на шаге есть $\frac{\varphi'''(0)}{6} h^3$, т. е. пропорциональна третьей степени шага h).

В вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге — Кутты с $q = 4$ и $s = 4$.

Приведем без вывода один из вариантов соответствующих расчетных формул:

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x, y); & k_3 &= h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right); \\ k_2 &= h f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right); & k_4 &= h f(x+h, y+k_3); \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\Delta y = z(h) - y(x) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Отметим, что в этом случае погрешность на шаге пропорциональна пятой степени шага (h^5). Отсюда, в частности, следует, что при достаточно малом h и малых погрешностях вычислений решение уравнения (2.1), полученное методом Рунге — Кутты по формулам (2.18), будет близким к точному.

Геометрический смысл использования метода Рунге — Кутта с расчетными формулами (2.18) состоит в следующем. Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1 , для которого $\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$.

Затем из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_2 , для которого $\operatorname{tg}\alpha_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$. Наконец, из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3 , для которого $\operatorname{tg}\alpha_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + h, y_i + k_3)$. Этим задается еще одно направление, определяемое углом α_4 , для которого $\operatorname{tg}\alpha_4 = f(x_i + h, y_i + k_3)$. Четыре полученные направления усредняются в соответствии с последней из формул (2.18). На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$.

2.5. Применение метода Рунге — Кутта для приближенного решения систем дифференциальных уравнений

Пусть даны система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y) \quad (2.19)$$

и начальные условия

$$Y(x_0) = Y_0, \quad (2.20)$$

где $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ — матрицы-столбцы искомых функций $y_i(x)$ и правых частей системы уравнений $f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Индекс T означает знак транспонирования.

Приближенное решение начальной задачи (2.19), (2.20) методом Рунге — Кутта с использованием схемы четвертого порядка точности находят в виде

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i; \quad \Delta Y_i = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (2.21)$$

где $Y_i = Y(x_i)$, ($i = 0, 1, 2, \dots$), а матрицы-столбцы K_m определяются формулами

$$K_1 = hF(x_i, Y_i); \quad K_2 = hF(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{K_1}{2});$$

$$K_3 = hF(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{K_2}{2}); \quad K_4 = hF(x_i + h, Y_i + K_3).$$

Например, для системы двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = \varphi(x, y, z) \\ z' = \phi(x, y, z) \end{cases} \quad (2.22)$$

при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ процесс нахождения решения $y(x)$, $z(x)$ на i -м шаге сводится к операциям, приведенным ниже.

При заданных или найденных значениях h , x_i , y_i , z_i вычисляют последовательно

$$\begin{aligned} k_1 &= h\varphi(x_i, y_i, z_i); & m_1 &= h\phi(x_i, y_i, z_i); \\ k_2 &= h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{m_1}{2}); & m_2 &= h\phi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{m_1}{2}); \\ k_3 &= h\varphi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{m_2}{2}); & m_3 &= h\phi(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{m_2}{2}); \\ k_4 &= h\varphi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3); & m_4 &= h\phi(x_i + h, y_i + k_3, z_i + m_3). \end{aligned}$$

Затем находят Δy_i и Δz_i по формулам

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).$$

Значения $y(x)$ и $z(x)$ на шаге $i + 1$ определяются выражениями

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i.$$

2.6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений в MathCAD

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями в пакете MathCAD имеется множество функций, реализующих алгоритмы основных методов, таких как метод Рунге — Кутты с постоянным шагом, адаптивный метод Рунге — Кутты с переменным шагом, метод Адамса и др. Алгоритмы методов Эйлера не встроены в MathCAD по причине их низкой точности, но они могут быть реализованы самостоятельно.

Перейдем к рассмотрению некоторых встроенных в MathCAD функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Функция Odesolve ($[vector]$, x , b , $[nstep]$) возвращает решение обыкновенного дифференциального уравнения с заданными начальными (задача Коши) или граничными (краевая задача) условиями. Функция Odesolve используется совместно с ключевым словом Given, организующим вычислительный блок.

Параметры:

vector — вектор искомых функций (задается только в случае решения систем дифференциальных уравнений);

x — независимая переменная;

b — конечная точка решения (начальная точка указывается внутри вычислительного блока);

nstep — необязательный параметр, задающий количество шагов интегрирования (по умолчанию используется значение 1000).

Удобной особенностью данной функции является то, что дифференциальное уравнение записывается в его естественной математической форме. Следует обратить внимание, что при записи дифференциального уравнения и начальных условий внутри блока вычислений Given необходимо использовать знак логического равенства (Ctrl+=).

Решение, полученное с помощью функции Odesolve, представляет собой функцию, значение которой может быть вычислено в произвольной точке того интервала, на котором найдено решение дифференциального уравнения (для этого задействованы внутренние механизмы интерполирования).

Численный метод, по которому работает функция Odesolve, можно выбирать из контекстного меню. В зависимости от версии пакета MathCAD это может быть один из методов Адамса или Рунге — Кутта 4-го порядка с фиксированным и переменным шагом, а также другие методы.

Функция rkfixed (*ic, a, b, nstep, D*) возвращает решение обыкновенного дифференциального уравнения (или системы уравнений) первого порядка с заданными начальными условиями. Функция использует метод Рунге — Кутта 4-го порядка точности с фиксированным шагом.

Параметры:

ic — вектор начальных условий размерности *n*, где *n* — порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система уравнений);

a — начальная точка интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений; начальные условия, заданные в векторе *ic*, значение решения в точке *a*.

b — конечная точка интервала, на котором ищется решение дифференциальных уравнений, конечное значение независимой переменной;

nstep — параметр, задающий число точек (не считая начальной точки), в которых ищется приближенное решение, при помощи этого аргумента определяется число строк ($1 + nstep$) в матрице, возвращаемой функцией rkfixed.;

D — вектор правых частей дифференциальных уравнений, т. е. функция, возвращающая значение в виде вектора из *n* элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

Наиболее трудная часть решения дифференциального уравнения состоит в определении функции $D(x, y)$, которая содержит вектор первых производных от неизвестных функций. Для этого достаточно просто разрешить уравнение относительно первой производной. В случае нелинейных дифферен-

циальных уравнений это может быть трудно, но иногда удается разрешить уравнение относительно в символьном виде при помощи команды «Решить» относительно переменной из меню «Символика» и подставить это решение в определение для функции $D(x, y)$.

Для дифференциального уравнения второго порядка:

вектор начальных условий состоит из двух элементов: значений функции и ее первой производной в начальной точке интервала;

функция $D(x, y)$ является вектором с двумя элементами $D(x, y) = \begin{pmatrix} (y'(x)) \\ (y''(x)) \end{pmatrix}$;

матрица, полученная в результате решения, содержит три столбца: первый столбец содержит значения x , в которых ищется решение; второй столбец содержит $y(x)$; третий — $y'(x)$.

Решение дифференциального уравнения, полученное с помощью функции `rkfixed`, представляет собой вектор значений искомой функции, в отличие от `Odesolve`, которая дополнительно интерполирует полученные дискретные значения.

Функция `Rkadapt` ($ic, a, b, nstep, D$) возвращает решение обыкновенного дифференциального уравнения (или системы уравнений) первого порядка с заданными начальными условиями. Функция использует адаптивный метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности с изменяющимся шагом и по своему использованию полностью аналогична функции `rkfixed`.

Рассмотренная ранее функция `Odesolve` позволяет решать обыкновенные дифференциальные уравнения (и системы уравнений) второго и высших порядков в их непосредственной формулировке.

Другие функции, такие как `rkfixed` и `Rkadapt`, позволяют решать дифференциальные уравнения (и системы уравнений) только первого порядка. Поэтому при решении уравнений второго и высших порядков они должны быть сведены к эквивалентной системе уравнений первого порядка.

3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

3.1. Основная идея метода

Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в представлении рассчитываемой конструкции в виде совокупности элементов простой формы, соединенных между собой в отдельных точках. По сути дела, сплошная среда с бесконечным числом степеней свободы заменяется набором подобластей, имеющих конечное число степеней свободы. При таком подходе искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения, деформации и т. д.) внутри каждого конечного элемента (КЭ) выражаются с помощью аппроксимирующих функций через узловые значения этих величин. Распределенные внешние нагрузки заменяются эквивалентными узловыми силами. В математическом плане задача состоит в приведении дифференциальных уравнений или энергетического функционала, описывающих рассматриваемую конструкцию, к системе алгебраических уравнений, решение которой дает значения искомых узловых неизвестных.

Метод конечных элементов имеет очень широкое распространение в практике расчетов на прочность, устойчивость и колебания строительных, машиностроительных, авиационных конструкций. С помощью МКЭ можно успешно выполнить анализ широкого класса стержневых систем (фермы, рамы и т. д.), тонкостенных пространственных конструкций (плиты перекрытий, оболочки покрытий и т. д.), массивных трехмерных тел, а также комбинированных систем, состоящих из одномерных, двумерных и трехмерных элементов.

МКЭ отличается широкой областью применимости, инвариантностью по отношению к геометрии конструкции и физическим характеристикам материалов, относительная простота учета взаимодействия конструкций с окружающей средой (механические, температурные, коррозионные воздействия, граничные условия и т. д.), высокая степень приспособляемости к автоматизации всех этапов расчета. Метод имеет простую физическую интерпретацию и тесно связан с методом перемещений, который широко используется в строительной механике.

На базе конечно-элементного подхода разработано большое количество мощных программных комплексов. Среди них можно отметить ABAQUS, ADINA, ANSYS, COSMOS/M, MSC/NASTRAN, ЛИРА, SCAD, STARK, СТАДИО. Большинство из них имеет обширную библиотеку конечных эле-

ментов и дает возможность выполнять расчеты на прочность, устойчивость и колебания, учитывать физическую и геометрическую нелинейности, ортотропию материала, температурные нагрузки и т. д. Представленный выше перечень программных продуктов, реализующих МКЭ, является далеко не полным и лишь отражает ситуацию в данной области в настоящий момент.

Несомненно, МКЭ имеет существенные преимущества по сравнению с другими подходами и в значительной степени универсален. Вместе с тем его следует рассматривать как одну из многочисленных ступеней развития средств численного исследования при проектировании.

3.2. Общая схема алгоритма метода конечных элементов

3.2.1. Основные этапы

Метод конечных элементов предусматривает следующие основные этапы:

1. *Идеализация физической системы.* Под идеализацией понимают процесс перехода от исходной физической системы к математической модели. Этот процесс является наиболее важным шагом при решении технических или инженерных задач.

Ключевым пунктом в этом процессе является понятие модели. Математическое моделирование (идеализация) есть процесс, с помощью которого инженер переходит от реальной физической системы к математической модели системы. Данный процесс называется идеализацией, поскольку математическая модель необходимо абстрагируется от физической реальности.

В качестве примера реальной физической системы рассмотрим инженерную конструкцию в виде плоской пластины, нагруженную поперечными силами. Математические модели данной системы, которые инженер может использовать для анализа напряжений в пластине, могут быть следующими:

1. Модель очень тонкой пластины, основанная на теории изгиба мембран.
2. Модель тонкой пластины, основанная на классической теории Кирхгоффа.
3. Модель достаточно толстой пластины, основанная, например, на теории Миндлина — Рейсснера.
4. Модель очень толстой пластины, основанная на трехмерной теории упругости.

Очевидно, инженер должен обладать достаточными теоретическими знаниями, чтобы правильно выбрать соответствующую математическую модель системы (конструкции), которую ему необходимо исследовать.

2. *Дискретизация рассматриваемой области.* Рассчитываемая конструкция разбивается воображаемыми точками, линиями или поверхностями на элементы конечных размеров (конечные элементы). Предполагается, что элементы связаны между собой в узловых точках, расположенных на их границах. В некоторых задачах строительной механики в качестве искомым неизвестных помимо узловых перемещений принимаются и их частные производные.

3. *Построение интерполирующих функций.* Выбирается система функций (чаще всего кусочно-полиномиальная), однозначно определяющая перемещения внутри каждого конечного элемента через перемещения узловых точек. Интерполирующие функции подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность искомых величин (перемещений и их производных) вдоль границ элемента.

4. *Вывод основных геометрических и физических соотношений.* На основе выбранной системы интерполирующих функций выводятся зависимости между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения), а также между напряжениями и деформациями (физические соотношения).

5. *Построение матрицы жесткости конечного элемента.* С помощью принципа Лагранжа на основе полученных геометрических и физических соотношений строится матрица жесткости конечного элемента.

6. *Получение системы уравнений метода конечных элементов.* Каждая матрица жесткости отдельного конечного элемента включается в глобальную матрицу жесткости в цикле по элементам. Таким образом, формируется система алгебраических уравнений всей конструкции (уравнения равновесия), которая имеет вид

$$Kz = P,$$

где K — матрица жесткости системы (ансамбля) конечных элементов; z — вектор неизвестных узловых перемещений; P — вектор узловых нагрузок.

В матрице жесткости K , записанной выше системы уравнений, необходимо учесть граничные условия, так как в противном случае эта матрица будет вырожденной.

7. *Решение системы алгебраических уравнений.* Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используются как точные, так и (при высоком порядке системы) итерационные методы. Построенные на их основе эффективные численные процедуры учитывают симметрию и ленточную структуру матрицы жесткости системы.

8. *Определение деформаций и напряжений.* Деформации, напряжения и усилия в конструкции определяются с помощью найденных узловых перемещений на основе геометрических и физических соотношений.

Ниже рассмотрим некоторые из этих этапов более подробно.

3.2.2. Дискретизация рассматриваемой области

Разбиение конструкции на конечные элементы (КЭ) представляет собой первый и весьма важный шаг в процедуре решения задачи по МКЭ, поскольку от него во многом зависит точность получаемого решения. Успех на этом этапе зависит в первую очередь от имеющихся инженерных навыков. Неудачно выполненное разбиение области на конечные элементы может привести к ошибочным результатам. При назначении сетки КЭ возникает задача оптимального разбиения конструкции на подобласти. При этом следует иметь в виду, что размеры элементов должны быть достаточно малыми, что-

бы обеспечить приемлемую точность решения, а с другой стороны — использование густой сетки приводит к большим системам алгебраических уравнений, решение которых связано со значительным объемом вычислительной работы.

В процессе разбиения области на конечные элементы необходимо учитывать некоторые общие представления об окончательных результатах расчета, чтобы уменьшить размеры конечных элементов в зонах концентрации напряжений, где искомые величины быстро меняются, и увеличить размеры КЭ там, где искомые величины меняются медленно.

Важным моментом в процессе решения задачи по МКЭ является нумерация узлов сетки, поскольку от этого зависит ширина ленты матрицы разрешающих уравнений, а следовательно, время счета и объем используемой памяти ЭВМ.

В настоящее время разработаны сервисные программы автоматизированной разбивки конструкции на конечные элементы и рациональной нумерации узлов.

3.2.3. Построение интерполирующих функций

МКЭ основан на аппроксимации непрерывной функции, определенной на всей области, дискретной моделью с помощью кусочно-непрерывных функций, определенных на подобластях (конечных элементах).

Запишем перемещения, являющиеся функциями координат произвольной точки конечного элемента, через компоненты вектора узловых перемещений с помощью интерполирующей функции (функции формы или базисной функции):

$$u = Nz, \quad (3.1)$$

где $N = [N_1, N_2, \dots, N_s]$ — матрица функции формы; $z = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}^T$ — вектор узловых перемещений конечного элемента; s — количество степеней свободы КЭ.

Функции (3.1) должны удовлетворять критериям полноты и совместности. Рассмотрим их.

1. Критерий полноты. Интерполирующая функция должна обеспечивать постоянные значения рассматриваемых величин при уменьшении размеров элемента.

Для выполнения этого условия интерполирующая функция должна представлять собой полный полином как минимум степени p , где p — наивысший порядок производной, входящей в функционал.

Условие полноты удовлетворяется в том случае, когда $\sum_{i=1}^s N_i = 1$.

2. Критерий совместности. Интерполирующая функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до $(n - 1)$ -го порядка включительно (где n — максимальный порядок производной в подынтегральном выражении функционала энергии) на границе между элементами.

Критерии полноты и совместности представляют собой достаточные условия сходимости метода конечных элементов. При их выполнении с уменьшением размеров конечного элемента приближенные решения МКЭ монотонно сходятся к точному решению. Однако это не означает, что нарушение данных критериев приводит к невозможности получения достоверного решения. Существуют несовместные и даже неполные элементы, которые дают высокую точность и быструю сходимость.

3.2.4. Вывод основных геометрических и физических соотношений

В общем виде зависимость между деформациями и перемещениями (геометрические соотношения) записывается следующим образом:

$$\varepsilon = Bz, \quad (3.2)$$

где ε — вектор деформаций; z — вектор узловых перемещений; B — матрица, связывающая вектор узловых перемещений с вектором, содержащим компоненты тензора деформации.

Таким образом, полагается, что зависимость (3.2) между деформациями и узловыми перемещениями носит линейный характер. Линейной зависимости отвечают такие условия работы конструкции, когда деформации и углы поворота малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота малы по сравнению с соответствующими компонентами деформации.

Физические соотношения, определяющие зависимость между напряжениями и деформациями, имеют вид

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (3.3)$$

где σ — вектор, содержащий компоненты тензора напряжений; D — матрица упругости.

Уравнения состояния (3.3) представляют собой обобщенный закон Гука, устанавливающий прямопропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями и справедливый для определенного класса материалов на определенном участке графика $\sigma — \varepsilon$.

3.2.5. Построение матрицы жесткости конечного элемента

Решение задач расчета конструкций базируется на двух основных подходах. В первом случае решаются дифференциальные уравнения с заданными граничными условиями. Во втором случае записывается условие стационарности интегральной величины, связанной с работой напряжений и внешней приложенной нагрузки и представляющей собой полную потенциальную энергию системы. Для расчета конструкций в рамках МКЭ используется второй подход.

Как известно, полная потенциальная энергия упругой системы определяется по формуле

$$\Pi(z) = W(z) - A(z),$$

где W — потенциальная энергия деформации; A — потенциал внешних сил.

Потенциальная энергия деформации упругой системы определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV,$$

где V — объем, занимаемый телом, а потенциал внешних распределенных нагрузок определяется по формуле

$$A = \int_S u^T p dS,$$

где p — вектор внешних распределенных нагрузок; S — площадь, на которой приложена нагрузка.

При этом деформации и напряжения, входящие в выражение для потенциальной энергии, выражаются через узловые перемещения.

Получение уравнений МКЭ в перемещениях основано на одном из фундаментальных энергетических принципов механики — принципе Лагранжа, согласно которому для системы, находящейся в состоянии равновесия, полная потенциальная энергия принимает стационарное значение. Это условие записывается в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0.$$

Будем считать, что значение полной потенциальной энергии для всей области V равно сумме энергий отдельных конечных элементов:

$$\Pi(z) = \sum_{i=1}^m \Pi^i(z^i) = \sum_{i=1}^m (W^i(z^i) - A^i(z^i)), \quad (3.4)$$

где m — количество конечных элементов.

Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial W^i(z)}{\partial z} - \frac{\partial A^i(z)}{\partial z} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Рассмотрим отдельный конечный элемент, индекс i при этом опускаем:

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma dV - \int_S u^T p dS = \frac{1}{2} \int_V (Bz)^T DBz dV - \int_S (Nz)^T p dS = \\ &= \frac{1}{2} z^T \left(\int_V B^T DBz dV \right) z - z^T \int_S N^T p dS = \frac{1}{2} z^T Rz - z^T P, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$K = \int_V B^T DB dV \quad (3.7)$$

представляет собой матрицу жесткости конечного элемента, а

$$P = \int_S N^T p dS \quad (3.8)$$

есть вектор узловых нагрузок.

3.2.6. Получение системы уравнений метода конечных элементов

Для выполнения операции суммирования необходимо преобразовать векторы узловых перемещений $z^{(i)}$ и узловой нагрузки $P^{(i)}$ для отдельного конечного элемента в соответствующие векторы z и P для всей системы, что может быть сделано с помощью некоторой булевой матрицы $H^{(i)}$, содержащей в качестве элементов только нули и единицы:

$$\begin{aligned} z^{(i)} &= H^{(i)} z; \\ P^{(i)} &= H^{(i)} P. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подстановка формул (3.9) в выражение для полной потенциальной энергии конечного элемента (3.6) дает

$$\begin{aligned} \Pi^{(i)} &= \frac{1}{2} (H^{(i)} z)^T K^{(i)} H^{(i)} z - (H^{(i)} z)^T H^{(i)} P = \\ &= \frac{1}{2} z^T H^{(i)T} K^{(i)} H^{(i)} z - z^T H^{(i)T} H^{(i)} P. \end{aligned}$$

Тогда дифференцирование по z , в соответствии с формулой (3.5), приводит к следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^m (H^{(i)T} K^{(i)} H^{(i)} z - H^{(i)T} H^{(i)} P) = 0, \quad (3.10)$$

где использовано правило дифференцирования матричных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial z} (z^T K z) = 2Kz.$$

Система (3.10), которую можно записать в виде

$$Kz = P, \quad (3.11)$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов, являющихся уравнениями равновесия в перемещениях. Как правило, решение системы (3.11) выполняется методом Гаусса или итерационными методами.

Матрица жесткости отдельного элемента $H^{(i)T} K^{(i)} H^{(i)}$, фигурирующая в формуле (3.10), представляет собой расширенную матрицу, размерность которой равна размерности глобальной матрицы. Поэтому использование процедуры суммирования в форме (3.10) при численной реализации МКЭ неэффективно. В практических расчетах выполняется прямое построение глобальной матрицы жесткости. В этом случае строится матрица K для отдельного конечного элемента по формуле (3.7), имеющая размерность $S \times S$. Затем строкам и столбцам этой матрицы приписываются номера глобальных степеней свободы, что позволяет определить местоположение коэффициентов матрицы жесткости КЭ в глобальной матрице жесткости. После этого в предварительно обнуленную глобальную матрицу заносятся коэффициенты матрицы жесткости КЭ на то место, которое определено их адресом.

Пусть, например, система состоит из двух КЭ, содержащих по два узла, в каждом из которых имеется одно неизвестное (одна степень свободы). Общее количество узлов системы равно 3, размерность глобальной матрицы — 3×3 , элементы соединены между собой во 2-ом узле. Матрицы жесткости 1-го и 2-го КЭ с соответствующей нумерацией коэффициентов и глобальная матрица имеют вид

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix}; \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}.$$

В матрице K системы уравнений (3.11) необходимо учесть граничные условия, в противном случае она будет вырожденной, т. е. ее определитель будет равен нулю.

Учет граничных условий может быть осуществлен различными способами:

1. Из матрицы K удаляются k -я строка и k -й столбец, соответствующие перемещению $z_k = 0$. После этого строки и столбцы матрицы перенумеровываются. Соответственно уменьшается размерность вектора узловых перемещений.

2. Уравнение $z_k = 0$, соответствующее граничному условию, формируется в составе матрицы K . Для получения $z_k = 0$ в матрице K k -я строка и k -й столбец, а также соответствующий элемент в векторе внешних нагрузок P заполняются нулями. На место диагонального элемента $r_{r,r}$ в матрице K ставится единица. В результате порядок матрицы не изменяется, а заданные перемещения получают нулевые значения.

3. Для получения $z_k = 0$ диагональный элемент $r_{r,r}$ умножается на большое число. Порядок матрицы при этом не меняется.

3.2.7. Определение деформаций и напряжений

В результате решения системы уравнений (3.11) определяется вектор узловых перемещений всей конструкции. На основе найденных значений узловых перемещений по формуле (3.2) определяется вектор деформаций КЭ, а по формуле (3.3) — вектор напряжений.

3.3. Двумерный симплекс-элемент

Классификация конечных элементов может быть проведена в соответствии с порядком многочленов — функций этих элементов. При этом рассматриваются три следующие группы элементов:

- 1) симплекс-элементы;
- 2) комплекс-элементы;
- 3) мультиплекс-элементы.

Симплекс-элементам соответствуют многочлены первой степени. Комплекс-элементам — многочлены более высокого порядка.

В симплекс-элементе число узлов равно размерности пространства +1. В комплекс-элементе число узлов больше этой величины.

Для мультиплекс-элементов также используются многочлены высокого порядка, но границы элементов при этом должны быть параллельны координатным осям.

Рассмотрим формирование матрицы жесткости для двумерного симплекс-элемента.

Двумерный симплекс-элемент представляет собой треугольник с узлами, расположенными в его вершинах (рис. 3).

Узлы КЭ нумеруются против часовой стрелки, начиная с некоторого произвольно выбранного i -го узла. Координаты i -го, j -го и k -го узлов по оси x обозначены через x_i, x_j, x_k , по оси y — через y_i, y_j, y_k . Каждый узел имеет две степени свободы — перемещение u вдоль оси x и перемещение v вдоль оси y .

Интерполирующие функции, определяющие перемещение произвольной точки КЭ вдоль осей x и y , принимаются в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y; \\ v(x, y) &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y. \end{aligned} \tag{3.12}$$

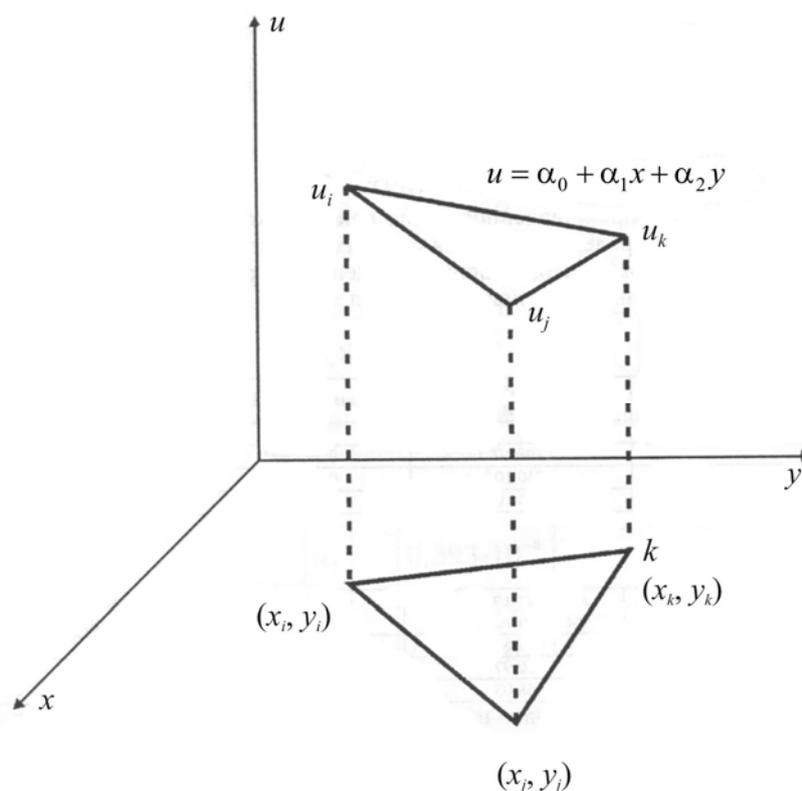


Рис. 3. Двумерный симплекс-элемент

Коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_5$ определяются с помощью граничных условий: $u = u_i, v = v_i$ при $x = x_i$ и $y = y_i$; $u = u_j, v = v_j$ при $x = x_j$ и $y = y_j$; $u = u_k, v = v_k$ при $x = x_k$ и $y = y_k$.

Определим коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$. Для этого подставим граничные условия для функции в первое выражение (3.12), что приведет к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i; \\ u_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j; \\ u_k &= \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k \end{aligned}$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}. \quad (3.13)$$

Определитель системы (3.13) равен удвоенной площади F треугольного элемента:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2F. \quad (3.14)$$

Тогда по правилу Крамера:

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{2F}$$

или

$$\alpha_0 = \frac{1}{2F} \left[u_i (x_j y_k - x_k y_j) - u_j (x_i y_k - x_k y_i) - u_k (x_i y_j - x_j y_i) \right].$$

Аналогично определяются коэффициенты α_1 и α_2 . После подстановки выражений для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ в первую формулу (3.12) имеем

$$u(x, y) = \frac{1}{2F} \left[(a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \right], \quad (3.15)$$

где

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j. \quad (3.16)$$

Остальные коэффициенты в (3.15) получаются по формулам (3.16) циклической перестановкой индексов (индекс i заменяется на индекс j , индекс j — на индекс k , индекс k — на индекс i).

Аналогично выполняем:

$$v(x, y) = \frac{1}{2F} \left[(a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \right]. \quad (3.17)$$

Тогда в матричном виде

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = Nz = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2F} (a_i + b_i x + c_i y); & N_j &= \frac{1}{2F} (a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= \frac{1}{2F} (a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Геометрические соотношения, связывающие деформации и перемещения в рамках плоской задачи теории упругости, записываются с использованием формул (3.15), (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2F} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2F} (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2F} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k). \end{aligned}$$

Соотношения могут записываться и в матричном виде:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = Bz,$$

где

$$B = \frac{1}{2F} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

представляет собой матрицу градиентов. Величина удвоенной площади конечного элемента $2F$ в выражении (3.19) подсчитывается по формуле (3.14).

Физические соотношения, определяющие зависимость между напряжениями и деформациями в плоской задаче теории упругости, записываются в виде

$$\sigma = D\varepsilon,$$

где

$$D = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_1 & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

есть матрица упругости.

В случае плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$) в формуле (3.20) следует принять

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (3.21)$$

а для обобщенного плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$)

$$E_1 = E; \quad \nu_1 = \nu. \quad (3.22)$$

Формулы (3.21) и (3.22) соответствуют изотропному материалу с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . Не представляет большого труда построить матрицы упругости для ортотропного материала, когда жесткостные характеристики различны в двух взаимно перпендикулярных направлениях

Поскольку матрицы B и D содержат только константы, объемный интеграл определяющий матрицу жесткости элемента в формуле (3.7), легко вычисляется

$$K = \int_v B^T DB dV = B^T DB \int_v dV \quad (3.23)$$

или

$$K = B^T DB tF. \quad (3.24)$$

где t — толщина элемента; F — его площадь.

Обычно матрица жесткости (3.24) определяется численно. Для этого вначале находятся численные значения коэффициентов матриц B и D , а затем выполняется перемножение в соответствии с выражением (3.23) или (3.24).

4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

4.1. Лабораторная работа 1.

Приближенное решение дифференциальных уравнений в среде интегрированной системы MathCAD

4.1.1. Цель выполнения

Требуется изучить приближенные методы решения дифференциальных уравнений, научиться применять численные методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; составить программы, реализующие различные методы Эйлера и Рунге — Кутты; изучить влияние величины шага интегрирования на точность результатов, полученных различными методами; научиться применять встроенные в MathCAD средства для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.1.2. Задания

Лабораторная работа состоит из трех заданий. Каждое задание содержит 10 различных вариантов. Ниже приведена таблица соответствия вариантов трех заданий и студенческих вариантов по журналу (табл. 1).

Таблица 1

Распределение заданий по вариантам

Номер варианта	Номер задания	Номер варианта	Номер задания
1	1.1; 2.1; 3.1	16	1.6; 2.8; 3.9
2	1.2; 2.2; 3.2	17	1.7; 2.9; 3.10
3	1.3; 2.3; 3.3	18	1.8; 2.10; 3.1
4	1.4; 2.4; 3.4	19	1.9; 2.1; 3.2
5	1.5; 2.5; 3.5	20	1.10; 2.10; 3.6
6	1.6; 2.6; 3.6	21	1.1; 2.6; 3.7
7	1.7; 2.7; 3.7	22	1.2; 2.7; 3.8
8	1.8; 2.8; 3.8	23	1.3; 2.8; 3.9
9	1.9; 2.9; 3.9	24	1.4; 2.9; 3.10
10	1.10; 2.10; 3.10	25	1.5; 2.10; 3.1
11	1.1; 2.3; 3.4	26	1.6; 2.1; 3.2
12	1.2; 2.4; 3.5	27	1.7; 2.7; 3.3
13	1.3; 2.5; 3.6	28	1.8; 2.5; 3.4
14	1.4; 2.6; 3.7	29	1.9; 2.3; 3.5
15	1.5; 2.7; 3.8	30	1.10; 2.1; 3.6

Выберите индивидуальное задание из [табл. 1](#) по варианту, номер которого совпадает с порядковым номером в групповом журнале.

Задание 1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a; b]$ при заданном начальном условии $y(a) = c$.

Задание 2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y)$ на отрезке $[a; b]$ при заданных начальных условиях $y(a) = c, y'(a) = d$.

Задание 3. Решить задачу Коши для системы дифференциальных урав-

нений
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} = f(x, y, z) \end{cases}$$
 на отрезке $[a; b]$ при заданных начальных условиях $y(a) = c, z(a) = d$.

Исходные данные ко всем заданиям представлены в табл. 2, 3, 4.

Таблица 2

Исходные данные к заданию 1

Номер задания	Исходные данные	Номер задания	Исходные данные
1.1	$y' = x + y - x^2;$ $a = 0; b = 1; c = 0,7$	1.6	$y' = \cos x + y;$ $a = 1; b = 2; c = 0,9$
1.2	$y' = x + y + 1;$ $a = 0; b = 1; c = 1,8$	1.7	$y' = 4,1x - y + 0,6;$ $a = 0,6; b = 2,6; c = 3,4$
1.3	$y' = \cos(x) + y + 1,3;$ $a = -1; b = 1; c = 0,2$	1.8	$y' = x^2 + y - x;$ $a = 1,5; b = 2; c = 2,1$
1.4	$y' = x^2 + x + y;$ $a = 0; b = 1; c = 0,3$	1.9	$y' = x + e^x + y;$ $a = 0; b = 0,5; c = 0,3$
1.5	$y' = x + y + 1;$ $a = 0; b = 0,5; c = 0,3$	1.10	$y' = \sin x + y;$ $a = 2,1; b = 3,1; c = 2,5$

Таблица 3

Исходные данные к заданию 2

Номер задания	Исходные данные	Номер задания	Исходные данные
2.1	$y'' = 4e^x - y';$ $a = 0; b = 1; c = 4; d = -3$	2.6	$y'' = -\frac{(y')^2 - 1}{1 + x^2};$ $a = 0; b = 0,5; c = 1; d = 1$
2.2	$y'' = -\frac{xy'}{x^2};$ $a = 1; b = 1,5; c = 5; d = -1$	2.7	$y'' = e^{5x} + 3y';$ $a = 0; b = 1,5; c = 2,2; d = 0,8$
2.3	$y'' = 2e^x + 2y';$ $a = 0; b = 1; c = -1; d = 0$	2.8	$y'' = \frac{2y'}{x^2};$ $a = 1; b = 2; c = 0,83; d = 0,66$
2.4	$y'' = \cos 3x - 4y';$ $a = 0; b = 1; c = 0; d = 0$	2.9	$y'' = 2e^x + 2y';$ $a = 0; b = 1; c = -1; d = 0$
2.5	$y'' = xe^x - 2y' - 2y;$ $a = 0; b = 1,5; c = 0; d = 0$	2.10	$y'' = x^2 - x + 2 - y';$ $a = 0; b = 1; c = 1; d = 0$

Исходные данные к заданию 3

Номер задания	Исходные данные	Номер задания	Исходные данные
3.1	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (z - y)x \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x} \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 0; d = 1$	3.6	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - yz}{x^2 - yz} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z(x + y)}{x^2 - yz} \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 1; d = -1$
3.2	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = (z - y)x \\ \frac{dz}{dx} = (z + y)x \end{cases}$ $a = 0; b = 1;$ $c = 1; d = 1$	3.7	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z + y - 1 + \frac{2z}{x} \\ \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{2z}{x} \end{cases}$ $a = 1; b = 2;$ $c = 1/3; d = -1/3$
3.3	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + z + y - 3y^2 + 1 \\ \frac{dz}{dx} = \sin(2z^2) + x + y \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 1; d = 0,5$	3.8	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -x + z + 2y \\ \frac{dz}{dx} = x + 3z + 2y \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 2; d = -2$
3.4	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3x - z - y \\ \frac{dz}{dx} = x - y + z \end{cases}$ $a = 0; b = 1;$ $c = 1; d = -1$	3.9	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -3y - z \\ \frac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$ $a = 0; b = 1;$ $c = 2; d = -1$
3.5	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \cos 2x - 4z \\ \frac{dz}{dx} = \sin 2x - 4y \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 0; d = 0,1$	3.10	$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4x - 2y - 4z \\ \frac{dz}{dx} = x^2 - y + z \end{cases}$ $a = 0; b = 1; c = 0; d = 1$

4.1.3. Порядок выполнения

1. Изучить теоретический материал по теме «Приближенное решение дифференциальных уравнений».

2. Выполнить задание 1, применяя метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге — Кутта, а также встроенную функцию системы MathCAD rkfixed.

3. Оценить погрешность этих методов, используя метод двойного просчета с шагом $2h$ и h . Это соответствует разбиению отрезка $[a; b]$ на 5 и 10 частей.

4. Выполнить задание 2 методом Рунге — Кутта, а также используя встроенную функцию rkfixed.

5. Выполнить задание 3 методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера, а также используя встроенную функцию rkfixed.

4.1.4. Примеры выполнения заданий

4.1.4.1. Задание 1

Решение дифференциального уравнения первого порядка.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = xy$ на отрезке $[0; 1]$ при заданном начальном условии $y(0) = 1$ (рис. 4).

Метод Эйлера

Метод Эйлера

$a := 0$ $b := 1$ $c := 1$ Задание исходных значений

$N := 10$ Задание числа разбиений отрезка $[a,b]$

$h := \frac{b-a}{N}$ $h = 0.1$ Вычисление шага

$f(x,y) := x \cdot y$ Задание правой части уравнения

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Задание начального условия

$i := 0..N - 1$

$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \end{pmatrix}$ Итерационные уравнения

Рис. 4. Пример решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения, построим его график и оценим погрешность метода Эйлера в последней точке интервала, используя метод двойного просчета, т. е. при $N = 5$ и $N = 10$ (рис. 5, [6](#)).

$x =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td></tr><tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td></tr><tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">0.1</td></tr><tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">0.2</td></tr><tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">0.3</td></tr><tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">0.4</td></tr><tr><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">0.5</td></tr><tr><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">0.6</td></tr><tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">0.7</td></tr><tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">0.8</td></tr><tr><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">0.9</td></tr><tr><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1</td></tr></table>		0	0	0	1	0.1	2	0.2	3	0.3	4	0.4	5	0.5	6	0.6	7	0.7	8	0.8	9	0.9	10	1
	0																								
0	0																								
1	0.1																								
2	0.2																								
3	0.3																								
4	0.4																								
5	0.5																								
6	0.6																								
7	0.7																								
8	0.8																								
9	0.9																								
10	1																								
$y =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"><tr><td></td><td style="text-align: center;">0</td></tr><tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td></tr><tr><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1.01</td></tr><tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">1.03</td></tr><tr><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">1.061</td></tr><tr><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">1.104</td></tr><tr><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">1.159</td></tr><tr><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">1.228</td></tr><tr><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1.314</td></tr><tr><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">1.419</td></tr><tr><td style="text-align: center;">10</td><td style="text-align: center;">1.547</td></tr></table>		0	0	1	1	1	2	1.01	3	1.03	4	1.061	5	1.104	6	1.159	7	1.228	8	1.314	9	1.419	10	1.547
	0																								
0	1																								
1	1																								
2	1.01																								
3	1.03																								
4	1.061																								
5	1.104																								
6	1.159																								
7	1.228																								
8	1.314																								
9	1.419																								
10	1.547																								

Рис. 5. Таблица значений решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера

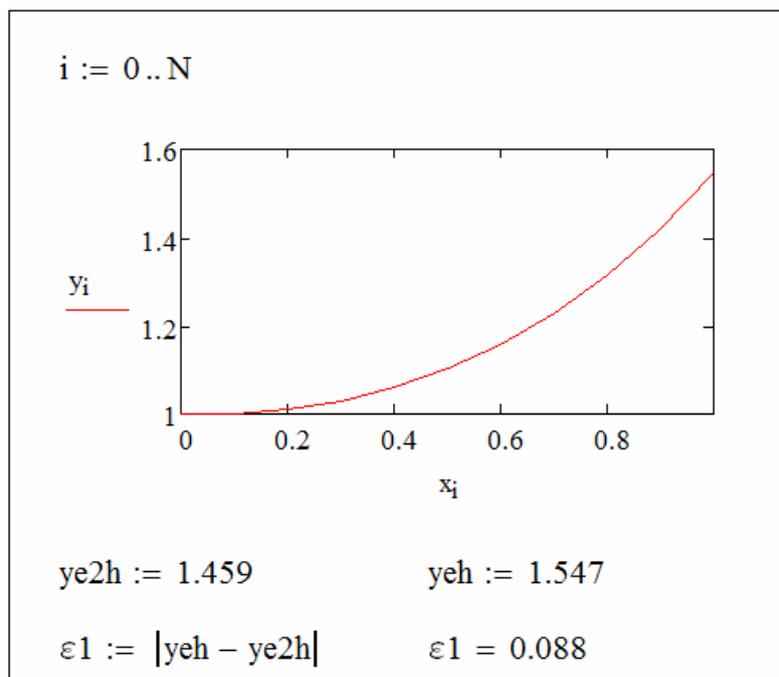


Рис. 6. График и оценка погрешности решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера

Модифицированный метод Эйлера или метод Эйлера — Коши

Ниже приводится образец документа в MathCAD, который реализует данный метод (рис. 7).

Модифицированный метод Эйлера или метод Эйлера- Коши	
$a := 0$ $b := 1$ $c := 1$	Задание исходных значений
$N := 10$	Задание числа разбиений отрезка [a,b]
$h := \frac{b-a}{N}$ $h = 0.1$	Вычисление шага
$f(x,y) := x \cdot y$	Задание правой части уравнения
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Задание начального условия
$i := 0..N - 1$	
$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i)}{2}\right) \end{pmatrix}$	Итерационные уравнения

Рис. 7. Пример решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера — Коши в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения, построим его график и оценим погрешность метода Эйлера — Коши в последней точке интервала, используя метод двойного просчета, т. е. при $N = 5$ и $N = 10$ (рис. 8).

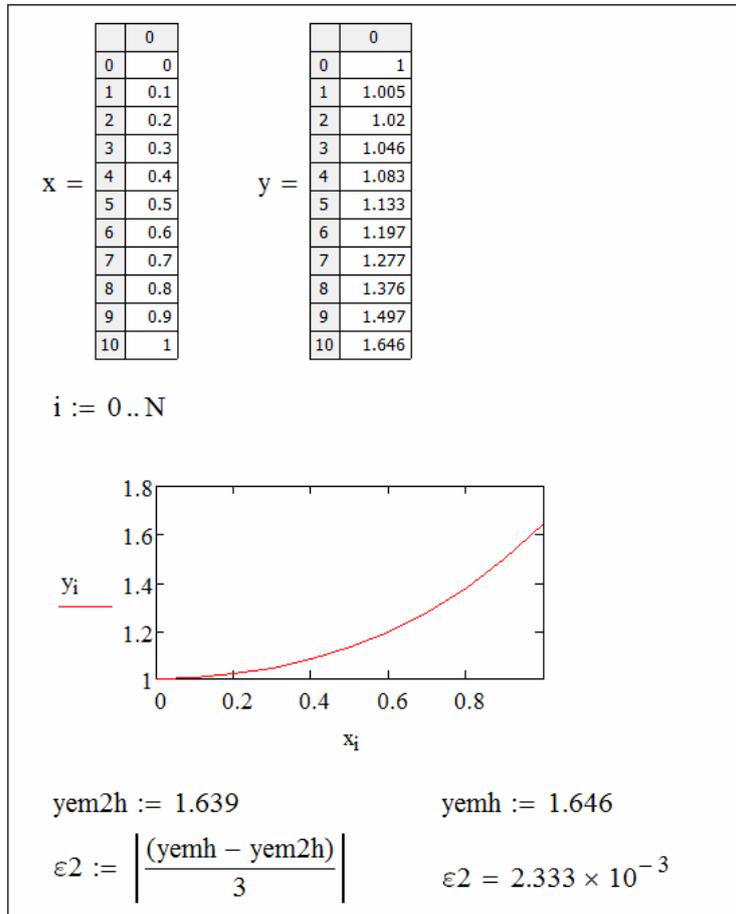


Рис. 8. Таблица значений, график и оценка погрешности решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Эйлера — Коши

Метод Рунге — Кутта

Ниже приводится образец документа в MathCAD, который реализует данный метод (рис. 9).

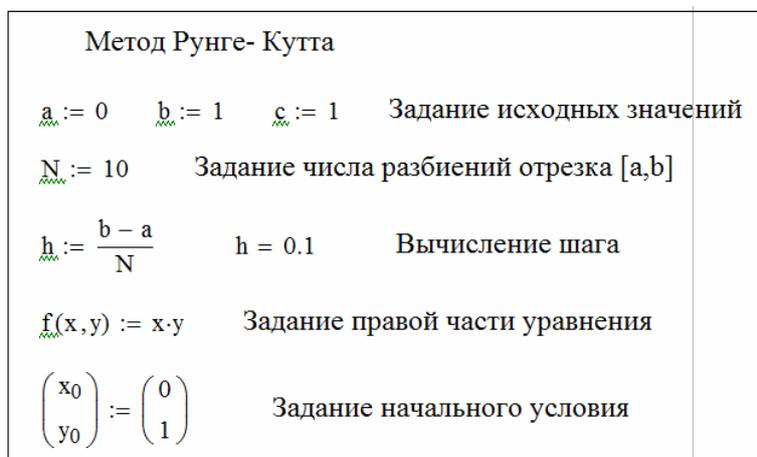


Рис. 9. Задание исходных данных для нахождения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутта

Зададим коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 и k как функции пользователя и запишем итерационные уравнения (рис. 10).

$$\begin{aligned}
 k_1(x, y) &:= h \cdot f(x, y) \\
 k_2(x, y) &:= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1(x, y)}{2}\right) \\
 k_3(x, y) &:= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2(x, y)}{2}\right) \\
 k_4(x, y) &:= h \cdot f(x + h, y + k_3(x, y)) \\
 k(x, y) &:= k_1(x, y) + 2 \cdot k_2(x, y) + 2 \cdot k_3(x, y) + k_4(x, y) \\
 i &:= 0..N - 1 \\
 \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + \frac{k(x_i, y_i)}{6} \end{pmatrix} \quad \text{Итерационные уравнения}
 \end{aligned}$$

Рис. 10. Задание итерационных уравнений для нахождения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутта

Выведем таблицу значений решения, построим его график и оценим погрешность метода Рунге — Кутта в последней точке интервала, используя метод двойного просчета, т. е. при $N = 5$ и $N = 10$ (рис. 11).

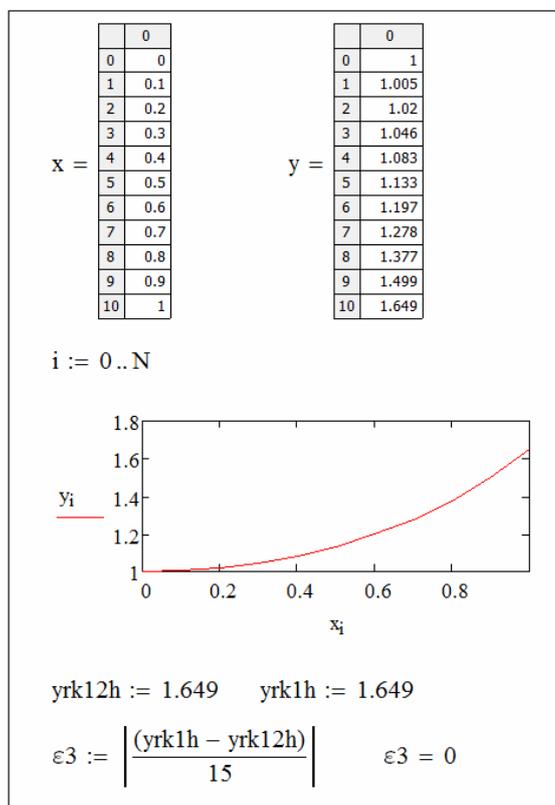


Рис. 11. Таблица значений, график и оценка погрешности решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Рунге — Кутта

Решение с помощью встроенной функции rkfixed

Ниже приводится решение дифференциального уравнения первого порядка в системе MathCAD (рис. 12).

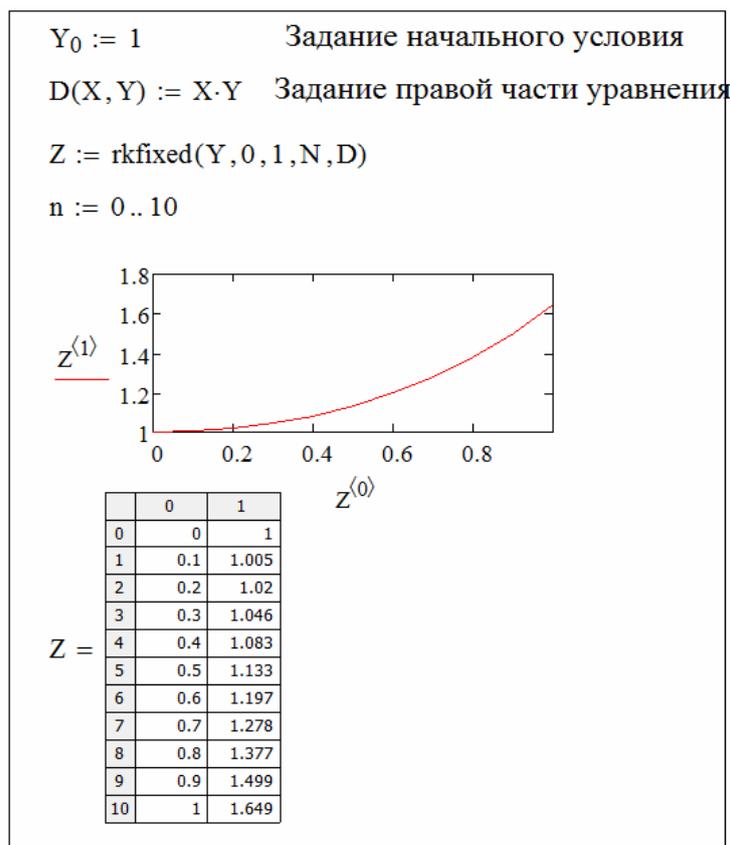


Рис. 12. Пример решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

4.1.4.2. Задание 2

Решение дифференциального уравнения второго порядка.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y'' = -y' + 2y$ на отрезке $[0; 0,5]$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ (рис. 13).

Метод Рунге — Кутта

Метод Рунге- Кутта	
$a := 0$ $b := 0.5$ $c := 1$ $d := 3$	Задание исходных значений
$N := 10$	Задание числа разбиений отрезка $[a,b]$
$h := \frac{b-a}{N}$ $h = 0.05$	Вычисление шага
$f(x, y, y1) := -y1 + 2 \cdot y$	Задание правой части уравнения
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y1_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	Задание начальных условий

Рис. 13. Задание исходных данных для нахождения решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге — Кутта

Зададим коэффициенты $K1, K2, K3, K4, K$ и S как функции пользователя и запишем итерационные уравнения (рис. 14).

$$\begin{aligned}
 K1(x, y, y1) &:= h \cdot f(x, y, y1) \\
 K2(x, y, y1) &:= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + h \cdot \frac{y1}{2} + h \cdot \frac{K1(x, y, y1)}{8}, y1 + \frac{K1(x, y, y1)}{2}\right) \\
 K3(x, y, y1) &:= h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + h \cdot \frac{y1}{2} + h \cdot \frac{K1(x, y, y1)}{8}, y1 + \frac{K2(x, y, y1)}{2}\right) \\
 K4(x, y, y1) &:= h \cdot f\left(x + h, y + h \cdot y1 + h \cdot \frac{K3(x, y, y1)}{2}, y1 + K3(x, y, y1)\right) \\
 K(x, y, y1) &:= \frac{K1(x, y, y1) + K2(x, y, y1) + K3(x, y, y1)}{6} \\
 S(x, y, y1) &:= \frac{K1(x, y, y1) + 2 \cdot K2(x, y, y1) + 2 \cdot K3(x, y, y1) + K4(x, y, y1)}{6} \\
 i &:= 0..N - 1 \\
 \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ y1_{i+1} \end{pmatrix} &:= \begin{bmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot (y1_i + K(x_i, y_i, y1_i)) \\ y1_i + S(x_i, y_i, y1_i) \end{bmatrix} \quad \text{Итерационные уравнения}
 \end{aligned}$$

Рис. 14. Задание итерационных уравнений для нахождения решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге — Кутты

Выведем таблицу значений решения (рис. 15).

		0			0			0
	0	0		0	1		0	3
	1	0.05		1	1.149		1	2.959
	2	0.1		2	1.296		2	2.934
	3	0.15		3	1.443		3	2.924
x =	4	0.2		4	1.589		4	2.929
	5	0.25		5	1.736		5	2.949
	6	0.3		6	1.884		6	2.982
	7	0.35		7	2.034		7	3.027
	8	0.4		8	2.187		8	3.085
	9	0.45		9	2.343		9	3.156
	10	0.5		10	2.503		10	3.238

Рис. 15. Таблица значений решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге — Кутты

Построим график решения (рис. 16).

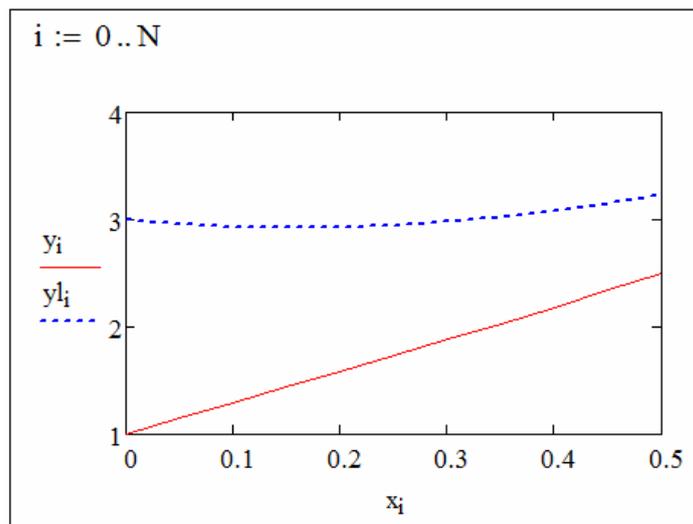


Рис. 16. График решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге — Кутта

Решение с помощью встроенной функции rkfixed

Ниже приводится решение дифференциального уравнения второго порядка в системе MathCAD (рис. 17).

```

Решение с помощью встроенной функции

Y := ( 1 )      Задание начальных условий
      ( 3 )

Задание правой части уравнения

D(X, Y) := ( Y1 )      Первая производная
            (-Y1 + 2·Y0)  Вторая производная

Z := rkfixed(Y, 0, 0.5, 10, D)
    
```

Рис. 17. Пример решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения (рис. 18).

	0	1	2
0	0	1	3
1	0.05	1.149	2.959
2	0.1	1.296	2.934
3	0.15	1.443	2.924
4	0.2	1.589	2.929
5	0.25	1.736	2.949
6	0.3	1.884	2.982
7	0.35	2.034	3.027
8	0.4	2.187	3.085
9	0.45	2.343	3.156
10	0.5	2.503	3.238

Рис. 18. Таблица значений решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

Построим график решения (рис. 19).

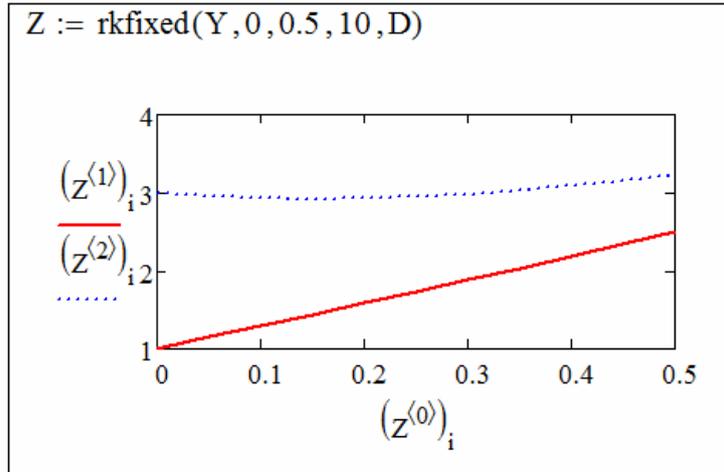


Рис. 19. График решения задачи Коши дифференциального уравнения второго порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

4.1.4.3. Задание 3

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (рис. 20).

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy + z \\ \frac{dz}{dx} = x + yz \end{cases} \quad \text{на отрезке } [1; 1,5] \text{ при заданных начальных условиях } y(1) = 1, \\ z(1) = 1.$$

Метод Эйлера

Метод Эйлера	
$a := 1$ $b := 1.5$ $c := 1$ $d := 1$	Задание исходных значений
$N := 10$	Задание числа разбиений отрезка [a,b]
$h := \frac{b-a}{N}$ $h = 0.05$	Вычисление шага
$f1(x,y,z) := x \cdot y + z$ $f2(x,y,z) := x + y \cdot z$	Задание правой части системы уравнений
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Задание начальных условий
$i := 0..N-1$	
$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + h \cdot f1(x_i, y_i, z_i) \\ z_i + h \cdot f2(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix}$	Итерационные уравнения

Рис. 20. Пример решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения и построим его график (рис. 21).

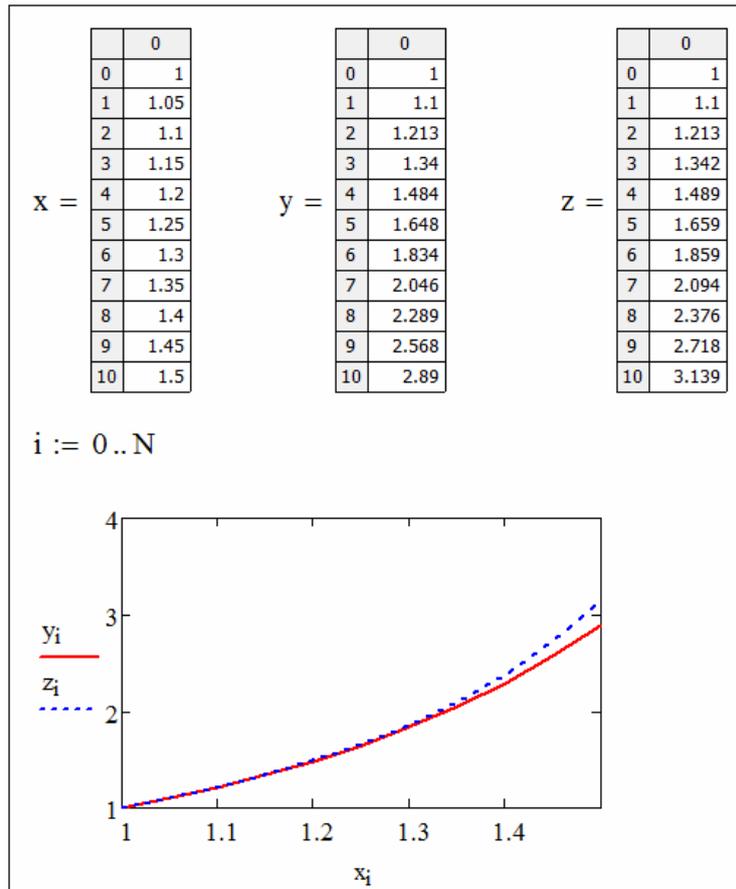


Рис. 21. Таблица значений и график решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка методом Эйлера в среде MathCAD

Модифицированный метод Эйлера

Введем исходные данные (рис. 22).

Модифицированный метод Эйлера	
$a := 1$ $b := 1.5$ $c := 1$ $d := 1$	Задание исходных значений
$N := 10$	Задание числа разбиений отрезка $[a,b]$
$h := \frac{b-a}{N}$ $h = 0.05$	Вычисление шага
$d1 := 0.5 \cdot h$	Вычисление половины шага
$f1(x, y, z) := x \cdot y + z$	Задание правой части системы уравнений
$f2(x, y, z) := x + y \cdot z$	
$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Задание начальных условий

Рис. 22. Задание исходных данных для нахождения решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка модифицированным методом Эйлера в среде MathCAD

Введем итерационные уравнения (рис. 23).

$$\begin{aligned}
 & \underline{f1}(x, y, z) := (x \cdot y + z) \cdot d1 && \text{Задание уравнения } f1 \cdot d1 \\
 & \underline{f2}(x, y, z) := (x + y \cdot z) \cdot d1 && \text{Задание уравнения } f2 \cdot d1 \\
 & f11(x, y, z) := 2 \cdot f1(x + d1, y + f1(x, y, z), z + f2(x, y, z)) \\
 & f22(x, y, z) := 2 \cdot f2(x + d1, y + f1(x, y, z), z + f2(x, y, z)) \\
 & i := 0 .. N - 1 \\
 & \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + h \\ y_i + f11(x_i, y_i, z_i) \\ z_i + f22(x_i, y_i, z_i) \end{pmatrix} && \text{Итерационные уравнения}
 \end{aligned}$$

Рис. 23. Задание итерационных уравнений для нахождения решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка модифицированным методом Эйлера в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения и построим его график (рис. 24).

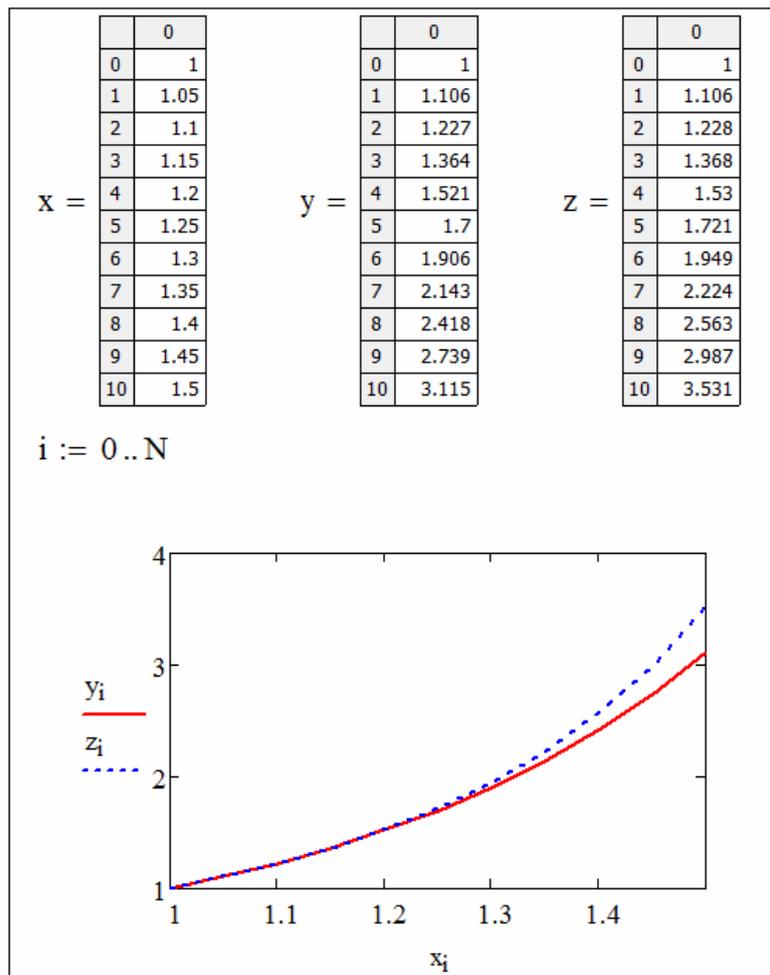


Рис. 24. Таблица значений и график решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка модифицированным методом Эйлера в среде MathCAD

Решение систем дифференциальных уравнений с помощью встроенной функции rkfixed

Ниже приводится фрагмент решения системы дифференциальных уравнений (рис. 25).

```

Решение систем дифференциальных уравнений
с помощью встроенных функции rkfixed

Y :=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$       Задание начальных условий

D(X, Y) :=  $\begin{pmatrix} X \cdot Y_0 + Y_1 \\ X + Y_0 \cdot Y_1 \end{pmatrix}$       Задание вектора правой части системы

W := rkfixed(Y, 1, 1.5, 10, D)
    
```

Рис. 25. Пример решения задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

Выведем таблицу значений решения и построим его график (рис. 26).

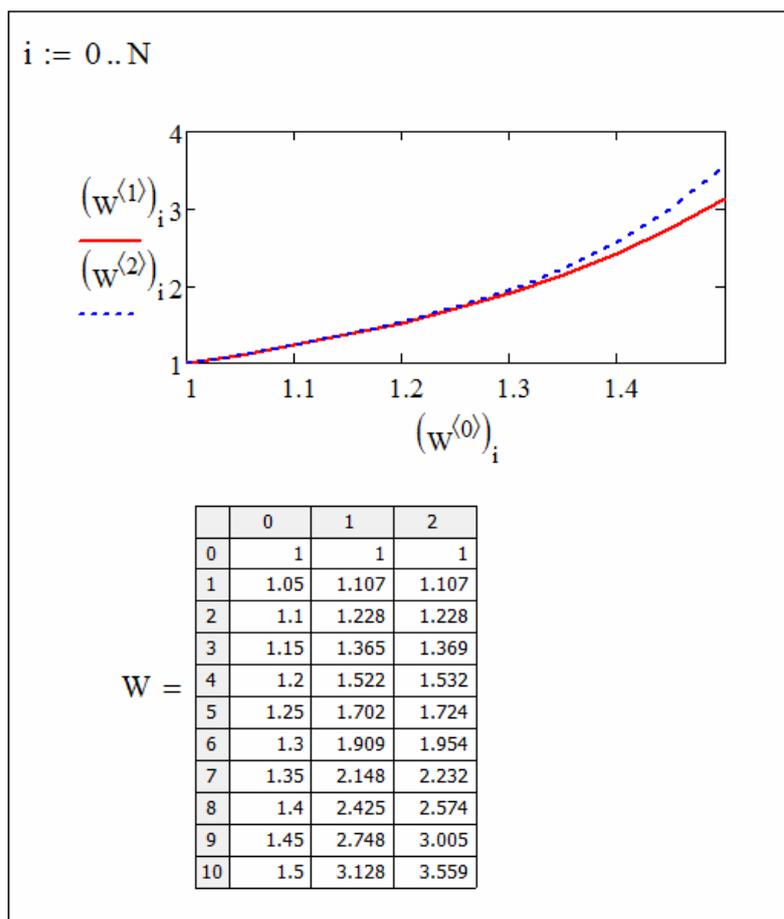


Рис. 26. График решения и таблица значений задачи Коши системы дифференциальных уравнений первого порядка встроенной функции rkfixed в среде MathCAD

4.1.5. Отчет по лабораторной работе

В рабочем каталоге студента должны быть созданы три файла, содержащие отлаженные документы, соответствующие трем заданиям лабораторной работы.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) название лабораторной работы;
- 2) ее цель;
- 3) задание;
- 4) скопированные с экрана монитора отлаженные документы выполнения задания.
- 5) сравнительную характеристику методов решения, применяемых в задании 1.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит постановка задачи Коши:
 - a) для дифференциального уравнения 1-го порядка;
 - b) для дифференциального уравнения n -го порядка;
 - c) для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка?
2. В чем состоит геометрическая интерпретация методов:
 - a) Эйлера;
 - b) Рунге — Кутта?
3. Привести итерационные уравнения методов Эйлера и Рунге — Кутта.
4. Дать сравнительную характеристику методов по точности вычислений.
5. Как применить встроенную функцию `rkfixed` для решения:
 - a) дифференциального уравнения первого порядка;
 - b) дифференциального уравнения второго порядка;
 - c) системы дифференциальных уравнений первого порядка ?
6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге — Кутта?

4.2. Лабораторная работа 2. Применение дифференциальных уравнений в строительстве

4.2.1. Цель выполнения

Требуется научиться применять встроенные в MathCAD средства для решения обыкновенных дифференциальных уравнений используемых в строительстве.

4.2.2. Задания

Лабораторная работа состоит из четырех заданий. Каждое задание содержит 10 различных вариантов. Ниже приведена таблица соответствия вариантов 4-х заданий и студенческих вариантов по журналу ([табл. 5](#)).

Распределение заданий по вариантам

Номер варианта	Номер задания	Номер варианта	Номер задания
1	1.1; 2.1; 3.1; 4.1	16	1.7; 2.8; 3.9; 4.10
2	1.2; 2.2; 3.2; 4.2	17	1.8; 2.9; 3.10; 4.1
3	1.3; 2.3; 3.3; 4.3	18	1.9; 2.10; 3.1; 4.2
4	1.4; 2.4; 3.4; 4.4	19	1.10; 2.1; 3.2; 4.3
5	1.5; 2.5; 3.5; 4.5	20	1.1; 2.10; 3.6; 4.7
6	1.6; 2.6; 3.6; 4.6	21	1.5; 2.6; 3.7; 4.8
7	1.7; 2.7; 3.7; 4.7	22	1.6; 2.7; 3.8; 4.9
8	1.8; 2.8; 3.8; 4.8	23	1.7; 2.8; 3.9; 4.1
9	1.9; 2.9; 3.9; 4.	24	1.8; 2.9; 3.10; 4.2
10	1.10; 2.10; 3.10; 4.10	25	1.9; 2.10; 3.1; 4.3
11	1.2; 2.3; 3.4; 4.5	26	1.10; 2.1; 3.2; 4.4
12	1.3; 2.4; 3.5; 4.6	27	1.9; 2.7; 3.3; 4.5
13	1.4; 2.5; 3.6; 4.7	28	1.7; 2.5; 3.4; 4.6
14	1.5; 2.6; 3.7; 4.8	29	1.5; 2.3; 3.5; 4.7
15	1.6; 2.7; 3.8; 4.9	30	1.3; 2.1; 3.6; 4.8

1. Выберите индивидуальное задание из табл. 5 по варианту, номер которого совпадает с порядковым номером в групповом журнале.

2. **Задание 1.** Вычисление прогиба шарнирно-опертой на двух концах балки с одной сосредоточенной нагрузкой (рис. 27).

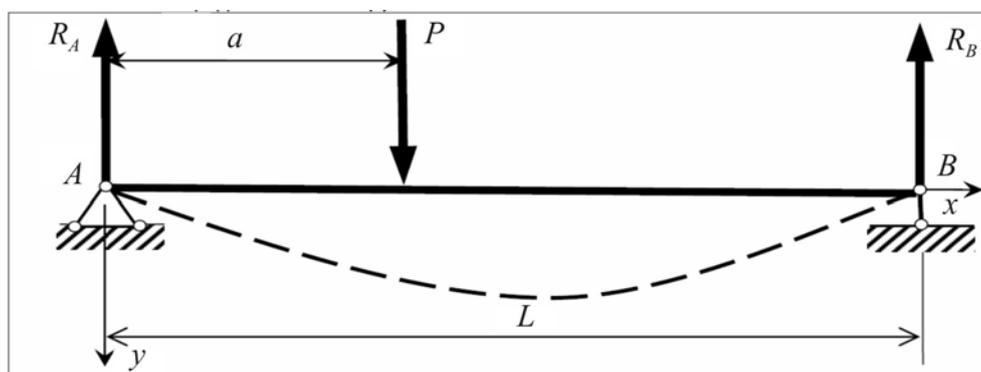


Рис. 27. Расчетная схема балки к заданию 1

На шарнирно-опертую на двух концах балку длиной L действует сила P , приложенная на расстоянии $x = a$. Определить прогиб балки.

Исходные данные: профиль балки — двутавр 45Б1 с геометрическими и инерционными характеристиками: L — длина балки; $I = 24940 \text{ см}^4$ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости стали; P — сосредоточенная нагрузка; a — положение сосредоточенной нагрузки.

Краевые условия: на концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$.

Варианты индивидуальных заданий 1 приведены в [табл. 6](#).

Распределение задания 1 по вариантам

Номер задания	a , м	L , м	P , Н	Номер задания	a , м	L , м	P , Н
1.1	1,2	6	7000	1.6	7,2	8	9000
1.2	2,4	6	11000	1.7	1,4	9	10000
1.3	3,6	7	8000	1.8	2,8	9	8000
1.4	4,8	7	10000	1.9	4,2	10	11000
1.5	6	8	9000	1.10	5,6	10	7000

3. **Задание 2.** Расчет прогибов балки на двух шарнирных опорах с парой сосредоточенных сил и распределенной нагрузкой (рис. 28).

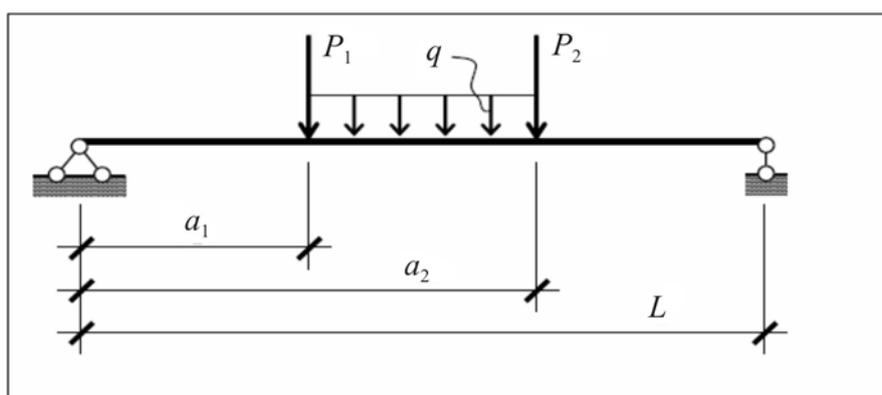


Рис. 28. Расчетная схема балки к заданию 2

Исходные данные: L — длина балки; a_1 — точка приложения нагрузки P_1 ; a_2 — точка приложения нагрузки P_2 ; $C = L/3$ — точка приложения единичной нагрузки; P_1 — первая нагрузка; P_2 — вторая нагрузка; q — равномерно-распределенная нагрузка; $EI = 20000$ кН/м² — жесткость балки.

Краевые условия: на концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$ и найти максимальный прогиб балки.

Варианты индивидуальных заданий 2 приведены в табл. 7.

Таблица 7

Распределение задания 2 по вариантам

Номер задания	a_1 , м	a_2 , м	q , Н/м ²	L , м	P_1 , Н	P_2 , Н
2.1	1,2	4,8	3000	6	1000	2500
2.2	2,4	5,2	2500	7	1100	2000
2.3	3,6	5,6	2000	6	1200	1500
2.4	4,8	6	1500	7	1300	1000
2.5	6	6,4	1000	8	1400	5000
2.6	1,2	6,8	3500	9	1500	2500
2.7	2,4	7,2	3000	8	1000	2000
2.8	3,6	7,6	2500	9	1100	1500
2.9	4,8	8	2000	10	1200	1000
2.10	6	8,4	1500	10	1300	5000

4. **Задание 3.** Расчет прогибов балки на двух шарнирных опорах с парой сосредоточенных сил и распределенными нагрузками (рис. 29).

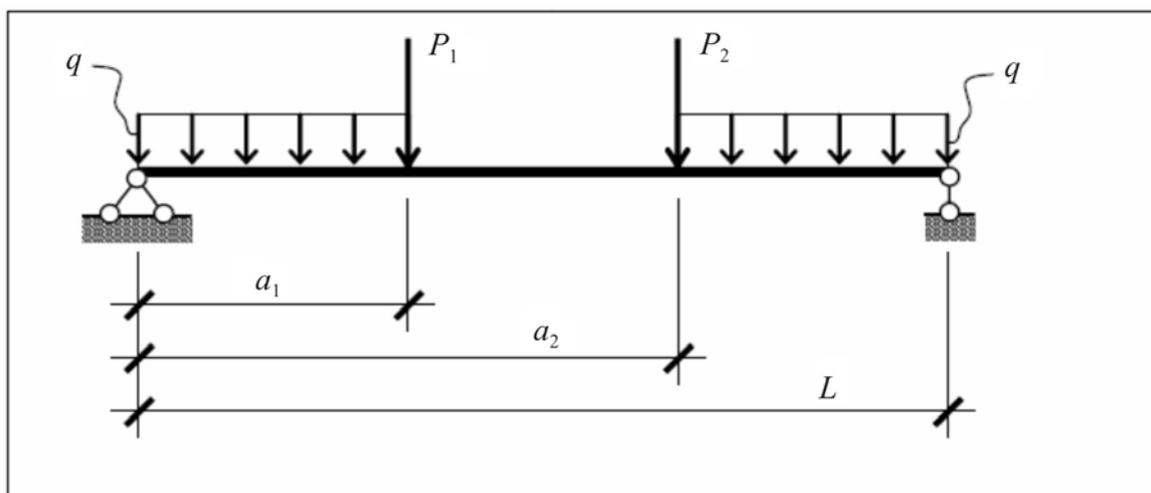


Рис. 29. Расчетная схема балки к заданию 3

Исходные данные: L — длина балки; a_1 — точка приложения нагрузки P_1 ; a_2 — точка приложения нагрузки P_2 ; $C = 4L/5$ — точка приложения единичной нагрузки; P_1 — первая нагрузка; P_2 — вторая нагрузка; q — равномерно-распределенная нагрузка; $EI = 21000 \text{ кН/м}^2$ — жесткость балки.

Краевые условия: на концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$ и найти максимальный прогиб балки

Варианты индивидуальных заданий 3 приведены в табл. 8.

Таблица 8

Распределение задания 3 по вариантам

Номер задания	a_1 , м	a_2 , м	q , Н/м ²	L , м	P_1 , Н	P_2 , Н
3.1	1,2	6,8	3000	6	1000	2500
3.2	2,4	7,2	2500	7	1200	2000
3.3	3,6	7,6	2000	6	1400	1500
3.4	4,8	8	1500	7	1600	1000
3.5	6	8,4	1000	8	1800	5000
3.6	1,2	5,8	3500	9	2000	2500
3.7	2,4	6,2	3000	8	22000	20000
3.8	3,6	6,6	2500	9	24000	15000
3.9	4,8	7	2000	10	2600	1000
3.10	6	7,4	1500	10	2800	5000

5. **Задание 4.** Вычисление прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил балки с сосредоточенной и распределенной нагрузкой (рис. 30).

К балке приложены сосредоточенные и распределенные нагрузки.

Найти прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы балки.

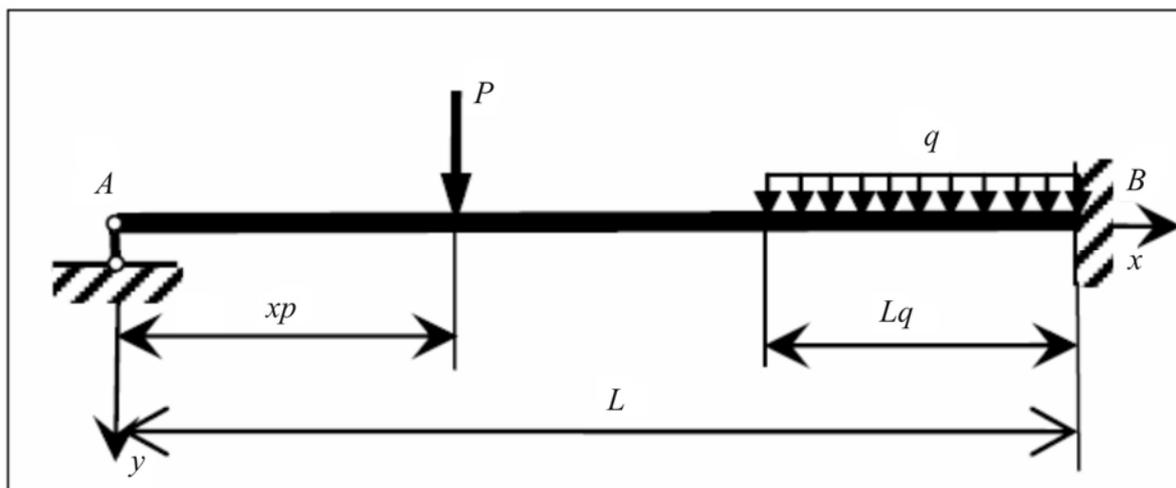


Рис. 30. Расчетная схема балки к заданию 4

Исходные данные: L — длина балки; $I = 2,494 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ — момент инерции; $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости; x_p — положение сосредоточенной нагрузки; q — распределенная нагрузка; P — сосредоточенная нагрузка; $b = 0,2 \text{ м}$ — ширина сечения балки; $W = 1125,8 \text{ см}^3$ — статический момент сечения балки; L_q — длина приложения распределенной нагрузки.

Варианты индивидуальных заданий 4 приведены в табл. 9.

Таблица 9

Распределение задания 4 по вариантам

Номер задания	x_p , м	L , м	P , Н	q , кН/м ²	L_q , м
4.1	1,4	6	25000	220	2
4.2	2,8	6	20000	230	1,5
4.3	4,2	7	15000	240	2
4.4	5,6	7	10000	230	1,5
4.5	7	8	5000	240	3
4.6	1,4	8	35000	250	2,5
4.7	2,8	9	30000	220	3
4.8	4,2	9	25000	240	2,5
4.9	5,6	10	20000	250	4
4.10	7	10	10000	220	3,5

4.2.3. Примеры выполнения заданий

4.2.3.1. Задание 1

На шарнирно-опертую на двух концах балку длиной L действует сила P , приложенная на расстоянии $x = a$. Определить прогиб балки. Профиль балки — двутавр 45Б1 с геометрическими и инерционными характеристиками: $L = 9$ м — длина балки; $I = 24940$ см⁴ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па — модуль упругости стали; $P = 10^4$ Н — сосредоточенная нагрузка; $a = 3$ м — положение сосредоточенной нагрузки.

На концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости имеет вид

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (\text{здесь ось } Ox \text{ направлена вправо, а ось } Oy \text{ — вниз}),$$

где $y(x)$ — неизвестный прогиб в произвольном сечении; $M(x)$ — изгибающий момент.

Зададим исходные данные L, I, E, a, P (рис. 31).

Задание исходных данных	
$L := 9$	- длина балки (м)
$I := 2.494 \cdot 10^{-4}$	- момент инерции балки (м ⁴)
$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	- модуль упругости стали (Па)
$P := 10^4$	- сосредоточенная нагрузка (Н)
$a := 3$	- положение сосредоточенной нагрузки (м)

Рис. 31. Задание исходных данных для задания 1

Момент зависит от реакции опоры $RA = (1 - a/L)P$ и вычисляется по формуле

$$M(x) = \begin{cases} RAx, & \text{если } x \leq a \\ RAx - P(x - a), & \text{если } x > a \end{cases}$$

Опишем функцию момента $M(x)$ (рис. 32).

Определим функцию изгибающего момента	
$RA := \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot P$	
$M(x) := \begin{cases} RA \cdot x & \text{if } x \leq a \\ RA \cdot x - P \cdot (x - a) & \text{if } x > a \end{cases}$	

Рис. 32. Определение функции изгибающего момента

Решим краевую задачу на интервале $[0, L]$, используя блок Given-Odesolve (рис. 33).

```

Найдем прогиб балки, решив
дифференциальное уравнение с использованием
блока Given - Odesolve

Given


$$y'''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I}$$



$$y(0) = 0 \quad y(L) = 0$$



$$y := \text{Odesolve}(x, L, 1000)$$


```

Рис. 33. Решение дифференциального уравнения второго порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба $y(x)$ (рис. 34).

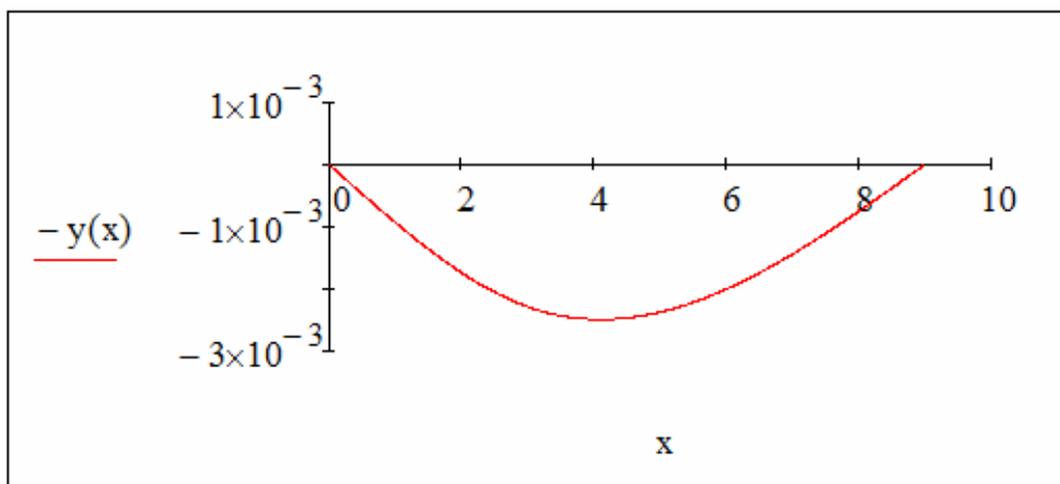


Рис. 34. График прогиба балки

4.2.3.2. Задание 2

Имеется балка на двух шарнирных опорах с парой сосредоточенных сил и распределенной нагрузкой.

Исходные данные: $L = 6$ м — длина балки; $a_1 = 1,5$ м — точка приложения нагрузки P_1 ; $a_2 = 3,2$ м — точка приложения нагрузки P_2 ; $C = L/3$ — точка приложения единичной нагрузки; $P_1 = 2000$ Н — первая нагрузка; $P_2 = 5000$ Н — вторая нагрузка; $q = 1400$ Н/м² — равномерно-распределенная нагрузка; $EI = 20000$ кН/м² — жесткость балки.

На концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$. Построить график прогибов $y(x)$ и найти максимальный прогиб балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости имеет вид

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (\text{здесь ось } Ox \text{ направлена вправо, а ось } Oy \text{ — вниз}),$$

где $y(x)$ — неизвестный прогиб в произвольном сечении; $M(x)$ — изгибающий момент.

Зададим исходные данные $L, a_1, a_2, C, P_1, P_2, E, q, EI$ (рис. 35).

Задание исходных данных	
$L := 6$	- длина балки (м)
$EI := 2 \cdot 10^7$	- жесткость балки (Н/м ²)
$P1 := 2000$	- первая нагрузка (Н)
$a1 := 1.5$	- точка приложения нагрузки $P1$ (м)
$P2 := 5000$	- вторая нагрузка (Н)
$a2 := 3.2$	- точка приложения нагрузки $P2$ (м)
$C := \frac{L}{3}$	- точка приложения единичной нагрузки
$q := 1400$	- равномерно - распределенная нагрузка (Н/м ²)

Рис. 35. Задание исходных данных для задания 2

Определим реакции опор в опорных узлах RA и RB (рис. 36). Реакции опор вычисляются по следующим формулам:

$$Ra = \frac{P_1(L - a_1) + P_2(L - a_2) + q(a_2 - a_1) \left(L - a_1 - \frac{a_2 - a_1}{2} \right)}{L};$$

$$Rb = P_1 + P_2 + q(a_2 - a_1) - Ra.$$

Определим реакции опор	
$RA :=$	$\frac{P1 \cdot (L - a1) + P2 \cdot (L - a2) + q \cdot (a2 - a1) \cdot \left(L - a1 - \frac{a2 - a1}{2} \right)}{L}$
$RB :=$	$P1 + P2 + q \cdot (a2 - a1) - RA$

Рис. 36. Определение реакции опор

Опишем функцию изгибающего момента от внешней нагрузки (рис. 37):

$$M(x) = \begin{cases} Rax & \text{если } 0 \leq x \leq a_1; \\ Rax - P_1(x - a_1) - q \frac{(x - a_1)^2}{2} + P(x - b) & \text{если } a_1 < x < a_2; \\ Rb(L - x) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим функцию изгибающего момента

$$M(x) := \begin{cases} RA \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq a1 \\ RA \cdot x - P1 \cdot (x - a1) - \frac{q \cdot (x - a1)^2}{2} & \text{if } a1 < x \leq a2 \\ RA \cdot x & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 37. Определение функции изгибающего момента

Решим дифференциальное уравнение прогиба балки на интервале $[0, L]$, используя блок Given-Odesolve (рис. 38).

Given

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(x, L)$$

Рис. 38. Решение дифференциального уравнения второго порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба балки $y(x)$ (рис. 39).

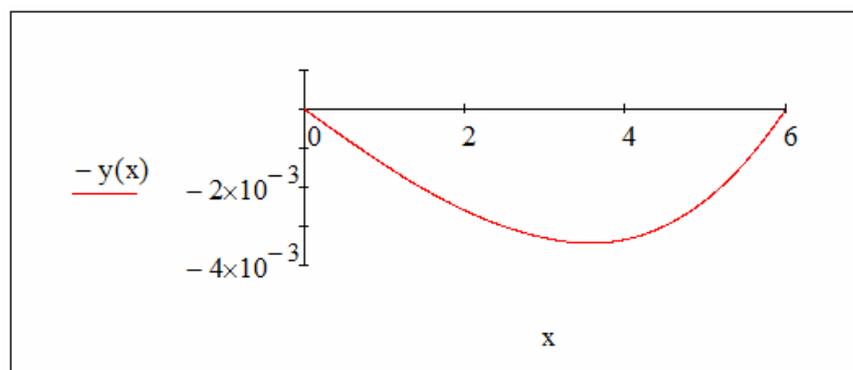


Рис. 39. График прогиба балки

Чтобы найти максимальный прогиб балки (рис. 40), необходимо:
по графику приближенно определить абсциссу точки максимального прогиба x_p ;

вычислить x_{\max} , используя функцию $\text{Maximize}(y, x_p)$;

вычислить u_{\max} , подставляя x_{\max} в функцию $y(x)$;

отобразить точку (x_{\max}, u_{\max}) на графике маркером.

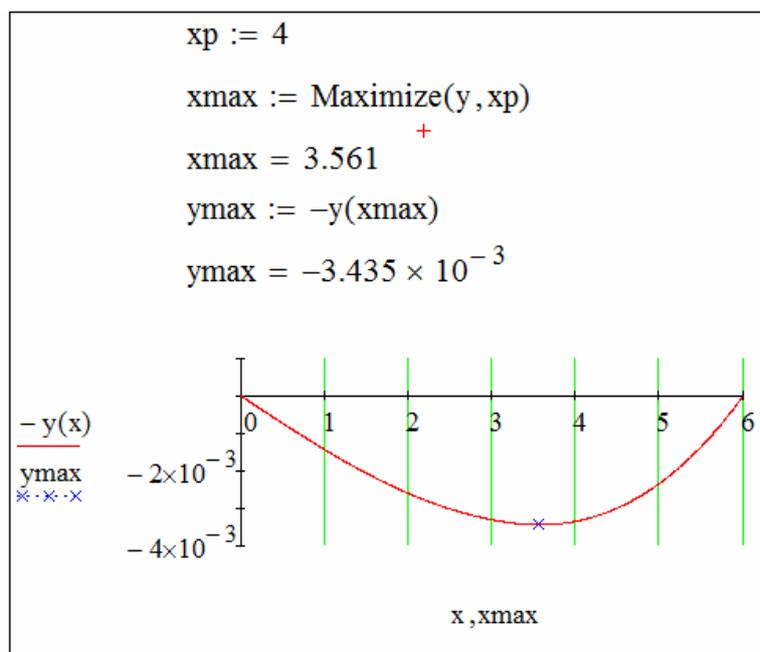


Рис. 40. Нахождение максимального прогиба балки

4.2.3.3. Задание 3

Имеется балка на двух шарнирных опорах с парой сосредоточенных сил и распределенными нагрузками.

Исходные данные: $L = 7,2$ м — длина балки; $a_1 = 2,8$ м — точка приложения нагрузки P_1 ; $a_2 = 4,8$ м — точка приложения нагрузки P_2 ; $C = 4L/5$ — точка приложения единичной нагрузки; $P_1 = 7400$ Н — первая нагрузка; $P_2 = 3300$ Н — вторая нагрузка; $q = 1400$ Н/м² — равномерно-распределенная нагрузка; $EI = 21000$ кН/м² — жесткость балки.

На концах балки отсутствуют прогибы, т. е. при $x = 0$ и $x = L$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$ и найти максимальный прогиб балки.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости имеет вид

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (\text{здесь ось } Ox \text{ направлена вправо, а ось } Oy \text{ — вниз}),$$

где $y(x)$ — неизвестный прогиб в произвольном сечении; $M(x)$ — изгибающий момент.

Зададим исходные данные $L, a_1, a_2, C, P_1, P_2, E, q, EI$ (рис. 41).

Задание исходных данных	
$L := 7.2$	- длина балки (м)
$EI := 2.1 \cdot 10^7$	- жесткость балки (Н/м ²)
$P1 := 7400$	- первая нагрузка (Н)
$a1 := 2.8$	- точка приложения нагрузки P1(м)
$P2 := 3300$	- вторая нагрузка (Н)
$a2 := 4.8$	- точка приложения нагрузки P2(м)
$C := \frac{4L}{5}$	- точка приложения единичной нагрузки
$q := 1400$	- равномерно - распределенная нагрузка (Н/м ²)

Рис. 41. Задание исходных данных для задания 3

Определим реакции опор в опорных узлах RA и RB (рис. 42). Реакции опор вычисляются по следующим формулам:

$$Ra = \frac{P_1(L - a_1) + P_2(L - a_2) + qa_1 \left(L - \frac{a_1}{2} \right) + q(L - a_2) \left(L - a_2 - \frac{L - a_2}{2} \right)}{L};$$

$$Rb = P_1 + P_2 + qa_1 + q(L - a_2) - Ra.$$

$RA := \frac{P1 \cdot (L - a1) + P2 \cdot (L - a2) + q \cdot a1 \cdot \left(L - \frac{a1}{2} \right) + q \cdot (L - a2) \cdot \left(L - a2 - \frac{L - a2}{2} \right)}{L}$	
$RB := P1 + P2 + q \cdot a1 + q \cdot (L - a2) - RA$	

Рис. 42. Определение реакции опор

Опишем функцию изгибающего момента от внешней нагрузки (рис. 43):

$$M(x) = \begin{cases} Ra x - q \frac{x^2}{2} & \text{если } 0 \leq x \leq a_1; \\ Rb(L - x) - q \frac{(L - x)^2}{2} & \text{если } a_2 < x \leq L; \\ Ra x - qa_1 \left(x - \frac{a_1}{2} \right) - P_1(x - a_1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Определим функцию изгибающего момента

$$M(x) := \begin{cases} RA \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} & \text{if } 0 \leq x \leq a1 \\ RA \cdot (L - x) - \frac{q \cdot (L - x)^2}{2} & \text{if } a1 < x \leq a2 \\ RA \cdot x - q \cdot a1 \cdot \frac{(x - a1)}{2} - P1 \cdot (x - a1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 43. Определение функции изгибающего момента

Решим дифференциальное уравнение прогиба балки на интервале $[0, L]$, используя блок Given-Odesolve (рис. 44).

Given

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(x, L)$$

Рис. 44. Решение дифференциального уравнения второго порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба балки $y(x)$ (рис. 45).

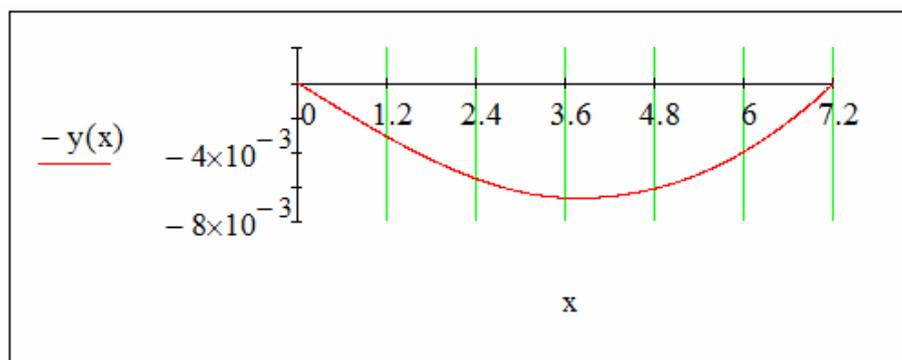


Рис. 45. График прогиба балки

Чтобы найти максимальный прогиб балки (рис. 46), необходимо:
по графику приближенно определить абсциссу точки максимального прогиба x_p ;

вычислить x_{max} используя функцию $\text{Maximize}(y, x_p)$;

вычислить u_{max} , подставляя x_{max} в функцию $y(x)$;

отобразить точку (x_{max}, u_{max}) на графике маркером.

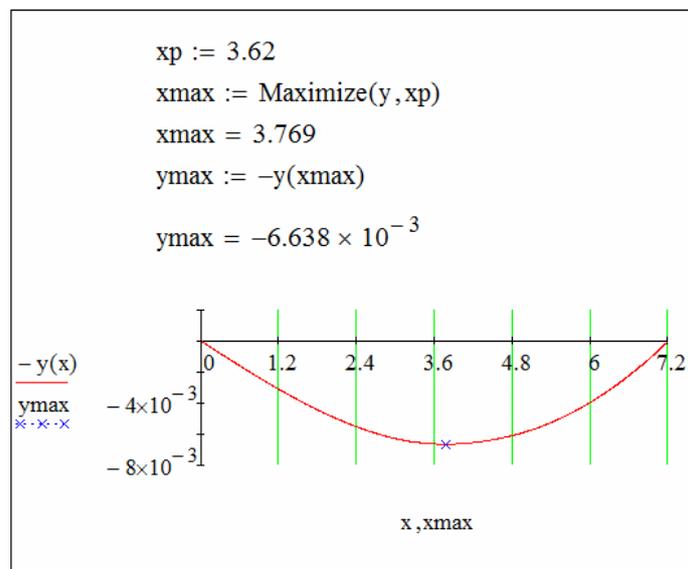


Рис. 46. Нахождение максимального прогиба балки

4.2.3.4. Задание 4

Имеется балка, к которой приложены в сосредоточенные и распределенные нагрузки. (см. [рис. 30](#) к заданию 4).

Найти прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы балки.

Исходные данные: $L = 9$ м — длина балки; $I = 2,494 \cdot 10^{-4}$ м⁴ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па — модуль упругости; $x_p = 3$ м — положение сосредоточенной нагрузки; $q = 250$ кН/м² — распределенная нагрузка; $P = 10000$ Н — сосредоточенная нагрузка; $b = 0,2$ м — ширина сечения балки; $W = 1125,8$ см³ — статический момент сечения балки; $Lq = 4$ м — длина приложения распределенной нагрузки.

Зависимость прогибов балки от внешней нагрузки описывается дифференциальным уравнением 4-го порядка:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании содержит в правой части только выражение для распределенной нагрузки и не содержит выражений для сосредоточенных сил и пар сил. Чтобы учесть влияние сосредоточенной силы P , заменим ее распределенной нагрузкой интенсивностью qp , сосредоточенной на малом участке a , например,

$$A = L/100; \quad qp = P/(a b),$$

где b — ширина сечения балки.

Расстояние от левого края балки до начала распределенной нагрузки равно x_p . Зная прогиб стержня, можно определить изгибающий момент в сечениях стержня

$$M = EIy''$$

и максимальные напряжения в сечениях стержня $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$.

Типы закреплений концов балки и соответствующие им граничные условия приведены в табл. 10.

Таблица 10

Типы закреплений и граничные условия

Концы балки	Тип закреплений	Граничные условия
	Шарнирные опоры	$y = 0$ — прогиб равен 0; $M = 0$ — изгибающий момент равен 0 ($y'' = 0$)
	Жесткая заделка	$y = 0$ — прогиб равен 0; $\varphi = 0$ — угол поворота равен 0 ($y' = 0$)
	Свободный конец	$M = 0$ — изгибающий момент равен 0 ($y'' = 0$); $Q = 0$ — поперечная сила равна 0 ($y''' = 0$)

Зададим исходные данные, приведя их к единой системе (метры, паскалы, ньютоны) (рис. 47).

Задание исходных данных	
$L := 9$	- длина балки (м)
$I := 2.494 \cdot 10^{-4}$	- момент инерции балки (м ⁴)
$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	- модуль упругости стали (Па)
$P := 10^4$	- сосредоточенная нагрузка (Н)
$b := 0.2$	- ширина сечения балки(м)
$W := 1125.8 \cdot 10^{-6}$	- статический момент сечения балки (м)
$q := 250 \cdot 10^3$ +	- распределенная нагрузка (Н/м ²)
$x_p := 3$	- положение сосредоточенной нагрузки (м)
$L_q := 4$	- длина приложения распределенной нагрузки (м)

Рис. 47. Задание исходных данных для задания 4

Опишем функцию общей распределенной нагрузки $qb(x)$ (рис. 48), определенную:

- 1) на участке $[x_p - a/2, x_p + a/2]$ — для приведенной к распределенной сосредоточенной нагрузки P ,
- 2) на участке $[L - L_q, L]$ — для распределенной нагрузки q ,
- 3) для остальных участков зададим значение $q/700$, так как при значении равном 0 функция Odesolve выдает ошибку.

Сосредоточенную силу P заменим распределенной нагрузкой, сосредоточив ее на малом участке.

Опишем функцию общей распределенной нагрузки

$$a := \frac{L}{100} \quad a = 0.09$$

$$q(x) := \begin{cases} \frac{q}{700} & \text{if } 0 \leq x \leq xp - \frac{a}{2} \\ \frac{P}{a \cdot b} & \text{if } xp - \frac{a}{2} < x \leq xp + \frac{a}{2} \\ \frac{q}{700} & \text{if } xp + \frac{a}{2} < x \leq L - Lq \\ q & \text{if } L - Lq < x \leq L \end{cases} +$$

Рис. 48. Определение функции общей распределенной нагрузки

Найдем прогиб балки, решив дифференциальное уравнение с использованием блока Given – Odesolve. Краевые условиями являются равенства 0 прогиба и изгибающего момента на шарнирной опоре балки (y, y''), а также равенство 0 прогиба и угла кручения ($y, y'(0)$) на закрепленном конце (рис. 49).

Найдем прогиб балки, решив дифференциальное уравнение с использованием блока Given - Odesolve

Given

$$y''''(x) = \frac{q(x)}{I \cdot E}$$

$$y(0) = 0 \quad y(L) = 0$$

$$y''(0) = 0 \quad y'(L) = 0$$

$$y := \text{Odesolve}(x, L, 10000)$$

Рис. 49. Решение дифференциального уравнения четвертого порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба балки на интервале $[0, L]$ (рис. 50).

Примечание: если график прогиба не равен 0 на концах, то необходимо использовать для функции Odesolve другой численный метод, например, «с постоянным шагом». Для задания метода вызвать контекстное меню для функции и выбрать нужный метод.

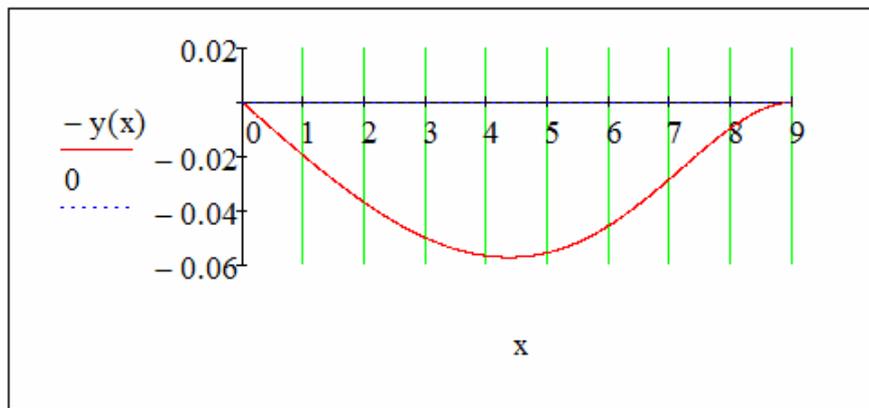


Рис. 50. График прогиба балки

Определим максимальную точку прогиба (рис. 51), выполняя действия:

- по графику приближенно определим абсциссу точки с максимальным прогибом, присвоим ее значение переменной $xp1$;
- используя функцию $\text{Maximize}(y, xp1)$, уточним значение абсциссы и присвоим его переменной $xmax$;
- найдем значение прогиба, подставляя $xmax$ в функцию $y(x)$.

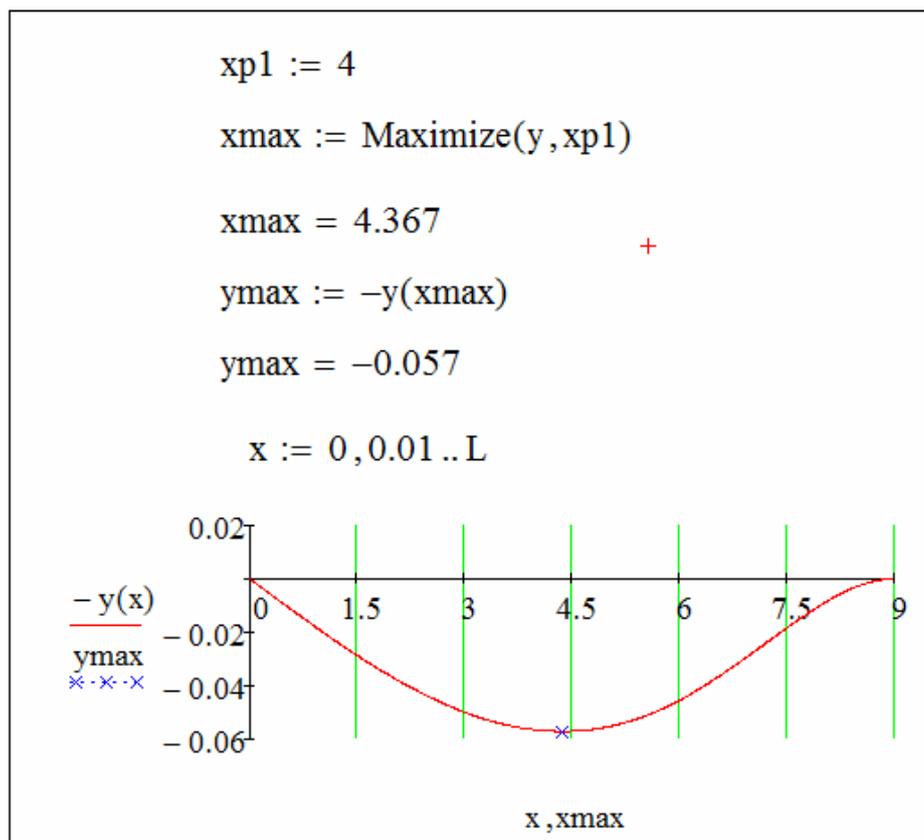


Рис. 51. Нахождение максимального прогиба балки

Опишем функцию изгибающего момента $M = EIy''$ и построим эпюру, добавляя в область функции 0 и используя форматирование для графика M и 0 тип «ошибка» (рис. 52).

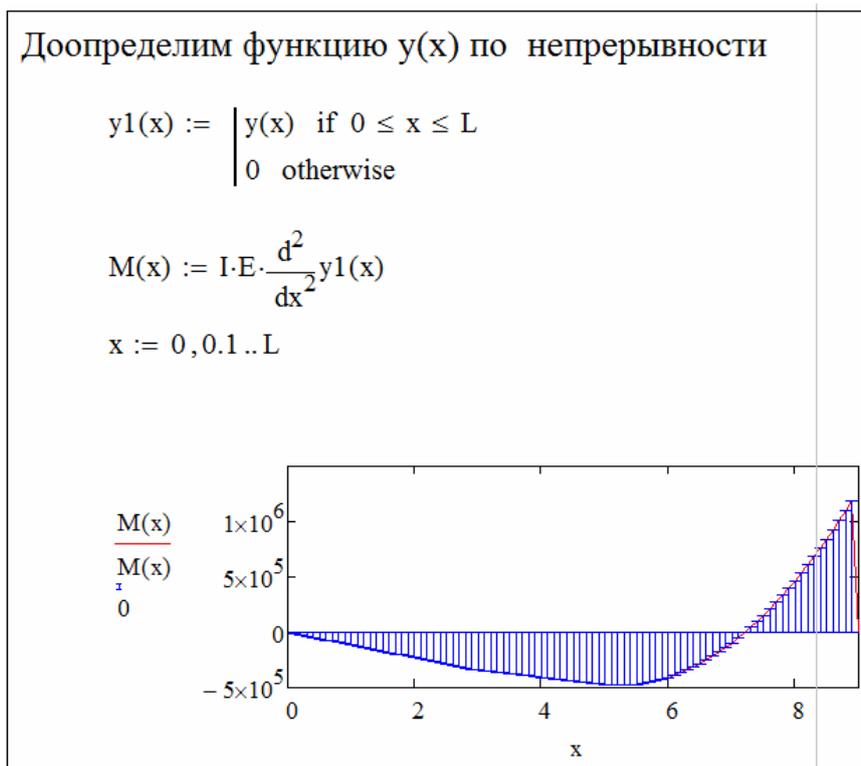


Рис. 52. Определение функции изгибающего момента и построение эпюры

По графику $M(x)$ найдем приближенно значение аргумента, в котором момент принимает минимальное значение и запомним в переменной $xp2$. Найдем значение $xmin$ в котором достигается наименьший изгибающий момент, используя функцию $Minimize(M, xp2)$. Найдем значение момента $Mmax$, подставляя $xmin$ в функцию $M(x)$ (рис. 53).

```

xp2 := 5.5
xmin := Minimize(M, xp2)
xmin = 5.252
Mmax := M(xmin)
Mmax = -4.775 × 105

```

Рис. 53. Определение наименьшего изгибающего момента

Опишем функцию поперечных сил балки $Q = EIy'''$ и построим эпюру, добавляя в область функции 0 и используя форматирование для графиков Q и 0 тип «ошибка». Найдем соответствующее максимальное напряжение в сечении балки по формуле $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$ (рис. 54).

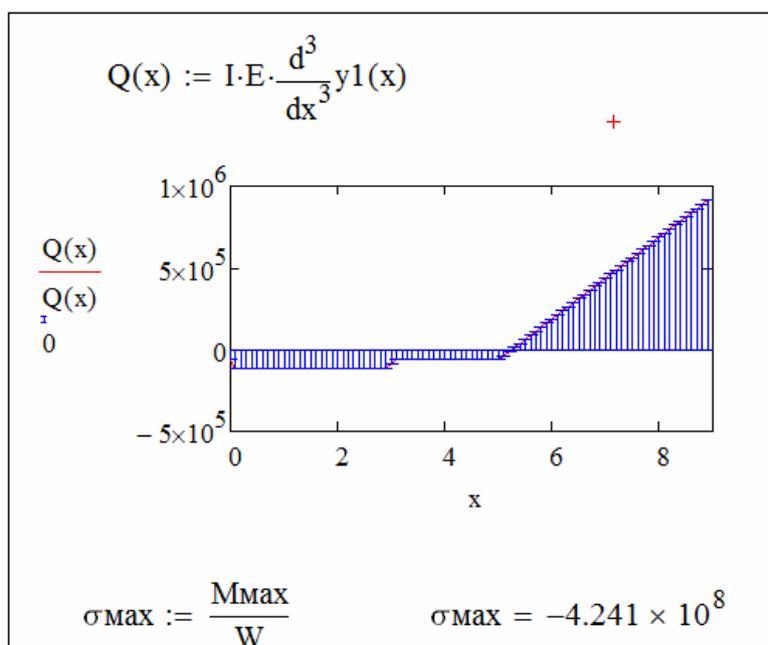


Рис. 54. Построение эпюры поперечных сил

4.2.4. Отчет по лабораторной работе

В рабочем каталоге студента должны быть созданы четыре файла, содержащие отлаженные документы, соответствующие четырем заданиям лабораторной работы.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) название лабораторной работы;
- 2) ее цель;
- 3) задание;
- 4) скопированные с экрана монитора отлаженные документы выполнения задания.

Контрольные вопросы

1. Привести дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости.
2. Привести дифференциальное уравнение, описывающих зависимость прогибов балки от внешней нагрузки.
3. Какие граничные условия соответствуют шарнирным опорам балки?
4. Какие граничные условия соответствуют жесткой заделки балки?
5. Какие граничные условия соответствуют свободному концу балки?
6. Как, зная прогиб балки, определить изгибающий момент и максимальные напряжения в сечениях балки?
7. Как заменить сосредоточенную нагрузку распределенной?
8. Как решить дифференциальное уравнение при помощи блока Given – Odesolve?
9. Как определить максимальный прогиб балки и точку, в которой он достигается?
10. Как в системе MathCAD построить эпюру?

4.3. Лабораторная работа 3. Метод конечных элементов и его реализация в среде интегрированной системы MathCAD

4.3.1. Цель выполнения

Требуется изучить метод конечных элементов и получить навыки его реализации в системе MathCAD.

4.3.2. Задание

Решить методом конечных элементов (МКЭ) плоскую задачу теории упругости. Кольцо, нагруженное двумя силами ([рис. 55](#), справа), имеет две оси симметрии, поэтому для повышения точности расчета необходимо рассмотреть одну четвертую часть кольца. При помощи подходящей сетки она разделяется на систему треугольных конечных элементов. Число узлов вдоль радиуса nr и число узлов по углу охвата рассматриваемой части тела $n\varphi$ выбираются из таблицы индивидуальных заданий в соответствии с вариантом (табл. 11). Определить деформации и напряжения при плоском напряженном состоянии и при плоском деформированном состоянии.

Варианты индивидуальных заданий

Таблица 11

Распределение заданий по вариантам

Номер варианта	Число узлов вдоль радиуса nr	Число узлов по углу охвата $n\varphi$	Номер варианта	Число узлов вдоль радиуса nr	Число узлов по углу охвата $n\varphi$
1	8	4	16	11	9
2	9	5	17	12	4
3	10	6	18	13	5
4	11	7	19	9	6
5	12	8	20	10	4
6	13	9	21	11	8
7	8	5	22	12	9
8	9	6	23	13	7
9	10	7	24	10	5
10	11	8	25	11	6
11	12	9	26	12	7
12	13	4	27	13	6
13	8	6	28	11	4
14	9	7	29	12	5
15	10	8	30	13	6

4.3.3. Пример выполнения задания

Перед выполнением лабораторной работы еще раз напомним основные этапы метода МКЭ:

1. Упругое тело разбивается на элементы. Объемное тело на тетраэдры или параллелепипеды. Плоское тело — на треугольники и прямоугольники.

2. Для каждого элемента составляется матрица жесткости с использованием функции формы. Функция формы представляет собой способ аппроксимации неизвестной функции перемещений.

3. Матрицы жесткости элементов объединяются в единую матрицу жесткости для всего тела.

4. Решая систему уравнений, находят узловые перемещения.

5. С помощью уравнений теории упругости определяются деформации и напряжения в узловых точках тела.

В данном примере решается плоская задача теории упругости.

Кольцо, нагруженное двумя силами (рис. 55, справа), имеет две оси симметрии, поэтому для повышения точности расчета рассмотрим одну четвертую часть кольца (рис. 56). На осях симметрии должны выполняться граничные условия равенства нулю перемещений, перпендикулярных осям симметрии.

Рассматриваемую четверть кольца разбиваем на треугольные конечные элементы (рис. 55, в центре). Треугольный элемент имеет 6 степеней свободы (независимых узловых перемещений). Нумерация узловых перемещений в элементе начинается в нижнем левом узле треугольника и продолжается против часовой стрелки. Горизонтальные перемещения — нечетные, вертикальные — четные.

Нумерация узлов всего тела и конечных элементов — по столбцам сверху вниз, слева направо. Размеры элементов могут быть разными (чем меньше элемент, тем выше точность расчетов). В нашем примере всего 66 узлов и 100 конечных элементов. Расчет координат узлов приведен на рис. 57. Положение рассчитанных узлов показано на рис. 56 справа.

Координаты узлов можно определить по миллиметровке и ввести с клавиатуры. Это кропотливый труд, и при большом количестве узлов лучше автоматизировать эту работу. На рис. 57 приводится расчет полярных координат узлов и их преобразование в прямоугольные (декартовы) координаты.

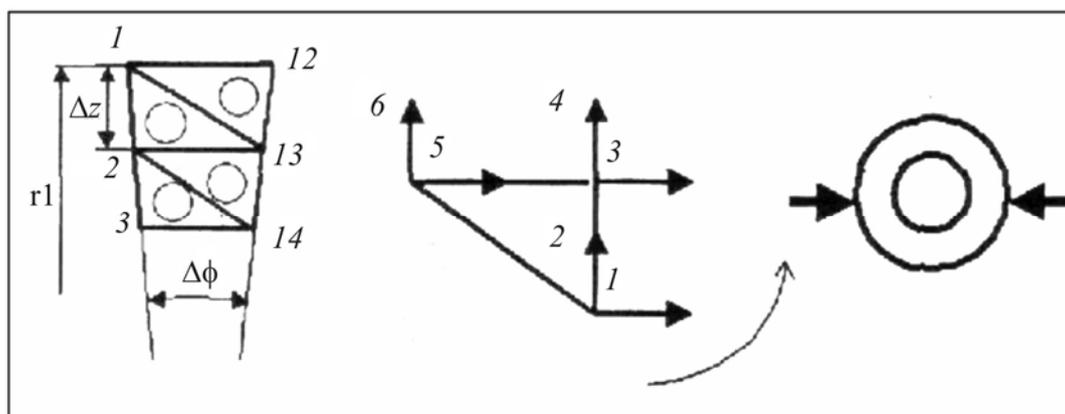


Рис. 55. Схема нагружения и треугольный конечный элемент

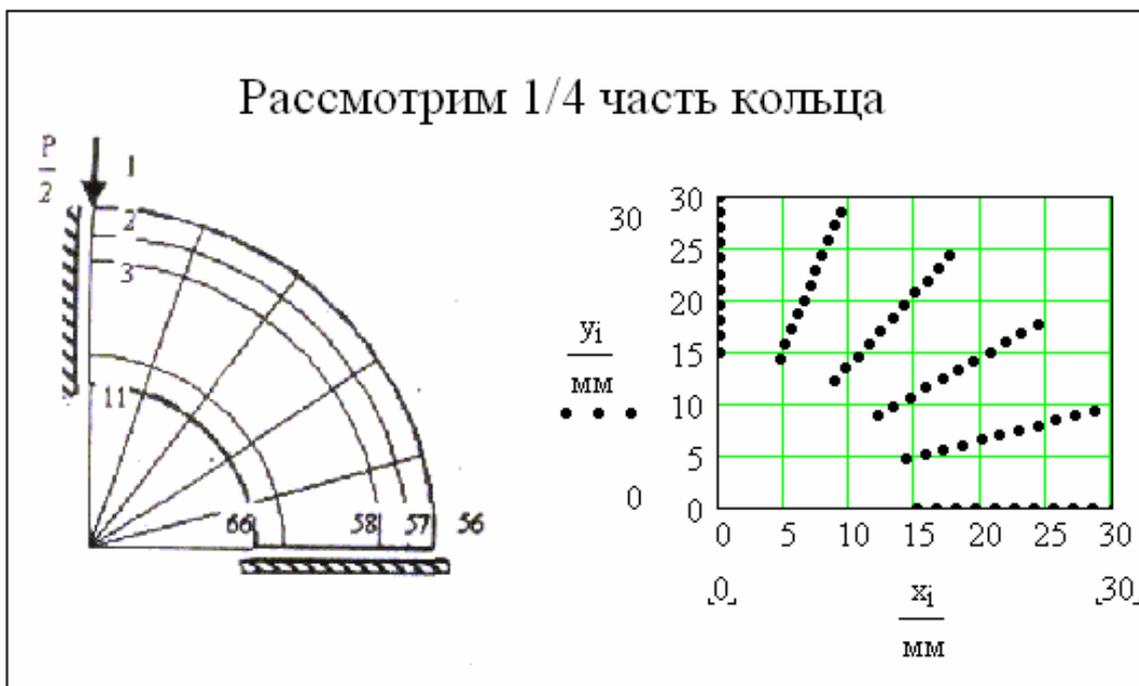


Рис. 56. Расчетная схема и координаты узлов

```

Normal Arial 10 B I U
Расчет координат узлов сетки
ORIGIN := 1
nr := 11      nφ := 6
Размерности, производные от стандартных
Н := N      м := m      град := deg      кН := 1000 · N
мм := 0.001 · m      см := 0.01 · m      МПа := 106 ·  $\frac{N}{m^2}$ 
Ввод координат узлов X и Y в мм
r1 := 30 · мм  r2 := 15 · мм  t := 5.7 · мм  φ1 := 90 · град  φ2 := 0 · град
Y0 := 0 · мм  X0 := 0 · мм      i := 1..nr      j := 1..nφ
Δr :=  $\frac{(r2 - r1)}{nr - 1}$       Δφ :=  $\frac{(\phi2 - \phi1)}{n\phi - 1}$ 
φj := φ1 + Δφ · (j - 1)      ri := r1 + Δr · (i - 1)
Ynr·(j-1)+i := ri · cos(φj) + Y0      xnr·(j-1)+i := ri · sin(φj) + X0

```

Рис. 57. Расчет координат узлов элементов

Здесь $r1$ и $r2$ — наружный и внутренний радиусы кольца, t — толщина кольца, $\varphi1$ и $\varphi2$ — начальное и конечное значения угловой координаты, $X0$ и $Y0$ — декартовы координаты полюса (начала полярных координат), nr и $n\phi$ — число узлов в столбце (вдоль радиуса) и в ряду (по углу охвата рассматриваемой части тела). Результаты расчетов координат узлов приведены на графике на рис. 58.

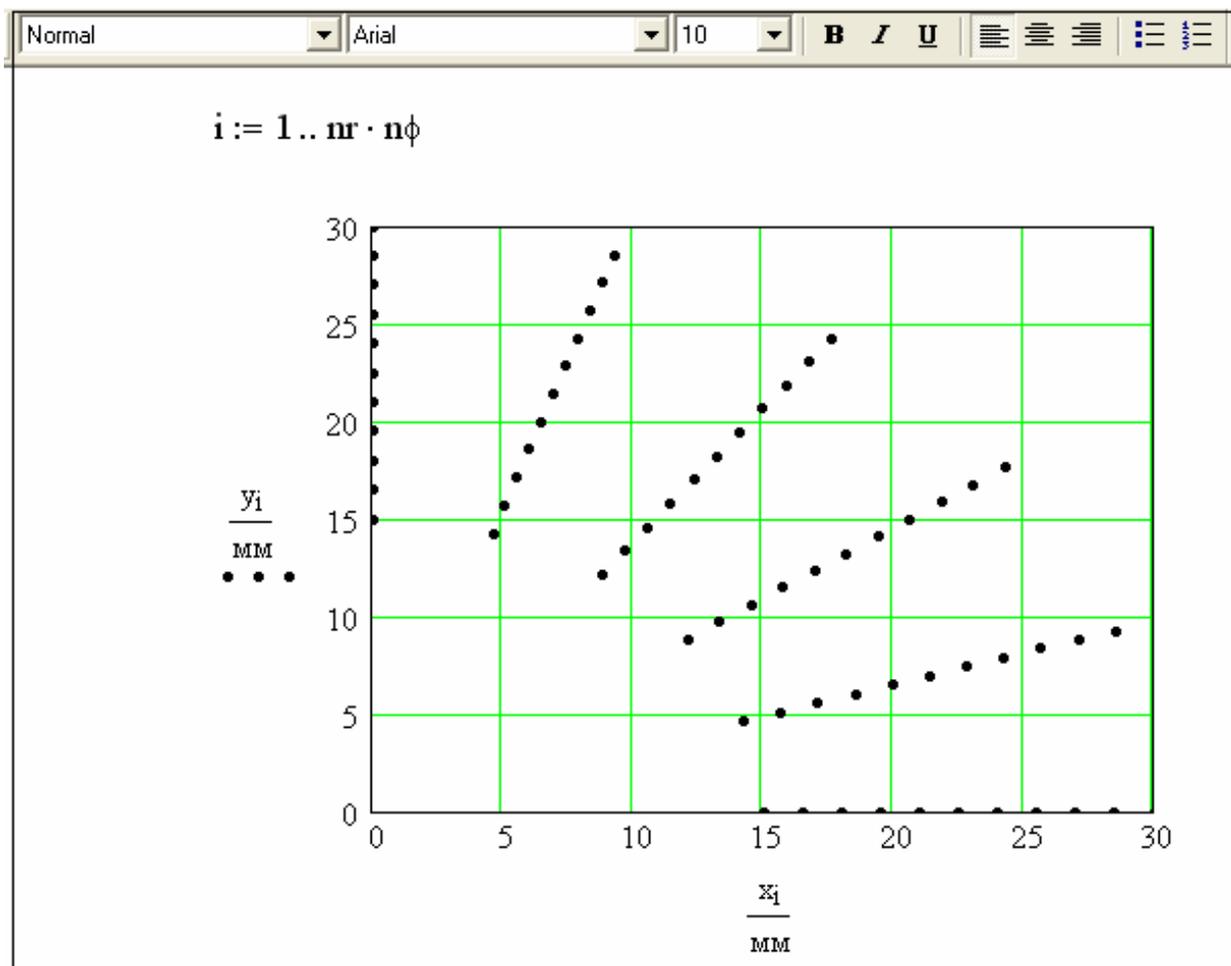


Рис. 58. Сетка узлов

Кропотливой и трудоемкой является также задача составления матрицы индексов. На [рис. 59](#) приведена используемая в примере программа составления матрицы индексов. Здесь же приведен автоматический расчет граничных условий и, в зависимости от числа узлов, номеров перемещений, в которых перемещение на осях симметрии равно нулю.

Автоматизация расчетов координат узлов, матрицы индексов и граничных условий позволяет для данной схемы менять количество узлов.

Normal Arial 10 B I U

ORIGIN := 1

Число узлов в ряду nr = 11

Число рядов в столбце nφ = 6

Число узлов NU = 66

Число элементов NE = 100

$$\mathbf{MIU}^T = \begin{array}{c|cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \hline 1 & 13 & 2 & 14 & 3 & 15 & 4 & 16 & 5 & 17 & 6 & 18 & 7 & 19 & 8 & 20 & 9 & 21 & 10 & 22 \\ 2 & 12 & 13 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 & 16 & 16 & 17 & 17 & 18 & 18 & 19 & 19 & 20 & 20 & 21 & 21 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 10 \end{array}$$

$$\mathbf{y}^T = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-3} & 10^{-3} & 10^{-3} \end{array} \mathbf{m}$$

$$\mathbf{x}^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0.03 & 0.029 & 0.027 & 0.026 & 0.024 & 0.023 & 0.021 & 0.02 & 0.018 & 0.017 \end{array} \mathbf{m}$$

Номера заданных перемещений

$$\mathbf{g}^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \end{array}$$

Заданные перемещения

$$\Delta \mathbf{g}^T = \begin{array}{c|cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \mathbf{m}$$

rows($\Delta \mathbf{g}$) = 22

Рис. 60. Матрица индексов, координаты узлов, номера и заданные перемещения

```

Normal Arial 10 B I U
Координаты узлов, матрицу индексов и граничные условия запишем
в отдельные файлы.

i := 1..rows(y)    j := 1..rows(g)    Coordi,1 := i    guj,1 := j

Coord(2) := x ·  $\frac{1}{\text{мм}}$     Coord(3) := y ·  $\frac{1}{\text{мм}}$ 

gu(2) := g    gu(3) := Δg ·  $\frac{1}{\text{мм}}$ 

WRITEPRN("Miu") := MIU

WRITEPRN("Coord") := Coord

WRITEPRN("gu") := gu

```

Рис. 61. Запись координат, матрицы индексов и граничных условий во внешние файлы

Данный расчет проведен с учетом размерностей (см. [рис. 57](#)). Учет размерностей вносит дополнительные трудности в достаточно сложный расчет, особенно при вводе матриц от размерных величин (рис. 62).

```

Normal Arial 10 B I U
Характеристики материала    E := 2 · 105 МПа    ν := 0.3

NDS := 1    Плоское деформированное состояние
NDS := 0    Плоское напряженное состояние

Ввод вектора сил    k := 1..2 · NU

Pk := 0 · кН    P2 := -1 · кН

Формирование матрицы индексов перемещений по матрице индексов
узлов

k := 1..NE    i := 1..3

Mk,2i-1 := 2 · MIUk,i-1    Mk,2i := 2 · MIUk,i

```

Рис. 62. Вектор сил и матрица индексов перемещений

У каждого треугольного элемента 3 узла и 6 узловых перемещений. Матрица индексов перемещений (матрица связи глобальных номеров узловых перемещений тела с локальными номерами узловых перемещений элементов) получена путем удвоения матрицы МПУ.

Матрица жесткости элемента рассчитывается по формуле

$$k = \int_V B^T D B dV.$$

Здесь

$$B = \partial^T N,$$

где D — матрица внутренней жесткости, содержащая упругие постоянные материала E, ν ; ∂ — матричный дифференциальный оператор, означающий определенную последовательность присвоения знака дифференцирования; N — матрица функций формы.

Для треугольного элемента функция формы — уравнение плоскости, определяемое выражениями (3.18).

Матрица $B = \partial^T N$ содержит константы, которые зависят только от координат узлов. Приведем расчет коэффициентов для формирования жесткости элемента (рис. 63).

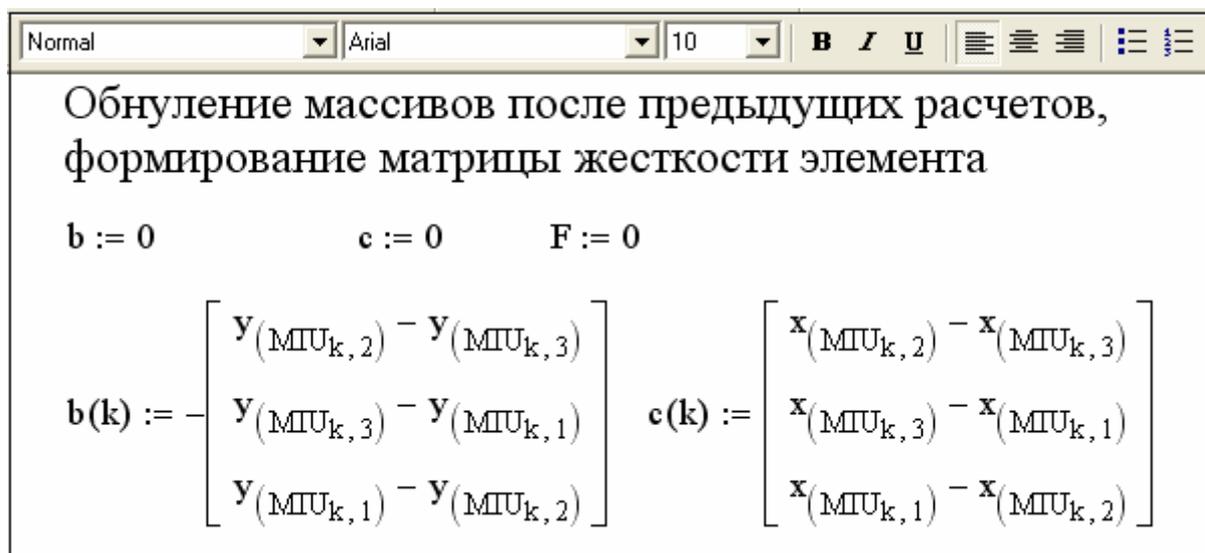


Рис. 63. Расчет коэффициентов для формирования матрицы жесткости элемента

Далее на [рис. 64](#) произведен расчет площади элементов.

Матрица внутренней жесткости D приведена ниже и записана в виде условного оператора — разные матрицы для плоского напряженного $NDS = 0$ и плоского деформированного состояния $NDS = 1$ ([рис. 65](#)).

Площади элементов

$$F_k := 0.5 \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \frac{Y_{(MIU_k,1)}}{M} \frac{X_{(MIU_k,1)}}{M} \\ 1 \frac{Y_{(MIU_k,2)}}{M} \frac{X_{(MIU_k,2)}}{M} \\ 1 \frac{Y_{(MIU_k,3)}}{M} \frac{X_{(MIU_k,3)}}{M} \end{array} \right] \cdot M^2$$

$$+ \left[\begin{array}{cccccc} c(k)_1 & 0 & c(k)_2 & 0 & c(k)_3 & 0 \\ 0 & b(k)_1 & 0 & b(k)_2 & 0 & b(k)_3 \\ b(k)_1 & c(k)_1 & b(k)_2 & c(k)_2 & b(k)_3 & c(k)_3 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot F_k}$$

Рис. 64. Расчет площади элементов

$$D := \left[\begin{array}{ccc} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2 \cdot (1-\nu)} \end{array} \right] \cdot \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1-2 \cdot \nu) \cdot (1+\nu)} \text{ if NDS} \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{array} \right] \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \text{ otherwise}$$

Рис. 65. Формирование матрицы внутренней жесткости

Для треугольного элемента интеграл по объему равен произведению подинтегрального выражения на объем. Формула для расчета матрицы жесткости элемента приведена вверху. Матрица жесткости системы формируется с помощью матрицы индексов. Учет граничных условий сопровождается перестройкой матрицы жесткости системы и вектора сил (рис. 66).

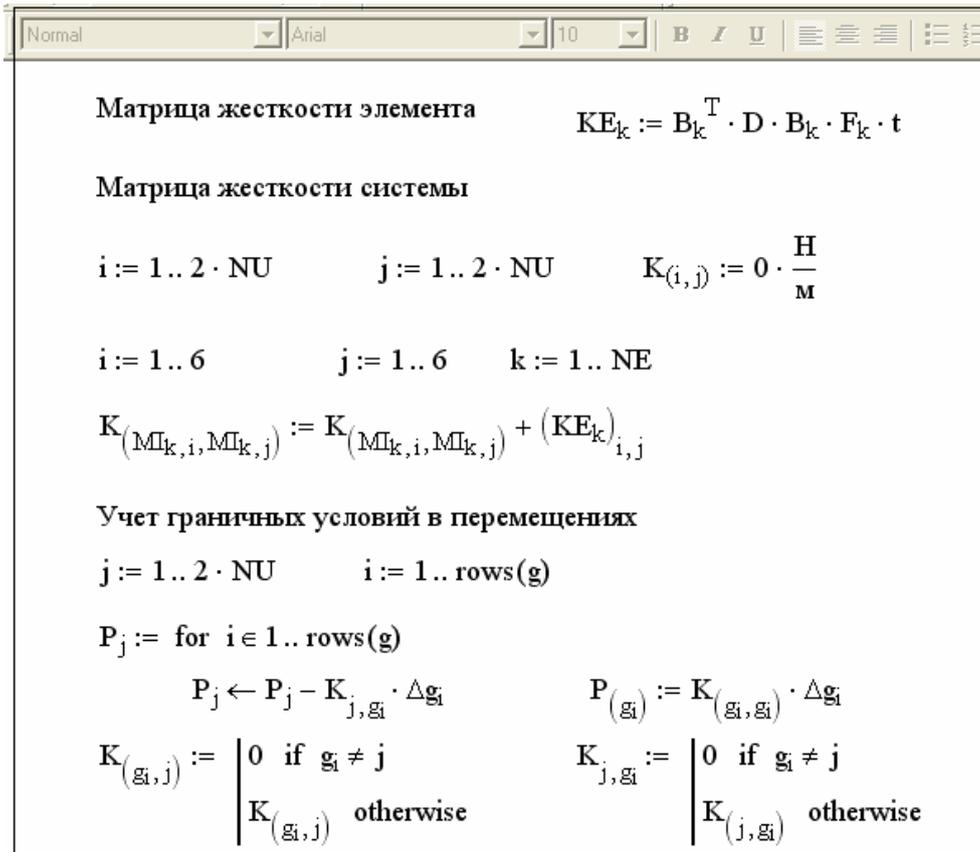


Рис. 66. Формирование матрицы жесткости системы и учет граничных условий

Узловые перемещения определяются путем обращения матрицы жесткости (рис. 67).

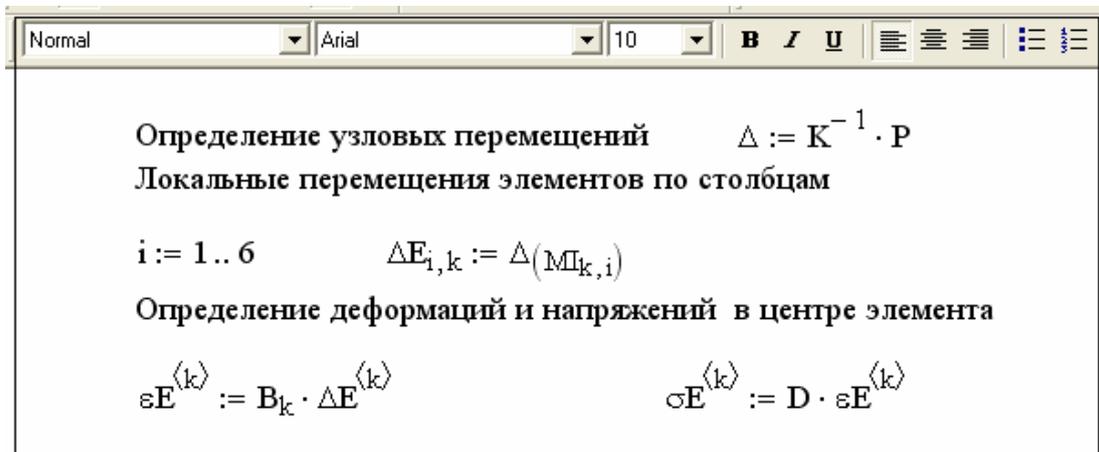


Рис. 67. Определение перемещений узлов, деформаций и напряжений в центре элемента.

По уравнениям теории упругости

$$\varepsilon = \partial^T u,$$

где u — вектор перемещений.

По уравнению связи узловых перемещений Δ и перемещений u произвольной точки

$$u = N\Delta.$$

Отсюда деформация элемента

$$\varepsilon = (\partial^T N)\Delta.$$

По физическим уравнениям теории упругости (закон Гука) напряжения

$$\sigma = D\varepsilon.$$

Сложность расчета состоит в аккуратном использовании индексов элементов, узлов, столбцов, строк, присвоении индексам значений, взятых из матрицы индексов.

Для треугольного элемента функция формы линейна, поэтому производные от функции формы, а следовательно, деформации и напряжения, найденные на [рис. 67](#), постоянны во всей площади элемента.

Напряжения в узлах тела определяется как среднее арифметическое напряжений или деформаций во всех элементах, сходящихся в узле. Расчет напряжений и деформаций в узлах тела приведен на [рис. 68](#), там же показано определение 4-го значения деформации и напряжения в каждом элементе, не учитываемых в матрице внутренней жесткости D .

Определение средних напряжений и деформаций в центре в узлах

$k := 1.. NE$ +

$j1 := 1.. 3$ $\sigma_{j1,i} := 0 \cdot \text{МПа}$

$\varepsilon_{j1,i} := 0$ $ge_i := 0$ $ge_{(M1U_{k,j})} := ge_{(M1U_{k,j})} + 1$

$\sigma_{j1,M1U_{k,j}} := \sigma_{j1,M1U_{k,j}} + \sigma E_{j1,k}$ $\sigma_{j1,i} := \frac{\sigma_{j1,i}}{ge_i}$

$\varepsilon_{j1,M1U_{k,j}} := \varepsilon_{j1,M1U_{k,j}} + \varepsilon E_{j1,k}$ $\varepsilon_{j1,i} := \frac{\varepsilon_{j1,i}}{ge_i}$

Деформации и напряжения в поперечном направлении

$\varepsilon_{4,i} := \varepsilon_{3,i}$ $\varepsilon_{3,i} := \begin{cases} 0 & \text{if NDS} \neq 0 \\ -\nu \cdot (\varepsilon_{1,i} + \varepsilon_{2,i}) & \text{otherwise} \end{cases}$

$\sigma_{4,i} := \sigma_{3,i}$ $\sigma_{3,i} := \begin{cases} 0 & \text{if NDS} \neq 1 \\ \nu \cdot (\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}) & \text{otherwise} \end{cases}$

Рис. 68. Определение перемещений узлов тела, напряжений и деформаций в центре каждого элемента

Работая с документом MathCAD, если опустить выражение $NDS:=1$ ниже выражения $NDS:=0$, то можно увидеть результаты расчета уже не при плоском напряженном состоянии, а при плоской деформации.

Результаты расчета приведены на рис. 69.

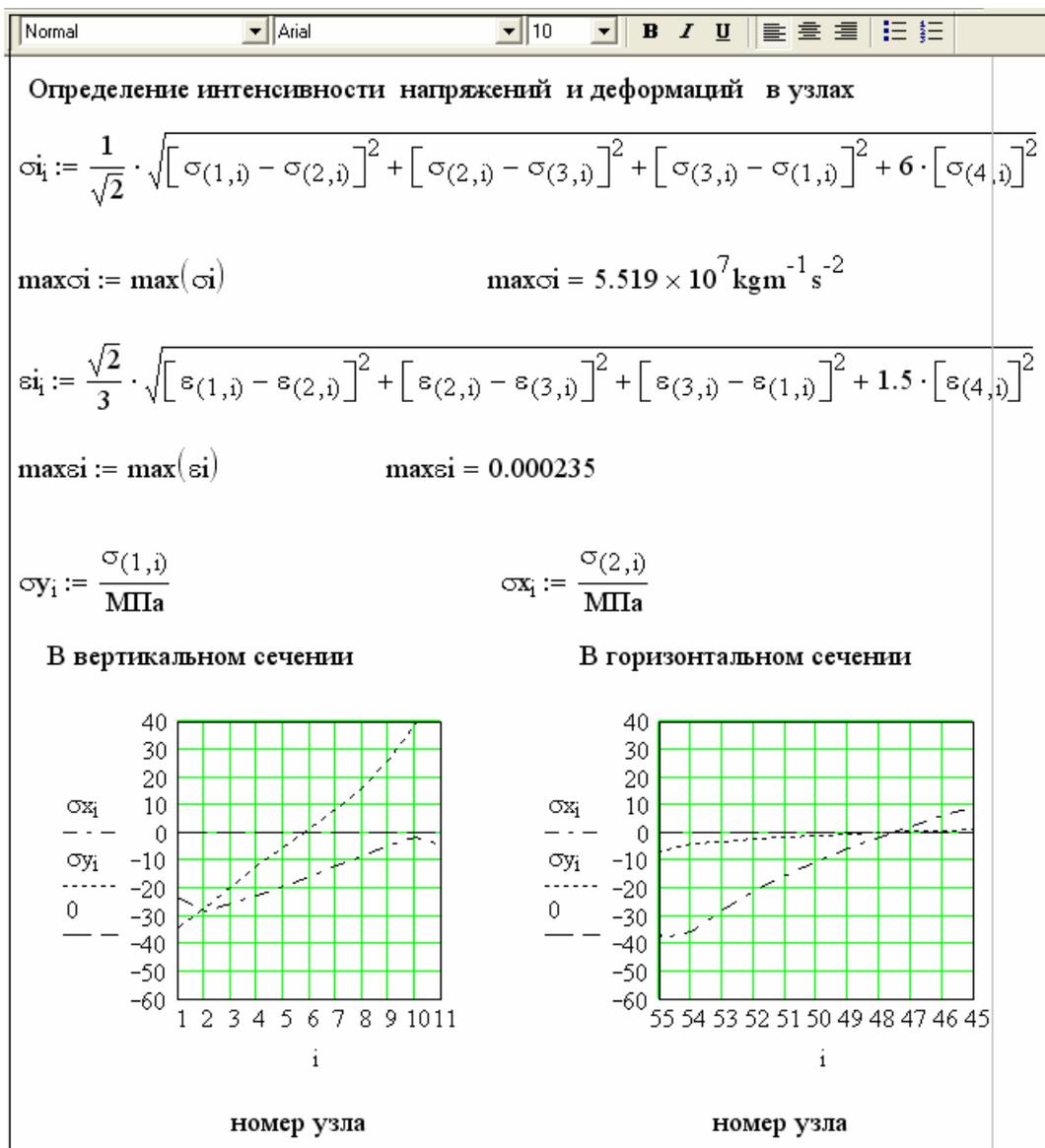


Рис. 69. Результаты расчета

4.3.4. Отчет по лабораторной работе

В рабочем каталоге студента должны быть созданы два файла, содержащие отлаженные документы в системе MathCAD соответствующие расчетам при плоском напряженном состоянии и при плоском деформированном состоянии.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- 1) название лабораторной работы;
- 2) ее цель;
- 3) задание;
- 4) скопированные с экрана монитора отлаженные документы выполнения задания.

Контрольные вопросы

1. Для чего предназначен метод конечных элементов?
2. Какие задачи можно решать с помощью МКЭ?
3. В чем состоит основная идея метода конечных элементов?
4. Какие программные комплексы разработаны на базе конечно-элементного подхода?
5. Привести общую схему алгоритма метода конечных элементов.
6. Какие соображения следует принимать во внимание, при разбиении области на подобласти?
7. Из какой системы линейных алгебраических уравнений определяются перемещения узлов?
8. Как определяется вид аппроксимирующего полинома?
9. Какие функции называются базисными функциями?
10. Каким требованиям должны удовлетворять базисные функции?
11. Как определяются функции формы?
12. Как определяются функции перемещений?
13. Как определяются функции деформаций?
14. Как определяются напряжения?
15. Какой принцип используется для определения обобщенных сил?
16. Как определяется матрица жесткости элемента?
17. Как составляется матрица жесткости системы?
18. Как осуществляется учет граничных условий в матрице жесткости?
19. От учета каких воздействий получаются свободные члены системы канонических уравнений?
20. Чем могут быть вызваны предварительные деформации?
21. Чем могут быть вызваны предварительные напряжения?
22. Как определяются реактивные усилия вследствие отдельных воздействий?
23. Как в системе MathCAD производится расчет координат узлов сетки?

5. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

5.1. Задания

Расчетно-графическая работа состоит из трех заданий. Каждое задание содержит 10 различных вариантов. В табл. 12 приведена таблица соответствия вариантов трех заданий и студенческих вариантов по журналу.

Таблица 12

Распределение заданий по вариантам

Номер варианта	Номер задания	Номер варианта	Номер задания
1	1.1; 2.1; 3.1	16	1.6; 2.8; 3.9
2	1.2; 2.2; 3.2	17	1.7; 2.9; 3.10
3	1.3; 2.3; 3.3	18	1.8; 2.10; 3.1
4	1.4; 2.4; 3.4	19	1.9; 2.1; 3.2
5	1.5; 2.5; 3.5	20	1.10; 2.10; 3.6
6	1.6; 2.6; 3.6	21	1.1; 2.6; 3.7
7	1.7; 2.7; 3.7	22	1.2; 2.7; 3.8
8	1.8; 2.8; 3.8	23	1.3; 2.8; 3.9
9	1.9; 2.9; 3.9	24	1.4; 2.9; 3.10
10	1.10; 2.10; 3.10	25	1.5; 2.10; 3.1
11	1.1; 2.3; 3.4	26	1.6; 2.1; 3.2
12	1.2; 2.4; 3.5	27	1.7; 2.7; 3.3
13	1.3; 2.5; 3.6	28	1.8; 2.5; 3.4
14	1.4; 2.6; 3.7	29	1.9; 2.3; 3.5
15	1.5; 2.7; 3.8	30	1.10; 2.1; 3.6

Задание для расчетно-графической работы

1. Выберите индивидуальное задание из табл. 12 по варианту, номер которого совпадает с порядковым номером в групповом журнале.

2. **Задание 1.** Решение задачи Коши методом Пикара. Решить задачу Коши методом последовательных приближений (методом Пикара) для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a; b]$ при заданном начальном условии $y(a) = c$. Найти пять последовательных приближений, построить их графики и сравнить результаты расчетов с результатами лабораторной работы 1.

3. Задание 2. Вычисление прогиба балки.

Имеется балка с двумя консолями на расстояниях a и b от левого конца балки. К концам балки приложены вертикальные сосредоточенные нагрузки P (рис. 70).

Исходные данные: L — длина балки; $I = 2.494 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости.

В местах приложения сил отсутствуют прогибы, т. е. при $x = a$ и $x = b$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$ и эюру моментов.

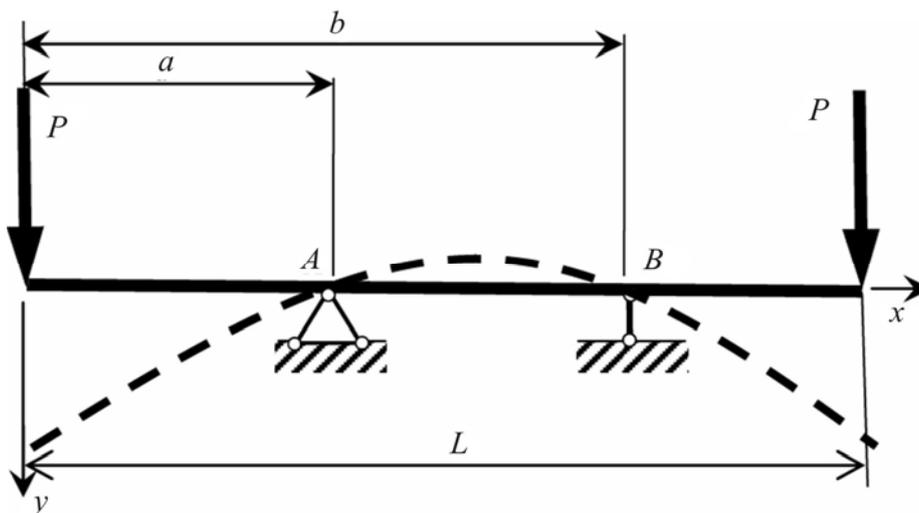


Рис. 70. Расчетная схема балки к заданию 2

Варианты индивидуальных заданий 2 приведены в табл. 13.

Таблица 13

Распределение задания 2 по вариантам

Номер задания	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$P, \text{ Н}$	Номер задания	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$L, \text{ м}$	$P, \text{ Н}$
2.1	1	3	5	7000	2.6	2	5	7	9000
2.2	2	4	5	7000	2.7	2	5	8	10000
2.3	1	3	6	8000	2.8	2	6	8	10000
2.4	2	4	6	8000	2.9	2	7	9	11000
2.5	1	4	7	9000	2.10	3	7	9	11000

4. Задание 3. Вычисление прогибов, изгибающих моментов и поперечных сил балки с сосредоточенной и распределенной нагрузкой. К балке приложены сосредоточенные и распределенные нагрузки.

Найти прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы балки (рис. 71).

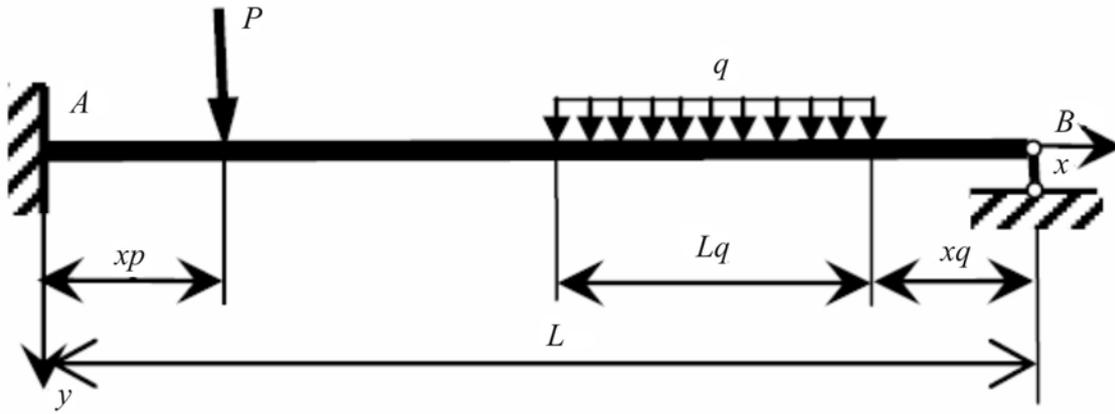


Рис. 71. Расчетная схема балки к заданию 3

Исходные данные: L — длина балки; $I = 2,494 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости; x_p — положение сосредоточенной нагрузки; q — распределенная нагрузка; P — сосредоточенная нагрузка; b — ширина сечения балки; $W = 1125,8 \text{ см}^3$ — статический момент сечения балки; x_q — расстояние от правого конца балки до распределенной нагрузки; L_q — длина приложения распределенной нагрузки.

Варианты индивидуальных заданий 3 приведены в табл. 14.

Таблица 14

Распределение задания 3 по вариантам

Номер задания	x_p , м	x_q , м	L , м	P , Н	q	L_q , м
3.1	1	3	6	7000	$2,2 \cdot 10^5$	2
3.2	1	1	6	8000	$2,3 \cdot 10^5$	2
3.3	1	3	7	9000	$2,4 \cdot 10^5$	1,5
3.4	1	1	6	8000	$2,3 \cdot 10^5$	3
3.5	1	3	8	11000	$2,2 \cdot 10^5$	3
3.6	2	4	8	11000	$2,3 \cdot 10^5$	1,4
3.7	1	1	7	8000	$2,4 \cdot 10^5$	1,5
3.8	3	1	9	9000	$2,3 \cdot 10^5$	2
3.9	2	3	10	8000	$2,2 \cdot 10^5$	2
3.10	3	8	10	7000	$2,3 \cdot 10^5$	1,5

5.2. Примеры выполнения заданий

5.2.1. Задание 1

Решить задачу Коши методом последовательных приближений (методом Пикара) для дифференциального уравнения $y' = xy$ на отрезке $[0; 1]$ при заданном начальном условии $y(0) = 1$. Найти пять последовательных приближений, построить их графики и сравнить результаты расчетов с результатами лабораторной работы 1.

В общем случае итерационная формула по методу последовательных приближений имеет вид

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx,$$

где ($n = 1, 2, \dots$).

Запишем для данного случая эту формулу следующим образом:

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x xy_{n-1} dx.$$

Начальным приближением будем считать $y_0(x) = 1$. Имеем

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x x dx = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Далее получаем

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x x \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}.$$

Аналогично получаем

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x x \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}\right) dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}, \text{ и т. д.}$$

Приведем пример выполнения этого задания в системе MathCAD (рис. 72).

Решение дифференциального уравнения методом последовательных приближений

Зададим начальное приближение и найдем первое.

$y10 := 1$

Вычислим интеграл, используя меню символических вычислений или сочетание клавиш **Shift+F9**

$$\int x \, dx$$

$$\frac{x^2}{2}$$

Получили первое приближение

$$y11(x) := 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2$$

Рис. 72. Нахождение первого приближения решения задачи Коши методом Пикара

Далее построим его график и таблицу значений (рис. 73).

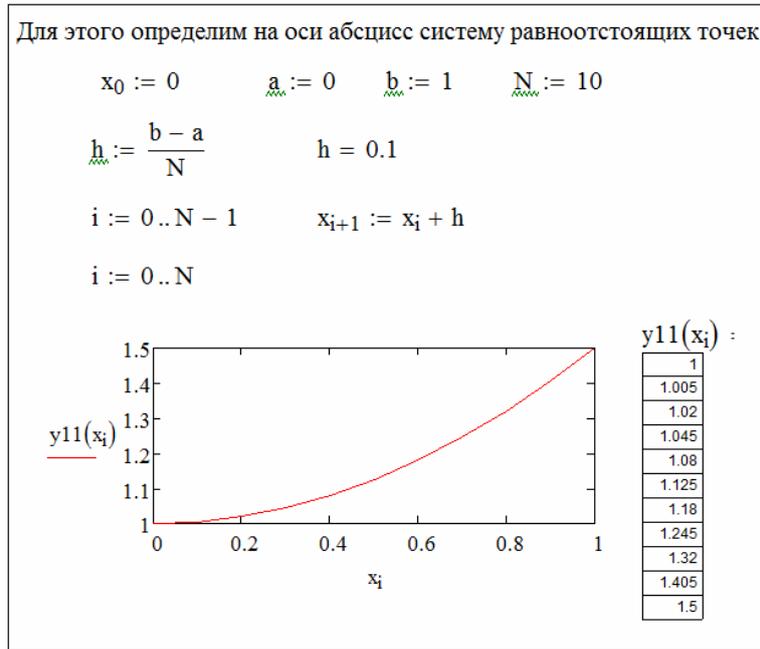


Рис. 73. График и таблица значений первого приближения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Пикара

Сравнивая первое приближение метода Пикара с ранее полученным решением этого уравнения в лабораторной работе 1 по методу Эйлера, можно сделать вывод, что первое приближение дает несколько более худший результат, чем решение по методу Эйлера.

Аналогично, найдем второе приближение, построим его график и таблицу значений (рис. 74).

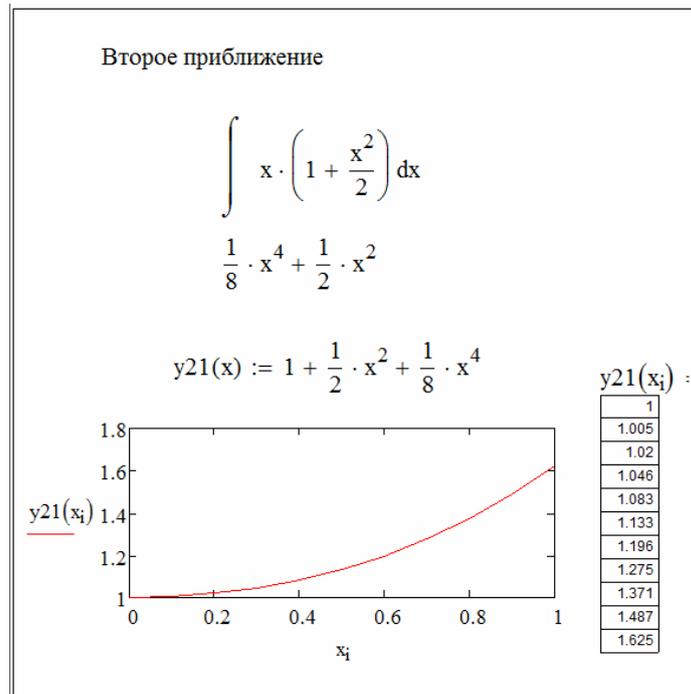


Рис. 74. График и таблица значений второго приближения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Пикара

Сравнивая второе приближение метода Пикара с ранее полученными результатами лабораторной работы 1, можно сделать вывод, что второе приближение дает лучший результат, чем решение по методу Эйлера, но худший результат, чем решение по модифицированному методу Эйлера или по методу Эйлера — Коши.

Найдем третье приближение, построим его график и таблицу значений (рис. 75).

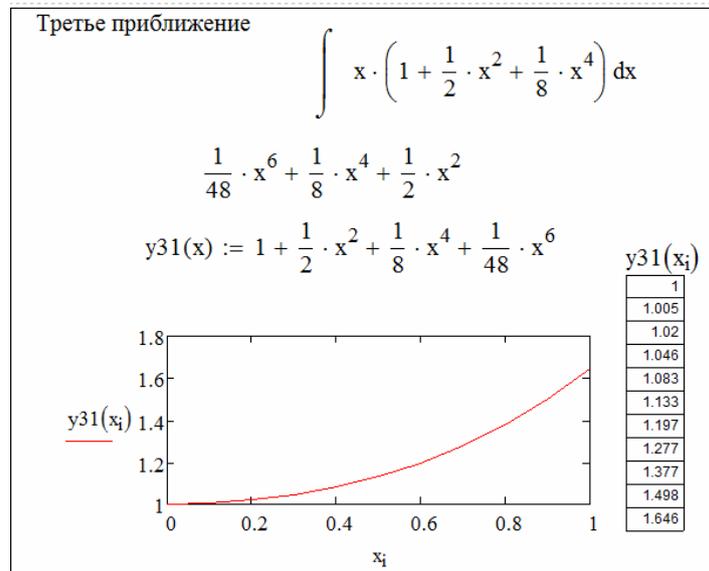


Рис. 75. График и таблица значений третьего приближения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Пикара

Сравнивая третье приближение метода Пикара с ранее полученными результатами лабораторной работы 1, можно сделать вывод, что третье приближение дает результат, сравнимый с решением по модифицированному методу Эйлера или методу Эйлера — Коши.

Найдем четвертое приближение, построим его график и таблицу значений (рис. 76).

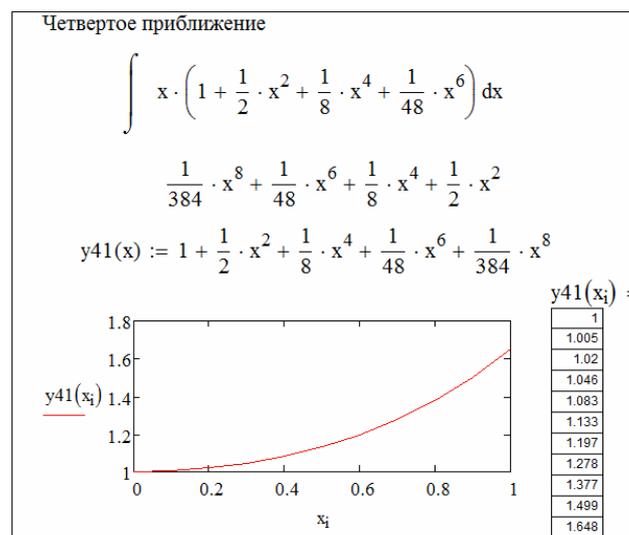


Рис. 76. График и таблица значений четвертого приближения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Пикара

Сравнивая четвертое приближение метода Пикара с ранее полученными результатами лабораторной работы 1, можно сделать вывод, что оно дает результат лучше, чем решение по методу Эйлера — Коши, но несколько хуже, чем решение по методу Рунге — Кутта.

Найдем пятое приближение, построим его график и таблицу значений (рис. 77).

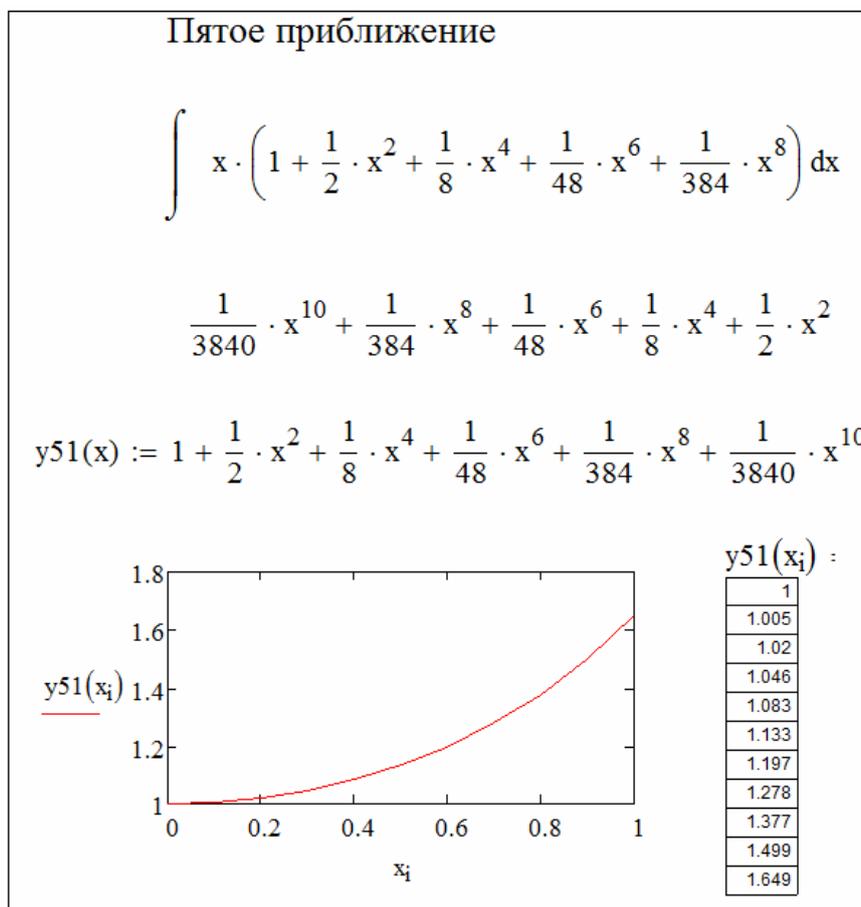


Рис. 77. График и таблица значений пятого приближения решения задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка методом Пикара

Сравнивая пятое приближение метода Пикара с ранее полученными результатами лабораторной работы 1, можно сделать вывод, что оно дает такой же результат, как и решение по методу Рунге — Кутта.

5.2.2. Задание 2

Имеется балка с двумя консолями на расстояниях a и b от левого конца балки (рис. 70). К концам балки приложены вертикальные сосредоточенные нагрузки P .

Исходные данные: L — длина балки; $I = 2,494 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости.

В местах приложения сил отсутствуют прогибы, т. е. при $x = a$ и $x = b$ прогиб $y = 0$.

Построить график прогибов $y(x)$ и эпюру моментов.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости имеет следующий вид:

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

Зададим исходные данные L, I, E, a, b, P (рис. 78).

Задание исходных данных	
$L := 9$	- длина балки (м)
$I := 2.494 \cdot 10^{-4}$	- момент инерции балки (м ⁴)
$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	- модуль упругости стали (Па)
$P := 10^4$	- сосредоточенная нагрузка (Н)
$a := 3$	- положение консоли (м)
$b := 6$	- положение консоли (м)

Рис. 78. Задание исходных данных для задания 2

Момент вычисляется по формуле

$$M(x) = \begin{cases} -Pa & \text{если } x > a; \\ -Pa + P(x - b) & \text{если } x > b; \\ -Px & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Опишем функцию момента $M(x)$ (рис. 79).

$$M(x) := \begin{cases} -P \cdot a & \text{if } x > a \\ -P \cdot a + P(x - b) & \text{if } x > b \\ -P \cdot x & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 79. Определение функции момента

Решим краевую задачу, используя блок Given-Odesolve на интервале $[0, L]$.

Примечание: решение будет найдено только на участке от a до L (рис. 80).

```

Given


$$y''(x) = \frac{M(x)}{E \cdot I} \quad +$$



$$y(a) = 0 \quad y(b) = 0$$



$$y := \text{Odesolve}(x, L, 1000)$$


```

Рис. 80. Решение дифференциального уравнения второго порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба $y(x)$ (рис. 81).

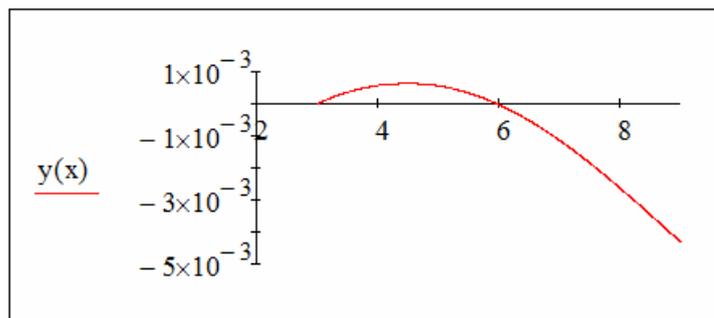


Рис. 81. График прогиба балки

Построим эпюру моментов. Для этого в поле функции зададим $M(x)$, $M(x)$, 0; для второго и третьего графиков зададим тип соединения: **error** (рис. 82).

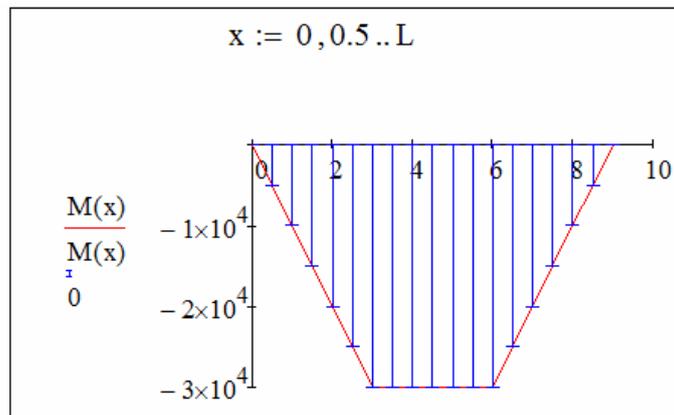


Рис. 82. Построение эпюры момента

5.2.3. Задание 3

Имеется балка. К ней приложены в сосредоточенные и распределенные нагрузки (см. [рис. 71](#)).

Найти прогибы, изгибающие моменты и поперечные силы балки.

Исходные данные: L — длина балки; $I = 2,494 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$ — момент инерции; $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ — модуль упругости; x_p — положение сосредоточенной нагрузки; q — распределенная нагрузка; P — сосредоточенная на-

грузка; b — ширина сечения балки; $W = 1125,8 \text{ см}^3$ — статический момент сечения балки; xq — расстояние от правого конца балки до распределенной нагрузки; Lq — длина приложения распределенной нагрузки.

Зависимость прогибов банки от внешней нагрузки описывается дифференциальным уравнением 4-го порядка:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии балки на упругом основании содержит в правой части только выражение для распределенной нагрузки и не содержит выражений для сосредоточенных сил и пар сил. Чтобы учесть влияние сосредоточенной силы P , заменим ее распределенной нагрузкой интенсивностью qp , сосредоточенной на малом участке a , например,

$$a = L/100; \quad qp = P/(a b),$$

где b — ширина сечения балки.

Расстояние от левого края балки до начала распределенной нагрузки — xp . Зная прогиб стержня, можно определить изгибающий момент в сечениях стержня

$$M = EIy''$$

и максимальные напряжения в сечениях стержня $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}$.

Типы закреплений концов балки и соответствующие им граничные условия приведены в [табл. 10](#).

Зададим исходные данные, приведя их к единой системе (метры, паскалы, ньютоны) (рис. 83).

Задание исходных данных	
$L := 6$	- длина балки (м)
$I := 2.494 \cdot 10^{-4}$	- момент инерции балки (м ⁴)
$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	- модуль упругости стали (Па)
$P := 10^4$	- сосредоточенная нагрузка (Н)
$b := 0.18$	- ширина сечения балки (м)
$W := 1125.8 \cdot 10^{-6}$	- статический момент сечения балки (м)
$q := 250 \cdot 10^3$	- распределенная нагрузка (Н/м ²)
$xp := 1$	- положение сосредоточенной нагрузки (м)
$Lq := 2.8$	- длина приложения распределенной нагрузки (м)
$xq := 0.8$	- расстояние от правого конца балки до распределенной нагрузки (м)

Рис. 83. Задание исходных данных для задания 3

Опишем функцию общей распределенной нагрузки $qb(x)$ (рис. 84), определенную:

- 1) на участке $[xp - a/2, xp + a/2]$ — для приведенной к распределенной сосредоточенной нагрузки P ;
- 2) на участке $[L - Lq - xq, L - xq]$ — для распределенной нагрузки q ;
- 3) для остальных участков зададим значение $q/800$, так как при значении, равном 0, функция Odesolve выдает ошибку.

Сосредоточенную силу P заменим
распределенной нагрузкой, сосредоточив ее
на малом участке.

Опишем функцию общей распределенной
нагрузки

+

$a := \frac{L}{100} \quad a = 0.06$

$$q(x) := \begin{cases} \frac{q}{800} & \text{if } 0 \leq x \leq xp - \frac{a}{2} \\ \frac{P}{a \cdot b} & \text{if } xp - \frac{a}{2} < x \leq xp + \frac{a}{2} \\ \frac{q}{800} & \text{if } xp + \frac{a}{2} < x \leq L - Lq - xq \\ q & \text{if } L - Lq - xq < x \leq L - xq \\ \frac{q}{800} & \text{if } L - xq < x \leq L \end{cases}$$

Рис. 84. Определение функции общей распределенной нагрузки

Найдем прогиб балки, решив дифференциальное уравнение с использованием блока Given – Odesolve. Краевые условиями являются равенства 0 прогиба и изгибающего момента на шарнирной опоре балки (y, y''), а также равенство 0 прогиба и угла кручения ($y, y'(0)$) на закрепленном конце (рис. 85).

Найдем прогиб балки, решив
дифференциальное уравнение с использованием
блока Given - Odesolve

Given

$$y''''(x) = \frac{q(x)}{I \cdot E}$$

$y(0) = 0 \quad y(L) = 0$

$y'(0) = 0 \quad y''(L) = 0$

$y := \text{Odesolve}(x, L, 5000)$

Рис. 85. Решение дифференциального уравнения четвертого порядка прогиба балки блоком Given-Odesolve

Построим график прогиба балки на интервале $[0, L]$ (рис. 86).

Примечание: если график прогиба не равен 0 на концах, то необходимо использовать для функции Odesolve другой численный метод, например, «с постоянным шагом». Для задания метода вызвать контекстное меню для функции и выбрать нужный метод.

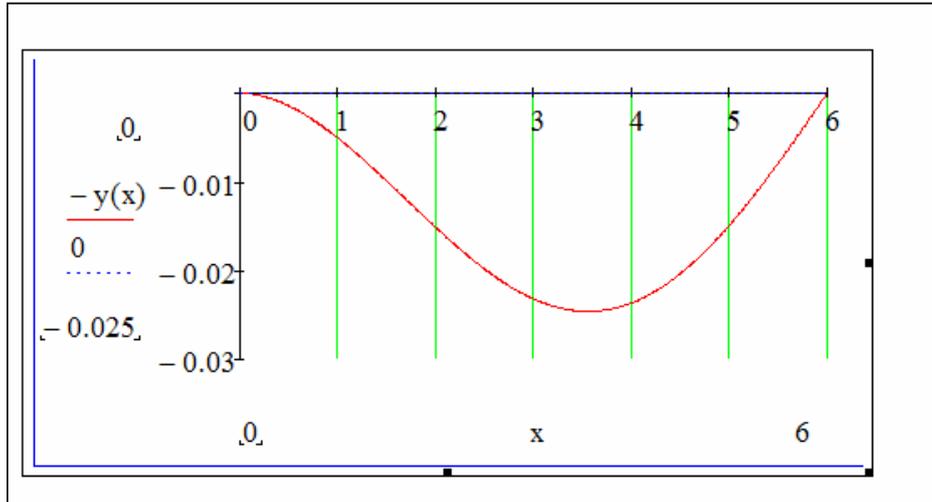


Рис. 86. График прогиба балки

Определим максимальную точку прогиба (рис. 87), выполняя действия:

- 1) по графику приблизительно определим абсциссу точки с максимальным прогибом, присвоим ее значение переменной $xp1$;
- 2) используя функцию $\text{Maximize}(y, xp1)$, уточним значение абсциссы и присвоим его переменной $xmax$;
- 3) найдем значение прогиба, подставляя $xmax$ в функцию $y(x)$.

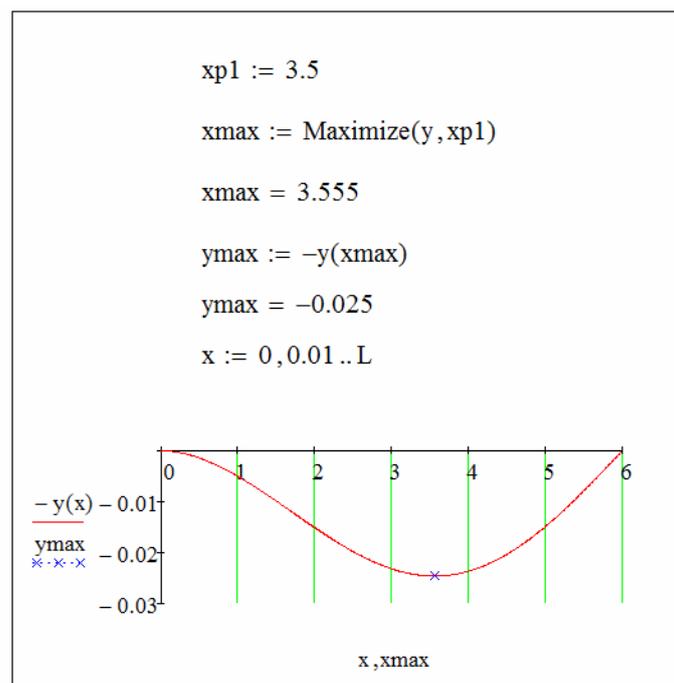


Рис. 87. Нахождение максимального прогиба балки

Опишем функцию изгибающего момента $M = EIy''$ и построим эпюру, добавляя в область функции 0 и используя форматирование для графика M и 0 тип «ошибка», подобно заданию 2 (рис. 88).

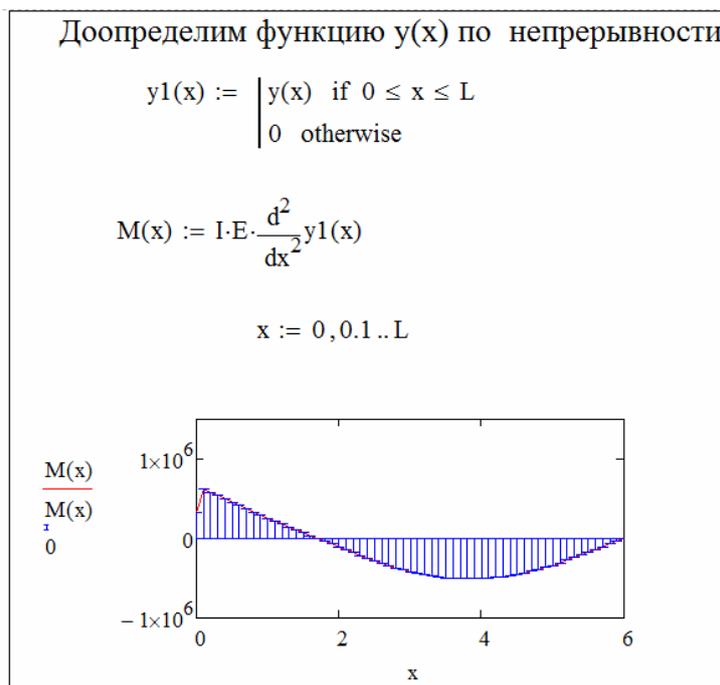


Рис. 88. Определение функции изгибающего момента и построение эпюры

По графику $M(x)$ найдем приближенно значение аргумента, в котором момент принимает минимальное значение и запомним в переменной $xp2$. Найдем значение $xmin$ в котором достигается наименьший изгибающий момент, используя функцию $Minimize(M, xp2)$. Найдем значение момента $Mmax$, подставляя $xmin$ в функцию $M(x)$ (рис. 89).

```
xp2 := 4
xmin := Minimize(M, xp2)

xmin = 3.834
Mmin := M(xmin)

Mmax := M(xmin)

Mmax = -5.064 × 105
```

Рис. 89. Определение наименьшего изгибающего момента

Опишем функцию поперечных сил балки $Q = EIy'''$ и построим эпюру, добавляя в область функции 0 и используя форматирование для графиков Q и 0 тип «ошибка», подобно заданию 2. Найдем соответствующее максимальное напряжение в сечении балки по формуле $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$, (рис. 90).

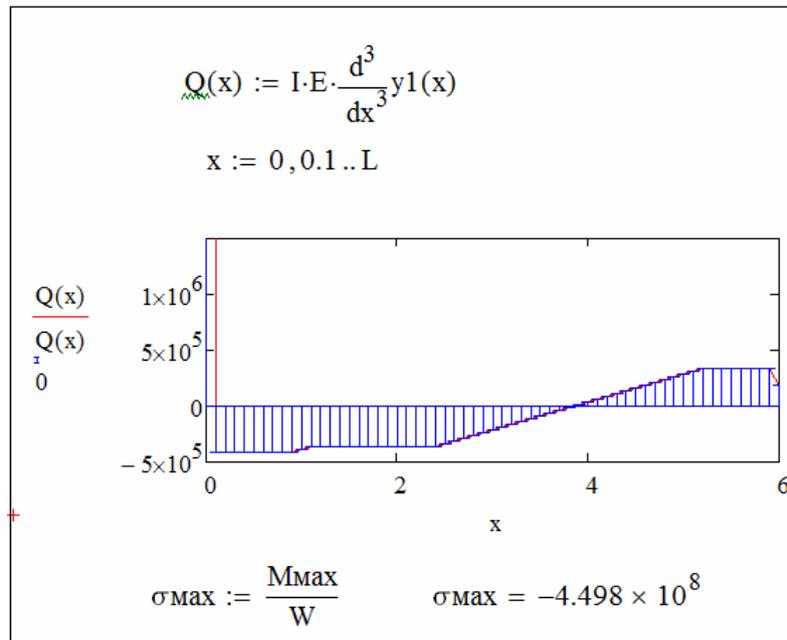


Рис. 90. Построение эпюры поперечных сил

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А. В. Строительная механика : учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. — СПб. : Издательство «Лань», 2010. — 656 с.
2. Макаров, Е. Г. Инженерные расчеты в MathCAD 15 : учебный курс / Е. Г. Макаров. — СПб. : Питер, 2011. — 400 с.
3. Макаров, Е. Г. Сопротивление материалов на базе MathCAD. — СПб. : БХВ-Петербург, 2004. — 423 с.
4. Игнатъев, А. В. Метод конечных элементов и его реализация в среде MathCAD : лабораторный практикум по дисциплине «Аналитические и численные методы решения уравнений математической физики» / А. В. Игнатъев. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2010. — 31 с.
5. Копченова, Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. — 3-е изд., стер. — СПб. : Издательство «Лань», 2009. — 368 с.
6. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 240 с.

Электронное издание сетевого распространения

Михайлова Наталья Анатольевна
Забродина Ольга Михайловна
Ерещенко Татьяна Владимировна

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Редактор *И. Б. Чижикова*
Компьютерная правка и верстка *М. А. Денисова*

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0

Подписано в свет 30.12.2015.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 5,9. Объем данных 1,8 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
<http://www.vgasu.ru>, info@vgasu.ru