

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет**

Л. В. Кукса, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ (ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА)

**Контрольные задания
и примеры их решения**

**В 2 частях
Часть I**

Под редакцией Л. В. Куксы

Волгоград. ВолгГАСУ. 2014



**© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2014**

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73
К898

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук *О. В. Коновалов*, доцент кафедры информационных систем и математического моделирования Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета (ВолгГАСУ);
доктор технических наук, профессор *В. А. Игнатьев*,
заведующий кафедрой строительной механики ВолгГАСУ

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-практического пособия*

Кукса, Л. В.

К898 Соппротивление материалов (Техническая механика). Контрольные задания и примеры их решения [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Л. В. Кукса, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов ; под ред. Л. В. Куксы ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (21,6 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-700-4

Рассмотрены основные теоретические положения дисциплин «Техническая механика», «Соппротивление материалов». Приведены контрольные задания по темам: растяжение и сжатие прямого бруса, кручение, геометрические характеристики поперечных сечений, изгиб, определение перемещений при изгибе. Рассмотренные примеры решения задач помогут студентам выполнить контрольные работы.

Для студентов заочной формы обучения технических вузов.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

Имеется печатный аналог (Кукса Л. В. Соппротивление материалов (Техническая механика). Контрольные задания и примеры их решения : учебно-практическое пособие : в 2 ч. Ч. 1 / Л. В. Кукса, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов ; под ред. Л. В. Куксы ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — 74, [1] с.)

УДК 539.3/.6(075.8)
ББК 30.121я73

ISBN 978-5-98276-700-4



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ.....	5
1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА.....	5
1.1. Основные понятия. Закон Гука.....	5
1.2. Построение эпюр внутренних усилий и напряжений.....	6
1.3. Основные методы расчета деталей машин и элементов конструкций.....	7
Метод расчета по допускаемым напряжениям.....	7
Метод расчета по предельным состояниям.....	8
Метод расчета по разрушающим нагрузкам.....	8
1.4. Статически неопределимые системы.....	8
1.5. Пример решения задач.....	9
Задача 1.....	9
Задача 2.....	13
2. КРУЧЕНИЕ.....	17
2.1. Определение внутренних усилий и построение эпюр крутящих моментов....	17
2.2. Определение касательных напряжений при кручении и их распределение по поперечному сечению.....	18
2.3. Закон Гука при кручении.....	19
2.4. Пример решения задачи 3.....	20
3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ.....	24
3.1. Основные понятия.....	24
3.2. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей.....	25
3.3. Зависимости между моментами инерции относительно повернутых осей.....	26
3.4. Главные оси инерции. Главные центральные моменты инерции.....	26
3.5. Пример решения задачи 4.....	27
4. ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА.....	30
4.1. Основные понятия.....	30
4.2. Определение внутренних усилий при плоском поперечном изгибе.....	31
4.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе.....	33
Пример 4.1.....	33
Пример 4.2.....	35
4.4. Правила контроля правильности построения эпюр Q и M	36
4.5. Определение нормальных напряжений при изгибе. Распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения.....	37
4.6. Определение касательных напряжений при изгибе. Распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения.....	38
4.7. Расчет на прочность при изгибе.....	40
4.8. Пример решения задачи 5 (в разделе 6.2) по схемам a и b	41
Схема a	41
Схема b	44
5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ.....	48
5.1. Понятие о прогибе и угле поворота сечения.....	48
5.2. Универсальные уравнения углов поворота сечения и прогибов.....	49
5.3. Метод Максвелла — Мора.....	49
5.4. Применение способа Верещагина, формулы Симпсона и формулы перемножения трапеций.....	50
5.5. Примеры решения задач.....	51
Задача 6.....	51
Задача 7.....	57
6. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	58
6.1. Указания о порядке выполнения контрольных работ.....	58

6.2. Контрольные задания.....	59
Задача 1.....	60
Задача 2.....	60
Задача 3.....	60
Задача 4.....	61
Задача 5.....	61
Задача 6.....	62
Задача 7.....	62
Библиографический список.....	71
Приложение 1. Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240—89).....	72
Приложение 2. Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240—89).....	73
Приложение 3. Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509—93)....	74

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Учебно-практическое пособие написано в соответствии с ГОСТом и программами учебных дисциплин «Техническая механика», «Механика», «Сопроотивление материалов» для студентов заочной формы обучения всех направлений и специальностей, учебными планами которых предусмотрены эти дисциплины. В зависимости от специальности студенты решают различное число задач в соответствии с рабочими программами, что отражено в предлагаемом учебно-практическом пособии.

Часть I настоящего учебного пособия включает следующие разделы: растяжение и сжатие, кручение, геометрические характеристики поперечных сечений, изгиб прямого бруса, определение перемещений при изгибе. Рассмотрение этих разделов служит основой для последующего изучения разделов, рассмотренных в части II учебного пособия: сложное сопротивление, внецентренное растяжение и сжатие, изгиб с кручением, расчеты на устойчивость, динамическое действие сил, плоские и пространственные ломанные и кривые бруска.

Авторы стремились к тому, чтобы изложение учебного материала отличалось достаточной ясностью, последовательностью, полнотой освещения рассматриваемых вопросов, хорошо подобранными и выполненными рисунками.

Все замечания и пожелания будут приняты авторами с благодарностью. Авторы просят направлять их на кафедру сопротивления материалов Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета.

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ ПРЯМОГО БРУСА

1.1. Основные понятия. Закон Гука

При действии осевой силы возникает растяжение или сжатие бруса. При растяжении или сжатии внутренние усилия приводятся только к продольной силе, все остальные внутренние усилия равны нулю.

Закон Гука применительно к напряжениям и относительным деформациям имеет следующий вид:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где σ — нормальное напряжение; E — модуль упругости, или модуль Юнга. Модуль Юнга является коэффициентом пропорциональности, размерность имеет такую же, как и напряжение; ε — относительная деформация.

Имея в виду, что при растяжении или сжатии

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \sigma = \frac{F}{A},$$

где A — площадь поперечного сечения стержня, формулу закона Гука можно переписать в следующем виде:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

или

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA},$$

т. е. абсолютное удлинение (укорочение) стержня Δl прямо пропорционально действующей силе F , длине стержня l и обратно пропорционально произведению EA , называемого жесткостью стержня при растяжении или сжатии.

1.2. Построение эпюр внутренних усилий и напряжений

Эпюрой называется график зависимости исследуемой величины, построенной на базовой линии, проведенной параллельно оси стержня.

Рассмотрим построение эпюр внутренних усилий N , нормальных напряжений σ для стержня, закрепленного верхним концом, нагруженного сосредоточенной силой F и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q , действующими вдоль геометрической оси стержня (рис. 1.1, а).

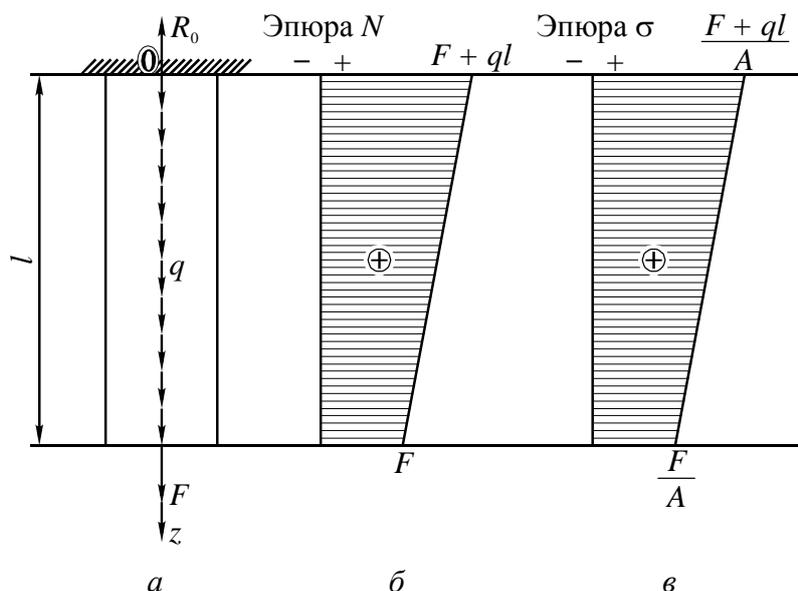


Рис. 1.1

Геометрические размеры стержня (длина, площадь поперечного сечения) и упругие свойства материала будем считать известными.

Выберем линейную систему координат Oz . Составим уравнение равновесия, $\sum Z = 0$ (сумма проекций всех сил на вертикальную ось Oz). При составлении уравнения равновесия два противоположных направления действия сил необходимо учитывать разными знаками:

$$-R_0 + F + ql = 0;$$

$$R_0 = F + ql.$$

Для определения внутреннего усилия N применим метод сечений. Выберем произвольное сечение на расстоянии z от начала координат, нижнюю часть стержня отбросим, а верхнюю оставим в рассмотрении под действием заданных сил и внутреннего усилия N (рис. 1.2). Составим $\sum Z = 0$:

$$-R_0 + qz + N = 0;$$

$$N = R_0 - qz = F + q(l - z).$$

Полученное уравнение для N показывает, что внутреннее усилие численно равно алгебраической сумме всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

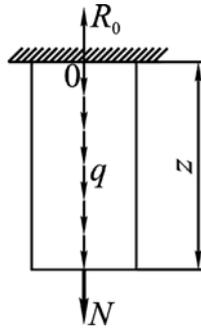


Рис. 1.2

Определим напряжение σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + q(l - z)}{A}.$$

Зависимости N и σ от z являются линейными, чтобы построить прямую линию достаточно определить две точки прямой.

Если $z = 0$, то

$$N = R_0 = F + ql, \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F + ql}{A}.$$

Если $z = l$, то

$$N = F, \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}.$$

Нулевые линии проводятся параллельно геометрической оси бруса (рис. 1.1, б, в). Откладывая полученные значения N и σ и соединяя прямой линией, получим эпюры N и σ . Эпюры строятся в определенном масштабе (пропорциональным числам должны соответствовать пропорциональные отрезки). Штриховка эпюры производится отрезками, перпендикулярными нулевой линии.

1.3. Основные методы расчета деталей машин и элементов конструкций

Метод расчета по допускаемым напряжениям

Согласно этому методу условие прочности следующее:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (1.1)$$

где σ_{\max} — наибольшее рабочее напряжение, возникающее в детали или элементе конструкций; $[\sigma]$ — допускаемое для данного материала напряжение, которое определяется по формуле $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{k}$ (σ_T — предел текучести материала детали или элемента конструкции; k — коэффициент запаса прочности).

Используя уравнение (1.1) можно решить три задачи:

1) выполнить проверку прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma], \quad (1.2)$$

где N_{\max} — наибольшая продольная сила; A — площадь поперечного сечения;

2) подобрать поперечное сечение:

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}; \quad (1.3)$$

3) определить значение допустимой нагрузки $[F]$:

$$[F] \leq [\sigma] A. \quad (1.4)$$

Метод расчета по предельным состояниям

Условие прочности для центрального растянутого (сжатого) элемента будет иметь вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq \gamma R, \quad (1.5)$$

где N — наибольшее усилие за время нормальной эксплуатации; A — площадь поперечного сечения; γ — коэффициент условий работы; R — расчетное сопротивление.

Используя эту формулу, можно выполнить проверку прочности (1.5), подбор сечения и определение наибольшего допустимого усилия:

$$A \geq \frac{N}{\gamma R} \quad (1.6)$$

и

$$[N] \leq \gamma RA. \quad (1.7)$$

Метод расчета по разрушающим нагрузкам

Условие прочности в этом случае будет иметь вид:

$$F_{\max} \leq [F] = \frac{F_{\text{пред}}}{n}, \quad (1.8)$$

где $F_{\text{пред}}$ — предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и существенно не изменяя свою форму; n — коэффициент запаса прочности.

1.4. Статически неопределимые системы

Статически неопределимыми называются такие системы, которые не могут быть решены с помощью одних лишь уравнений равновесия.

План решения статически неопределимых задач:

1. Статическая сторона задачи (составляются все возможные для рассматриваемой системы уравнения равновесия).
2. Геометрическая сторона задачи (рассматривается деформированное состояние системы).
3. Физическая сторона задачи (используется закон Гука).
4. Математическая часть задачи (совместно рассматриваются и решаются уравнения, полученные в статической, геометрической и физической сторонах задачи).

1.5. Пример решения задач

Задача 1

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис. 1.3).

Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа; 3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T^k и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности $k = 1,5$; 4) сравнить величины $Q_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Исходные данные: $A = 10 \text{ см}^2$; $a = 2,5$ м; $b = 2,9$ м; $c = 1,1$ м.

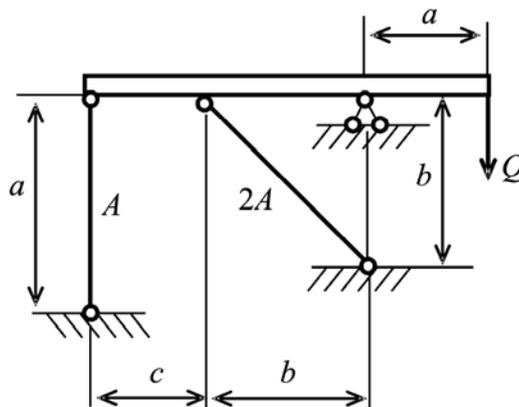


Рис. 1.3

Р е ш е н и е

I. Определение усилий и напряжений в стержнях

Для определения усилий в стержнях заданной статически неопределимой задачи воспользуемся планом решения статически неопределимых систем.

1. Статическая сторона задачи

Составим силовую схему задачи, на которой покажем искомые усилия в стержнях N_1 , N_2 и реакции, возникающие в опоре D — R_D и H_D (рис. 1.4).

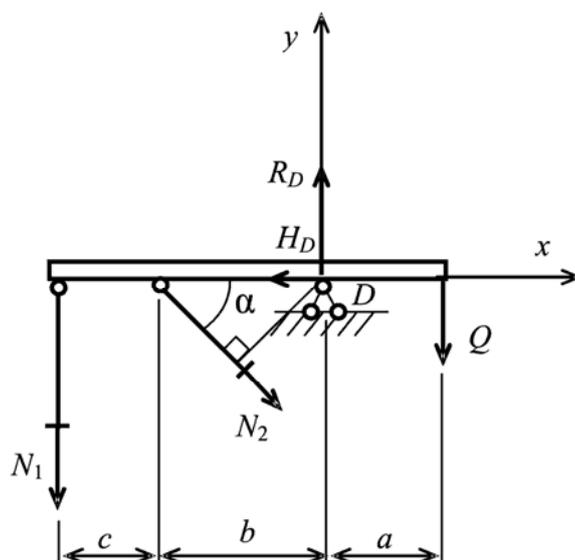


Рис. 1.4

Усилия N_1 и N_2 показываем как растягивающие, в направлении от узла. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0, -H_D + N_2 \cos \alpha = 0; \quad (1.9)$$

$$\sum Y = 0, R_D - N_2 \sin \alpha - N_1 - Q = 0; \quad (1.10)$$

$$\sum M_A = 0, N_1(c + b) + N_2 \cdot b \cdot \sin \alpha - Qa = 0, \quad (1.11)$$

где $\sin \alpha = \sin 45^\circ = 0,707$.

Подставим исходные данные в уравнение (1.11):

$$N_1(1,1 + 2,9) + N_2 \cdot 2,9 \cdot 0,707 = Q \cdot 2,5$$

или

$$N_1 + 0,51 N_2 = 0,63Q. \quad (1.12)$$

2. Геометрическая сторона задачи

На рис. 1.5 представлена схема деформированного состояния системы.

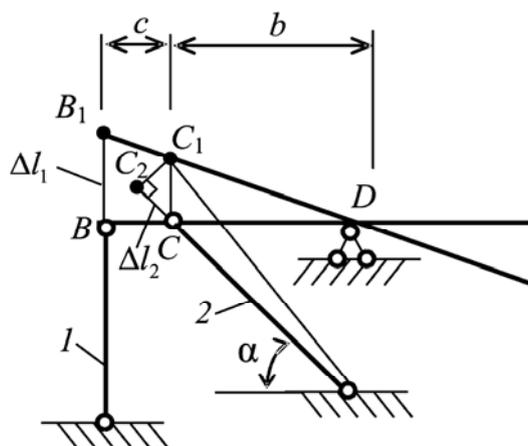


Рис. 1.5

Предположим, что жесткий брус DB повернется по часовой стрелке и займет положение DB_1 . В действительности при этом точки C и B перемещаются в положения C_1 и B_1 по дуге окружности, вследствие малости упругих деформаций принимается, что $C_1C \perp DB$, $BB_1 \perp DB$. Изобразим новое положение стержня 2 тонкой линией. Точка C_1 переместится в положение C_2 по дуге окружности, обычно принимают перемещение по перпендикуляру к исходному положению стержня. Принятые допущения не вносят значительных ошибок вследствие малости упругих деформаций.

Из подобия $\triangle DBB_1$ и $\triangle DCC_1$, которое устанавливается на основе равенства двух углов треугольников

$$\frac{BB_1}{DB} = \frac{CC_1}{DC},$$

имеем $\angle CC_1C_2 = \alpha$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), $BB_1 = \Delta l_1$, $CC_1 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta l_1}{c+b} &= \frac{\Delta l_2}{b \sin \alpha}; \\ \Delta l_1 - \Delta l_2 \frac{c+b}{b \sin \alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

3. Физическая сторона задачи

Согласно закону Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

тогда

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E2A}, \quad (1.14)$$

где $l_1 = a = 2,5$ м, $l_2 = b\sqrt{2} = 2,9\sqrt{2} = 4,1$ м.

4. Математическая часть задачи

Рассмотрим совместно уравнения (1.13) и (1.14):

$$\frac{N_1 l_1}{EA} - \frac{N_2 l_2}{2EA} \frac{c+b}{b \sin \alpha} = 0.$$

В полученном уравнении переходим к числовым значениям коэффициентов при неизвестных

$$\frac{N_1 \cdot 2,5}{EA} - \frac{N_2 \cdot 4,1}{2EA} \frac{1,1+2,9}{2,9 \cdot 0,707} = 0.$$

После сокращения слагаемых на жесткость EA и алгебраических преобразований имеем

$$N_1 - 1,6 N_2 = 0. \quad (1.15)$$

Решаем систему уравнений (1.12) и (1.15):

$$\begin{cases} N_1 + 0,51N_2 = 0,63Q \\ N_1 - 1,6N_2 = 0. \end{cases}$$

Искомые усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} N_1 &= 0,47Q, \\ N_2 &= 0,30Q. \end{aligned}$$

Напряжения в стержнях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{A} = \frac{0,47Q}{10 \cdot 10^{-4}} = 473,37Q, \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{2A} = \frac{0,3Q}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 147,91Q. \end{aligned}$$

Максимальное напряжение действует в стержне 1:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 473,37 Q.$$

II. Определение допускаемой нагрузки $Q_{\text{доп}}$

Приравняем максимальное действующее напряжение σ_{\max} к допускаемому $[\sigma]$

$$\sigma_{\max} = [\sigma],$$

тогда

$$\begin{aligned} 473,37 Q_{\text{доп}} &= [\sigma] = 160 \text{ МПа}; \\ Q_{\text{доп}} &= \frac{[\sigma]}{473,37} = \frac{160 \cdot 10^6}{473,37} = 338 \text{ 000 Н} = 338 \text{ кН}. \end{aligned}$$

III. Определение предельной грузоподъемности системы Q_T^k и допускаемой нагрузки $Q_{\text{доп}}$

Определим разрушающие усилия в стержнях из условия достижения в стержнях напряжений, равных пределу текучести $\sigma_T = 240$ МПа:

$$\begin{aligned} N_{1T} &= \sigma_T A = 240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 240 \text{ 000 Н} = 240 \text{ кН}; \\ N_{2T} &= \sigma_T 2A = 240 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 480 \text{ 000 Н} = 480 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из уравнения (1.12)

$$Q_T^k = \frac{N_{1T} + 0,51N_{2T}}{0,63} = \frac{240 + 0,51 \cdot 480}{0,63} = 769,52 \text{ кН}.$$

Допускаемая нагрузка

$$Q_{\text{доп}} = \frac{Q_{\Gamma}^{\text{к}}}{k};$$

$$Q_{\text{доп}} = \frac{769,52}{1,5} = 513 \text{ кН.}$$

IV. Сравнение величин $Q_{\text{доп}}$, полученных при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам

Значение $Q_{\text{доп}} = 338 \text{ кН}$, определенное по методу расчета по допускаемым напряжениям, меньше, чем значение $Q_{\text{доп}} = 513 \text{ кН}$, определенное по методу расчета по допускаемым нагрузкам.

Задача 2

Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения A , опирающимся на неподвижное основание (рис. 1.6, *a*). К брусу прикреплен средний ступенчатый стержень с зазором $\Delta = \beta c$. Требуется (без учета собственного веса): 1) установить, при какой силе зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении силы H и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданном значении сил H ; 4) установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня обратилась в нуль.

Исходные данные: $A = 10 \text{ см}^2$, $c = 1 \text{ м}$, $H = 150 \text{ кН}$, $\beta = 1 \cdot 10^{-5}$.

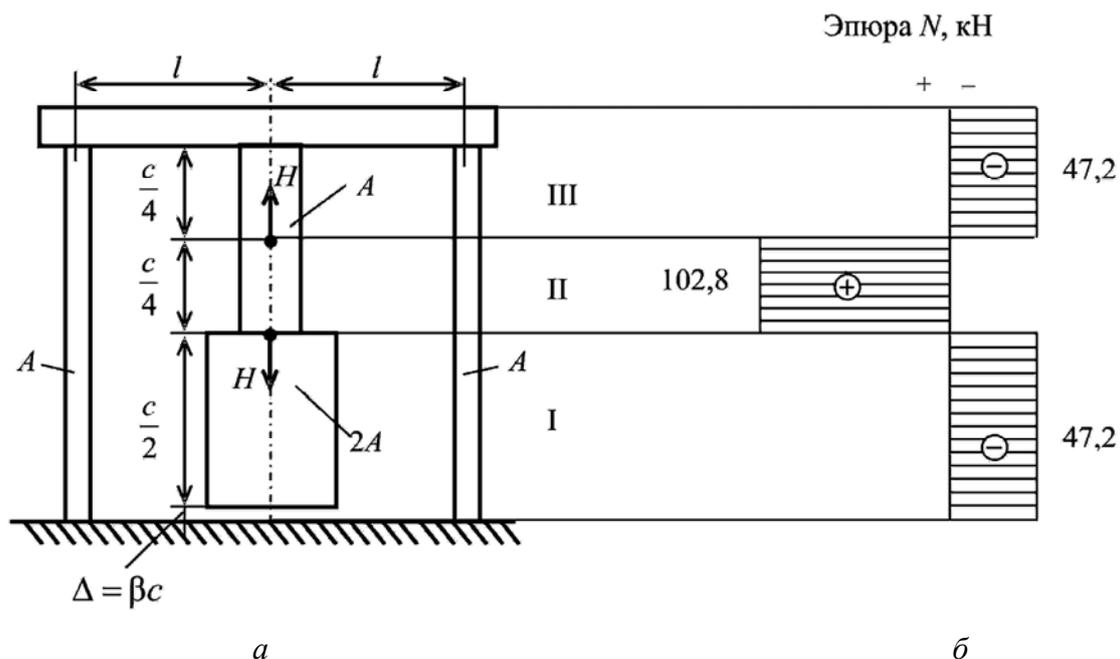


Рис. 1.6

Р е ш е н и е

1. Определение силы, при которой зазор Δ закрывается

Приравняем перемещение нижнего сечения среднего стержня $\Delta(H)$ заданному зазору Δ :

$$\Delta(H) = \Delta.$$

Так как в рассматриваемой схеме силы H взаимно уравновешены, то продольное усилие действует только на участке II среднего стержня

$$N_2 = H.$$

Тогда перемещение нижнего сечения среднего стержня будет численно равно деформации участка II:

$$\Delta(H) = \frac{H \frac{c}{4}}{EA} = \frac{Hc}{4EA}.$$

Имеем

$$\frac{Hc}{4EA} = \beta c,$$

отсюда искомое значение силы H , при которой зазор закрывается,

$$H = 4\beta EA = 4 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 8400 \text{ Н} = 8,4 \text{ кН}.$$

2. Определение реакции основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении силы H и построение эпюры продольных сил для среднего стержня

Воспользуемся методом мысленных сечений и определим продольные усилия на каждом участке среднего стержня, выразив их через H и R (рис. 1.7).

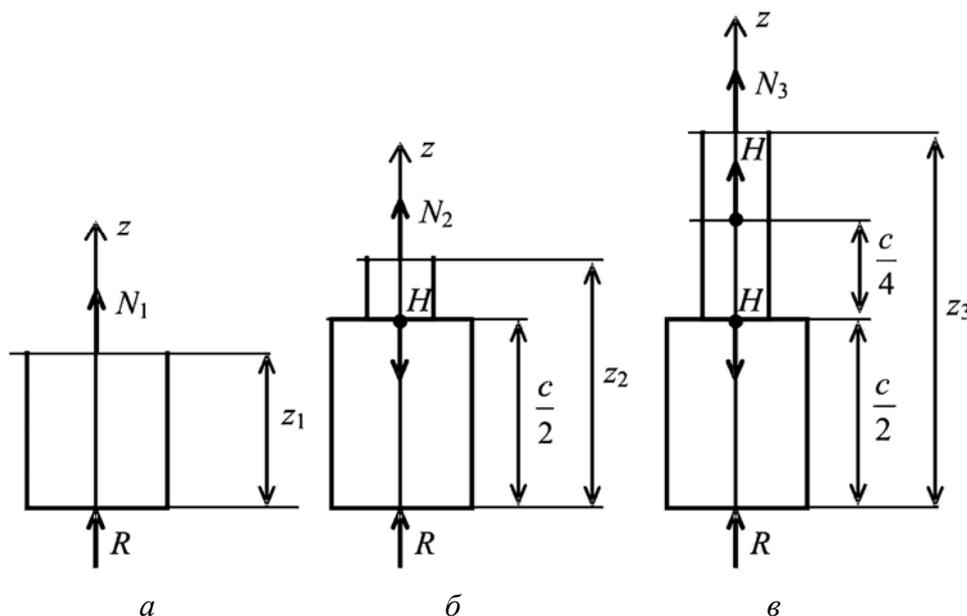


Рис. 1.7

Участок I (рис. 1.7, а) $0 \leq z_1 \leq \frac{c}{2}$,

$$\sum Z = 0, R + N_1 = 0,$$

$$N_1 = -R. \quad (1.16)$$

Участок II (рис. 1.7, б) $\frac{c}{2} \leq z_1 \leq \frac{3c}{4}$,

$$\sum Z = 0, R + N_2 - H = 0,$$

$$N_2 = H - R. \quad (1.17)$$

Участок III (рис. 1.7, в) $\frac{3c}{4} \leq z_1 \leq 2c$,

$$\sum Z = 0, R + N_3 - H + H = 0,$$

$$N_3 = -R. \quad (1.18)$$

Используя закон Гука, определим деформации каждого участка:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{R \frac{c}{2}}{E2A} = -\frac{Rc}{4EA};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(H - R) \frac{c}{4}}{EA} = \frac{(H - R)c}{4EA};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = -\frac{R \frac{c}{4}}{EA} = -\frac{Rc}{4EA}.$$

Определим полную деформацию среднего стержня:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3,$$

$$\Delta l = -\frac{Rc}{4EA} + \frac{(H - R)c}{4EA} - \frac{Rc}{4EA} = \frac{(H - R)c}{4EA} - \frac{Rc}{2EA} = \frac{Hc - 3Rc}{4EA}.$$

Для заданной схемы, в которой силы H уравновешены, усилия и деформации крайних стержней равны нулю, следовательно, перемещение нижнего сечения среднего стержня $\Delta_{\text{нс}}$ численно равно полной деформации среднего стержня:

$$\Delta_{\text{нс}} = \Delta l = \frac{Hc - 3Rc}{4EA}.$$

По условию задачи перемещение нижнего сечения стержня равно величине заданного зазора Δ , т. е.

$$\Delta_{\text{нс}} = \Delta,$$

тогда

$$\frac{Hc - 3Rc}{4EA} = \beta c,$$
$$H - 3R = 4EA\beta,$$

отсюда искомая реакция опоры

$$R = \frac{H - 4EA\beta}{3},$$
$$R = \frac{150 \cdot 10^3 - 4 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^{-5}}{3} = 47\,200 \text{ Н} = 47,2 \text{ кН}.$$

Зная значение опорной реакции R , можно определить продольные усилия по формулам (1.16)—(1.18):

$$N_1 = -R = -47,2 \text{ кН}.$$
$$N_2 = -R + H = -47,2 + 150 = 102,8 \text{ кН}.$$
$$N_3 = -R = -47,2 \text{ кН}.$$

Эпюра продольных сил, построенная по полученным значениям, показана на рис. 1.6, б.

3. Определение усилий и напряжений в крайних стержнях при заданном значении сил H

Имеем

$$N_{\text{кр}} = \frac{R}{2} = \frac{47,2}{2} = 23,6 \text{ кН};$$
$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N_{\text{кр}}}{A} = \frac{23,6 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 23\,600 \text{ Па} = 23,6 \text{ МПа}.$$

4. Определение температуры охлаждения стержня, при которой реакция основания в нижнем сечении среднего стержня обращается в нуль

Приравняем перемещение нижнего сечения среднего стержня от сил H сумме зазора Δ и температурного укорочения $\Delta_t = \alpha t$ среднего стержня:

$$\Delta(H) = \Delta + \Delta_t = \beta c + \alpha t,$$

где α — коэффициент температурного расширения материала стержня (для стали $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$).

Имеем

$$\frac{Hc}{4EA} = \beta c + \alpha t.$$

Отсюда

$$t = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{H}{4EA} - \beta \right) = \frac{1}{12 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{150 \cdot 10^3}{4 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} - 1 \cdot 10^{-5} \right) = 14 \text{ }^\circ\text{C}.$$

2. КРУЧЕНИЕ

2.1. Определение внутренних усилий и построение эпюр крутящих моментов

Кручением называется вид деформации, возникающей в том случае, когда плоскость действия пар сил (моментов) располагается перпендикулярно геометрической оси бруса.

Определение внутренних усилий и построение эпюр крутящих моментов рассмотрим на следующем примере.

Для заданной схемы (рис. 2.1, а) известны основные геометрические размеры и значения крутящих моментов: $M_1 = 200$ кН·м, $M_2 = 500$ кН·м, $M_3 = 100$ кН·м. Необходимо построить эпюры крутящих моментов.

Установим правило знаков. Будем считать момент положительным, если при взгляде на поперечное сечение со стороны внешней нормали момент направлен по часовой стрелке.

Определим величину опорного момента M_0 , составив уравнение равновесия

$$\sum M_Z = 0; M_1 - M_2 + M_3 - M_0 = 0;$$
$$M_0 = +M_1 - M_2 + M_3 = +200 - 500 + 100 = -200 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Воспользуемся методом сечений. Сначала рассмотрим участок I (рис. 2.1, в). Составим уравнение равновесия

$$\sum M_Z = 0; M_{K_I} - M_1 = 0; M_{K_I} = M_1 = 200 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Затем рассмотрим участок II (рис. 2.1, з)

$$\sum M_Z = 0; M_{K_{II}} - M_1 + M_2 = 0;$$
$$M_{K_{II}} = M_1 - M_2 = 200 - 500 = -300 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По результатам рассмотрения участков I и II можно сделать вывод: крутящий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме крутящих моментов всех сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Следовательно, для участка III можно найти

$$M_{K_{III}} = M_1 - M_2 + M_3 = 200 - 500 + 100 = -200 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Полученное значение оказалось равным M_0 , что подтверждает правильность решения. По результатам определения M_{K_I} , $M_{K_{II}}$ и $M_{K_{III}}$ строим эпюру крутящих моментов (рис. 2.1, б). На участке II крутящий момент имеет наибольшее по абсолютной величине значение $M_{K_{\max}} = 300$ кН·м, следовательно, опасными являются поперечные сечения этого участка.

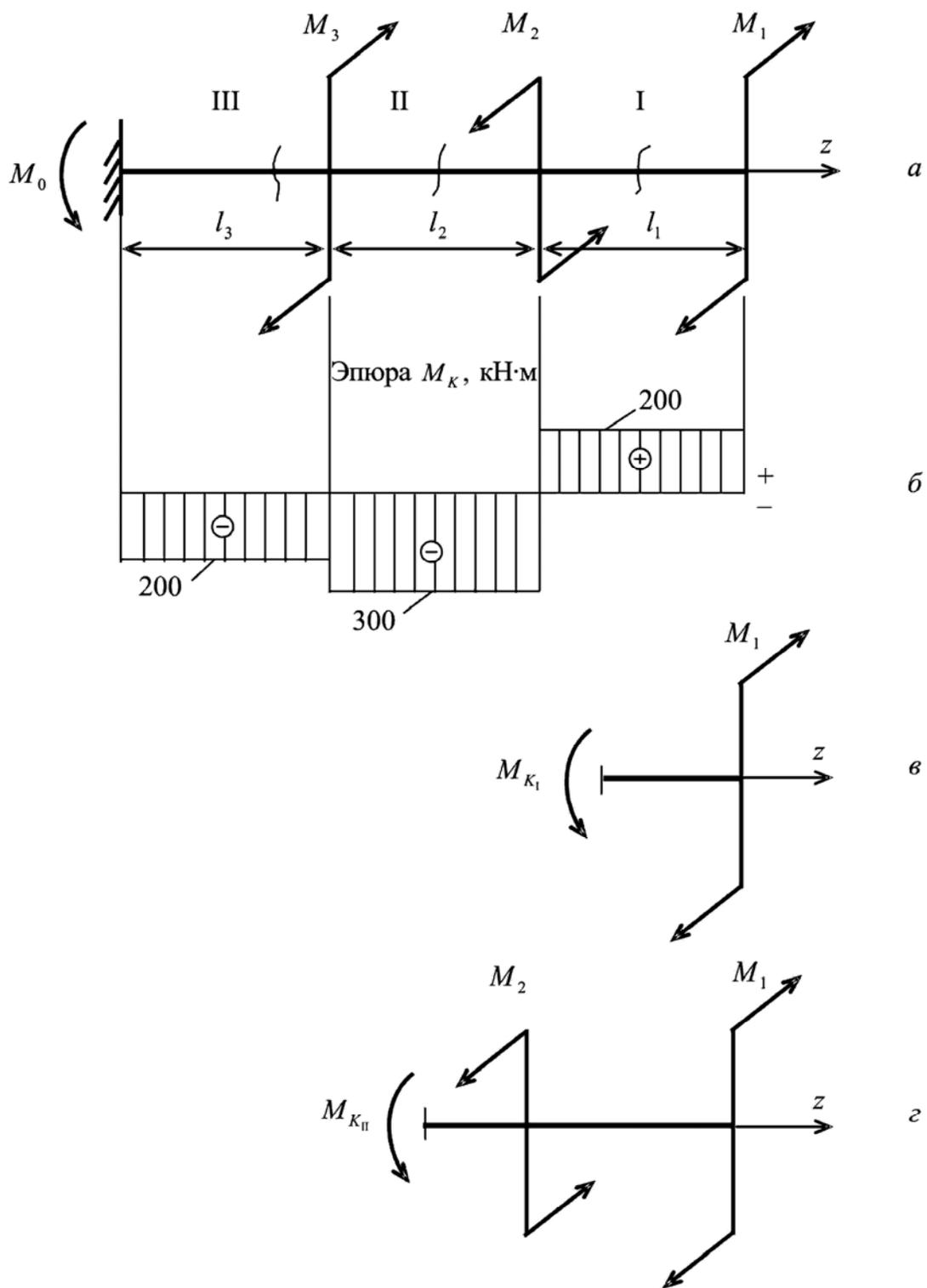


Рис. 2.1

2.2. Определение касательных напряжений при кручении и их распределение по поперечному сечению

Касательные напряжения при кручении определяются по формуле

$$\tau_\rho = \frac{M_k \rho}{I_p}, \quad (2.1)$$

где τ_ρ — касательное напряжение; M_k — крутящий момент; ρ — полярная координата точки, в которой определяется напряжение; I_p — полярный момент инерции поперечного сечения (для круглого сечения $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, d — диаметр поперечного сечения).

В формуле (2.1) τ_ρ зависит от ρ , следовательно, эпюра τ_ρ должна описываться прямой линией.

Для построения эпюры касательных напряжений рассмотрим два случая:

1) $\rho = 0$; $\tau = 0$;

2) $\rho_{\max} = R$; $\tau_{\max} = \frac{M_k R}{I_p}$.

Эпюра τ показана на рис. 2.2.

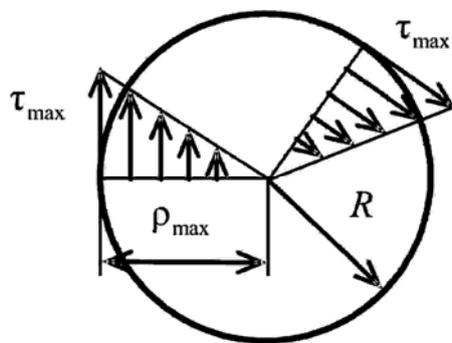


Рис. 2.2

Формулу для определения касательных напряжений можно записать в следующем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_p/R} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (2.2)$$

где $W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi d^4}{32} / \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{16}$ — полярный момент сопротивления.

2.3. Закон Гука при кручении

Закон Гука при кручении записывается в следующем виде:

$$\varphi = \frac{M_k l}{GI_p}, \quad (2.3)$$

где φ — угол закручивания; M_k — крутящий момент; l — длина стержня; G — модуль сдвига; I_p — полярный момент инерции.

Угол закручивания прямо пропорционален крутящему моменту M_k , длине стержня l и обратно пропорционален жесткости стержня при кручении GI_p .

2.4. Пример решения задачи 3

К стальному валу приложены три известных момента: M_1 , M_2 , M_3 (рис. 2.3, а). Требуется: 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины, соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Исходные данные: $a = 2$ м, $b = 2$ м, $c = 1,1$ м, $M_1 = 2$ кНм, $M_2 = 2$ кНм, $M_3 = 1,1$ кНм, $[\tau] = 35$ МПа.

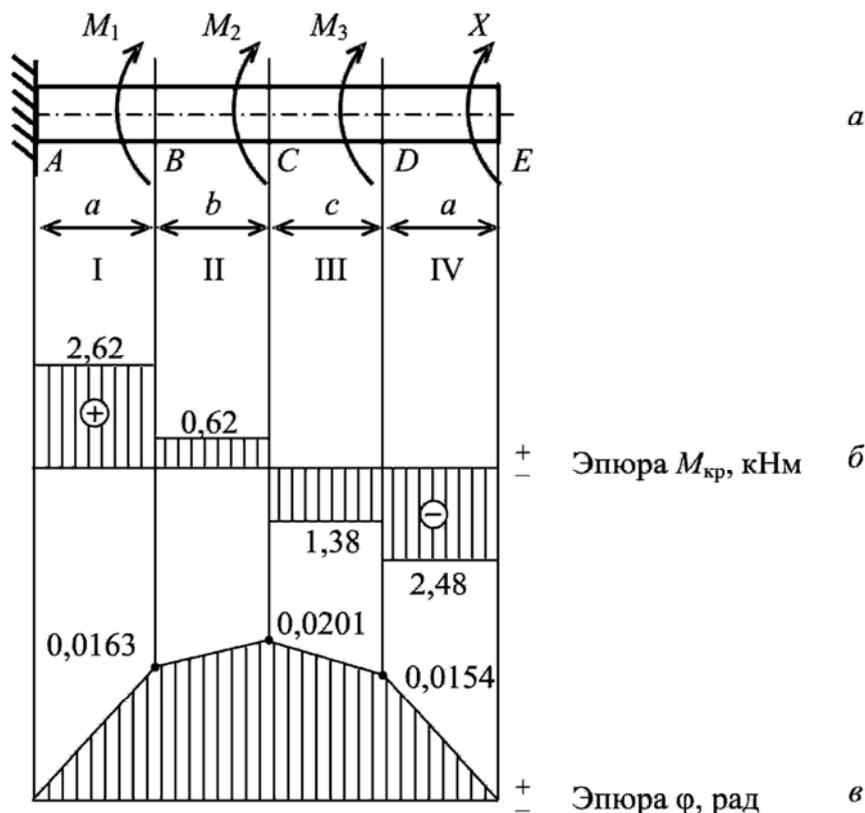


Рис. 2.3

Решение

1. Определение значения момента X , при котором угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю

По условию задачи угол поворота правого концевого сечения равен нулю:

$$\varphi_E = 0.$$

Согласно формуле (2.3) угол закручивания можно выразить через заданные моменты M_1 , M_2 , M_3 :

$$\varphi_E = \frac{M_1 a}{GI_p} + \frac{M_2 (a+b)}{GI_p} + \frac{M_3 (a+b+c)}{GI_p} + \frac{X (2a+b+c)}{GI_p}.$$

Тогда

$$\frac{M_1 a}{GI_p} + \frac{M_2(a+b)}{GI_p} + \frac{M_3(a+b+c)}{GI_p} + \frac{X(2a+b+c)}{GI_p} = 0.$$

Из последнего уравнения найдем искомый момент X :

$$X = \frac{-M_1 a - M_2(a+b) - M_3(a+b+c)}{2a+b+c},$$

$$X = \frac{-2 \cdot 2 - 2 \cdot (2+2) - 1,1 \cdot (2+2+1,1)}{2 \cdot 2 + 2 + 1,1} = -2,48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Построение эпюры крутящих моментов

Для определения крутящих моментов воспользуемся методом сечений. Решение начнем с участка IV.

Участок IV (рис. 2.4, а)

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_{\text{кр, IV}} = X = -2,48 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

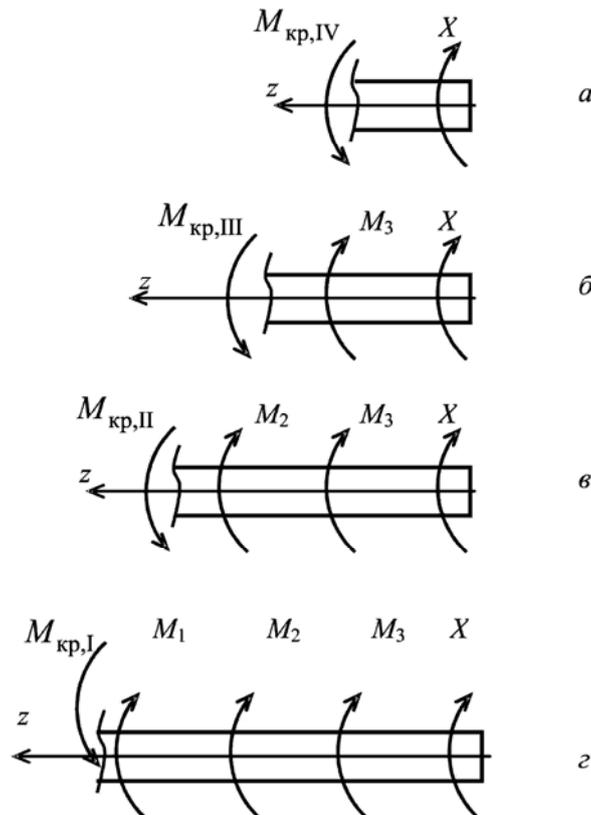


Рис. 2.4

Участок III (рис. 2.4, б),

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_{\text{кр, III}} = X + M_3 = -2,48 + 1,1 = -1,38 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II (рис. 2.4, в),

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_{кр, II} = X + M_3 + M_2 = -2,48 + 1,1 + 2 = 0,62 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок I (рис. 2.4, з)

$$\sum M_z = 0,$$

$$M_{кр, I} = X + M_3 + M_2 + M_1 = -2,48 + 1,1 + 2 + 2 = 2,62 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рис. 2.3, б.

3. Определение диаметра вала из расчета на прочность

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_{кр, \max}|}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \quad |M_{кр, \max}| = 2,62 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Имеем

$$\frac{|M_{кр, \max}| \cdot 16}{\pi d^3} \leq [\tau],$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{кр, \max}|}{\pi [\tau]}},$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2,62 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,073 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 80$ мм.

4. Построение эпюры углов закручивания

Для построения эпюры углов закручивания определим углы закручивания в характерных сечениях A, B, C и D (рис. 2.3, а).

Определим жесткость вала при кручении:

$$GI_p = G \frac{\pi d^4}{32} = 80 \cdot 10^9 \frac{3,14 \cdot 0,08^4}{32} = 321\,540 \text{ Н}\cdot\text{м} = 321,54 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Воспользуемся формулой (2.3) закона Гука при кручении для определения углов закручивания на каждом участке стержня:

$$\varphi_I = \frac{M_{кр, I} a}{GI_p} = \frac{2,62 \cdot 2}{321,54} = 0,0163 \text{ рад};$$

$$\varphi_{II} = \frac{M_{кр, II} b}{GI_p} = \frac{0,62 \cdot 2}{321,54} = 0,0039 \text{ рад};$$

$$\varphi_{III} = \frac{M_{кр, III} c}{GI_p} = -\frac{1,38 \cdot 1,1}{321,54} = -0,0047 \text{ рад};$$

$$\varphi_{IV} = \frac{M_{кр, IV} a}{GI_p} = -\frac{2,48 \cdot 2}{321,54} = -0,0154 \text{ рад}.$$

Тогда углы закручивания в характерных сечениях равны:

$$\varphi_A = 0;$$

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_I = 0,0163 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{II} = 0,0163 + 0,0039 = 0,0201 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{III} = 0,0201 - 0,0047 = 0,0154 \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{IV} = 0,0154 - 0,0154 = 0.$$

Эпюра углов закручивания показана на рис. 2.3, в.

5. Определение наибольшего относительного угла закручивания

Для определения относительных углов закручивания θ (на 1 м длины) воспользуемся формулой

$$\theta = \frac{|M_{кр}|}{l}.$$

Имеем:

$$\theta_I = \frac{|M_{кр, I}|}{a} = \frac{2,62}{2} = 1,3;$$

$$\theta_{II} = \frac{|M_{кр, II}|}{b} = \frac{0,62}{2} = 0,31;$$

$$\theta_{III} = \frac{|M_{кр, III}|}{c} = \frac{1,38}{1,1} = 1,26;$$

$$\theta_{IV} = \frac{|M_{кр, IV}|}{a} = \frac{2,48}{2} = 1,24.$$

Следовательно,

$$\theta_{\max} = 1,3.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

3.1. Основные понятия

В системе координат x, y (рис. 3.1) рассмотрим интегралы вида

$$S_x = \iint y dA; S_y = \iint x dA, \quad (3.1)$$

где x и y — координаты произвольной точки; A — площадь поперечного сечения.

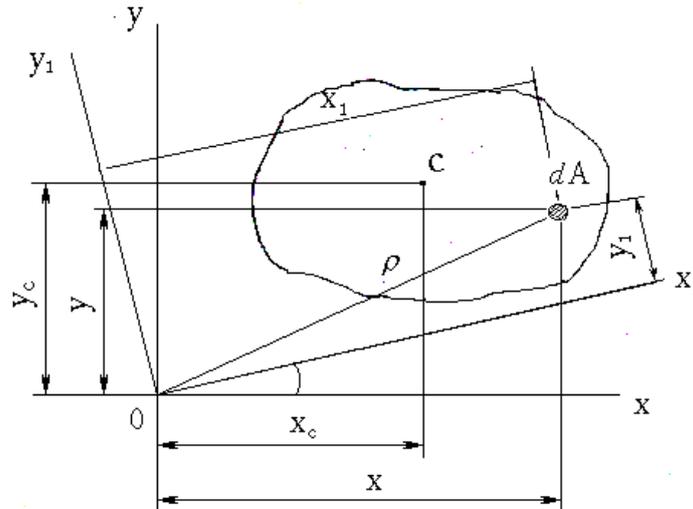


Рис. 3.1

Эти интегралы называются статическими моментами относительно осей x и y соответственно.

Наиболее употребительная размерность статических моментов см^3 или м^3 . Статические моменты плоских сечений могут быть также определены следующим образом:

$$S_x = Ay_c; S_y = Ax_c. \quad (3.2)$$

То есть статический момент площади A относительно какой-либо оси равен произведению площади на расстояние от ее центра тяжести до этой оси. Из выражения (3.1) и (3.2) можно получить формулу для определения координат центра тяжести сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим интегралы вида

$$I_x = \iint_A y^2 dA; I_y = \iint_A x^2 dA. \quad (3.4)$$

Они называются осевыми моментами инерции и выражаются в см^4 или м^4 .

Полярным моментом инерции называется интеграл вида

$$I_p = \iint_A \rho^2 dA, \quad (3.5)$$

а интеграл вида

$$I_{xy} = \iint_A xy dA \quad (3.6)$$

называется центробежным моментом инерции. Размерность полярного и центробежного моментов инерции обычно выражается в см^4 или м^4 . Осевые моменты инерции I_x , I_y и полярный момент инерции I_p являются всегда положительными, а центробежный момент инерции I_{xy} может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

3.2. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей

Рассмотрим произвольную плоскую фигуру в центральной системе координат xOy (рис. 3.2). Моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} относительно осей O_x и O_y известны. Точка O — центр тяжести произвольной фигуры.

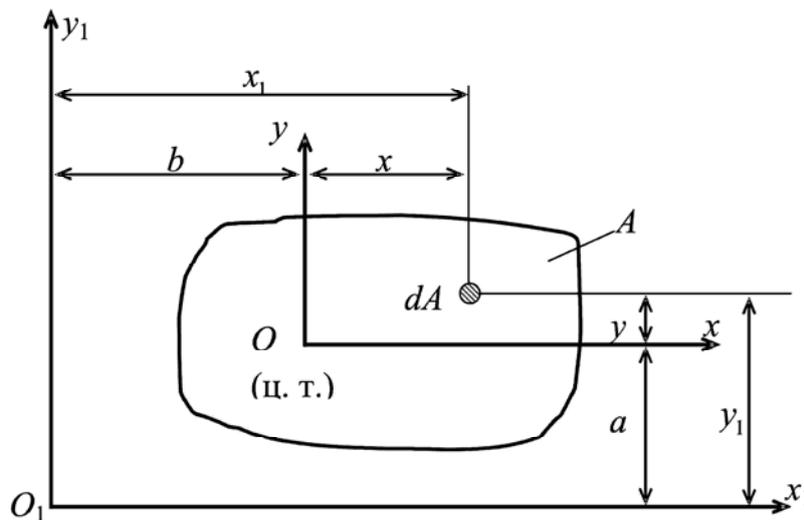


Рис. 3.2

Формулы для определения осевых и центробежных моментов при переходе от центральных к параллельным осям инерции имеют вид

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 A; \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 A; \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abA; \end{aligned} \quad (3.7)$$

где a и b — координаты центра в системе координат $x_1 O_1 y_1$.

3.3. Зависимости между моментами инерции относительно повернутых осей

Рассмотрим произвольную плоскую фигуру в системе координат xOy (рис. 3.3).

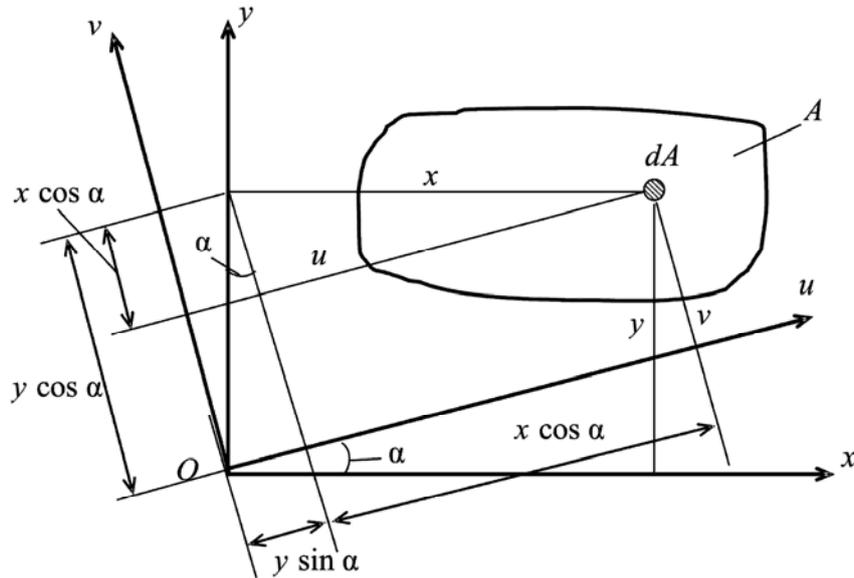


Рис. 3.3

Если моменты инерции I_x , I_y и I_{xy} относительно осей Ox и Oy известны, то формулы для определения моментов инерции относительно повернутых осей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{uv} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где α — угол поворота координатных осей Ou и Ov относительно осей Ox и Oy , α имеет положительное значение при отсчете против часовой стрелки.

3.4. Главные оси инерции. Главные центральные моменты инерции

Главными осями инерции называются такие оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения.

Главные оси инерции, начало координат которых совпадает с центром тяжести поперечного сечения, называются главными центральными осями инерции.

Положение главных центральных осей инерции определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (3.9)$$

Формула для определения экстремальных значений осевых моментов инерции

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (3.10)$$

3.5. Пример решения задачи 4

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и двутавра (рис. 3.4), требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные) и центробежный моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (x_C и y_C); 3) определить направление главных центральных осей (u и v); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

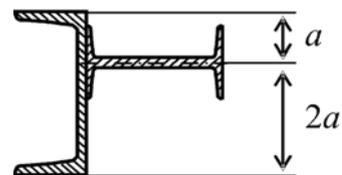


Рис. 3.4

Исходные данные: швеллер 36, двутавр 24.

Р е ш е н и е

1. Определение положения центра тяжести

Выбираем основные размеры и геометрические характеристики швеллера (рис. 3.5) из табл. ГОСТ 8240—89 (прил. 1): $b_1 = 11$ см, $h_1 = 36$ см, $A_1 = 53,4$ см², $I_{x1} = 10820$ см⁴, $I_{y1} = 513$ см⁴, $z_{01} = 2,68$ см.

Выбираем основные размеры и геометрические характеристики двутавра (рис. 3.6) из табл. ГОСТ 8239—89 (прил. 2): $b_2 = 24$ см, $h_2 = 11,5$ см, $A_2 = 34,8$ см², $I_{x2} = 198$ см⁴, $I_{y2} = 3460$ см⁴.

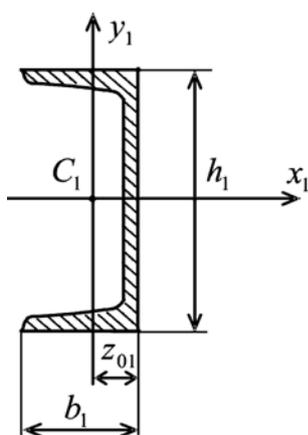


Рис. 3.5

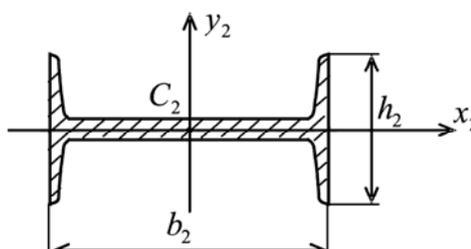


Рис. 3.6

По условию задачи $h_1 = 3a$, тогда $a = \frac{h_1}{3} = 12$ см, $2a = 2 \cdot 12 = 24$ см.

Для определения положения центра тяжести сечения совместим произвольные оси x, y с осями швеллера x_1, y_1 (рис. 3.7).

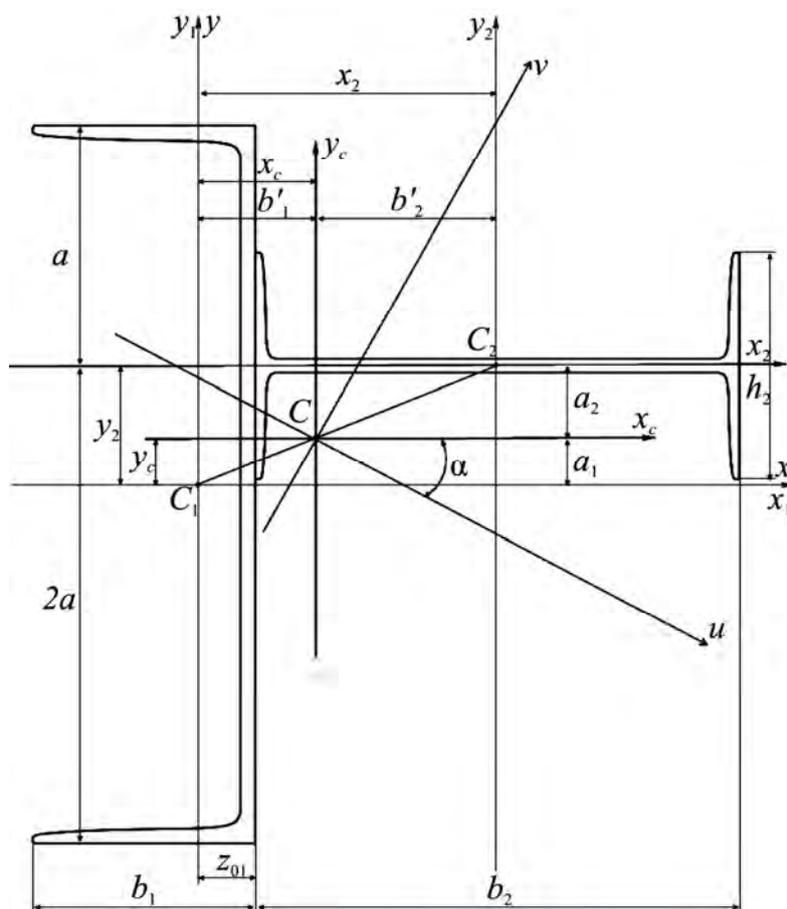


Рис. 3.7

Формулы определения координат центра тяжести всего сечения C :

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{A}; \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{A},$$

где x_i, y_i — координаты центров тяжести швеллера и двутавра в произвольных осях x, y ; A — площадь всего поперечного сечения.

Имеем:

$$A = A_1 + A_2 = 53,4 + 34,8 = 88,2 \text{ см}^2;$$

$$x_1 = y_1 = 0;$$

$$x_2 = z_{01} + \frac{b_2}{2} = 2,68 + \frac{24}{2} = 14,68 \text{ см};$$

$$y_2 = 2a - \frac{h_1}{2} = 24 - \frac{36}{2} = 6 \text{ см}.$$

Тогда

$$x_C = \frac{34,8 \cdot 14,68}{88,2} = 5,79 \text{ см}; \quad y_C = \frac{34,8 \cdot 6}{88,2} = 2,37 \text{ см}.$$

На рис. 3.7 строим точку $C(x_C, y_C)$ — центр тяжести всего поперечного сечения, через которую проводим центральные оси для всей фигуры x_C и y_C .

2. Определение осевых и центробежного моментов инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (x_C и y_C)

Для определения моментов инерции воспользуемся формулами:

$$\begin{aligned}I_{x_C} &= \sum I_{x_i} + \sum a_i^2 A_i; \\I_{y_C} &= \sum I_{y_i} + \sum (b_i')^2 A_i; \\I_{x_C y_C} &= \sum I_{x_i y_i} + \sum a_i b_i' A_i.\end{aligned}$$

Определим расстояние между центральными осями всей фигуры и центральными осями каждой из фигур

$$\begin{aligned}a_1 &= -y_C = -2,37 \text{ см}; \\a_2 &= y_2 - y_C = 6 - 2,39 = 3,63 \text{ см}; \\b_1' &= -x_C = -5,79 \text{ см}; \\b_2' &= x_2 - x_C = 14,68 - 5,79 = 8,89 \text{ см}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}I_{x_C} &= 10\,820 + 198 + (-2,37)^2 \cdot 53,4 + 3,63^2 \cdot 34,8 = 11\,776,50 \text{ см}^4; \\I_{y_C} &= 513 + 3460 + (-5,79)^2 \cdot 53,4 + 8,89^2 \cdot 34,8 = 8513,50 \text{ см}^4; \\I_{x_C y_C} &= (-2,37) \cdot (-5,79) \cdot 53,4 + 3,63 \cdot 8,89 \cdot 34,8 = 1855,79 \text{ см}^4.\end{aligned}$$

3. Определение направления главных центральных осей (u и v)

Воспользуемся формулой (3.9)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{x_C y_C}}{I_{y_C} - I_{x_C}} = \frac{2 \cdot 1855,79}{8513,50 - 11\,776,50} = -1,137.$$

Тогда

$$\begin{aligned}2\alpha &= \operatorname{arctg}(-1,137) = -48^\circ 42', \\ \alpha &= -24^\circ 21' .\end{aligned}$$

Так как значение α получилось отрицательным, то для нахождения положения главных центральных осей u и v необходимо оси x_C и y_C повернуть на угол α по часовой стрелке (см. рис. 3.7).

4. Определение главных центральных моментов инерции

Согласно формуле (3.10)

$$\begin{aligned}I_{\frac{\max}{\min}} &= \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\ &= \frac{11\,776,50 + 8513,50}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(11\,776,50 - 8513,50)^2 + 1855,79^2};\end{aligned}$$

$$I_u = I_{\max} = 12\,615,98 \text{ см}^4;$$

$$I_v = I_{\min} = 7674,02 \text{ см}^4.$$

Выполним проверку полученных результатов. При проверке используем формулы для определения моментов инерции относительно повернутых координатных осей (3.8). Предварительно найдем значения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha = \sin(-24^\circ 21') = -0,412;$$

$$\sin 2\alpha = \sin(-48^\circ 42') = -0,751;$$

$$\cos\alpha = \cos(-24^\circ 21') = 0,911;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(-48^\circ 42') = 0,660;$$

$$\begin{aligned} I_{\max} = I_u &= I_{x_C} \cos^2\alpha + I_{y_C} \sin^2\alpha - I_{x_C y_C} \sin 2\alpha = \\ &= 11\,776,5(0,911)^2 + 8513,5(-0,412)^2 - 1855,79(-0,751) = 12\,615,98 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\min} = I_v &= I_{x_C} \sin^2\alpha_0 + I_{y_C} \cos^2\alpha_0 + I_{x_C y_C} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 11\,776,5(-0,412)^2 + 8513,5(0,911)^2 + 1855,79(-0,751) = 7674,02 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \frac{I_{x_C} - I_{y_C}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_C y_C} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{11\,776,5 - 8513,5}{2} (-0,751) + 1855,79 \cdot 0,660 = 0. \end{aligned}$$

Полученные результаты подтверждают вычисленные в п. 4 значения I_{\max} , I_{\min} и α .

При выполнении расчетов достаточно указывать в результатах 3-, 4- значащие цифры. В рассмотренном примере, для более наглядной проверки правильности расчетов, результаты показаны с 7-, 8-значными числами.

4. ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

4.1. Основные понятия

Изгибом прямого бруса называется такой вид деформации, при котором происходит искривление геометрической оси прямого бруса.

Введем следующие ограничения:

- 1) поперечное сечение бруса имеет хотя бы одну ось симметрии;
- 2) все силовые факторы расположены в плоскости симметрии.

При наличии этих ограничений имеет место плоский изгиб. В случае, когда внешняя нагрузка располагается в разных плоскостях, изгиб называется пространственным. Если плоскость действия внешней нагрузки не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции, то имеет место кривой изгиб.

Если линии действия силовых факторов расположены перпендикулярно геометрической оси бруса, то имеет место плоский поперечный изгиб.

4.2. Определение внутренних усилий при плоском поперечном изгибе

Рассмотрим балку под действием произвольной плоской системы сил (рис. 4.1, а). Опорные реакции мысленно отбросим и их действие заменим силовыми факторами (рис. 4.1, б).

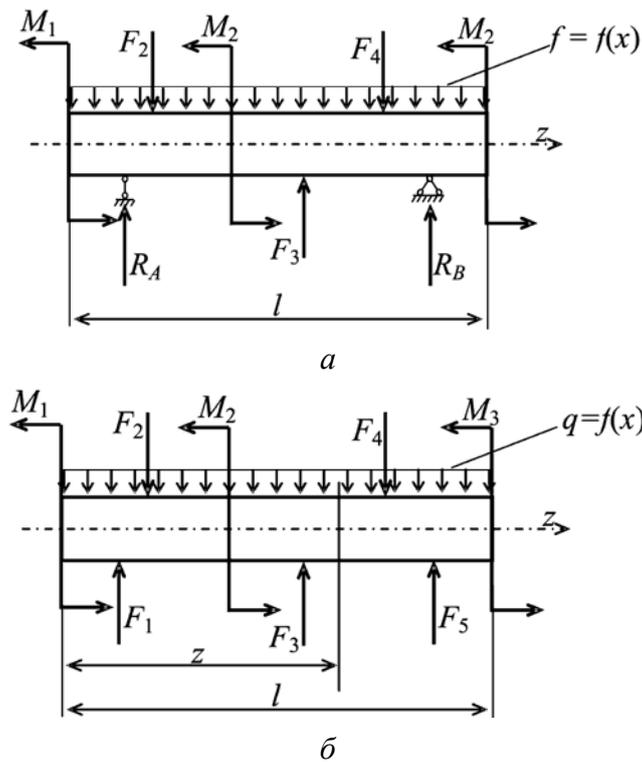


Рис. 4.1

Для определения внутренних усилий воспользуемся методом мысленных сечений. Мысленно рассечем балку на две части плоскостью и рассмотрим равновесие одной из частей (рис. 4.2).

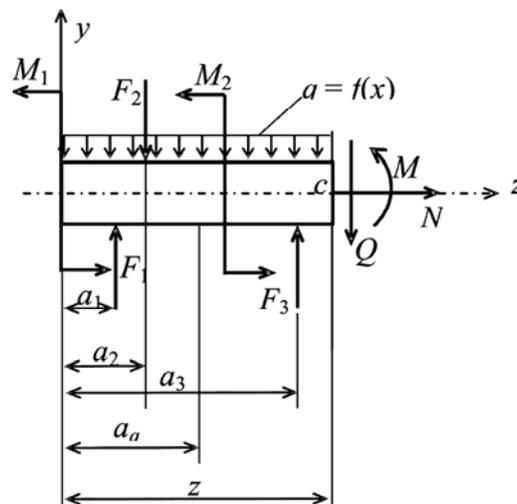


Рис. 4.2

Введем следующие обозначения:

c — центр тяжести поперечного сечения;

a_i — координаты точек приложения сосредоточенных сил;

a_q — координата точки приложения равнодействующей распределенной нагрузки по длине z .

Составим уравнения равновесия;

$$\sum Z = 0; N = 0;$$

$$\sum Y = 0; Q = \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^z q dz.$$

Поперечная сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил на вертикальную ось, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

$$\sum M_c = 0; M = \sum_{j=1}^m M_j + \sum_{i=1}^n F_i (z - a_i) + (z - a_q) \int_0^z q dz.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил относительно центра тяжести c , расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При определении внутренних усилий при изгибе используются следующие правила знаков. Изгибающий момент M считается положительным, если его действие вызывает появление выпуклости, направленной вниз (рис. 4.3, *а*) и отрицательным, если его действие вызывает появление выпуклости, направленной вверх (рис. 4.3, *б*).

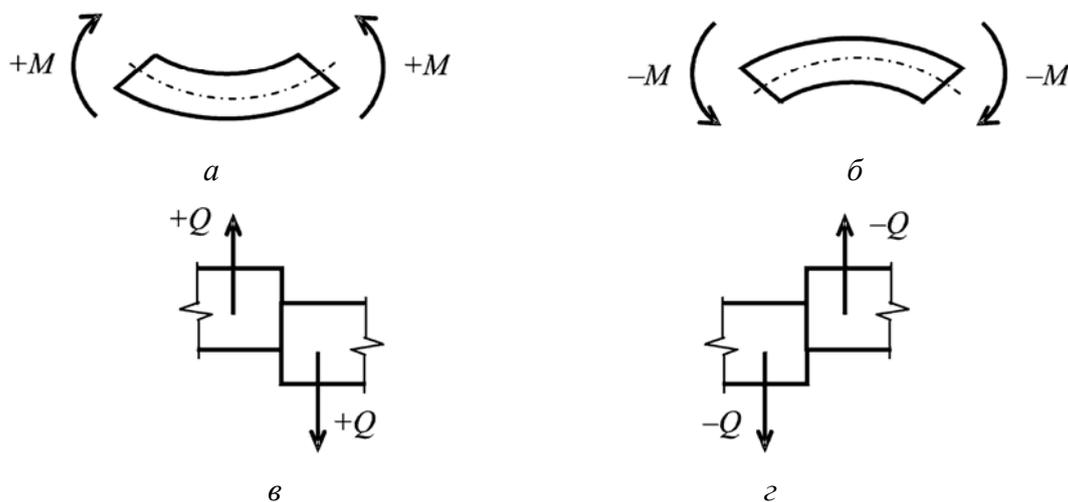


Рис. 4.3

Поперечная сила Q считается положительной, если при подходе слева она направлена вверх, а при подходе справа — вниз (рис. 4.3, *в*). Поперечная сила Q считается отрицательной, если при подходе слева она направлена вниз, а при подходе справа — вверх (рис. 4.3, *г*).

4.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе

Построение эпюр Q и M рассмотрим на примерах.

Пример 4.1

Дано: простая двухопорная балка загружена на половине пролета l распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис. 4.4, а). Требуется построить эпюры Q и M .

Решение

С помощью уравнений равновесия определим опорные реакции:

$$\sum M_c = 0; R_B l - q \frac{l}{2} \frac{l}{4} = 0; R_B = \frac{ql}{8};$$

$$\sum M_A = 0; R_A l - q \frac{l}{2} \frac{3}{4} l = 0; R_A = \frac{3ql}{8}.$$

Проверка: $\sum Y = 0; R_A - q \frac{l}{2} + R_B = 0; \frac{3ql}{8} - \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = 0.$

Определим внутренние усилия на участках.

Участок I (рис. 4.4, б), подход слева, $0 \leq z_1 \leq \frac{l}{2}$

$$\sum Y = 0; R_A - Q_1 - qz_1 = 0; Q_1 = R_A - qz_1.$$

$$\sum M_c = 0; R_A z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} - M_1 = 0; M_1 = R_A z_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Таким образом, на участке I поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратичной параболы.

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_1 = 0$ $Q_1 = R_A = \frac{3ql}{8};$

$$M_1 = 0.$$

При $z_1 = \frac{l}{2}$ $Q_1 = R_A - \frac{ql}{2} = \frac{3ql}{8} - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8};$

$$M_1 = R_A \frac{l}{2} - q \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{3ql}{8} \frac{l}{2} - q \frac{l^2}{8} = \frac{ql^2}{16}.$$

Определим M_{\max} .

$$M' = Q = R_A - qz^* = 0;$$

$$z^* = \frac{R_A}{q} = \frac{3l}{8};$$

$$M_{\max} = R_A z^* - q \frac{(z^*)^2}{2} = \frac{3ql}{8} \frac{3l}{8} - q \frac{(3l/8)^2}{2} = \frac{9ql^2}{64} - \frac{9ql^2}{128} = \frac{9ql^2}{128};$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q < 0.$$

Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена в сторону положительного направления оси моментов (вниз).

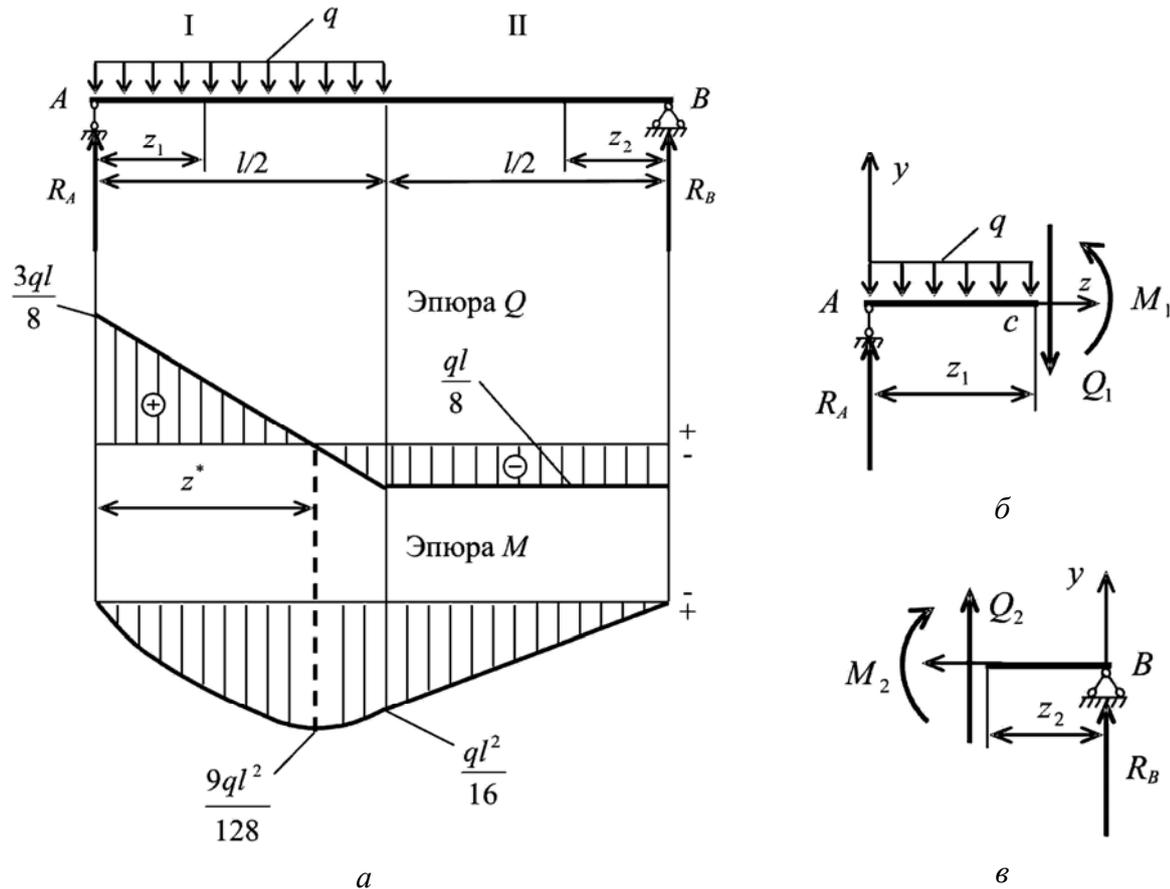


Рис. 4.4

Участок II (рис. 4.4, в), подход справа, $0 \leq z_2 \leq \frac{l}{2}$

$$\sum Y = 0; Q_2 + R_B = 0; Q_2 = -R_B = -\frac{ql}{8};$$

$$\sum M_c = 0; M_2 - R_B z_2 = 0; M_2 = R_B z_2.$$

На участке II поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_2 = 0$ $M_2 = 0$.

$$\text{При } z_2 = \frac{l}{2} \quad M_2 = \frac{ql}{8} \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{16}.$$

По полученным значениям Q и M на участках строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.4, а). Эпюра изгибающих моментов M строится на растянутых волокнах балки. При положительном значении M нижние волокна балки растянуты, поэтому положительные значения откладываются вниз, а отрицательные — вверх.

Пример 4.2

Дано: консольная балка длиной $3a$ загружена двумя сосредоточенными силами F и сосредоточенной парой сил $M = 2Fa$ (рис. 4.5, а).

Требуется: построить эпюры Q и M .

Решение

С помощью уравнений равновесия определим опорные реакции:

$$\sum Y = 0; F - F + R_A = 0; R_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; F3a - F2a - M - M_A = 0; M_A = Fa - F2a = -Fa.$$

Определим внутренние усилия на участках.

Участок I (рис. 4.5, б), подход слева, $0 \leq z_1 \leq a$

$$\sum Y = 0; F - Q_1 = 0; Q_1 = F;$$

$$\sum M_c = 0; Fz_1 - M_1 = 0; M_1 = Fz_1.$$

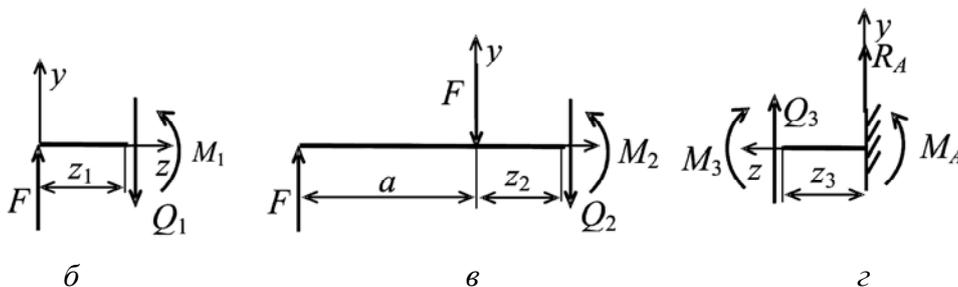
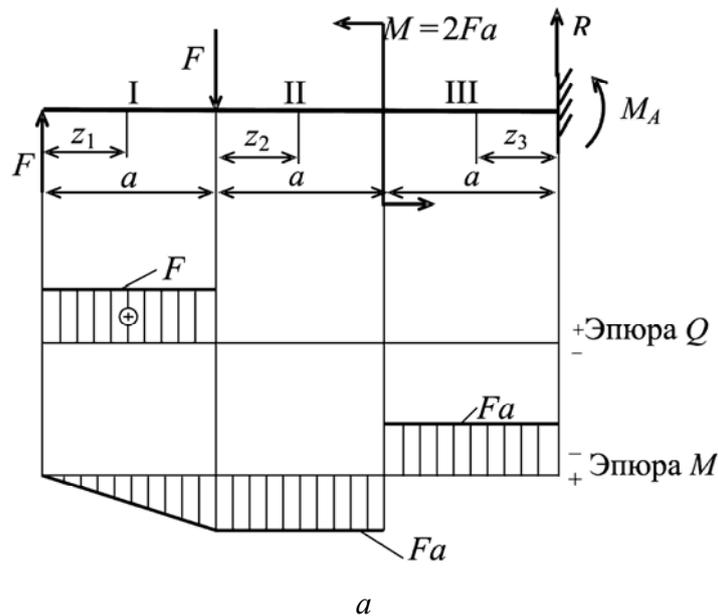


Рис. 4.5

На участке I поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_1 = 0$ $M_1 = 0$.

При $z_1 = a$ $M_1 = Fa$.

Участок II (рис. 4.5, в), подход слева, $0 \leq z_2 \leq a$

$$\sum Y = 0; F - F - Q_2 = 0; Q_2 = 0;$$

$$\sum M_c = 0; zF(z_2 + a) - Fz_2 - M_2 = 0; M_2 = F(z_2 + a) - Fz_2 = Fa.$$

На участке II поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет постоянное значение по длине участка.

Участок III (рис. 4.5, з), подход справа, $0 \leq z_3 \leq a$

$$\sum Y = 0; Q_3 + R_A = 0; Q_3 = -R_A = 0;$$

$$\sum M_c = 0; M_2 - M_A - R_A z_3 = 0; M_3 = M_A = -Fa.$$

На участке III поперечная сила равна нулю, а изгибающий момент имеет постоянное значение. По полученным значениям Q и M на участках строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.5, а).

При проверке правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов применяются следующие дифференциальные зависимости между изгибающим моментом M , поперечной силой Q и интенсивностью распределенной нагрузки q :

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q.$$

4.4. Правила контроля правильности построения эпюр Q и M

При построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов целесообразно применять ряд правил, которые облегчают построение эпюр и позволяют их контролировать.

1. Тангенс угла наклона касательной на эпюре изгибающих моментов M в каждой точке должен равняться соответствующей ординате эпюры Q . Если $Q > 0$, то изгибающий момент M возрастает, если $Q < 0$, то изгибающий момент M убывает (см. рис. 4.4, а, 4.5, а). В поперечном сечении, где $Q = 0$ и происходит смена знака с «плюс» на «минус», изгибающий момент M имеет максимальное значение (рис. 4.4, а). В поперечном сечении, где $Q = 0$ и происходит смена знака с «минус» на «плюс», изгибающий момент M имеет минимальное значение.

2. На участке, где $q = \text{const}$, эпюра поперечных сил Q представляет собой прямую наклонную линию, а эпюра изгибающих моментов M — квадратичную параболу (см. рис. 4.4, а).

3. На участке, где отсутствует распределенная нагрузка, поперечная сила Q имеет постоянное значение, а эпюра изгибающих моментов M представляет собой прямую линию (см. рис. 4.4, а, 4.5, а).

4. На участке, где отсутствует поперечная сила Q , изгибающий момент M имеет постоянное значение. Такой случай изгиба называют чистым изгибом (рис. 4.5, *a*).

5. В поперечном сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре поперечных сил Q имеет место скачок на величину этой силы, на эпюре M — излом прямой линии (см. рис. 4.5, *a*).

6. В поперечном сечении, где приложена сосредоточенная пара сил, на эпюре изгибающих моментов M имеет место скачок на величину этой пары сил, а на эпюре поперечных сил Q это никак не отражается (см. рис. 4.5, *a*).

7. На концевой шарнирной опоре изгибающий момент M равен нулю, если не приложена сосредоточенная пара сил, а поперечная сила Q равна опорной реакции (см. рис. 4.4, *a*).

8. В жесткой заделке изгибающий момент M равен опорному моменту, а поперечная сила Q — опорной реакции (см. рис. 4.5, *a*).

9. На консоли изгибающий момент M равен нулю, если не приложена сосредоточенная пара сил, а поперечная сила Q равна нулю, если не приложена сосредоточенная сила (см. рис. 4.5, *a*).

10. На участке, где действует распределенная нагрузка, выпуклость эпюры изгибающих моментов M обращена в сторону действия распределенной нагрузки, когда эпюра M строится на растянутых волокнах (см. рис. 4.4, *a*).

11. Перпендикуляр, опущенный из вершины параболы, является осью симметрии.

12. В поперечном сечении, где заканчивает свое действие распределенная нагрузка, на эпюре изгибающих моментов M наблюдается переход кривой линии в прямую по касательной (см. рис. 4.4, *a*).

13. В промежуточном шарнире изгибающий момент M равен нулю, если не приложена сосредоточенная пара сил.

Изгибающий момент M может быть определен по площади эпюры поперечных сил Q : $M = \int Q dz + C$.

Для проверки правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов необходимо использовать подходы с разных сторон (например, слева и справа).

4.5. Определение нормальных напряжений при изгибе. Распределение нормальных напряжений по высоте поперечного сечения

Формула для определения нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{My}{I_x}, \quad (4.1)$$

где σ — нормальное напряжение; M — изгибающий момент; y — ордината точки поперечного сечения; в которой определяется нормальное напряжение; I_x — осевой момент инерции поперечного сечения.

Нормальные напряжения σ в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Согласно формуле (4.1) в точках нейтральной оси ($y = 0$) напряжения σ равны нулю, а наибольшее и наименьшее значения принимают в нижних ($y = h_H$) и в верхних ($y = -h_B$) волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 4.6):

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh_H}{I_x}; \sigma_{\min} = -\frac{Mh_B}{I_x}.$$

Эти формулы удобно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{xH}}; \sigma_{\min} = -\frac{M}{W_{xB}},$$

где

$$W_{xH} = \frac{I_x}{h_H}; W_{xB} = \frac{I_x}{h_B}.$$

Величины W_{xH} и W_{xB} называются моментами сопротивления сечения относительно оси O_x для нижних и верхних волокон.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, $h_H = h_B = h/2$, и момент сопротивления определяется по формуле, например для прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{I_x}{0,5h} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Напряжения в крайних волокнах балки в этом случае равны по величине и отличаются знаками:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}; \sigma_{\min} = -\frac{M}{W_x}.$$

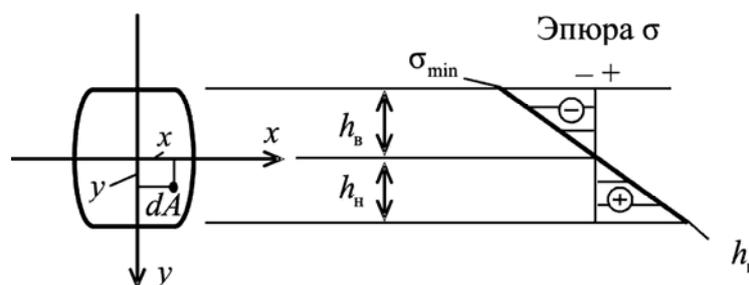


Рис. 4.6

4.6. Определение касательных напряжений при изгибе. Распределение касательных напряжений по высоте поперечного сечения

Формула касательных напряжений при изгибе (формула Журавского):

$$\tau = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{bI_x}, \quad (4.2)$$

где Q — поперечная сила; $S_x^{\text{отс}} = \iint_{A_{\text{отс}}} y dA$ — статический момент отсеченной части сечения относительно оси Ox ; b — ширина поперечного сечения; I_x — осевой момент инерции поперечного сечения.

Из формулы (4.2) видно, что касательные напряжения изменяются по высоте сечения по тому же закону, что и величина $S_x^{\text{отс}}$.

Рассмотрим распределение касательных напряжений для прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.7). Через точку K , ордината которой y , проведем сечение, параллельно оси Ox .

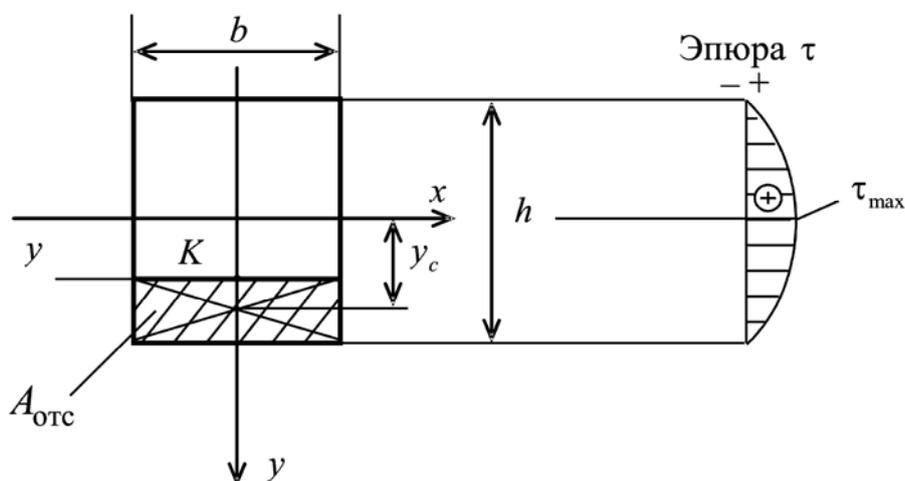


Рис. 4.7

Статический момент отсеченной (заштрихованной) части сечения равен

$$S_x^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_c;$$

$$A_{\text{отс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right).$$

Тогда

$$S_x^{\text{отс}} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h/2 + y}{2} \right);$$

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right],$$

и, следовательно, касательные напряжения по высоте поперечного сечения изменяются по закону квадратичной параболы. При $y = \pm h/2$ получим $\tau = 0$, а при $y = 0$ имеем

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3 Q}{2 b h} = \frac{3 Q}{2 A}.$$

Анализ эпюр нормальных σ и касательных τ напряжений показывает, что наибольшее (наименьшее) значение σ имеют для крайних волокон (наиболее удаленных от нейтральной оси). Для этих же волокон $\tau = 0$. Для точек поперечного сечения, находящихся на нейтральной оси, $\sigma = 0$, а τ достигает максимального значения.

4.7. Расчет на прочность при изгибе

При расчетах изгибаемых элементов конструкций на прочность используются методы расчета, рассмотренные в разделе «Растяжение и сжатие прямого бруса» настоящего пособия. При расчете строительных конструкций применяется метод расчета по предельным состояниям (первая группа предельных состояний), в машиностроении — метод допускаемых напряжений.

Условие прочности при расчете по методу предельных состояний

$$\sigma_{\max} \leq \gamma_c R, \quad (4.3)$$

где σ_{\max} — наибольшие напряжения, возникающие в балке; γ_c — коэффициент условий работы; R — расчетное сопротивление материала.

Условие прочности при расчете по методу допускаемых напряжений

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (4.4)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение.

При расчетах на прочность с использованием рассмотренных условий прочности, решаются три вида задач:

- 1) проверка прочности балки;
- 2) подбор сечения;
- 3) определение несущей способности балки.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при заданных нагрузках, форме, размерах сечения и свойствах материала

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma], \quad (4.5)$$

где $|M_{\max}|$ — наибольший по абсолютной величине изгибающий момент. Сечение, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, называется опасным сечением.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала. Сначала из условия прочности определяется величина требуемого осевого момента сопротивления

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}, \quad (4.6)$$

а затем определяются размеры сечения. Для прокатных профилей (двутавр, швеллер) подбор сечения производится по сортаменту, при этом допускается выбор номера профиля с ближайшим меньшим по значению моментом сопротивления, если при этом перенапряжение не превышает 5 %.

Решение третьей задачи сводится к определению наибольшего допустимого изгибающего момента

$$[M] = [\sigma] W_x. \quad (4.7)$$

Далее этот момент выражается через приложенные к балке нагрузки, и из полученного выражения определяются величины нагрузок.

4.8. Пример решения задачи 5 (в разделе 6.2) по схемам а и б

Для заданных двух схем балок (рис. 4.8) требуется написать выражения Q и M , найти M_{\max} и подобрать: а) для схемы *а* деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8$ МПа; б) для схемы *б* — стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные: $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м, $\frac{a_1}{a} = 5$, $\frac{a_2}{a} = 5$, $\frac{a_3}{a} = 8$, $M = 10$ кН·м, $F = 5$ кН, $q = 10$ кН/м.

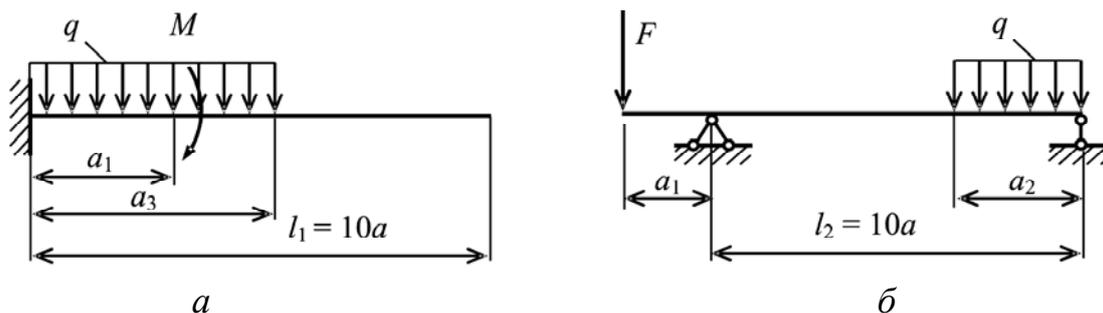


Рис. 4.8

Р е ш е н и е

Схема а

1. Построение расчетной схемы

В соответствии с исходными данными определим параметр a и размеры a_1 и a_3 :

$$l_1 = 10a;$$

$$a = \frac{l_1}{10} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ м.}$$

Тогда

$$a_1 = 5a = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ м;}$$

$$a_3 = 10a = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м.}$$

Строим в масштабе (пропорциональным числам соответствуют пропорциональные отрезки) расчетную схему (рис. 4.9, а).

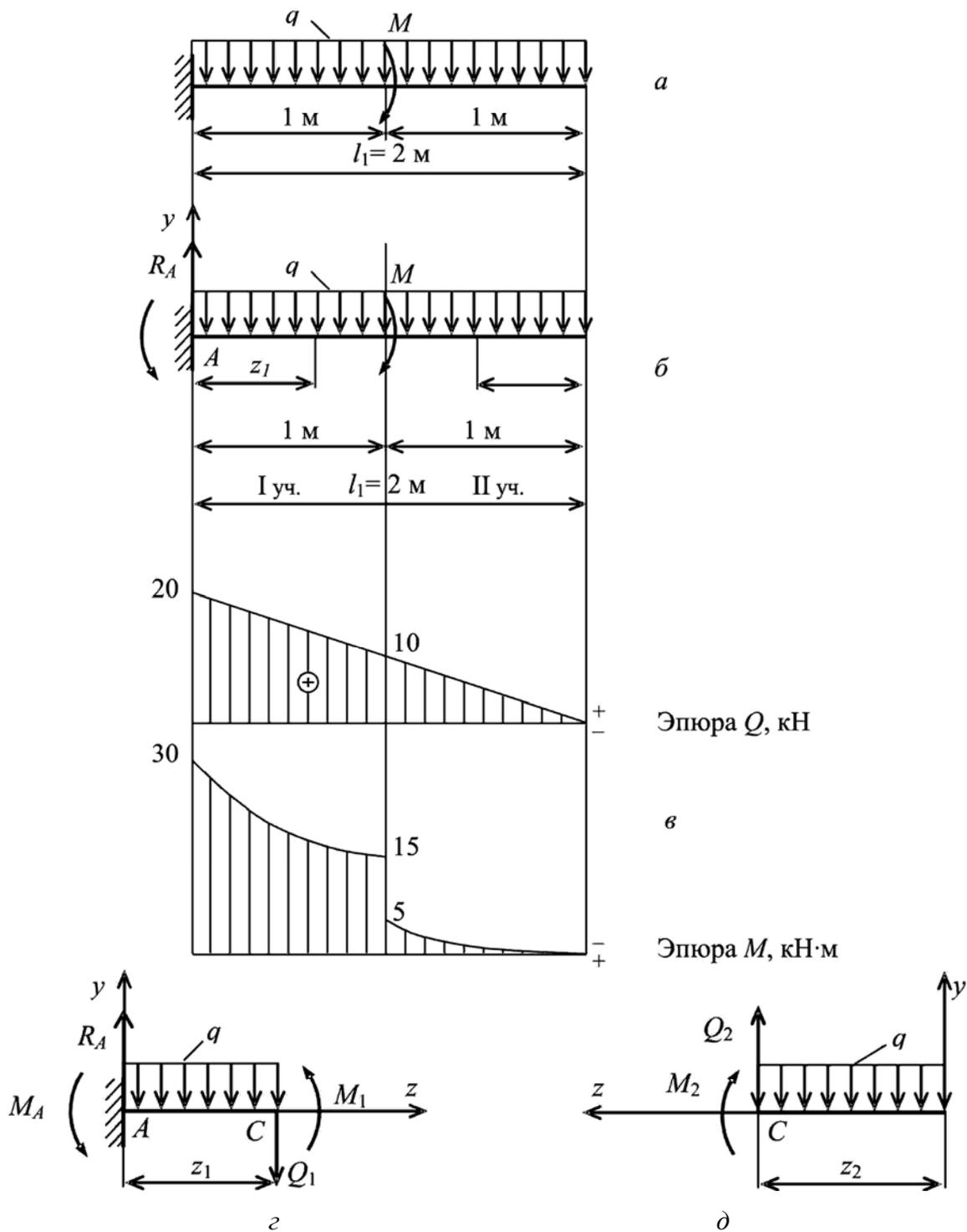


Рис. 4.9

2. Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций R_A и M_A , возникающих в жесткой заделке (рис. 4.9, б), составим уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0, R_A - ql_1 = 0, R_A = ql_1 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0, M_A - M - ql_1 \frac{l_1}{2} = 0, M_A = M + q \frac{l_1^2}{2} = 10 + 10 \frac{2^2}{2} = 30 \text{ кН·м.}$$

3. Определение внутренних усилий на участках и построение эпюр Q и M

Участок I (рис. 4.9, з), подход слева, $0 \leq z_1 \leq 1$ м,

$$\sum Y = 0, R_A - qz_1 - Q_1 = 0, Q_1 = R_A - qz_1.$$

$$\sum M_C = 0, M_1 + M_A + qz_1 \frac{z_1}{2} - R_A z_1 = 0,$$

$$M_1 = R_A z_1 - M_A - \frac{qz_1^2}{2}.$$

На участке I поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратичной параболы. Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена в сторону положительного направления оси моментов (вниз).

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_1 = 0$ $Q_1 = R_A = 20$ кН;

$$M_1 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

При $z_1 = 1$ м $Q_1 = R_A - q \cdot 1 = 20 - 10 \cdot 1 = 10$ кН;

$$M_1 = R_A \cdot 1 - M_A - \frac{q \cdot 1^2}{2} = 20 \cdot 1 - 30 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок II (рис. 4.9, д), подход справа, $0 \leq z_2 \leq 1$ м.

$$\sum Y = 0, Q_2 - qz_2 = 0, Q_2 = qz_2.$$

$$\sum M_C = 0, -M_2 - qz_2 \frac{z_2}{2} = 0,$$

$$M_2 = -\frac{qz_2^2}{2}.$$

На участке II поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратичной параболы. Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена в сторону положительного направления оси моментов (вниз).

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_2 = 0$ $Q_2 = 0$ кН;

$$M_2 = 0.$$

При $z_2 = 1$ м $Q_2 = q \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10$ кН;

$$M_2 = -\frac{q1^2}{2} = -\frac{101^2}{2} = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям Q и M на участках строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.9, в). Для проверки правильности построения эпюр Q и M используем правила контроля правильности (п. 4.4).

4. Подбор поперечного сечения

Воспользуемся условием прочности при изгибе:

$$s_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $|M_{\max}| = 30$ кН·м — наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, который действует в жесткой заделке балки (рис. 4.9, в), $[\sigma] = 8$ МПа — допустимое напряжение для деревянной балки; $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ — осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения.

Имеем:

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]},$$
$$\frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]},$$
$$d = \sqrt[3]{\frac{32|M_{\max}|}{\pi[\sigma]}}.$$

Искомый диаметр круглого поперечного сечения:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 30 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,34 \text{ м} = 34 \text{ см.}$$

Схема б

1. Построение расчетной схемы

В соответствии с исходными данными определим параметр a и размеры a_1 и a_3 :

$$l_2 = 10a;$$
$$a = \frac{l_2}{10} = \frac{4}{10} = 0,4 \text{ м.}$$

Тогда

$$a_1 = 5a = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ м};$$
$$a_3 = 8a = 8 \cdot 0,4 = 3,2 \text{ м.}$$

Строим в масштабе (пропорциональным числам соответствуют пропорциональные отрезки) расчетную схему (рис. 4.10, а).

2. Определение опорных реакций

Для определения опорных реакций R_A и R_B , возникающих в опорах балки (рис. 4.10, б), составим уравнения равновесия:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot 4 + F \cdot 2 - q \cdot 3,2 \cdot 2,4 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 3,2 \cdot 2,4 - F \cdot 2}{4} = \frac{10 \cdot 3,2 \cdot 2,4 - 20 \cdot 2}{4} = 9,2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -R_A \cdot 4 + F \cdot 6 + q \cdot 3,2 \cdot 1,6 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 3,2 \cdot 1,6 - F \cdot 6}{4} = \frac{10 \cdot 3,2 \cdot 1,6 - 20 \cdot 6}{4} = 42,8 \text{ кН}.$$

Проверка полученных значений:

$$\sum Y = 0, R_A + R_B - F - 3,2q = 0;$$

$$42,8 + 9,2 - 20 - 3,2 \cdot 10 = 0.$$

3. Определение внутренних усилий на участках и построение эпюр Q и M

Участок I (рис. 4.10, з), подход слева, $0 \leq z_1 \leq 2$ м,

$$\sum Y = 0, -F - Q_1 = 0, Q_1 = -F = -20 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0, M_1 + Fz_1 = 0,$$

$$M_1 = -Fz_1.$$

На участке I поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Определим значения M в начале и конце участка.

При $z_1 = 0$ $M_1 = 0$.

При $z_1 = 2$ м $M_1 = -F \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40$ кН·м.

Участок II (рис. 4.10, д), подход слева, $2 \leq z_2 \leq 2,8$ м,

$$\sum Y = 0, R_A - F - Q_2 = 0, Q_2 = R_A - F = 42,8 - 20 = 22,8 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0, M_1 + Fz_2 - R_A(z_2 - 2) = 0,$$

$$M_1 = R_A(z_2 - 2) - Fz_2.$$

На участке II, так же как и на участке I, поперечная сила имеет постоянное значение, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

Определим значения M в начале и конце участка.

При $z_2 = 2$ м $M_2 = 42,8 \cdot (2 - 2) - 20 \cdot 2 = -40$ кН·м.

При $z_2 = 2,8$ м $M_2 = 42,8 \cdot (2,8 - 2) - 20 \cdot 2,8 = -21,76$ кН·м.

Участок III (рис. 4.10, е), подход справа, $0 \leq z_3 \leq 3,2$ м,

$$\sum Y = 0, Q_3 + R_B - qz_3 = 0, Q_1 = qz_3 - R_B.$$

$$\sum M_C = 0, -M_3 - qz_3 \frac{z_3}{2} + R_B z_3 = 0, M_3 = R_B z_3 - q \frac{z_3^2}{2}.$$

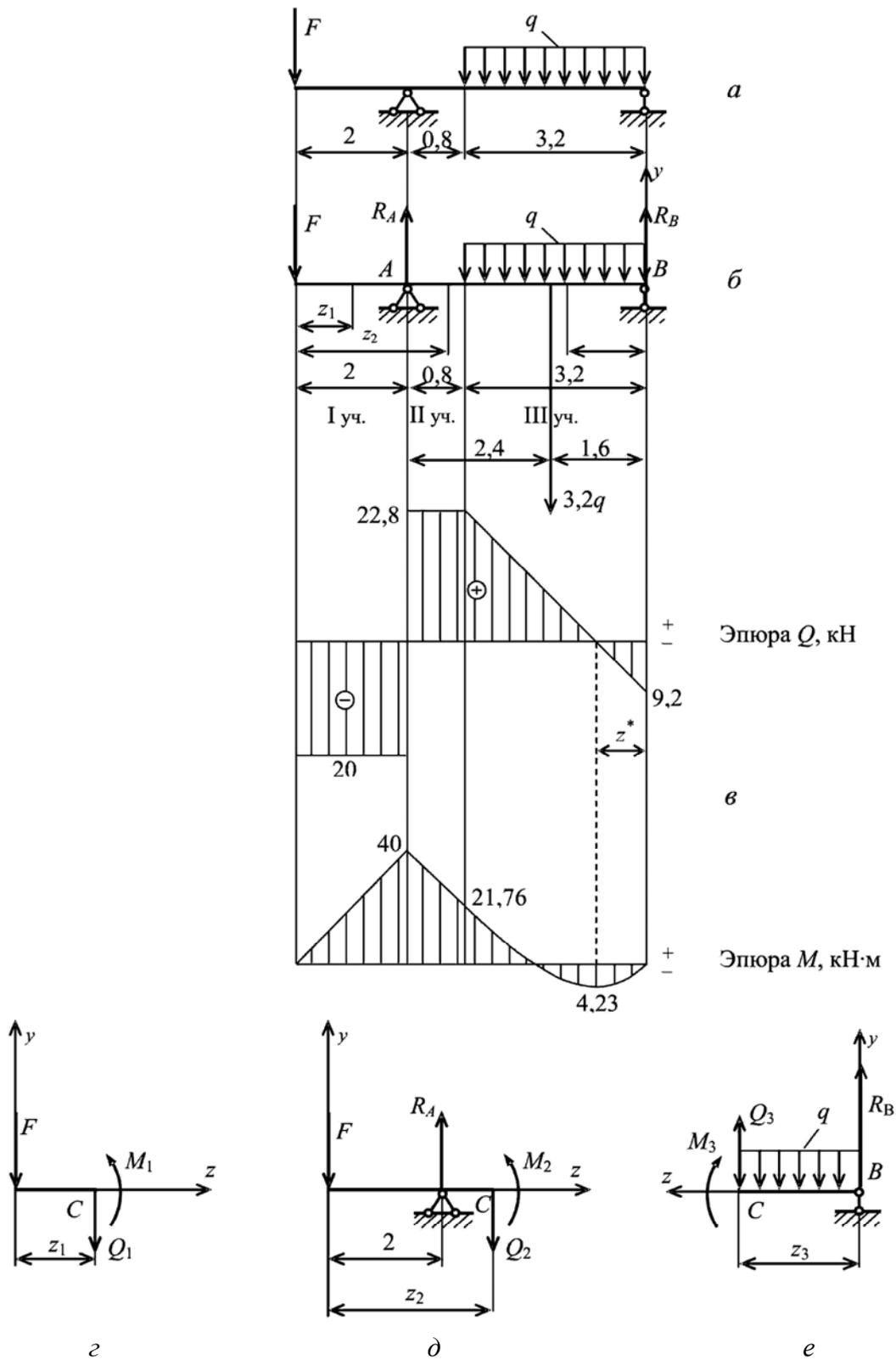


Рис. 4.10

На участке III поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратичной параболы. Выпуклость эпюры изгибающих моментов направлена в сторону положительного направления оси моментов (вниз).

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_3 = 0$ $Q_3 = -R_B = -9,2$ кН;

$$M_3 = 0.$$

При $z_3 = 3,2$ м $Q_3 = 10 \cdot 3,2 - 9,2 = 22,8$ кН;

$$M_2 = 9,2 \cdot 3,2 - 10 \frac{3,2^2}{2} = -21,76 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определим M_{\max} .

$$Q = qz^* - R_B = 0;$$

$$z^* = \frac{R_B}{q} = \frac{9,2}{10} = 0,92 \text{ м};$$

$$M_{\max} = R_B z^* - q \frac{(z^*)^2}{2} = 9,2 \cdot 0,92 - 10 \cdot \frac{0,92^2}{2} = 4,23 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям Q и M на участках строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.10, в). Для проверки правильности построения эпюр Q и M используем правила контроля правильности (п. 4.4).

4. Подбор поперечного сечения

Воспользуемся условием прочности при изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $|M_{\max}| = 40$ кН·м — наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, который действует в жесткой заделке балки (рис. 4.10, в), $[\sigma] = 160$ МПа — допускаемое напряжений для стальной балки; W_x — осевой момент сопротивления двутаврового сечения.

Имеем

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]},$$

$$W_x \geq \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 250 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента для двутавров ГОСТ 8239—89 (прил. 2) принимаем двутавр № 22 с ближайшим меньшим по значению моментом сопротивления $W_x = 232 \text{ см}^3$.

Тогда максимальное действующее напряжение в балке

$$\sigma_{\max} = \frac{40 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-8}} = 172,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 172,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

т. е. условие прочности в этом случае не выполняется. Определим перенапряжение:

$$\frac{172,4 - 160}{160} 100 \% = 8 \% .$$

Перенапряжение превышает допускаемое значение на 5 %, следовательно, принимаем двутавр № 24 с ближайшим большим по значению моментом сопротивления:

$$W_x = 289 \text{ см}^3 .$$

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ

5.1. Понятие о прогибе и угле поворота сечения

Под действием силы F происходит искривление геометрической оси балки (рис. 5.1).

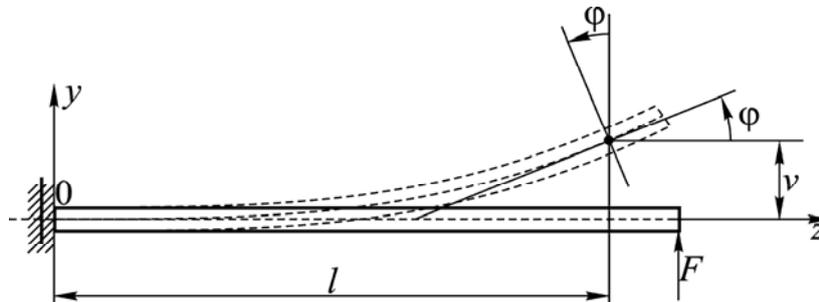


Рис. 5.1

Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещения точек оси балки по нормали к ее недеформированной оси называются прогибами балки, т. е. прогиб v — перемещение центра тяжести поперечного сечения перпендикулярно к исходному положению геометрической оси бруса. Перемещение в направлении оси Oy считается положительным.

Угол между плоскостью поперечного сечения до деформации и плоскостью поперечного сечения после деформации называется углом поворота сечения φ . Положительное значение угла φ принимаем в направлении против часовой стрелки. Перемещением по горизонтали пренебрегаем.

Из аналитической геометрии известно, что тангенс угла наклона касательной к кривой равен первой производной от уравнения этой кривой. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dz} .$$

Для малых значений прогиба можно принять значение угла (выраженного в радианах), равным тангенсу данного угла, получим

$$\varphi = \frac{dv}{dz} .$$

5.2. Универсальные уравнения углов поворота сечения и прогибов

Универсальные уравнения прогибов и углов поворота сечения записываются в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{EI} \left[\sum M \frac{(z - z_M)}{1!} + \sum F \frac{(z - z_F)^2}{2!} + \sum q \frac{(z - z_q)^3}{3!} \right], \quad (5.1)$$

$$v = v_0 + \varphi_0 z + \frac{1}{EI} \left[\sum \frac{M(z - z_M)^2}{2!} + \sum \frac{F(z - z_F)^3}{3!} + \sum \frac{q(z - z_q)^4}{4!} \right], \quad (5.2)$$

где v_0 и φ_0 — начальные параметры; z_M, z_F, z_q — координаты точек приложения момента M , сосредоточенной силы F и начала действия распределенной нагрузки q соответственно; EI — жесткость балки.

При использовании уравнений углов поворота сечений и прогибов необходимо выполнение условий:

1. Для всей балки выбирается единая система координат, начало координат помещается в одном из концевых сечений (левом или правом).
2. Опорные закрепления мысленно отбрасываются. Их действие заменяется соответствующими силовыми факторами (реакциями).
3. Распределенная нагрузка считается действующей по всей длине балки, начиная от места ее приложения.
4. Интегрирование дифференциального уравнения производится без раскрытия скобок.

5.3. Метод Максвелла — Мора

Введем следующие обозначения: Δ — искомое перемещение; N, Q, M — внутренние усилия от действия заданных сил; N_1, Q_1, M_1 — внутренние усилия от действия единичной силы, прикладываемой в направлении искомого перемещения; η — поправочный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению.

С учетом этих обозначений формула Максвелла — Мора имеет вид

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{NN_1}{EA} dz + \sum \int_0^l \frac{MM_1}{EI} dz + \sum \int_0^l \eta \frac{QQ_1}{GA} dz. \quad (5.3)$$

Каждый интеграл в формуле (5.3) определяет вклад соответствующей деформации в искомое перемещение. В изгибаемых конструкциях учитывают влияние изгибающих моментов, а поперечными и продольными силами пренебрегают:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{MM_1}{EI} dz. \quad (5.4)$$

5.4. Применение способа Верещагина, формулы Симпсона и формулы перемножения трапеций

Для вычисления интегралов вида $\int_0^l M M_1 dz$ в формуле (5.4) А. К. Верещагиным был предложен способ, для применения которого необходимо построить эпюры изгибающих моментов от действия заданных сил M_F (рис. 5.2, а) и от действия единичной силы \bar{M}_1 (рис. 5.2, б). Одна из этих эпюр может быть описана произвольной функцией, а другая — линейной. В задачах по определению линейных перемещений и углов поворота сечения эпюры от действия единичных силовых факторов ограничены прямыми линиями.

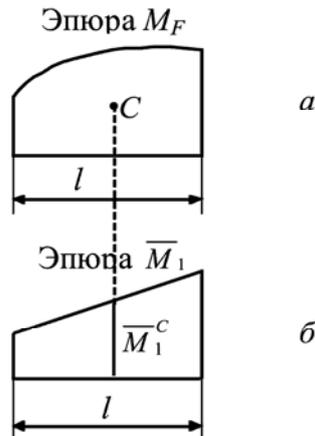


Рис. 5.2

Согласно способу Верещагина

$$\int_0^l M_F \bar{M}_1 dz = \Omega \bar{M}_1^C,$$

где Ω — площадь эпюры M_F (рис. 5.2, а), \bar{M}_1^C — координата под центром тяжести C (рис. 5.2, а, б).

Обобщенное перемещение по способу Верещагина может быть определено по формуле

$$\Delta = \sum \frac{\Omega \bar{M}_1^C}{EI}, \quad (5.5)$$

где E — модуль Юнга; I — осевой момент инерции.

Суммирование производится по каждому из участков.

Для вычисления интеграла $\int_0^l M_F \bar{M}_1 dz$ можно применять также формулу Симпсона (рис. 5.3, а, б)

$$\Delta = \sum \frac{l}{6EI} \left(M_F^H \bar{M}_1^H + 4M_F^c \bar{M}_1^c + M_F^K \bar{M}_1^K \right), \quad (5.6)$$

где M_F^H , M_F^C , M_F^K — значения изгибающих моментов от действия заданных сил в начале, середине и конце участка соответственно (рис. 5.3, а); M_1^H , M_1^C , M_1^K — значение изгибающих моментов от действия единичных сил в начале, середине и конце участка соответственно (рис. 5.3, б).

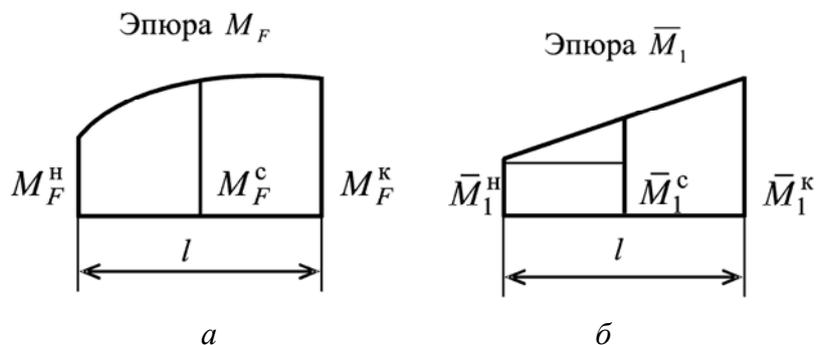


Рис. 5.3

Если обе эпюры прямолинейные (рис. 5.4), то интеграл вида $\int_0^l M_F \bar{M}_1 dz$ может быть вычислен по формуле

$$\int_0^l M_F \bar{M}_1 dz = \frac{l}{6} \left[2M_F^H \bar{M}_1^H + 2M_F^K \bar{M}_1^K + \bar{M}_1^H M_F^K + \bar{M}_1^K M_F^H \right].$$

Эта формула условно называется формулой перемножения трапеций. Перемещение в этом случае определяется по формуле

$$\Delta = \sum \frac{l}{6EI} \left[2M_F^H \bar{M}_1^H + 2M_F^K \bar{M}_1^K + \bar{M}_1^H M_F^K + \bar{M}_1^K M_F^H \right]. \quad (5.7)$$

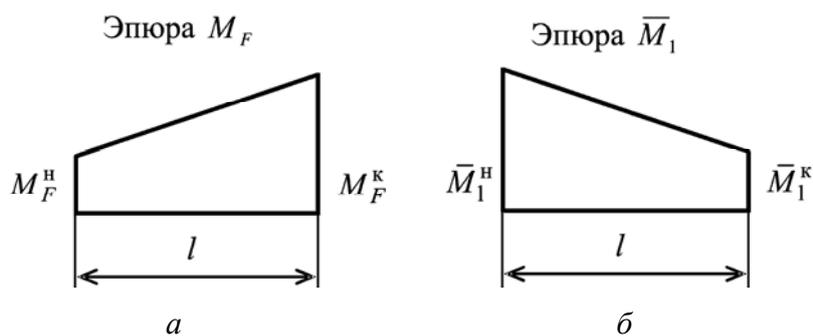


Рис. 5.4

5.5. Примеры решения задач

Задача 6

Для балки, изображенной на рис. 5.5, требуется: 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2); 2) построить эпюры M и Q ; 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две — на консоли.

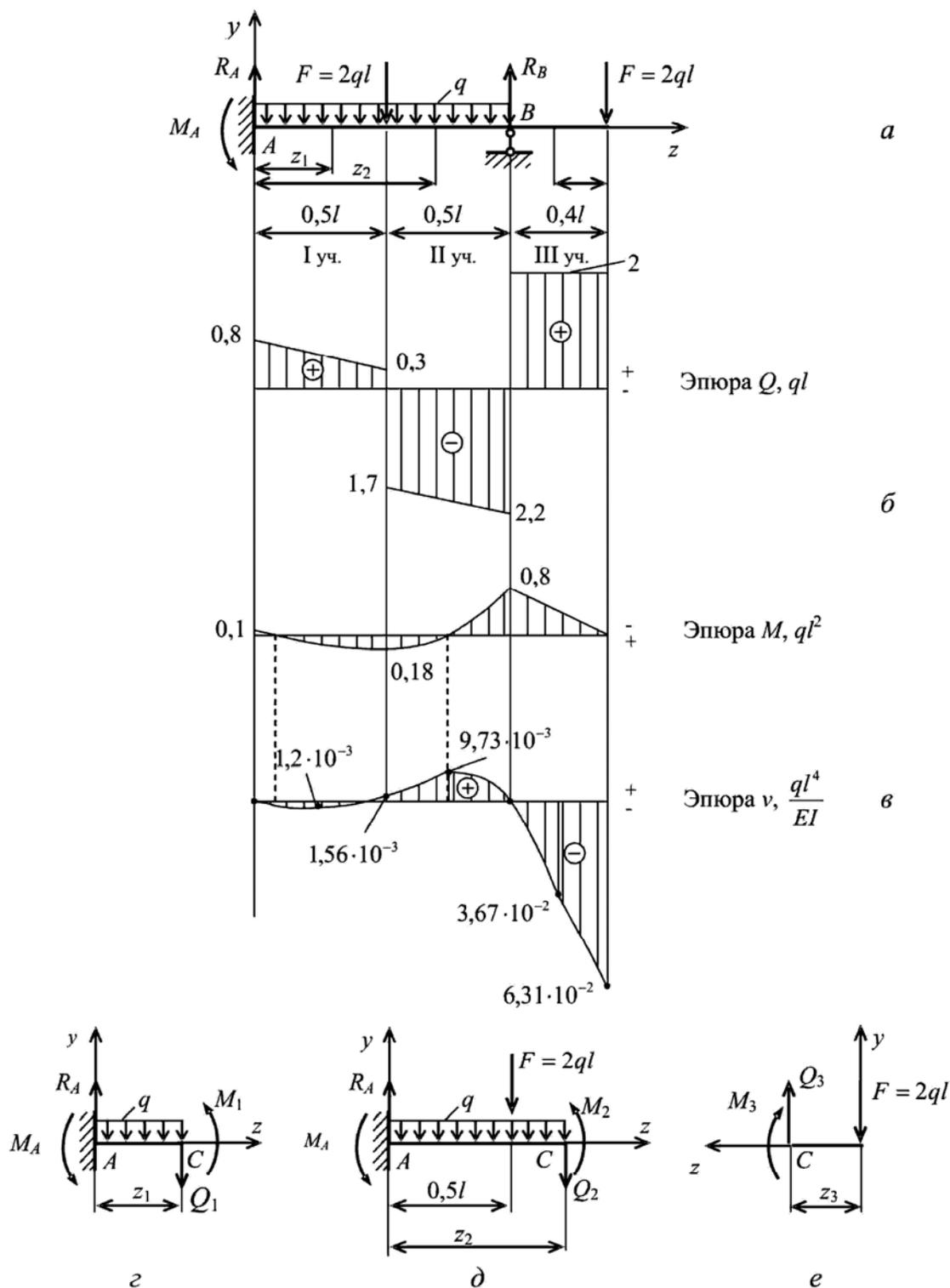


Рис. 5.5

Р е ш е н и е

1. Определение изгибающего момента на левой опоре

Для определения изгибающего момента на левой опоре M_A составим два уравнения: 1) уравнение статики в виде суммы моментов всех сил относительно опоры B ; 2) уравнение метода начальных параметров, выражающее мысль, что прогиб на опоре B равен нулю. Из этих двух уравнений можно найти момент M_A и реакцию на левой опоре R_A .

Уравнение статики:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0, \quad -R_A l - F \cdot 0,4l + M_A + ql \frac{l}{2} + F \cdot 0,5l &= 0; \\ R_A l - M_A &= -F \cdot 0,4l + F \cdot 0,5l + 0,5ql^2; \\ R_A l - M_A &= F \cdot 0,1l + 0,5ql^2; \\ R_A l - M_A &= 2ql \cdot 0,1l + 0,5ql^2; \\ R_A l - M_A &= 0,7ql^2.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Уравнение метода начальных параметров:

$$v = v_0 + \varphi_0 z + \frac{1}{EJ} \left[\sum \frac{M(z - z_M)^2}{2!} + \sum \frac{F(z - z_F)^3}{3!} + \sum \frac{q(z - z_q)^4}{4!} \right],$$

где v_0 , φ_0 — прогиб и угол поворота в начале системы координат, т. е. в жесткой заделке. Для данной схемы $v_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

При $z = l$ $v_B = 0$, тогда

$$\begin{aligned}v_B = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} - \frac{F(0,5l)^3}{6} \right] &= 0; \\ -\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} - \frac{F(0,5l)^3}{6} &= 0; \\ -3M_A l^2 + R_A l^3 - 0,25ql^4 - 2ql \cdot 0,125l^3 &= 0; \\ -3M_A + R_A l - 0,5ql^2 &= 0; \\ R_A l - 3M_A &= 0,5ql^2.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Решаем систему уравнений (5.8) и (5.9):

$$\begin{cases} R_A l - M_A = 0,7ql^2; \\ R_A l - 3M_A = 0,5ql^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A l - M_A = 0,7ql^2; \\ -R_A l + 3M_A = -0,5ql^2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}2M_A &= 0,2ql^2; \\ M_A &= 0,1ql^2; \\ R_A l = M_A + 0,7ql^2 &= 0,1ql^2 + 0,7ql^2 = 0,8ql^2; \\ R_A &= 0,8ql.\end{aligned}$$

2. Построение эпюр M и Q

Участок I (рис. 5.5, z), подход слева, $0 \leq z_1 \leq 0,5l$,

$$\sum Y = 0, R_A - qz_1 - Q_1 = 0, Q_1 = R_A - qz_1.$$

$$\sum M_C = 0, M_A - R_A z_1 + q \frac{z_1^2}{2} + M_1 = 0,$$

$$M_1 = R_A z_1 - M_A - q \frac{z_1^2}{2}.$$

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_1 = 0$ $Q_1 = R_A = 0,8ql$;

$$M_1 = -M_A = -0,1ql^2.$$

При $z_1 = 0,5l$ $Q_1 = 0,8ql - 0,5ql = 0,3ql$;

$$M_1 = 0,8ql \cdot 0,5l - 0,1ql^2 - q \frac{(0,5l)^2}{2} = 0,18ql^2.$$

Участок II (рис. 5.5, $д$), подход слева, $0,5l \leq z_2 \leq l$,

$$\sum Y = 0, R_A - qz_2 - F - Q_2 = 0, Q_2 = R_A - F - qz_2.$$

$$\sum M_C = 0, M_A - R_A z_2 + q \frac{z_2^2}{2} + F(z_2 - 0,5l) + M_2 = 0,$$

$$M_2 = R_A z_2 - M_A - F(z_2 - 0,5l) - q \frac{z_2^2}{2}.$$

Определим значения Q и M в начале и конце участка.

При $z_2 = 0,5l$ $Q_1 = R_A - F - q \cdot 0,5l = 0,8ql - 2ql - 0,5ql = -1,7ql$;

$$M_1 = R_A \cdot 0,5l - M_A - F(0,5l - 0,5l) - q \frac{(0,5l)^2}{2} = 0,8ql \cdot 0,5l - 0,1ql^2 - 0,125ql^2 = 0,18ql^2.$$

При $z_2 = l$ $Q_2 = R_A - F - ql = 0,8ql - 2ql - ql = -2,2ql$;

$$M_2 = R_A l - M_A - F(l - 0,5l) - q \frac{l^2}{2} = 0,8ql \cdot l - 0,1ql^2 - 2ql \cdot 0,5l - 0,5ql^2 = -0,8ql^2.$$

Участок III (рис. 5.5, $е$), подход справа, $0 \leq z_3 \leq 0,4l$,

$$\sum Y = 0, Q_3 - F = 0, Q_3 = F = 2ql.$$

$$\sum M_C = 0, -M_3 - Fz_3 = 0, M_3 = -Fz_3.$$

Определим значения M в начале и конце участка.

При $z_3 = 0$ $M_3 = 0$;

При $z_3 = 0,4l$ $M_3 = -F \cdot 0,4l = -2ql \cdot 0,4l = -0,8ql^2$.

По полученным значениям Q и M на участках строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 5.5, $б$).

3. Построение эпюры прогибов

При построении эпюры прогибов потребуется значение опорной реакции R_B , которое можно определить из следующего уравнения статики:

$$\sum M_A = 0, R_B l - F \cdot 0,5l - F \cdot 1,4l + M_A - q \cdot l \frac{l}{2} = 0,$$

$$R_B = \frac{F \cdot 1,9l - M_A + q \frac{l^2}{2}}{l} = \frac{2ql \cdot 1,9l - 0,1ql^2 + 0,5ql^2}{l} = 4,2ql.$$

Значение реакции R_B можно также использовать для проверки правильности построения эпюры Q .

Воспользуемся универсальным уравнением прогибов, которое для рассматриваемой схемы имеет следующий вид:

$$v = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A z^2}{2} + \frac{R_A z^3}{6} - \frac{qz^4}{24} - \frac{F(z-0,5l)^3}{6} + \frac{R_B(z-l)^3}{6} + \frac{q(z-l)^4}{24} \right].$$

Последнее слагаемое в этом уравнении записано с учетом компенсирующей нагрузки q , которую необходимо учитывать при соблюдении условия действия заданной распределенной нагрузки по всей длине балки, начиная от места ее приложения (рис. 5.6).

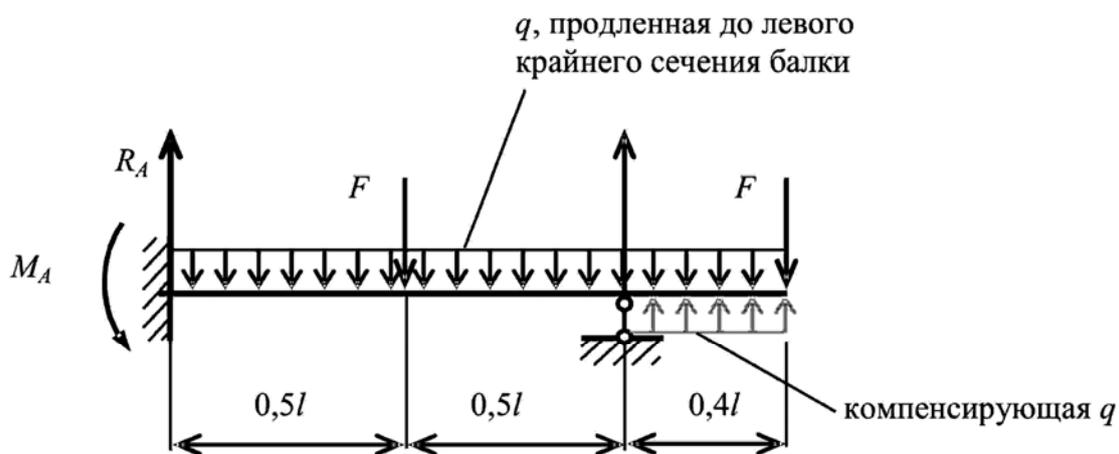


Рис. 5.6

При $z = 0$, т. е. в жесткой заделке, $v_1 = 0$.

При $z = 0,25l$

$$v_2 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A (0,25l)^2}{2} + \frac{R_A (0,25l)^3}{6} - \frac{q(0,25l)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2 (0,25l)^2}{2} + \frac{0,08ql (0,25l)^3}{6} - \frac{q(0,25l)^4}{24} \right] = -1,2 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 0,5l$

$$v_3 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A(0,5l)^2}{2} + \frac{R_A(0,5l)^3}{6} - \frac{q(0,5l)^4}{24} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2(0,5l)^2}{2} + \frac{0,8ql(0,5l)^3}{6} - \frac{q(0,2l)^4}{24} \right] = 1,56 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 0,75l$

$$v_4 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A(0,75l)^2}{2} + \frac{R_A(0,75l)^3}{6} - \frac{q \cdot (0,75l)^4}{24} - \frac{F(0,75l - 0,5l)^3}{6} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2(0,75l)^2}{2} + \frac{0,8ql(0,75l)^3}{6} - \frac{q(0,75l)^4}{24} - \frac{2ql(0,25l)^3}{6} \right] = 9,73 \cdot 10^{-3} \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 1$

$$v_5 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A l^2}{2} + \frac{R_A l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} - \frac{F(l - 0,5l)^3}{6} \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2 \cdot l^2}{2} + \frac{0,8ql \cdot l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} - \frac{2ql l^3}{6} \right] = 0.$$

При $z = 1,2l$

$$v_6 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A(1,2l)^2}{2} + \frac{R_A(1,2l)^3}{6} - \frac{q(1,2l)^4}{24} - \frac{F(1,2l - 0,5l)^3}{6} + \frac{R_B(1,2l - l)^3}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{q(1,2l - l)^4}{24} \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2(1,2l)^2}{2} + \frac{0,8ql(1,2l)^3}{6} - \frac{q(1,2l)^4}{24} - \frac{2ql(0,7l)^3}{6} + \frac{4,2ql(0,2l)^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{q(0,2l)^3}{24} \right] = -3,67 \cdot 10^{-2} \frac{ql^4}{EI}.$$

При $z = 1,4l$

$$v_7 = \frac{1}{EI} \left[-\frac{M_A(1,4l)^2}{2} + \frac{R_A(1,4l)^3}{6} - \frac{q(1,4l)^4}{24} - \frac{F(1,4l - 0,5l)^3}{6} + \frac{R_B(1,4l - l)^3}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{q(1,4l - l)^4}{24} \right] = \frac{1}{EI} \left[-\frac{0,1ql^2(1,4l)^2}{2} + \frac{0,8ql(1,4l)^3}{6} - \frac{q(1,4l)^4}{24} - \frac{2ql(0,9l)^3}{6} + \frac{4,2ql(0,4l)^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{q(0,4l)^3}{24} \right] = -6,31 \cdot 10^{-2} \frac{ql^4}{EI}.$$

Поперечным сечениям балки, в которых изгибающий момент равен нулю, соответствуют точки перегиба эпюры прогибов v (рис. 5.5, в).

Задача 7

Необходимо определить прогиб свободного конца балки переменного сечения (рис. 5.7, а).

Решение

Прогиб свободного конца балки можно найти с помощью метода Максвелла — Мора, а интеграл Мора (5.4) можно вычислить по формуле Симпсона (5.6). Для этого необходимо построить эпюру M от действия заданной нагрузки и эпюру \bar{M} от действия единичной силы $F = 1$, приложенной на свободном конце балки.

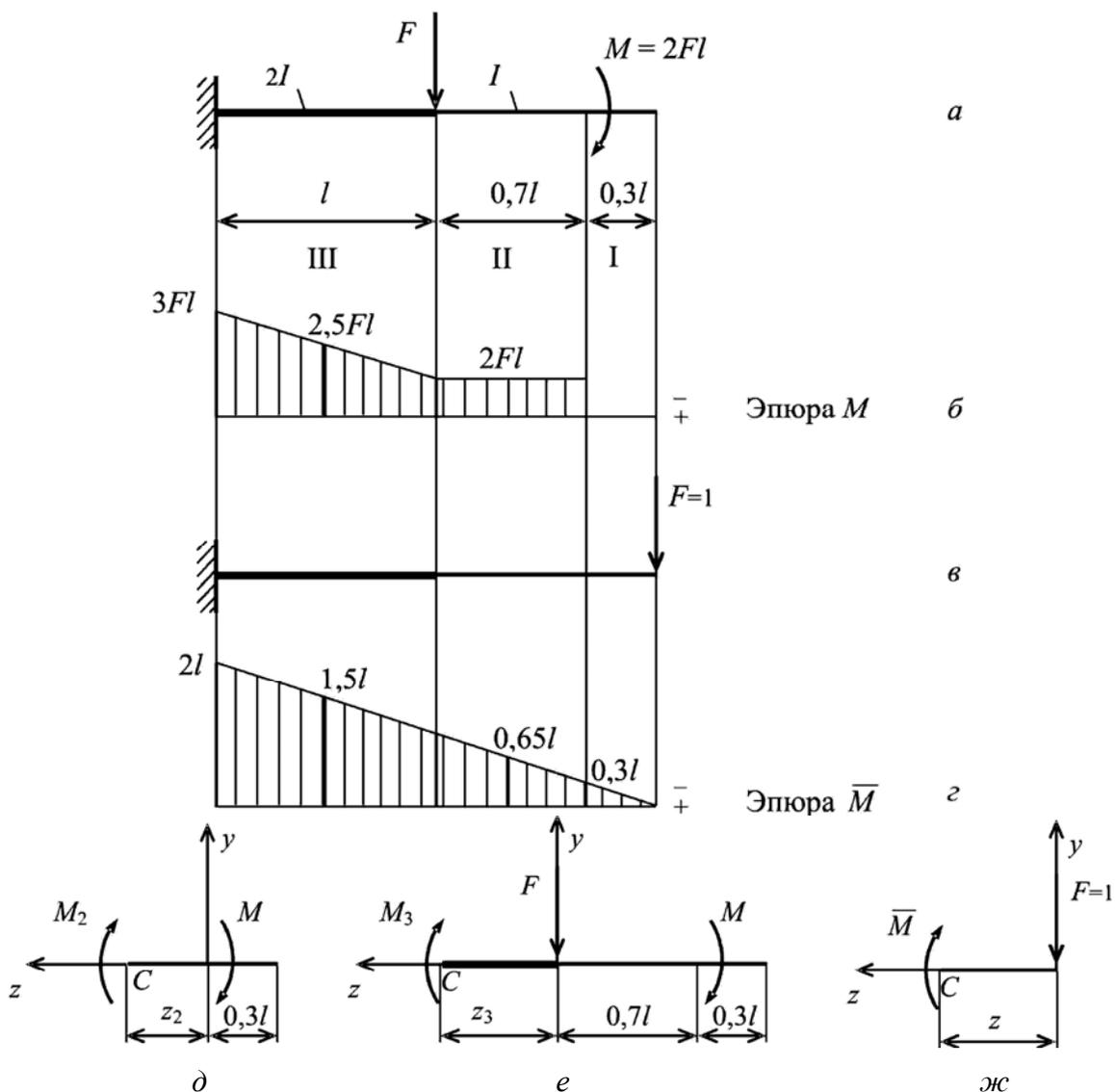


Рис. 5.7

Для построения эпюры M достаточно рассмотреть участки II и III, так как на участке I отсутствует внешняя нагрузка, и, следовательно, изгибающий момент на этом участке равен нулю.

Участок II (рис. 5.7, д), подход справа, $0 \leq z_2 \leq 0,7l$,

$$\sum M_C = 0, -M - M_2 = 0, M_2 = -M = -2Fl.$$

На участке II изгибающий момент имеет постоянное значение.

Участок III (рис. 5.7, е), подход справа, $0 \leq z_3 \leq l$,

$$\sum M_C = 0, -Fz_3 - M - M_3 = 0, M_3 = -Fz_3 - M.$$

На участке III изгибающий момент изменяется по линейному закону. Определим значения M в начале, середине и конце участка.

При $z_3 = 0$ $M_3 = -M = -2Fl$.

При $z_3 = 0,5l$ $M_3 = -F \cdot 0,5l - M = -0,5Fl - 2Fl = -2,5Fl$.

При $z_3 = l$ $M_3 = -F \cdot l - M = -Fl - 2Fl = -3Fl$.

Эпюра M показана на рис. 5.7, б.

Для построения эпюры \bar{M} приложим на свободном конце балки единичную силу $F = 1$ (рис. 5.7, в). При составлении уравнения \bar{M} в данном случае балку можно не разбивать на участки (рис. 5.7, ж):

$$0 \leq z \leq 2l, \sum M_C = 0, -Fz - \bar{M} = 0, \bar{M} = -Fz.$$

Определим значения \bar{M} в начале, середине и конце участков II и III:

при $z = 0,3l$ $\bar{M} = -F \cdot 0,3l = -1 \cdot 0,3l = -0,3l$,

при $z = 0,65l$ $\bar{M} = -0,65l$,

при $z = l$ $\bar{M} = -l$,

при $z = 1,5l$ $\bar{M} = -1,5l$,

при $z = 2l$ $\bar{M} = -2l$.

Эпюра \bar{M} показана на рис. 5.7, з.

При вычислении прогиба свободного конца балки по формуле Симпсона (5.7) необходимо учитывать, что участки балки имеют переменную жесткость EI :

$$v = \sum \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{0,7l}{6EI} [2Fl \cdot l + 4 \cdot 2Fl \cdot 0,65l + 2Fl \cdot 0,3l] + \\ + \frac{l}{6E2I} [3Fl \cdot 2l + 4 \cdot 2,5Fl \cdot 1,5l + 2Fl \cdot l] = 2,83 \frac{Fl^3}{EI}.$$

6. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

6.1. Указания о порядке выполнения контрольных работ

Количество контрольных работ и номера задач, входящих в состав контрольных работ, выполняемых студентом в соответствии с учебными программами, указано в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Направление, профиль (специальность)	Наименование дисциплины	Номера задач контрольных работ			
		Контрольная работа 1	Контрольная работа 2	Контрольная работа 3	Контрольная ра- бота 4
270800.62 «Строительство», «Водоснабжение и водоотведение», «Теплогазоснабжение и вентиляция»	«Механика (техн. механика)»	3, 4, 5	8, 11	—	—
270800.62 «Строительство», «Автомобильные дороги», «Промышленное и гражданское строительство»	«Механика (техн. механика)», «Сопротивление материалов»	1, 2, 3, 4, 5	6, 7	8, 9, 10	11, 12
190700.62 «Организация и безопасность движения»	«Механика (прикладная)»	4, 5(б), 8, 11	—	—	—
271101.65 «Строительство уникальных зданий и сооружений (все профили)»	«Прикладная механика (сопротивление материалов)»	3, 4, 5	8, 9, 11	—	—
280705.65 «Пожарная безопасность»	«Прикладная механика»	4, 5(б), 8, 11	—	—	—
Все направления и специальности сокращенных образовательных программ	«Сопротивление материалов», «Механика (техн. механика)», «Механика»	3, 4, 5(б)	8	11	—

При выборе исходных данных для каждой задачи студент обязан взять из таблиц данные в соответствии с шифром своей зачетной книжки и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр	2	8	7	0	5	2
буквы	а	б	в	г	д	е

Если шифр зачетной книжки состоит из семи цифр, вторая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 6.4 обозначены буквами «е», «г» и «д». В этом случае при указанном выше шифре зачетной книжки 287052 студент должен взять из столбца «е» вторую строку (второй тип сечения), из столбца «г» — нулевую строку (швеллер 3б) и из столбца «д» — пятую строку (равнобокий уголок 90×90×6).

6.2. Контрольные задания

Контрольные задания для задач 1—7 приведены в части I настоящего пособия, для задач 8—12 — во II части.

Задача 1

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров (рис. 6.1). Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ; 2) найти допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, приравняв большее из напряжений в стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа; 3) найти предельную грузоподъемность системы Q_T^k и допускаемую нагрузку $Q_{\text{доп}}$, если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности $k = 1,5$; 4) сравнить величины $Q_{\text{доп}}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам. Данные взять из табл. 6.2.

Задача 2

Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения F , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стержень с зазором $\Delta = \beta c$ (рис. 6.2). Требуется (без учета собственного веса): 1) установить, при какой силе зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданном значении силы H и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданном значении сил H ; 4) установить, на сколько градусов надо охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня обратилась в нуль. Данные взять из табл. 6.2.

Таблица 6.2

№ строки	Схема по рис. 6.1, 6.2	$F, \text{см}^2$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	$H, \text{кН}$	$10^5 \cdot \beta$
1	I	11	2,1	2,1	1,1	110	5
2	II	12	2,2	2,2	1,2	120	4
3	III	13	2,3	2,3	1,3	130	3
4	IV	14	2,4	2,4	1,4	140	2
5	V	15	2,5	2,5	1,5	150	1
6	VI	16	2,6	2,6	1,6	110	5
7	VII	17	2,7	2,7	1,7	120	4
8	VIII	18	2,8	2,8	1,8	130	3
9	IX	19	2,9	2,9	1,9	140	2
0	X	20	3,0	3,0	2,0	150	1
	е	в	г	д	е	д	е

Задача 3

К стальному валу приложены три известных момента: M_1, M_2, M_3 (рис. 6.3). Требуется: 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю; 2) для найденного значения X построить эпюру крутящих моментов; 3) при заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшей большей величины,

соответственно равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм; 4) построить эпюру углов закручивания; 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины). Данные взять из табл. 6.3.

Таблица 6.3

№ строки	Схема по рис. 6.3	Расстояния, м			Моменты, кН·м			[τ], МПа
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	M_1	M_2	M_3	
1	I	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	1,6	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	1,9	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	80
	е	г	д	е	г	д	е	в

Задача 4

Для заданного в табл. 6.4 поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра (рис. 6.4), требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные) и центробежные моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести (x_c и y_c); 3) определить направление главных центральных осей (u и v); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Таблица 6.4

№ строки	Тип сечения по рис. 6.4	Швеллер (прил. 1)	Равнобокий уголок (прил. 3)	Двутавр (прил. 2)
1	I	14	80×80×8	12
2	II	16	80×80×6	14
3	III	18	90×90×8	16
4	IV	20	90×90×7	18
5	V	22	90×90×6	20а
6	VI	24	100×100×8	20
7	VII	27	100×100×10	22а
8	VIII	30	100×100×12	22
9	IX	33	125×125×10	24а
0	X	36	125×125×12	24
	е	г	д	е

Задача 5

Для заданных двух схем балок (рис. 6.5) требуется написать выражения Q и M , найти M_{\max} и подобрать: 1) для схемы *a* деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8$ МПа; 2) для схемы *б* — стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160$ МПа. Данные взять из табл. 6.5.

Таблица 6.5

№ строки	Схема по рис. 6.5	l_1 , м	l_2 , м	Расстояния в долях пролета			M , кН·м	Сосредоточенная сила F , кН	q , кН/м
				$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$			
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	20
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10
	е	д	е	г	д	е	г	д	е

Задача 6

Для балки, изображенной на рис. 6.6, требуется: 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2); 2) построить эпюры M и Q ; 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две — на консоли. Данные взять из табл. 6.6.

Таблица 6.6

№ строки	Схема по рис. 6.6 и 6.7	α	β	k	№ строки	Схема по рис. 6.6 и 6.7	α	β	k
1	I	0,1	0,1	1,5	6	VI	0,6	0,6	6
2	II	0,2	0,2	2	7	VII	0,7	0,7	7
3	III	0,3	0,3	3	8	VIII	0,8	0,8	8
4	IV	0,4	0,4	4	9	IX	0,9	0,9	9
5	V	0,5	0,5	5	0	X	1,0	1,0	10
	е	г	д	е		е	г	д	е

Задача 7

Определить прогиб свободного конца балки переменного сечения (рис. 6.7). Данные взять из табл. 6.6.

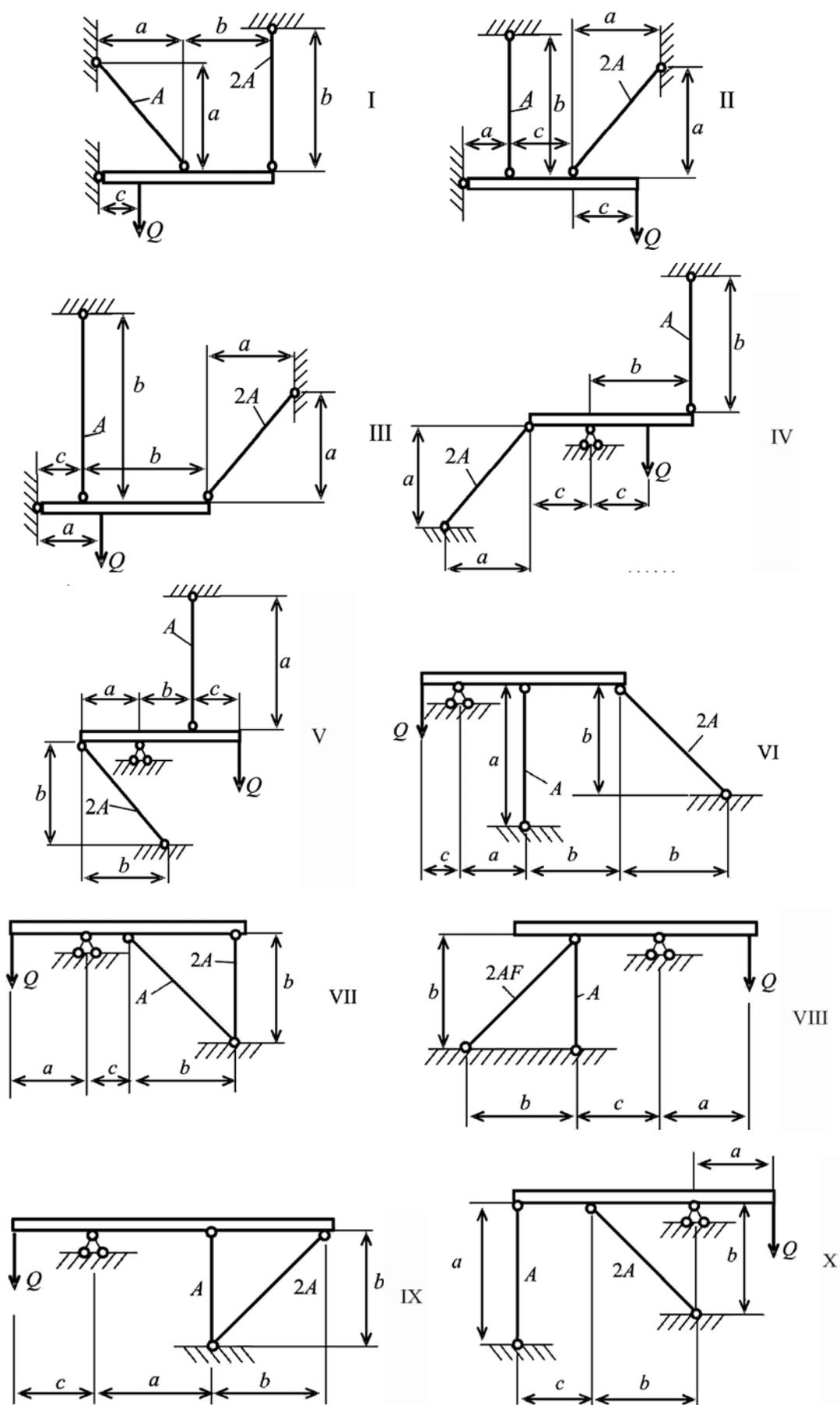


Рис. 6.1

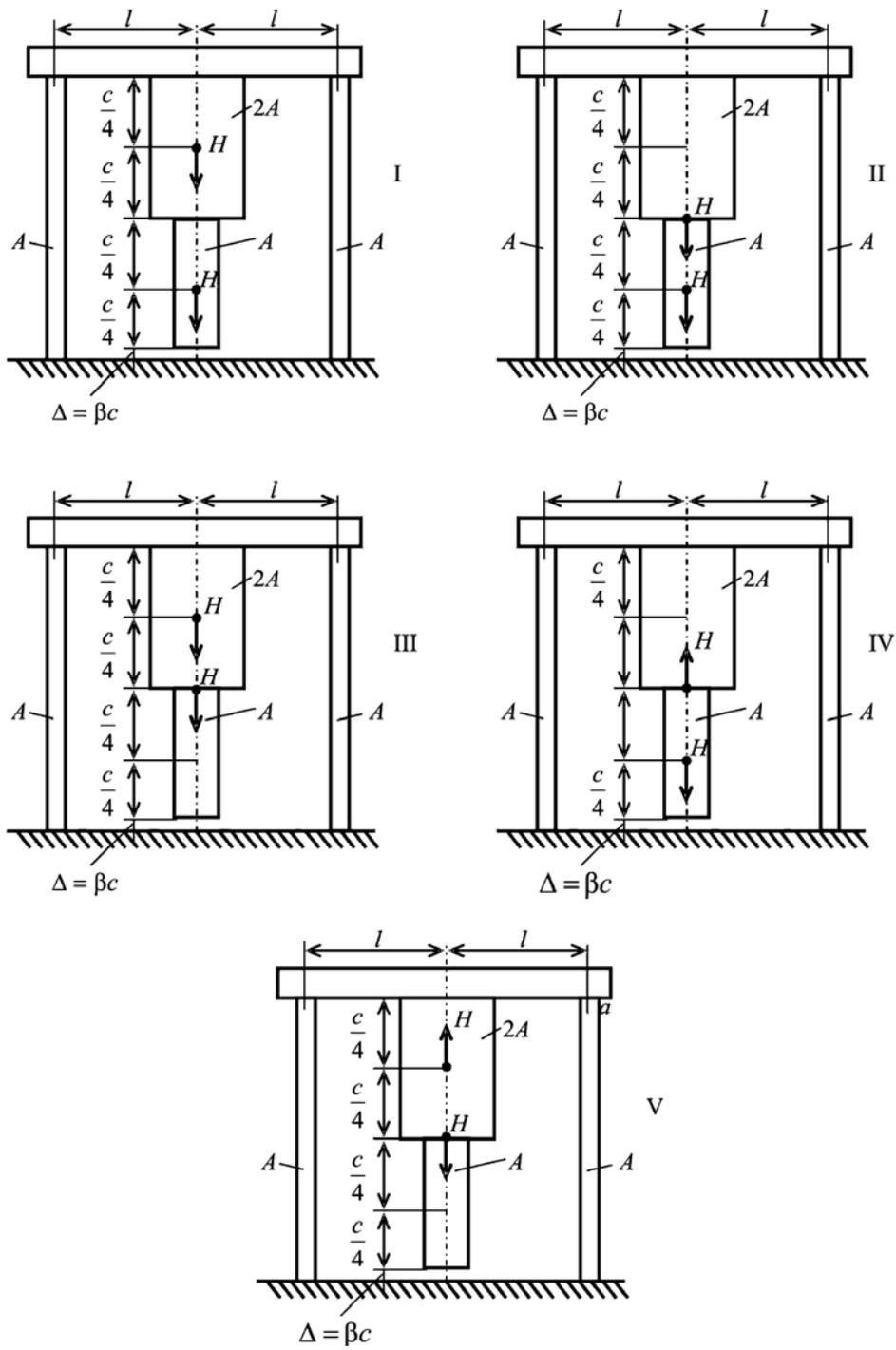


Рис. 6.2 (начало)

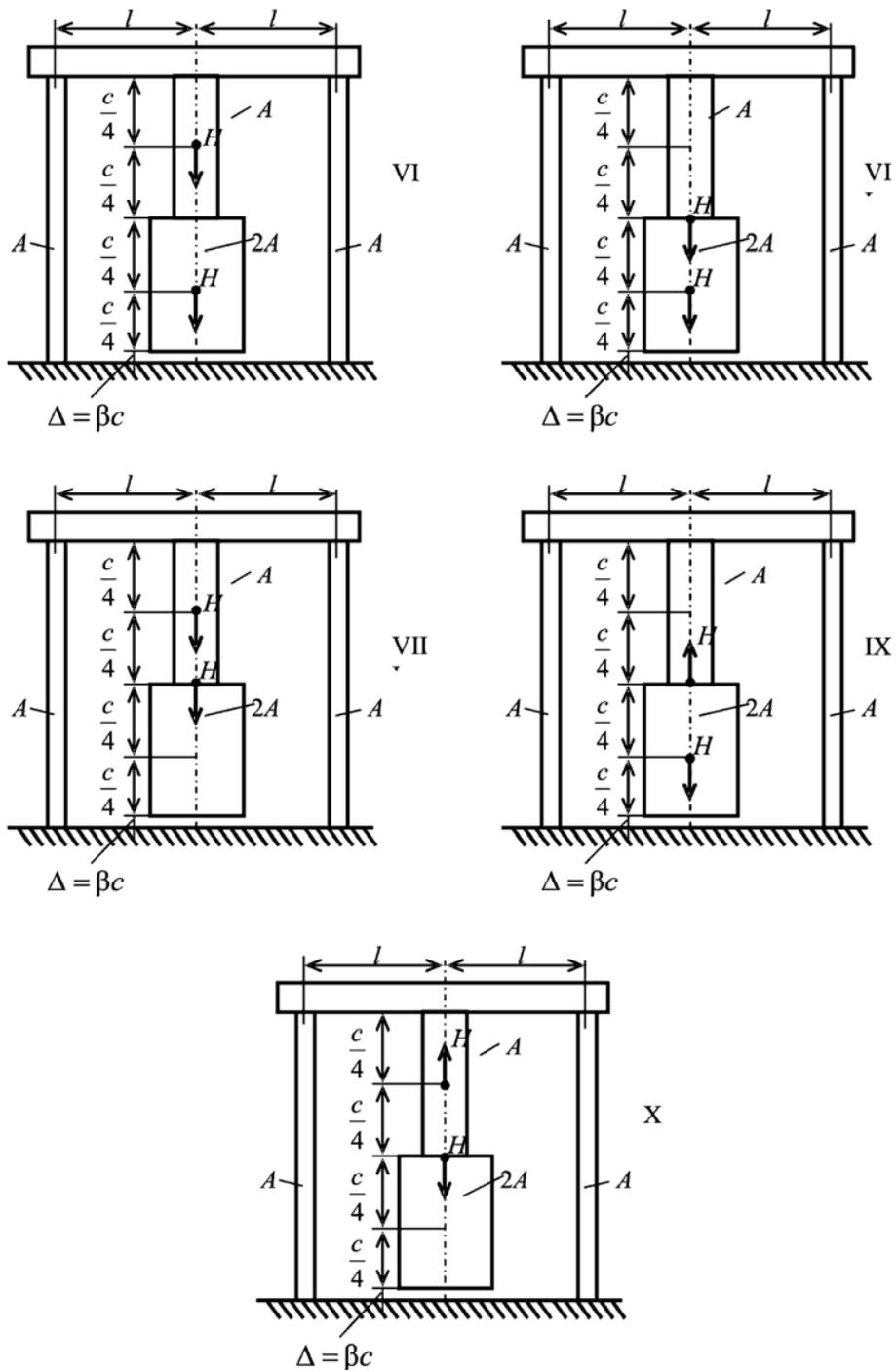


Рис. 6.2 (окончание)

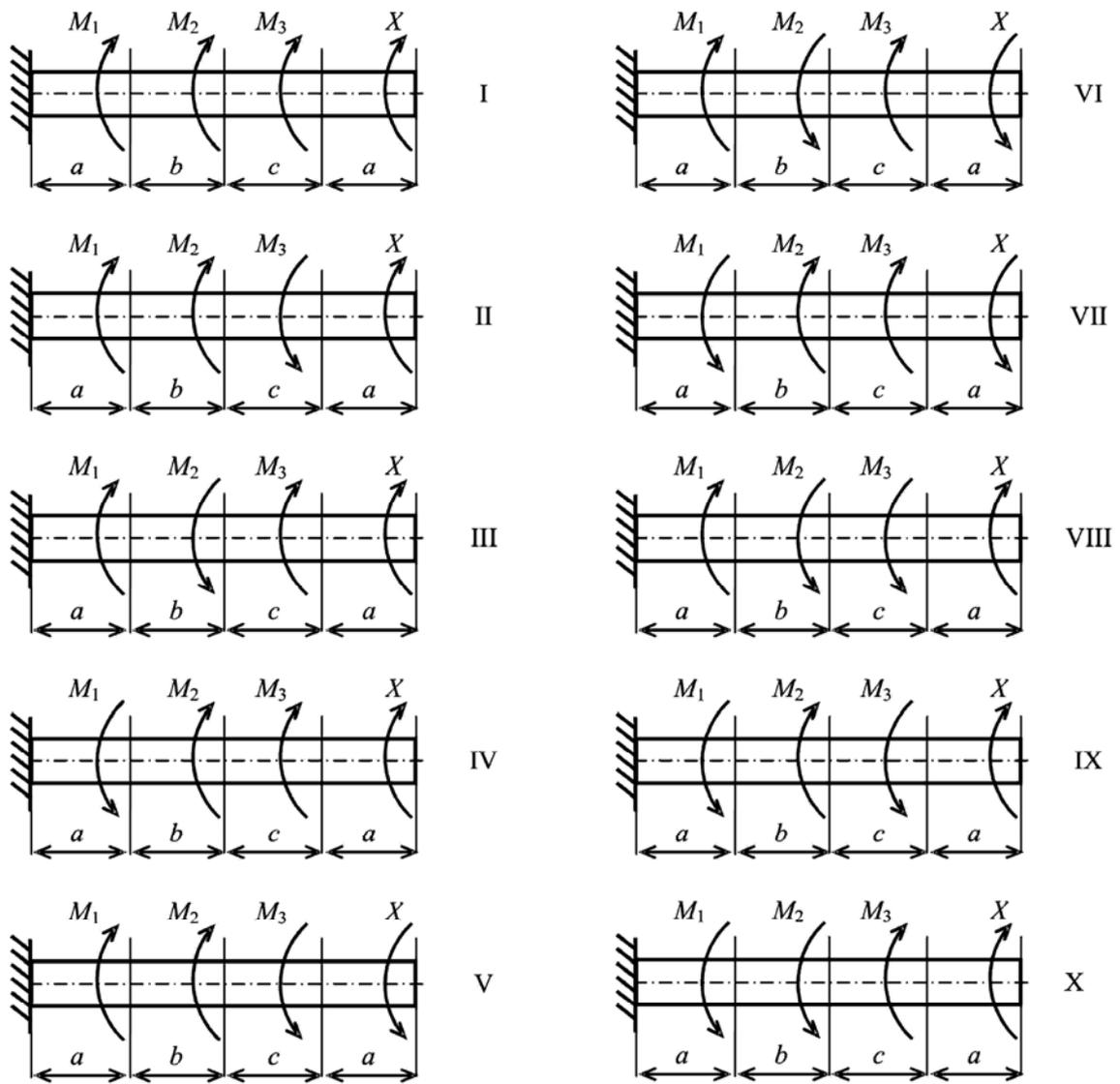


Рис. 6.3

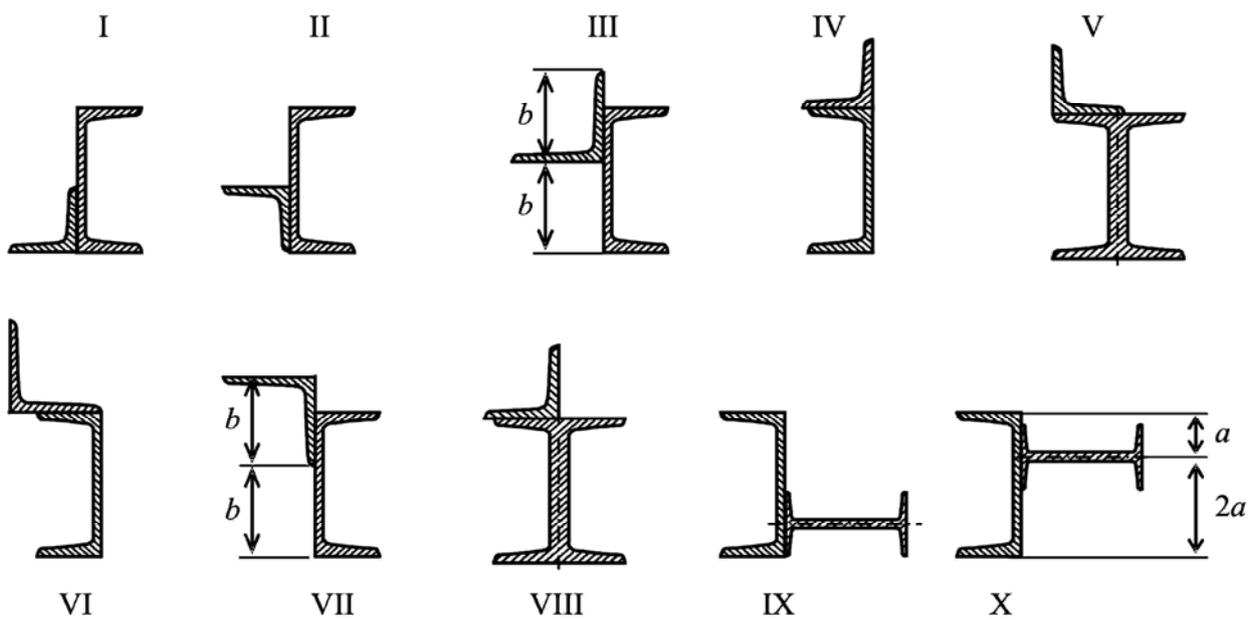


Рис. 6.4

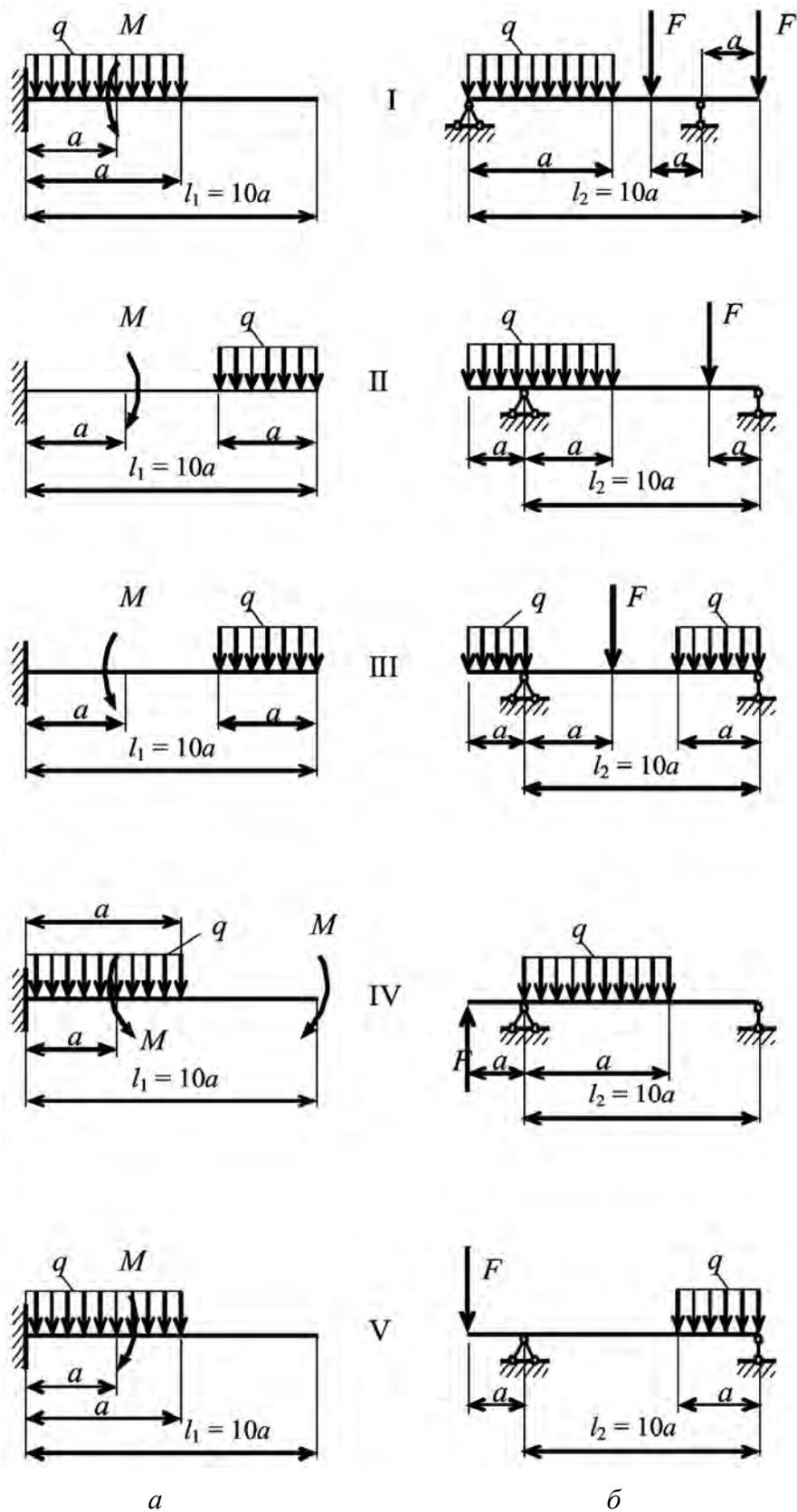


Рис. 6.5 (начало)

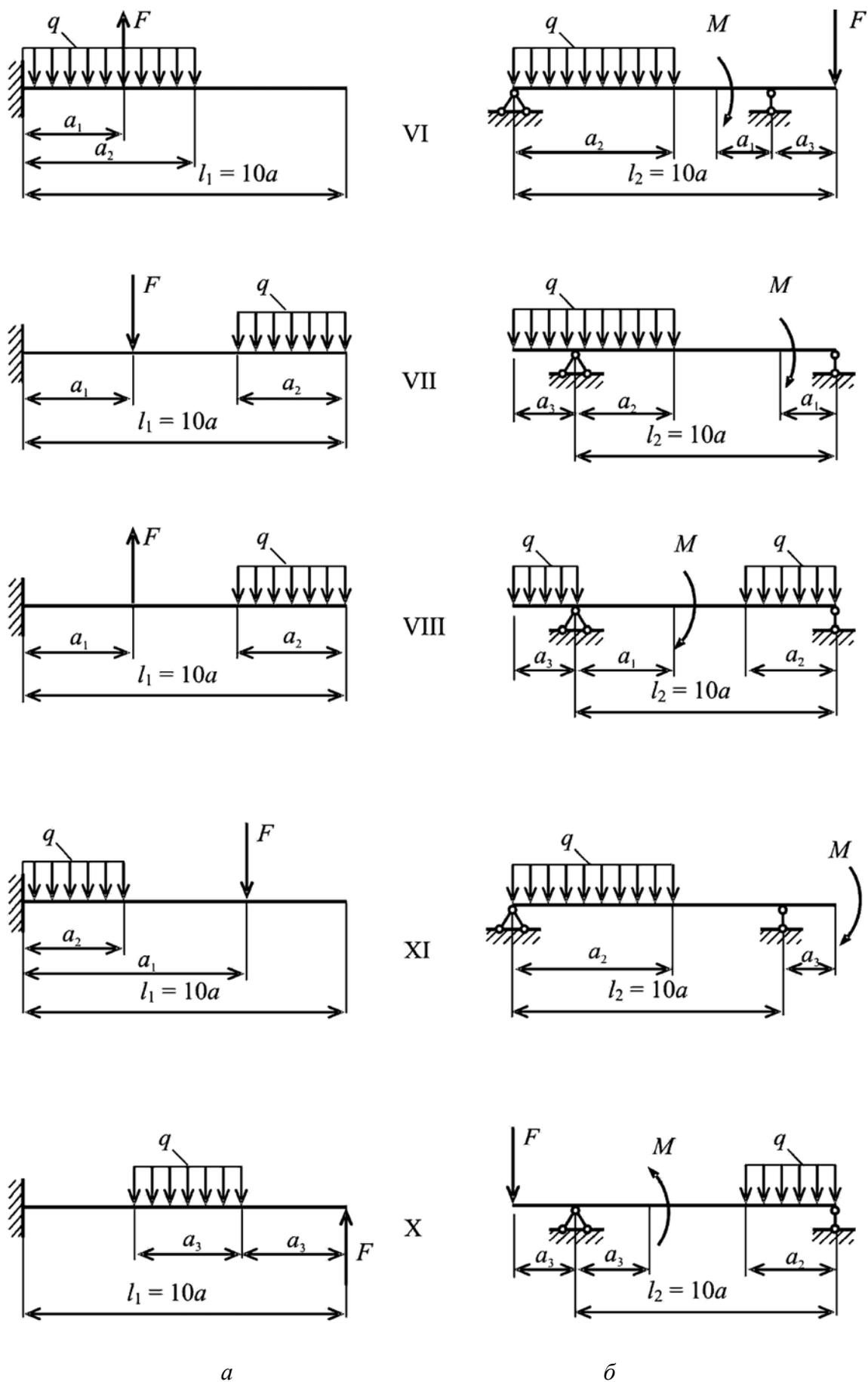


Рис. 6.5 (окончание)

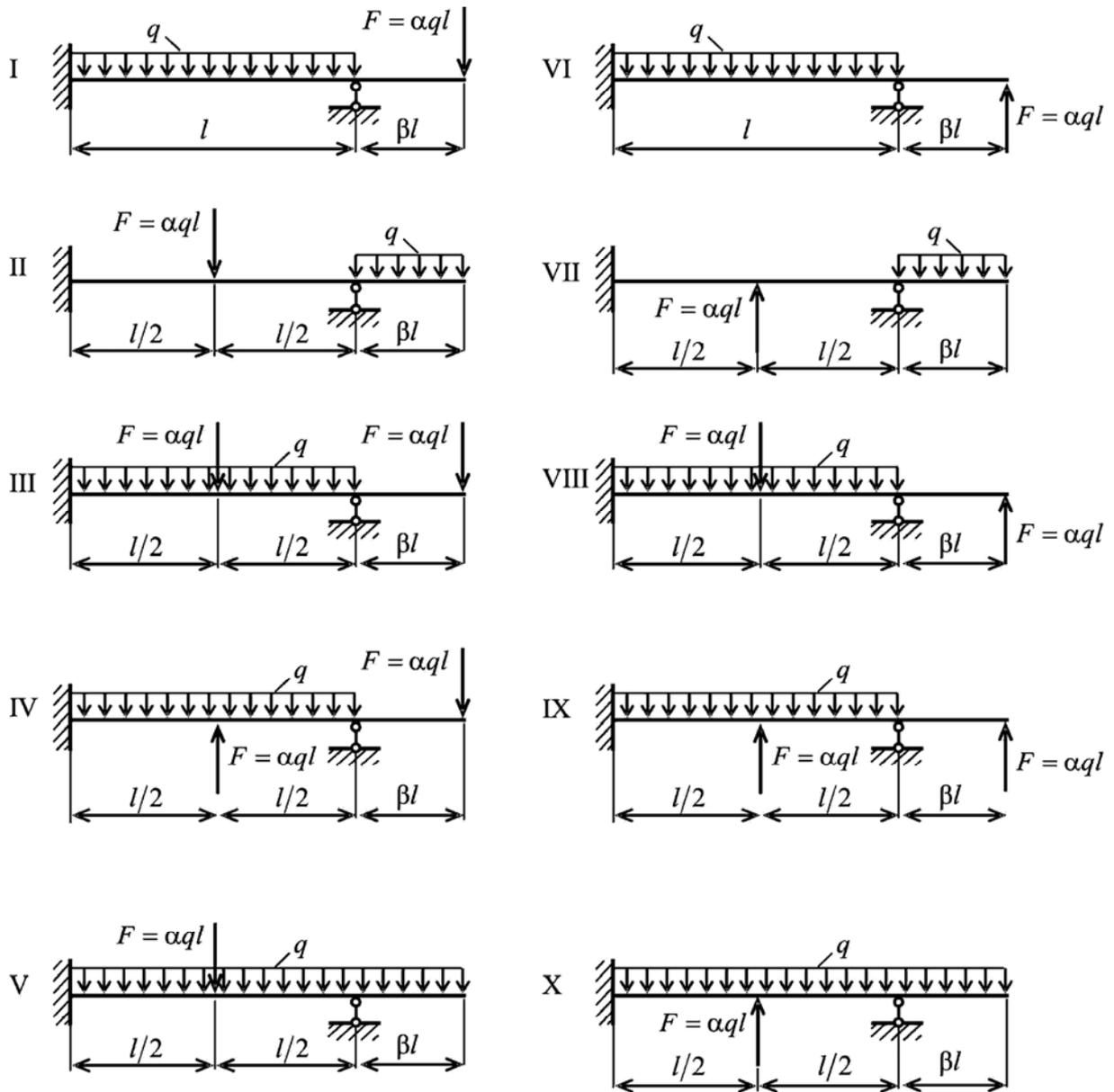


Рис. 6.6

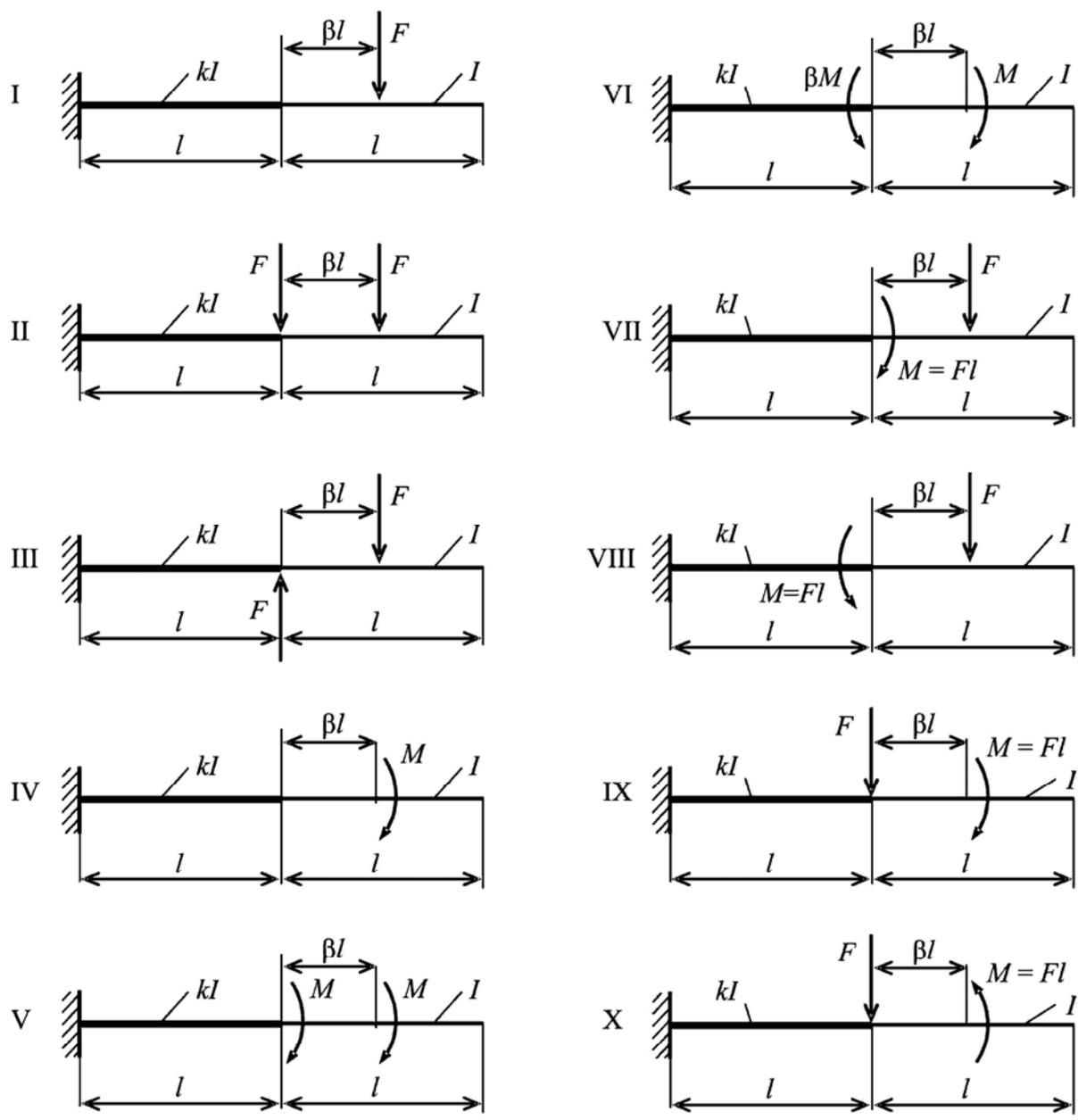
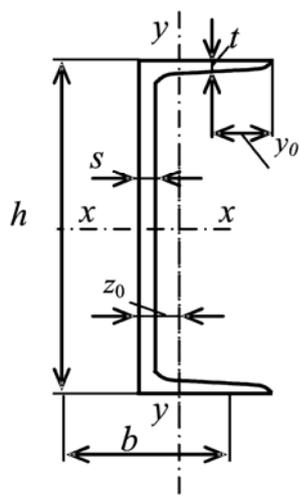


Рис. 6.7

Библиографический список

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. — М. : Высш. шк., 2008. — 559 с.
2. *Вольмир, А. С.* Сборник задач по сопротивлению материалов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Коданев. — М. : Наука, 1984. — 407 с.
3. *Дарков, А. В.* Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. — М. : Высш. шк., 1989. — 624 с.
4. *Кукса, Л. В.* Курс лекций по сопротивлению материалов с примерами решения задач / Л. В. Кукса, Е. Е. Евдокимов ; под ред. Л. В. Куксы ; ВолгГАСУ. — Волгоград, 2003. — 187 с.
5. *Кукса, Л. В.* Курс лекций по сопротивлению материалов с примерами решения задач. Ч. 2 / Л. В. Кукса, Е. Е. Евдокимов ; под ред. Л. В. Куксы ; ВолгГАСУ. — Волгоград, 2007. — 200 с.
6. *Кукса, Л. В.* Сопротивление материалов в вопросах и задачах : учебно-практическое пособие / Л. В. Кукса, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов ; под ред. Л. В. Куксы ; ВолгГАСУ. — Волгоград, 2010. — 131 с.
7. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов : учеб. пособие для технических вузов / И. А. Миролубов, С. А. Енгальчев, Н. Д. Сергиевский и др. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Высш. шк., 1985. — 399 с.
8. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. — Минск : Наука и техника, 1988. — 464 с.

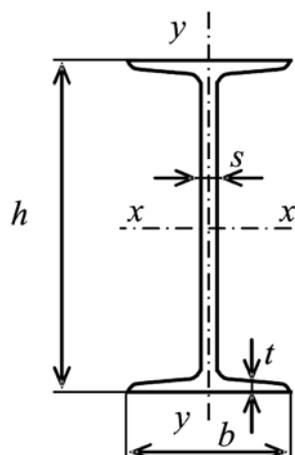
Швеллеры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8240—89)



h — высота двутавра; W — момент сопротивления; b — ширина полки; S — статический момент полусечения; s — толщина стенки; t — средняя толщина полки; i — радиус инерции; A — площадь поперечного сечения; I — момент инерции; z_0 — расстояние от оси y до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x_2} , см ³	i_{x_2} , см ²	S_{x_2} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_2} , см ³	i_{y_2} , см ²	z_0 , см
		h	b	s	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	342	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

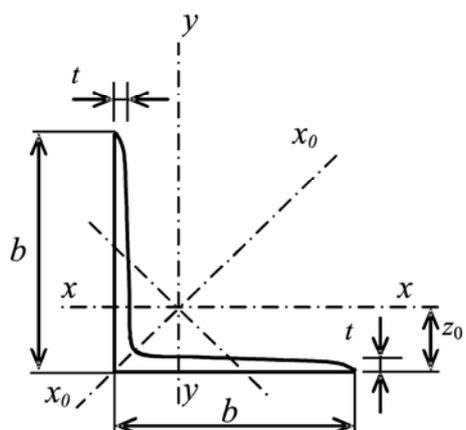
Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239—89)



h — высота двутавра; I — момент инерции; b — ширина полки; W — момент сопротивления; s — толщина стенки; S — статический момент полусечения; t — средняя толщина полки; A — площадь поперечного сечения; i — радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x3} , см ³	i_x , см ²	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_{y3} , см ³	i_y , см ²
		h	b	s	t								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,27	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509—93)



b — ширина полки; t — толщина полки; A — площадь поперечного сечения; I — момент инерции; i — радиус инерции; I_{xy} — центробежный момент инерции; z_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$i_{x_0 \max}$, см	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$i_{y_0 \min}$, см	$ I_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

Учебное издание

Кукса Лев Владимирович
Арзамаскова Лариса Михайловна
Евдокимов Евгений Евгеньевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ (ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА)

**Контрольные задания
и примеры их решения**

В 2 частях
Часть I

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Редактор *О. А. Шипунова*
Компьютерная правка и верстка *Н. А. Каширина*

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 27.11.2014.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 2,6. Объем данных 21,6 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
Отдел оперативной полиграфии
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
<http://www.vgasu.ru>, info@vgasu.ru