Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Интегралы и дифференциальные уравнения

**Методические указания и индивидуальные задания
к контрольной работе № 3**

Составители К. В. Катеринин, А. П. Поздняков

Волгоград. ВолгГАСУ. 2016

УДК 517(076.5)

Интегралы и дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 3 / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. К. В. Катеринин, А. П. Поздняков. — Электронные текстовые и графические данные (0,3 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2016. — Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов всех профилей подготовки направлений «Строительство», СУЗ, ТТП, ПБ, ТБ заочной формы обучения по дисциплине «Математика».

УДК 517(076.5)

План выпуска учеб.-метод. документ. 2016 г., поз. 15

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0

Подписано в свет 30.08.2016.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,5. Объем данных 0,3 Мбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство

$$F'(x)=f(x).$$

Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных, причём все первообразные содержатся в выражении $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C.$

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$

4. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int \left(f_1(x)\right)dx \pm \int \left(f_2(x)\right)dx$.

5. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то справедлива формула

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

6. Свойство инвариантности формул интегрирования: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где u – дифференцируемая функция переменной x.

1.3. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C. \quad (a > 0, a \neq 1).$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$ 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C.$ 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C.$

9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$ 10. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

14. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

15. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

16. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

17. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\frac{x}{2}\right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

1.4. Основные методы интегрирования

1.4.1. Непосредственное интегрирование

Используя тождественные преобразования подынтегральной функции и свойства неопределённых интегралов можно в ряде случаев данный интеграл свести к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. Найти $\int (e^x + 5\cos x - 9x^2 + 2)\, dx.$

Решение .Используя правила интегрирования (свойства 4 и 3) и табличные интегралы 4, 5, 1, получим:

$$\int (e^x + 5\cos x - 9x^2 + 2)\, dx = \int e^x\, dx + 5\int \cos x\, dx - 9\int x^2\, dx + 2\int dx =$$

$$= e^x + 5\sin x - 3x^3 + 2x + C.$$

При интегрировании каждого слагаемого появляется своя произвольная постоянная, но в конечном итоге записываем только одну, так как сумма постоянных есть постоянная.

Правильность проведённого интегрирования можно проверить дифференцированием результата, при этом должна получиться подынтегральная функция.

Проверка: $\left(e^{x}+5\sin x-3x^{3}+2x+C\right)'=e^{x}+5\cos x-9x^{2}+2$.

Пример 2. Найти $\int\frac{2\sqrt{x}-3x^{2}}{5x\sqrt{x}}dx$.

Решение. Выполняя почленно деление, представим подынтегральную функцию как разность двух функций, а затем, используя правила интегрирования 4,3 и табличные интегралы 2,1, получим:

$$\int\frac{2\sqrt{x}-3x^{2}}{5x\sqrt{x}}dx=\int\frac{2}{5x}-\frac{3\sqrt{x}}{5}dx=\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x}-\frac{3}{5}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{3}{5}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{2}{5}x\sqrt{x}+C=\frac{2}{5}\left(\ln|x|-x\sqrt{x}\right)+C.$$

Пример 3. Найти $\int tg^{2}x\,dx$.

Решение. $\int tg^{2}x\,dx=\int\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\frac{1-\cos^{2}x}{\cos^{2}x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^{2}x}-1\right)dx=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^{2}x}dx-\int dx=tg\,x-x+C.$$

Часто при сведении данного интеграла к табличному используют преобразование дифференциала, которое называют подведением под знак дифференциала и затем применяют свойство инвариантности формул интегрирования (свойство 6).

Пример 4. Найти $\int\frac{dx}{x(x+1)}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{(1+x)-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|-\ln|x+1|+C.$$

Здесь при нахождении второго интеграла использовано преобразование дифференциала $dx=d(x+1)$ и свойство 6.

Пример 5. Найти $\int\cos^{2}x\,dx$.

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на сумму двух функций по формуле $\cos^{2}x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, затем применяем преобразование дифферен-

циала $dx=\frac{1}{2}d(2x)$ и свойство 6. Получим: $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$
$=\int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$.

1.4.2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Часто вычисление интеграла упрощается, если ввести новую переменную интегрирования и в качестве такой новой переменной выбрать некоторую функцию $z=\psi(x)$,входящую в подынтегральное выражение. Это целесообразно делать в тех случаях, когда множитель $dz=\psi'(x)dx$ также находится в составе подынтегрального выражения.

Формула замены переменной при такой подстановке имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx=\int f(\psi(x))d(\psi(x))=\int f(z)dz. \qquad (1)$$

Формулу (1) можно читать «справа налево», т.е. подбирать подстановку в виде $x=\varphi(z),\ dx=\varphi'(z)dz$:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(z))\varphi'(z)dz.$$

Пример 6. Найти $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Решение. Наличие множителя xdx даёт возможность применить подстановку $z=x^2+1$. Дифференцируя, получим $dz = 2x\,dx$, $x\,dx = \frac{1}{2}dz$, следовательно, $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln|z|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C$.

Пример 7. Найти $\int\frac{\operatorname{arctg}^5 x\,dx}{x^2+1}$.

Решение. Введём подстановку $z = \operatorname{arctg} x$. Эта замена целесообразна, так как под интегралом содержится дробь $\frac{dx}{x^2+1}=d(\operatorname{arctg}x)$. Тогда $\int\frac{\operatorname{arctg}^5 x\,dx}{x^2+1}=\int z^5dz=\frac{z^6}{6}+C=\frac{\operatorname{arctg}^6 x}{6}+C$.

1.4.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции. Формула

$$\int u\,dv=uv-\int vdu \qquad (2)$$

называется формулой интегрирования по частям. Этой формулой пользуются в тех случаях, когда интеграл $\int v\,du$ более простой по сравнению с заданным интегралом $\int u\,dv$.

Пользуясь формулой (2), весьма важно правильно выбрать множители u и dv . Для разложения подынтегрального выражения на указанные множители нет общих правил. Вместе с тем можно руководствоваться следующими указаниями.

Если подынтегральное выражение содержит произведение показательной или тригонометрической функции на многочлен, то за множитель *u* следует принять многочлен.

Если подынтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на многочлен, то за множитель *u* следует принять логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию.

Пример 8. Найти $\int(2x-5)e^{-3x}dx$.

Решение. Принимаем $u=2x-5$, $dv=e^{-3x}dx$. Тогда $du=2dx$,

$v=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}$. Применяя формулу (2) получим:

$$\int(2x-5)e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}-\int-\frac{1}{3}e^{-3x}2\,dx=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}+\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x}-\frac{2}{9}e^{-3x}+C=-\frac{13-6x}{9}\,e^{-3x}+C.$$

Следует отметить, что при определении функции *v* по дифференциалу *dv* можно брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит. Поэтому удобно принять C=0.

Пример 9. Найти $\int x\ln x\,dx$.

Решение.

$$\int x\ln x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\dfrac{dx}{x}; \\ dv=x\,dx,\ v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Рассмотренные выше методы вычисления неопределённых интегралов не дают общего правила для интегрирования любой функции. Однако можно выделить несколько классов функций (дробно-рациональные, тригонометрические и др.), интегралы от которых можно вычислять стандартными методами [1],[2],[3].

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ — свойство аддитивности.

6. Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

2.2. Формула Ньютона – Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница является основной формулой интегрального исчисления, она позволяет вычислить определённый интеграл от любой функции $f(x)$, для которой известна первообразная $F(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Разность $F(b)$-$F(a)$ принято обозначать знаком двойной подстановки $F(x)\Big|_a^b$, поэтому формулу Ньютона-Лейбница можно записать и так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Пример 10. Вычислить $\int\limits_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx$.

Решение. Используя свойства 4 и 3, а при нахождении первообразных табличные интегралы 2 и 1, получим:

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx = 4\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int\limits_1^2 x^4dx + 2\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx = 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 =$$

$$= 4\left(\ln 2 - \ln 1\right) - \left(2^5 - 1^5\right) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) = 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

2.3. Метод замены переменной в определённом интеграле

При использовании подстановки в определённом интеграле подынтегральное выражение преобразуется так же, как и в случае неопределённого интеграла. Особенность заключается в том, что нет необходимости возвращаться к прежней переменной. Достаточно дополнительно произвести замену пределов интегрирования, определив интервал, который должна пройти новая переменная.

Пример 11. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральное выражение:
$\sin^3 x\,dx = \sin^2 x \sin x\,dx = \left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx$. Применим подстановку: $\cos x = t$, тогда $\sin x\,dx = -dt$. Определим новый промежуток интегрирования. Если $x = 0$, то $\cos 0 = t$ и $t = 1$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\pi}{2} = t$ и $t = 0$. Значит,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)\sin x\,dx = -\int\limits_1^0 \left(1-t^2\right)dt = \int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)dt = \left.\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\right|_0^1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Перемена знака в четвертом интеграле выполнена в соответствии со свойством 2, при этом верхний и нижний пределы интегрирования были переставлены местами.

2.4. Интегрирование по частям в определённом интеграле

Формула

$$\int\limits_a^b u\,dv = \left.uv\right|_a^b - \int\limits_a^b v\,du \qquad (4)$$

называется формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пример 12. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x,\ du = dx; \\ dv = \cos x\,dx,\ v = \sin x. \end{matrix}\right| = \left.x\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2.5. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ имеет конечный предел, то этот предел называют *несоб-*

ственным интегралом и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. При этом говорят, что несобственный интеграл существует или сходится.

Таким образом, по определению,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке (-∞; *b*]:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пример 13.

$$\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b -2^{-x}d(-x) = -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln 2}2^{-x}\Big|_0^b = -\frac{1}{\ln 2}\lim_{b\to\infty}\left(2^{-b}-2^0\right) =$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}(0-1) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4.$$

Пример 14.

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\cos x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \cos x dx = \lim_{a\to-\infty}\sin x\Big|_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(0-\sin a) = -\lim_{a\to-\infty}\sin a.$$

Так как предел $\lim\limits_{a\to-\infty}\sin a$ не существует, то данный интеграл расходится.

2.6. Вычисление площади плоской фигуры

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 1) находится по формуле:

$$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \qquad (5)$$

В случае, когда данная фигура ограничена только двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (рис. 2), прежде всего следует найти абсциссы точек пересечения этих кривых $x_1=a$ и $x_2=b$. После этого для вычисления площади такой фигуры можно использовать формулу (5).

Пример 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$ и $y=2-x^2$.

Решение. Найдём точки пересечения прямой $y=x$ с параболой $y=2-x^2$.

Для этого решим систему уравнений: $\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2. \end{cases}$

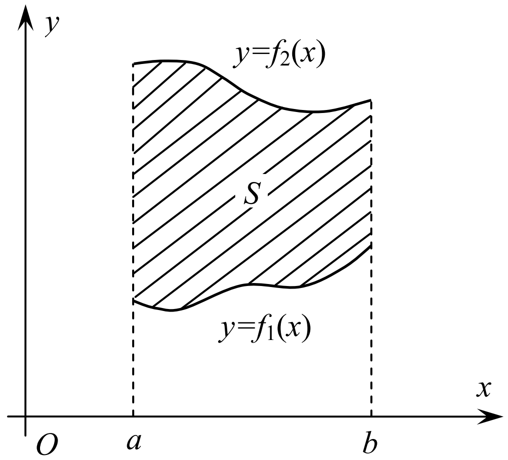

Рис. 1

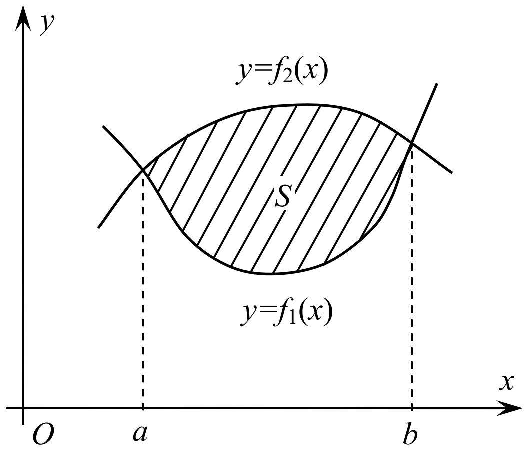

Рис. 2

Значение $y=x$ из первого уравнения подставим во второе, получим: $x=2-x^2$, откуда найдём $x_1=-2$, $x_2=1$. Тогда из первого уравнения $y_1=-2$, $y_2=1$. Следовательно, линии пересекаются в точках $A(-2;-2)$ и $B(1;1)$ (рис. 3).

Искомая площадь, согласно формуле (5), равна:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\left(кв.ед.\right)$$

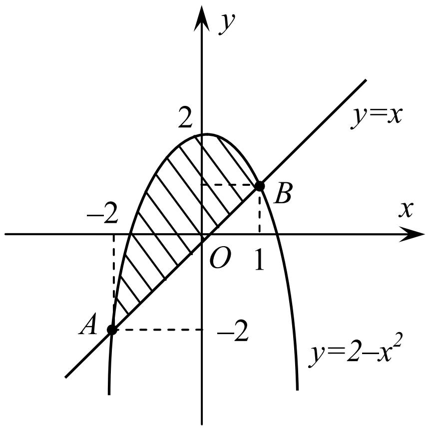

Рис. 3

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3.1. Основные понятия

Определение 3. Уравнение вида

$$F\,(x, y, y')=0 \tag{6}$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – ее производная, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Решением дифференциального уравнения (6) называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений. *Общим решением* уравнения (6) называется такое решение $y=\varphi(x, C)$, которое при любом значении произвольной постоянной C удовлетворяет этому уравнению.

Решение, которое получается из общего решения при некотором конкретном числовом значении $C=C_0$ называется *частным решением.*

Частное решение имеет вид $y=\varphi(x, C_0)$. Чтобы найти C_0 задаётся начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$, которому должно удовлетворять искомое частное решение.

3.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 4. *Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение вида

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0. \tag{7}$$

Разделив обе части уравнения (7) на произведение $P(x)N(y)$ получим *уравнение с разделёнными переменными*:

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx+\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0. \tag{8}$$

Почленное интегрирование уравнения (8) приводит к выражению

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=C,$$

которое в неявной форме определяет решение исходного уравнения и называется *общим интегралом* этого уравнения.

Пример 16. Решить уравнение $\sqrt{1+y^2}\,xdx+y(4+x^2)dy=0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $(4+x^2)\sqrt{1+y^2}$. Получим:

$\frac{xdx}{4+x^2}+\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=0.$ Выполняем интегрирование: $\int\frac{xdx}{4+x^2}+\int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}}=C$,

$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(4+x^2\right)}{4+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+y^2\right)}{\sqrt{1+y^2}}=C,\ \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)+\sqrt{1+y^2}=C$.

Полученное выражение есть общий интеграл данного уравнения.

3.3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Определение 5. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=f(x), \tag{9}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Будем искать решение $y(x)$ уравнения (9) в виде произведения двух функций $y(x)=U(x)V(x)$. Тогда $y'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$ и уравнение (9) примет вид:

$U'V+UV'+p(x)UV=f(x)$, или

$$U'V+U(V'+p(x)V)=f(x).$$

Выберем функцию V такой, чтобы выражение в скобке $V'+p(x)V$ равнялось нулю. Тогда получим два уравнения с разделяющимися переменными: $V'+p(x)V=0$ и $U'V=f(x)$.

Решая первое уравнение находим $V=V(x)$, причём достаточно взять частное решение, когда произвольная постоянная равна 0. Подставив найденное значение $V(x)$ во второе уравнение и решив его, найдём $U(x, C)$. Возвращаясь к переменной y получим общее решение уравнения (9) $y(x)=U(x, C)V(x)$.

К линейным уравнениям приводятся *уравнения Бернулли*, которые отличаются от линейных наличием в правой части, кроме функции $f(x)$, ещё и множителя y^n, где $n\neq 0$, $n\neq 1$. Общий вид такого уравнения:

$$y'+p(x)y=f(x)y^n.$$

На практике при решении уравнений Бернулли их не сводят к линейным, а интегрируют, как и линейные, подстановкой $y(x)=U(x)V(x)$.

Пример 17. Решить уравнение $y'+\frac{2y}{x}=y^2x$.

Решение. Дано уравнение Бернулли. Сделав замену $y=UV$, $y'=U'V+UV'$, получим: $U'V+UV'+\frac{2UV}{x}=(UV)^2x$, или $U'V+U(V'+\frac{2V}{x})=U^2V^2x$.

Приравнивая к нулю выражение в скобках, получим два уравнения:

$V'+\frac{2V}{x}=0$, и $U'V=U^2V^2x$.

Решаем первое уравнение. $V'+\frac{2V}{x}=0$, $\frac{dV}{dx}+\frac{2V}{x}=0$, $\frac{dV}{V}=-\frac{2dx}{x}$,

$\ln|V|=\ln|x|^{-2}$, $V=\frac{1}{x^2}$.

Подставим найденное значение V во второе уравнение и решим его:

$$\frac{U'}{x^2}=U^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 x,\quad \frac{dU}{U^2}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dU}{U^2}=\int\frac{dx}{x}+C,\quad -\frac{1}{U}=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$-\frac{1}{U}=\ln|Cx|,\quad U=-\frac{1}{\ln|Cx|}.$$

Значения $U(x)$ и $V(x)$ подставим в решение $y=U\,V$. Получим:

$y=-\frac{1}{x^2\ln|Cx|}$ — это и есть общее решение данного уравнения.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int xe^{-x^2}dx$, б) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, в) $\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx$.

В пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

Решение. а) Введём подстановку $t=-x^2$. Тогда $dt=-2xdx$, $xdx=-\frac{1}{2}dt.$

$$\int xe^{-x^2}dx=\int e^t\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Проверка. $\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)'=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(-2x\right)=xe^{-x^2}$.

б) Применим метод интегрирования по частям, тогда

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\mathrm{arctg}\,x,\quad du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=xdx,\quad v=\int xdx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=u\cdot v-\int vdu=$$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C.$$

Проверка. $\left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+C\right)'=x\operatorname{arctg} x+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}=x\operatorname{arctg} x.$

в) Из квадратного трёхчлена знаменателя выделим полный квадрат:

$x^2-8x+25=x^2-2\cdot 4x+16+9=(x-4)^2+9.$

Тогда $\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{x+3}{(x-4)^2+9}dx.$

Введём подстановку $t=x-4,\quad dt=dx,\quad x=t+4$. Получим:

$$\int\frac{x+3}{(x-4)^2+9}dx=\int\frac{t+4+3}{t^2+9}dt=\int\frac{t\,dt}{t^2+9}+\int\frac{7dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right|+\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-8x+25\right|+\frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$

2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ или установить его расходимость.

Решение. $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_e^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\ln x\Big|_e^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln\ln b-\ln\ln e)=\infty.$

Следовательно, данный интеграл расходится.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=2^x$, $x=0$, $x=2$.

Решение. Данная фигура ограничена сверху графиком показательной функции $y=2^x$, снизу – параболой $y=2x-x^2$, с боков – отрезками прямых $x=0$, $x=2$, параллельных оси Oy (Рис.4).

Следовательно, $S=\int\limits_0^2\left(2^x-\left(2x-x^2\right)\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2-x^2\Big|_0^2+\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=$

$$=\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}-4+\frac{8}{3}=\frac{3}{\ln 2}-\frac{4}{3}\ (\text{кв. ед.})$$

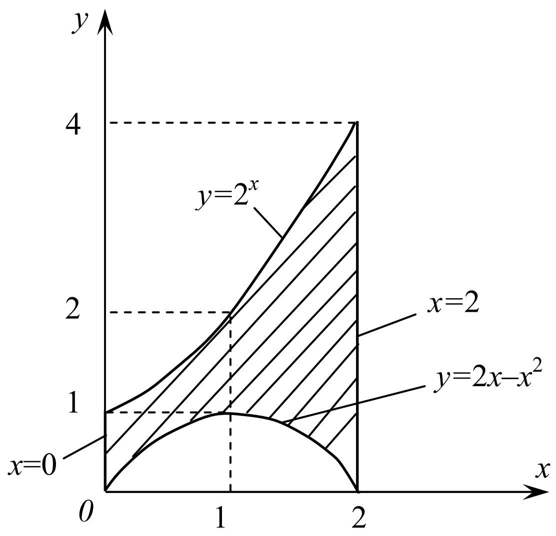

Рис. 4

4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = 1$ при $x_0 = \pi$.

Решение. Данное уравнение является линейным, поэтому его можно решить с помощью подстановки $y=UV$, $y'=U'V+UV'$.

Тогда данное уравнение примет вид:

$U'V+UV'+UV\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, или $V\,(U'+U\,\mathrm{tg}\,x) + U\,V' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Полагая выражение в скобке равным нулю, получим два уравнения:

$U'+U\,\mathrm{tg}\,x=0$ и $UV'=\dfrac{1}{\cos x}$.

Решаем первое уравнение: $\dfrac{dU}{dx}+U\,\mathrm{tg}\,x=0$, $\dfrac{dU}{U}+\dfrac{\sin x\,dx}{\cos x}=0$,

$$\int\frac{dU}{U}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=0,\ \ln|U|-\ln|\cos x|=C.$$

При $C=0$ получим частное решение $U=\cos x$, подставим его во второе уравнение и решим полученное уравнение:

$$\cos x\frac{dV}{dx}=\frac{1}{\cos x},\ dV=\frac{dx}{\cos^2 x},\quad V=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+C,\ V=\mathrm{tg}\,x+C.$$

Общее решение исходного уравнения $y=U\,V=\cos x(\mathrm{tg}\,x+C)$. Из него выделим частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi)=1$: $1=\cos\pi\,(\mathrm{tg}\,\pi+C)$, $1=-1(0+C)$, откуда $C=-1$. Подставляя значение $C=-1$ в общее решение, получим частное решение исходного уравнения: $y=\cos x(\operatorname{tg} x-1)=\sin x-\cos x$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание № 1. Найти неопределенные интегралы. В пунктах а) и б) результаты проверить дифференцированием.

Вариант 1. а) $\int \frac{\cos 5x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 5x}}$; б) $\int \operatorname{arctg}(x+5)dx$; в) $\int \frac{x+18}{x^2-4x-12}dx$.

Вариант 2. а) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$; б) $\int \sqrt{x}\ln x\,dx$; в) $\int \frac{x+4}{x^2-2x-8}dx$.

Вариант 3. а) $\int \frac{dx}{(2\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}$; б) $\int \ln(x+2)dx$; в) $\int \frac{x+2}{x^2+x-20}dx$.

Вариант 4. а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}\,dx}{x}$; б) $\int \arcsin 2x\,dx$; в) $\int \frac{x+12}{x^2-x-6}dx$.

Вариант 5. а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; б) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$; в) $\int \frac{x+19}{x^2-2x-15}dx$.

Вариант 6. а) $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+4\right)6}$; б) $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$; в) $\int \frac{x+6}{x^2-7x-18}dx$.

Вариант 7. а) $\int \frac{(\arcsin x+1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \left(x^2+x\right)e^x dx$; в) $\int \frac{x-7}{x^2-9x+8}dx$.

Вариант 8. а) $\int \frac{3^x\,dx}{\sqrt{1+3^x}}$; б) $\int x\cos 5x dx$; в) $\int \frac{x}{x^2-6x-7}dx$.

Вариант 9. а) $\int \sqrt[6]{5-x^4}\cdot x^3 dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; в) $\int \frac{x+2}{x^2-9x-18}dx$.

Вариант 10. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int x e^{5x}dx$; в) $\int \frac{x+1}{x^2+x-30}dx$.

Вариант 11. а) $\int \sqrt{\cos^3 2x}\sin 2x\,dx$; б) $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int \frac{2x+9}{x^2+5x+6}dx$.

Вариант 12. а) $\int e^{1-4x^2}x\,dx$; б) $\int x\operatorname{arctg} 2x\,dx$; в) $\int \frac{x+9}{x^2+2x-3}dx$.

Вариант 13. а) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\operatorname{ctg}^4 3x}$; б) $\int \frac{\ln x\,dx}{x^3}$; в) $\int \frac{2x+27}{x^2-x-12}dx$.

Вариант 14. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{x+1}}$; в) $\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx$.

Вариант 15. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}\,dx}{1+4x^2}$; б) $\int (x-7)\cos 2x\,dx$; в) $\int \frac{17-2x}{x^2-5x+4}dx$.

Вариант 16. а) $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+5}$; б) $\int \operatorname{arctg}(x+5)dx$; в) $\int \frac{9-2x}{x^2-5x+6}dx$.

Вариант 17. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$; б) $\int x^2 e^{3x}\,dx$; в) $\int \frac{x-13}{x^2-11x+24}dx$.

Вариант 18. а) $\int \frac{2^x\,dx}{1+4^x}$; б) $\int \cos(\ln x)dx$; в) $\int \frac{x+5}{x^2+9x-10}dx$.

Вариант 19. а) $\int \frac{x^2dx}{8x^3+27}$; б) $\int x\cos(x+7)dx$; в) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+1}dx$;

Вариант 20. а) $\int \frac{\cos\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int x^2 e^{-x}\,dx$; в) $\int \frac{x-3}{x^2-3x-40}dx$.

Вариант 21. а) $\int \frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt{\cos 3x+2}}$; б) $\int \ln(2x+3)dx$; в) $\int \frac{3x+1}{x^2-12x+35}dx$.

Вариант 22. а) $\int e^{3x}\sin e^{3x}\,dx$; б) $\int \frac{x\arccos 2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\int \frac{3x-2}{x^2+8x-9}dx$.

Вариант 23. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\sqrt{\operatorname{tg} 4x}}$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$; в) $\int \frac{2x+7}{x^2-3x-28}dx$.

Вариант 24. а) $\int \frac{\ln^3(1-x)dx}{x-1}$; б) $\int \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\,dx$; в) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}dx$.

Вариант 25. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 3x\,dx}{1+9x^2}$; б) $\int (x^2+x)\cos x\,dx$; в) $\int \frac{2x-1}{x^2+6x-16}dx$.

Вариант 26. а) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; б) $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{4}dx$; в) $\int \frac{3-x}{x^2-9x+14}dx$.

Вариант 27. а) $\int \frac{\arccos^3 2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; б) $\int (x^2-1)e^{-x}\,dx$; в) $\int \frac{x+5}{x^2-4x+3}dx$.

Вариант 28. а) $\int 7^{x^2}x\,dx$; б) $\int \sin(\ln x)dx$; в) $\int \frac{3-x}{x^2+6x+8}dx$.

Вариант 29. а) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x^2 \cos\frac{x}{3}\,dx$; в) $\int \frac{7x+1}{x^2-3x+2}dx$.

Вариант 30. а) $\int \frac{\sin(\ln x)dx}{x}$; б) $\int (x^2-3)e^x\,dx$; в) $\int \frac{4-3x}{x^2+8x+15}dx$.

Задание № 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

Вариант 1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x+3}\,dx$.

Вариант 2. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}\,dx}{1+4x^2}$.

Вариант 3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16x^4+1}}$.

Вариант 4. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

Вариант 5. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$.

Вариант 6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Вариант 7. $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$.

Вариант 8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+1}$.

Вариант 9. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$.

Вариант 10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$.

Вариант 11. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$.

Вариант 12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

Вариант 13. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$.

Вариант 14. $\int\limits_0^{+\infty} e^{7x-2}\,dx$.

Вариант 15. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Вариант 16. $\int\limits_0^{+\infty} \cos 3x\,dx$.

Вариант 17. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$.

Вариант 18. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$.

Вариант 19. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Вариант 20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$.

Вариант 21. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x+2}\,dx$.

Вариант 22. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Вариант 23. $\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx$.

Вариант 24. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+9x^2}$.

Вариант 25. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^5 x}$.

Вариант 26. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$.

Вариант 27. $\int_{18}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}$.

Вариант 28. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{16x^2+1}$.

Вариант 29. $\int_{14}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$.

Вариант 30. $\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+3}}$.

Задание № 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

Вариант 1. $3x^2$-$4y$=0, $2x$-$4y$+1=0.

Вариант 2. y=x^3+3, x=0, y=x-1, x=2.

Вариант 3. $y=\frac{1}{x}-1$, $x=\frac{1}{4}$, x=4, y=0.

Вариант 4. $4x$-$3y^2$=0, $4x$+$2y$-1=0.

Вариант 5. y=x^3-2, x=0, y=x+2, x=-3.

Вариант 6. $y=\sqrt[3]{x}$, y=x.

Вариант 7. $2x$+$3y^2$=0, $2x$+$2y$+1=0.

Вариант 8. y=x^3-1, x=0, y=x+3, x=-2.

Вариант 9. xy=6, x+y-7=0.

Вариант 10. $3x^2$-$2y$=0, $2x$+$2y$-1=0.

Вариант 11. y=x^3+1, x=0, y=x+5, x=-2.

Вариант 12. y=$7x^2$, y=1+$2x$-x^2.

Вариант 13. $2x$-$3y^2$=0, $2x$+$2y$-1=0.

Вариант 14. y=x^3+2, x=0, y=x+6, x=-2.

Вариант 15. $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{2}$, y=2, x=0.

Вариант 16. $4x$+$3y^2$=0, $4x$+$2y$+1=0.

Вариант 17. y=x^3+3, x=0, y=x+7, x=-2.

Вариант 18. y=x+1, y=cos$x$, y=0 (x≤0).

Вариант 19. $3x^2$+$4y$=0, $2x$-$4y$-1=0.

Вариант 20. $y=x^3-2$, $x=0$, $y=x-6$, $x=2$.

Вариант 21. $xy=4$, $x+y-5=0$.

Вариант 22. $3x^2-4y=0$, $2x+4y-1=0$.

Вариант 23. $y=x^3-1$, $x=0$, $y=x-5$, $x=2$.

Вариант 24. $y=2^x$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x=2$.

Вариант 25. $3x^2-2y=0$, $2x-2y+1=0$.

Вариант 26. $y=x^3+2$, $x=0$, $y=x-2$, $x=2$.

Вариант 27. $y=-3x^2-3x$, $y+9x+9=0$.

Вариант 28. $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$.

Вариант 29. $y=x^3+1$, $x=0$, $y=x-3$, $x=2$.

Вариант 30. $y=-x^2+4$, $2x+y-4=0$.

Задание № 4. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y=y_0$ при $x=x_0$.

Вариант 1. $y'\sin x - y\cos x = 1$; $y_0=0$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 2. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$; $y_0=3$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 3. $y' + \dfrac{2y}{x} = -x^2$; $y_0=1$, $x_0=3$.

Вариант 4. $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$; $y_0=2$, $x_0=0$.

Вариант 5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; $y_0=\dfrac{3}{2}$, $x_0=-1$.

Вариант 6. $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{y^2}{2}$; $y_0=2$, $x_0=1$.

Вариант 7. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = \left(1+x^2\right)^2$; $y_0=5$, $x_0=-2$.

Вариант 8. $xy' - 2y = x^3\cos x$; $y_0=1$, $x_0=\pi$.

Вариант 9. $y'x\ln x - y = 3x^3\ln^2 x$; $y_0=0$, $x_0=e$.

Вариант 10. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $y_0=4$, $x_0=0$.

Вариант 11. $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$; $y_0=1$, $x_0=0$.

Вариант 12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2 \ln}{x}$; $y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=1$.

Вариант 13. $y' \cos x - 2y \sin x = 2$; $y_0=3$, $x_0=0$.

Вариант 14. $y' - \frac{3y}{x} = x^3 e^x$; $y_0=e$, $x_0=1$.

Вариант 15. $xy' - 3y = x^4 e^x$; $y_0=e$, $x_0=1$.

Вариант 16. $y' \cos x + y \sin x = 1$; $y_0=2$, $x_0=0$.

Вариант 17. $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$; $y_0=\frac{2}{3}$, $x_0=0$.

Вариант 18. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2$; $y_0=1$, $x_0=0$.

Вариант 19. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$; $y_0=1$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 20. $y' - \frac{y}{x} = -2 \ln x$; $y_0=1$, $x_0=1$.

Вариант 21. $xy' + 2y = \frac{1}{x}$; $y_0=1$, $x_0=3$.

Вариант 22. $y' - y \cos x = -\cos x$; $y_0=3$, $x_0=0$.

Вариант 23. $y' - yctgx = 2x \sin x$; $y_0=0$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 24. $y' + xy = \frac{1+x}{2} e^{-x} y^2$; $y_0=2$, $x_0=0$.

Вариант 25. $y' + 2xy = e^{-x^3} \sin x$; $y_0=1$, $x_0=0$.

Вариант 26. $x^2 y' + xy + 1 = 0$; $y_0=2$, $x_0=1$.

Вариант 27. $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$; $y_0=5$, $x_0=0$.

Вариант 28. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; $y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=0$.

Вариант 29. $y' + ytgx = \cos^2 x$, $y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

Вариант 30. $y' - y = 2xy^2$, $y_0=\frac{1}{2}$, $x_0=0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М. : Высш. шк., 2005. — 479 с.

2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М. : Наука. Главная редакция физико-математической лит-ры, 1985. — Т 1, 2.

3. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» : Мир и Образование, 2003. — 304 с.