Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания и индивидуальные задания
к контрольной работе № 1

2-е издание, переработанное

Составители К. В. Катеринин, А. П. Поздняков

Волгоград. ВолгГАСУ. 2016

УДК 512.64+514.12(076.5)

Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 1. — 2-е изд., перераб. / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. К. В. Катеринин, А. П. Поздняков. — Электронные текстовые и графические данные (0,3 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2016. Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов всех профилей подготовки направлений «Строительство», СУЗ, ТТП, ПБ, ТБ заочной формы обучения по дисциплине «Математика».

1-е издание выпущено в 2011 году под названием «Линейная алгебра и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве», составители: Н. А. Болотина, К. В. Катеринин, Р. К. Катеринина, И. П. Руденок.

УДК 512.64+514.12(076.5)

План выпуска учеб.-метод. документ. 2016 г., поз. 13

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0

Подписано в свет 30.08.2016

Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,5. Объем данных 0,3 Мбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Определители

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1}$$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Определители второго порядка, входящие в правую часть равенства (2), получаются из данного определителя третьего порядка вычёркиванием одной строки и одного столбца, на пересечении которых стоят элементы a_1, b_1, c_1. Формула (2) называется формулой разложения определителя по элементам первой строки.

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. По формулам (2) и (1) получим:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-2) - 3(15-1) + 4(10+2) = -10.$$

1.2. Решение невырожденных систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Определителем системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x, y и z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases} \tag{3}$$

называется определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Определители $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$ называются *дополнительными определителями*.

Если определитель системы Δ отличен от нуля, то система называется *невырожденной* и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{4}$$

Пример 2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y - z = 3, \\ 3x + 5y = 3. \end{cases}$

Решение. Найдём определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18$.

Так как $\Delta \neq 0$, то решение данной системы можно найти по формулам Крамера. Для этого вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам (4) получим:

$$x = \frac{18}{18} = 1,\ y = \frac{0}{18} = 0,\ z = \frac{-36}{18} = -2.$$

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Основные определения

Вектором называется отрезок, имеющий определённую длину и направление. Вектор обозначается или указанием точек его начала и конца, например, $\overrightarrow{AB}$ (точка A — начало, B — конец вектора), или одной буквой, например, $\vec{a}$.

Длина вектора, называемая также *модулем*, обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Коллинеарные векторы лежат на одной или параллельных прямых, *компланарные* — в одной или параллельных плоскостях.

Взаимно *противоположные* векторы равны по длине и противоположны по направлению. Векторы, противоположные векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ обозначают $\overrightarrow{BA}$ и $-\vec{a}$.

Вектор, модуль которого равен 1, называется *единичным*.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* этого направления и обозначается $\vec{a}_0$.

Вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$.

Орты, имеющие направление прямоугольных координатных осей *Ox, Oy, Oz* обозначаются соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Каждый вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен на сумму векторов, параллельных ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \tag{5}$$

Числа *X*, *Y*, *Z* называются *прямоугольными декартовыми координатами* вектора $\vec{a}$ и являются его *проекциями* на соответствующие координатные оси.

Равенство (5) может быть записано в виде $\vec{a} = \{X;Y;Z\}$ или $\vec{a}(X;Y;Z)$.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{X;Y;Z\}$ находятся по формулам:

$$X = x_2\text{-}x_1,\ Y = y_2\text{-}y_1,\ Z = z_2\text{-}z_1, \tag{6}$$

а его длина равна

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{7}$$

Используя формулы (6) и (7) можно найти расстояние d_{AB} между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ как длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{8}$$

2.2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \tag{9}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.1).

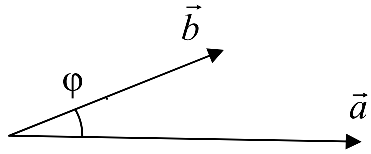


Рис.1

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2, \qquad (10)$$

а угол между ними — по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \qquad (11)$$

2.3. Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет трем требованиям:

– перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

– имеет длину, равную $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами;

– направлен так, чтобы кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, если смотреть из конца вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, совершался против часовой стрелки (рис.2).

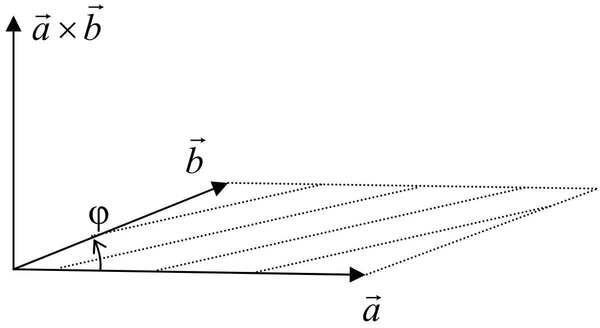


Рис.2

Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равны одному и тому же числу $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, то для вычисления площади параллелограмма можно пользоваться формулой:

$$S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|. \qquad (12)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, то векторное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

2.4. Смешанное произведение

Смешанным или *векторно-скалярным произведением* трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое получится, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перемножить векторно, а полученный вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ умножить скалярно на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, или кратко $\overline{abc}$.

Геометрически смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ есть число, абсолютная величина которого равна объёму V параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах, то есть

$$V=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|.$$

Объём треугольной четырехгранной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ составляет одну шестую часть от объема построенного на этих же ребрах параллелепипеда и вычисляется по формуле:

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|. \tag{14}$$

Если векторы $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ и $\vec{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\}$ заданы координатами, то их смешанное произведение вычисляют по формуле:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Пример 3. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (1; 2; 3), A_2 (–2; 4; 1), A_3 (7; 6; 3), A_4 (4; –3; –1). Требуется найти:

1) координаты и модули векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$;

2) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объём пирамиды.

Решение. 1) Координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ найдём по формуле (6):

$\overline{A_1A_2}$ =(–2–1; 4–2; 1–3)=(–3; 2; –2).

$\overline{A_1A_4}$ =(4–1; –3–2; –1–3)=(3; –5; –4).

Модули векторов вычислим по формуле (7):

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$, $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$.

2) Угол между рёбрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ найдём как угол между соответствующими векторами по формуле (11): $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

В числителе стоит скалярное произведение векторов, по формуле (10) оно равно $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}$ = (–3)·3+2·(–5)+(–2)·(–4)=–9 –10+8= –11.

Теперь находим $\cos\varphi = \dfrac{-11}{\sqrt{17} \cdot 5\sqrt{2}} = \dfrac{-11}{5\sqrt{34}}$, $\varphi = \arccos\left(\dfrac{-11}{5\sqrt{34}}\right)$.

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдём как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ по формуле (12):

$S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$.

Для этого сначала определим координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$\overrightarrow{A_1A_3}$ =(7–1; 6–2; 3–3)=(6; 4; 0).

Векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$ найдем по формуле (13):

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 12\vec{j} - 24\vec{k}.$$

Длина этого вектора равна:

$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{8^2 + (-12)^2 + (-24)^2} = \sqrt{784} = 28$.

Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна: $S = \dfrac{1}{2} \cdot 28 = 14$.

4) Данная пирамида построена на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$, поэтому её объём найдем по формуле (14):

$V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right|$.

Сначала вычислим смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 180.$$

Потом найдём $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6} \cdot 180 = 30$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Прямая на плоскости. Различные уравнения

В прямоугольной системе координат Oxy уравнение первой степени относительно переменных x и y

$$Ax+By+C=0 \tag{16}$$

определяет некоторую прямую (коэффициенты A и B не равны нулю одновременно). Здесь x и y — координаты любой точки, лежащей на этой прямой. Уравнение (16) называется *общим уравнением прямой*.

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy, может быть представлено в виде

$$y=kx+b, \tag{17}$$

где $k=tg\alpha$ — угловой коэффициент прямой, α — угол наклона прямой к оси Ox (рис.3), b — отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy (с учётом знака).

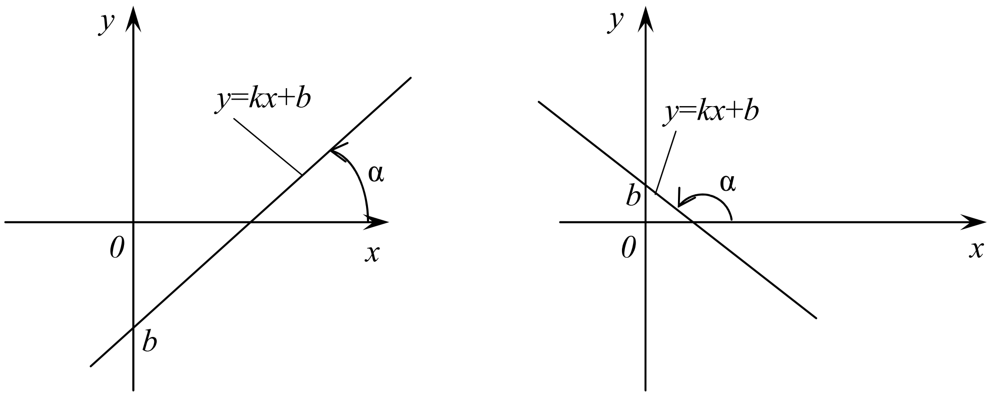


Рис. 3

Уравнение (17) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении (известен угловой коэффициент) имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{18}$$

Если известны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то прямая, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{19}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{20}$$

3.2. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то угол φ между этими прямыми (рис.4) определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (21)$$

Формула (21) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi-\varphi$.

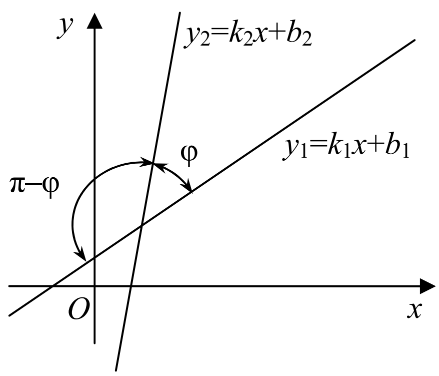


Рис.4

Если прямые параллельны, то угол между ними равен нулю и $k_1 = k_2$.

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90^{\circ}$ и

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (22)$$

Пример 4. Даны координаты вершин треугольника: $A(6;-1)$, $B(0;7)$, $C(2;1)$. Требуется найти:

1) уравнение и длину стороны BC;
2) уравнение и длину высоты, проведённой из вершины A;
3) уравнение медианы, проведённой из вершины A;
4) площадь треугольника.

Сделать чертёж.

Решение. 1) Сторону BC можно рассматривать как прямую, проходящую через две заданные точки $B(0;7)$ и $C(2;1)$, поэтому для составления её уравнения воспользуемся формулой (19):

$$\frac{y-7}{1-7} = \frac{x-0}{2-0}, \quad \frac{y-7}{-6} = \frac{x}{2}, \quad 2(y-7) = -6x.$$

После преобразований получим $3x+y-7=0$. Это общее уравнение прямой BC. Решим его относительно y и получим уравнение с угловым коэффициентом: $y=-3x+7$. Из него найдём угловой коэффициент прямой BC: $k_{BC}=-3$. Длину стороны BC найдем как расстояние между двумя точками B и C (формула 8): $|BC| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Высоту, проведённую из вершины A (прямая AK на рис.5) будем рассматривать как прямую, проходящую через данную точку $A(6;-1)$

перпендикулярно прямой BC. Тогда по условию перпендикулярности двух прямых (формула 22) найдём: $k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$.

Уравнение высоты AK составим по формуле (18):

$y-(-1)=\frac{1}{3}(x-6)$ или $x–3y–9=0$.

Длину высоты AK найдём как расстояние от точки A до прямой BC по формуле (20): $|AK| = \frac{|3\cdot 6-1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \sqrt{10}$.

3) Медиана из вершины A делит противоположную сторону BC пополам. Известно, что координаты середины отрезка (обозначим эту точку M) равны полусуммам одноимённых координат концов, то есть

$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$.

Теперь составим уравнение медианы AM, так как известны две точки $A(6;–1)$ и $M(1;4)$, лежащие на ней: $\frac{y-(-1)}{4-(-1)} = \frac{x-6}{1-6}$, $\frac{y+1}{4+1} = \frac{x-6}{-5}$.

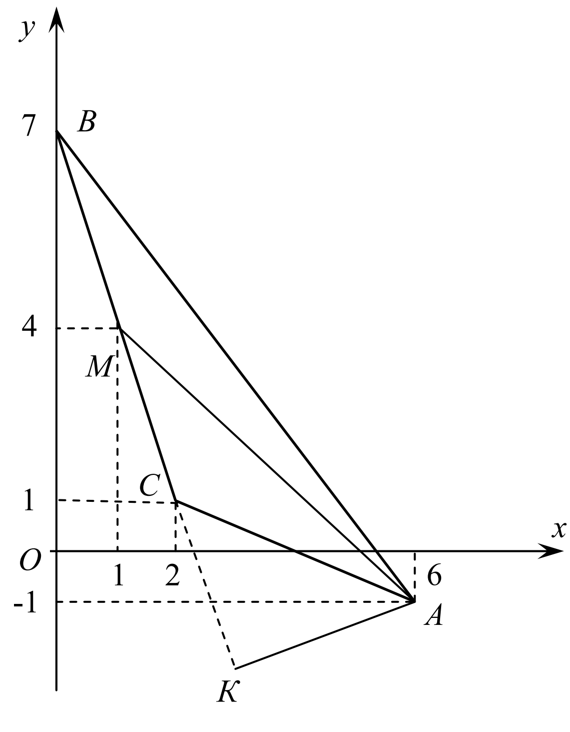


Рис. 5

После преобразований получим уравнение медианы AM: $x+y–5=0$.

4) Площадь треугольника найдём по известной формуле:

$S = \frac{1}{2}|AK||BC| = \frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10} = 10$.

В системе координат Oxy строим треугольник, высоту AK и медиану AM (рис.5).

3.3. Кривые второго порядка

Так называются линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. К ним относятся эллипс, гипербола и парабола.

Канонические (простейшие) уравнения этих кривых и их графики приведены в таблице 1.

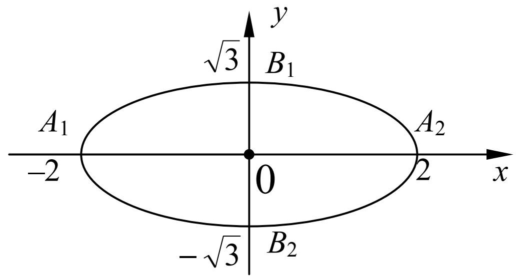
Пример 5. Определить и построить кривые:

а)$3x^2+4y^2=12$, б) $9x^2–4y^2=36$, в) $x^2=-\frac{4}{3}y$.

Решение. а) Приведём уравнение $3x^2+4y^2=12$ к каноническому виду. Для этого обе части уравнения разделим на свободный член, то есть на 12:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=1\quad (a=2,\ b=3).$$

По таблице 1 устанавливаем, что это эллипс (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них одинаковые положительные). Из полученного уравнения определяем полуоси $a=2$, $b=\sqrt{3}$. Строим эллипс:



Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

б) Приведём уравнение $9x^2–4y^2=36$ к каноническому виду, разделив обе части уравнения на 36:

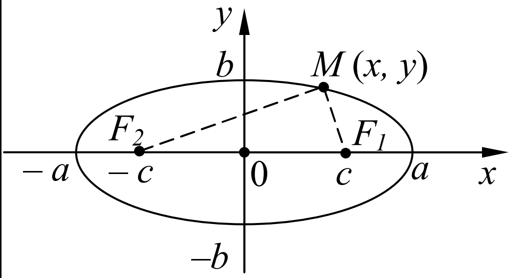
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1,\ \text{или}\ \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1.$$

По табл.1 устанавливаем, что дана гипербола (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них разные). Положительному знаку при x^2 геометрически соответствует пересечение кривой с осью Ox.

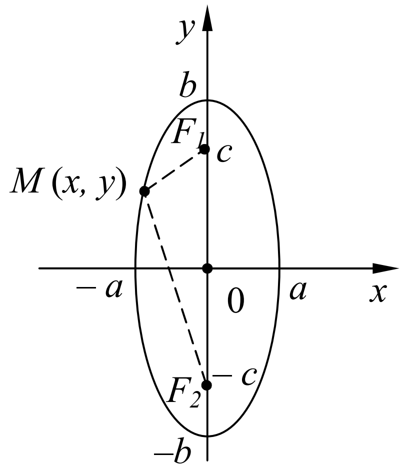
Таблица1.

1. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

При $a > b$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$

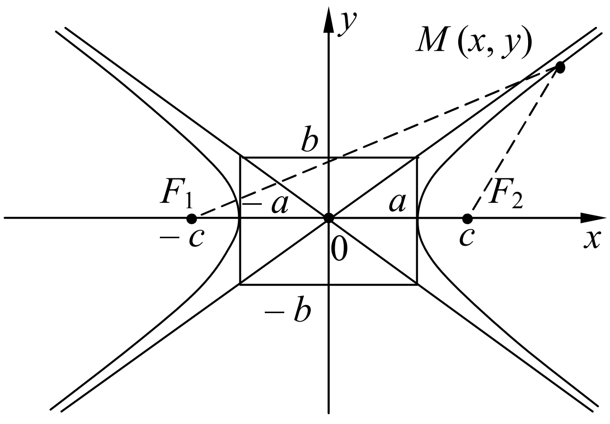


При $a < b$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$



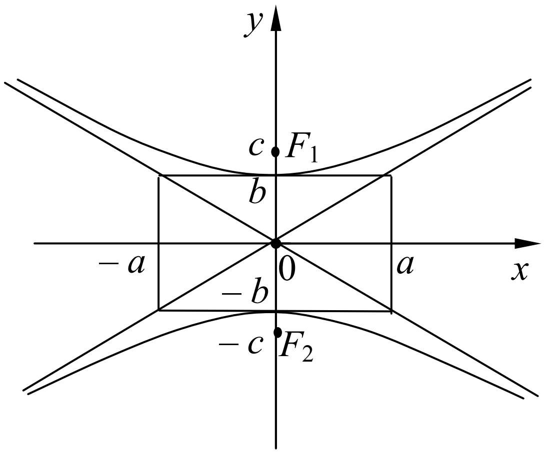
2. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

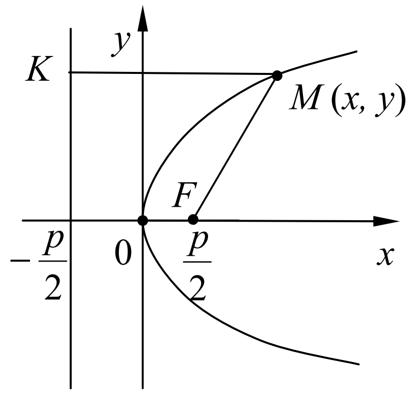


$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

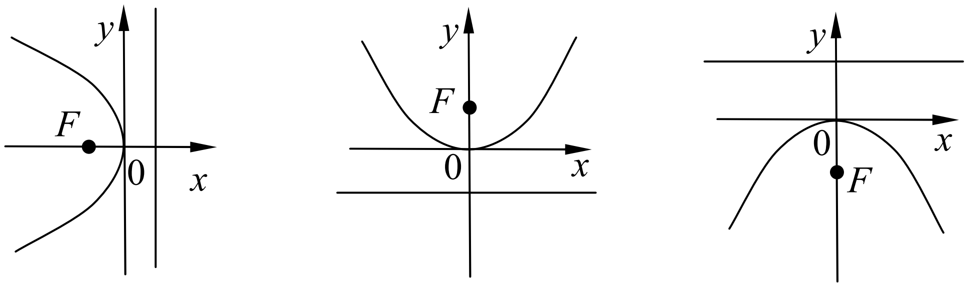
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$



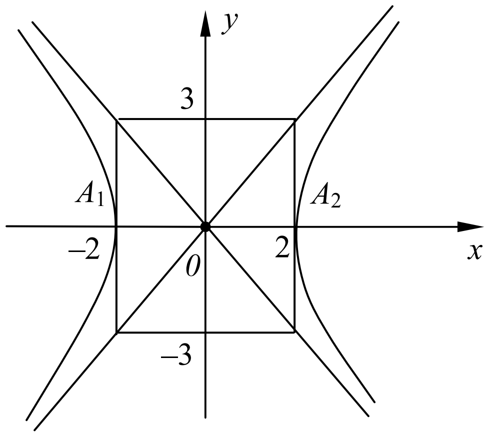
3. Парабола $y^2=2px$, $p>0$



$y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$

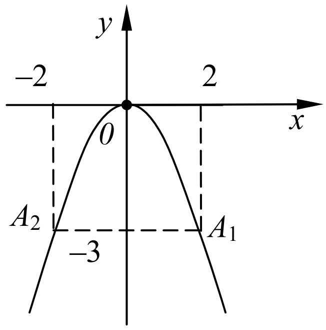


Построение начинаем с характеристического прямоугольника со сторонами $2a$=4 и $2b$=6; проводим его диагонали. Они служат асимптотами гиперболы. Затем строим кривую, обращая внимание на то, что при удалении в бесконечность точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам. Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы и лежат на оси Ox, которая в этом случае называется действительной осью симметрии гиперболы.



в) По табл.1 устанавливаем, что при наличии в уравнении $x^2=-\frac{4}{3}y$ квадрата только одной переменной (x) и первой степени другой (y) задано каноническое уравнение параболы, ветви которой симметричны оси Oy и направлены вниз.

Для уточнения графика найдём на параболе дополнительные точки. Например, при y=–3 из данного уравнения параболы получим $x^2 = 4$, x_1=2, x_2=–2. Точки $A_1(2, -3)$ и $A_2(-2, -3)$ расположены на кривой симметрично относительно оси Oy.



4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Плоскость

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнение

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{23}$$

определяет некоторую плоскость.

Здесь x, y, z — координаты любой точки, лежащей на этой плоскости, они называются текущими координатами. Уравнение (23) называется общим уравнением плоскости. Числа A, B, C в уравнении (23) являются координатами вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$, перпендикулярного к этой плоскости и называемого *нормальным вектором плоскости*.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A, B, C\}$ имеет вид:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0. \tag{24}$$

Если заданы три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, то плоскость, проходящая через эти точки, определяется уравнением:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:

$$d = \left| \frac{A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \tag{26}$$

4.2. Прямая в пространстве

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, поэтому в прямоугольной системе координат прямая задаётся двумя уравнениями первой степени.

Пусть прямая проходит через данную точку M_0 (x_0, y_0, z_0) параллельно заданному вектору $\vec{a}(m,n,k)$, тогда её уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{k}. \qquad (27)$$

Уравнения (27) называются каноническими уравнениями прямой, а вектор $\vec{a}$ — направляющим вектором прямой.

Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ и уравнения прямой записать в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (28)$$

Пример 5.

Даны координаты вершин пирамиды A_1 (1; 2; 3), A_2 (–2; 4; 1), A_3 (7; 6; 3), A_4 (4; –3; –1). Требуется найти:

1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

2) уравнения прямой A_1A_2;

3) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ и её длину.

Решение. 1) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ составим по формуле (25), так как известны три точки, лежащие на ней:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & 4-2 & 1-3 \\ 7-1 & 6-2 & 3-3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим последнее выражение и после преобразований получим общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $2x–3y–6z+22=0$.

2) Прямая A_1A_2 проходит через заданные точки. Поэтому её уравнения составим по формуле (28):

$$\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z-3}{1-3},\ \text{или}\ \frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}.$$

3) Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ $2x–3y–6z+22=0$ найдём координаты нормального вектора этой плоскости: $\vec{N}=\{2,–3,–6\}$.

Для высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 (4; –3; –1) вектор $\vec{N}$ можно принять за направляющий, поэтому по формуле (27) получим уравнения высоты: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+1}{-6}$.

Длину высоты найдём как расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (26): $d = \frac{|2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 22|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2}} = 6\frac{3}{7}$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание № 1. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера.

Вариант 1. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -8 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -4 \\ -x_2 + 2x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 16. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$

Вариант 17. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

Вариант 18. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 19. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -7 \end{cases}$

Вариант 20. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

Вариант 21. $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

Вариант 22. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 3 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

Вариант 23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

Вариант 24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

Вариант 26. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -8 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$

Вариант 27. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$

Вариант 28. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

Вариант 29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

Вариант 30. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$

Задание № 2. Даны координаты вершин треугольника *A*, *B*, *C*.
Требуется найти:
1) уравнение и длину стороны *BC*;
2) уравнение и длину высоты, проведённой из вершины *A*;

3) уравнение и длину медианы, проведённой из вершины A;
4) площадь треугольника;
5) угол ABC.
Сделать чертёж.

Вариант 1. $A(-3;1)$, $B(4;-5)$, $C(-1;7)$.
Вариант 2. $A(6;-1)$, $B(3;4)$, $C(-2;7)$.
Вариант 3. $A(4;5)$, $B(-2;-7)$, $C(8;-9)$
Вариант 4. $A(8;6)$, $B(2;-3)$, $C(-6;4)$.
Вариант 5. $A(4;-6)$, $B(-5;4)$, $C(7;1)$.
Вариант 6. $A(3;-4)$, $B(-5;7)$, $C(6;3)$.
Вариант 7. $A(3;-8)$, $B(4;6)$, $C(-5;3)$.
Вариант 8. $A(1;-4)$, $B(7;2)$, $C(-3;8)$.
Вариант 9. $A(4;-3)$, $B(-5;6)$, $C(8;2)$.
Вариант 10. $A(-4;3)$, $B(2;8)$, $C(6;-7)$.
Вариант 11. $A(-3;6)$, $B(4;-3)$, $C(8;2)$.
Вариант 12. $A(-3;5)$, $B(3;9)$, $C(7;-4)$.
Вариант 13. $A(-3;6)$, $B(4;3)$, $C(-7;-6)$.
Вариант 14. $A(1;5)$, $B(5;-8)$, $C(-3;4)$.
Вариант 15. $A(6;-2)$, $B(4;9)$, $C(-7;4)$.
Вариант 16. $A(-2;5)$, $B(4;-7)$, $C(8;1)$.
Вариант 17. $A(-1;8)$, $B(7;1)$, $C(2;-9)$.
Вариант 18. $A(-1;7)$, $B(5;1)$, $C(2;-6)$.
Вариант 19. $A(5;-7)$, $B(-2;4)$, $C(5;8)$.
Вариант 20. $A(-6;-2)$, $B(8;7)$, $C(3;-5)$.
Вариант 21. $A(5;4)$, $B(3;-7)$, $C(-4;1)$.
Вариант 22. $A(-6;4)$, $B(3;7)$, $C(7;-5)$.
Вариант 23. $A(2;9)$, $B(5;-7)$, $C(-4;3)$.
Вариант 24. $A(8;-5)$, $B(4;3)$, $C(-5;6)$.
Вариант 25. $A(-9;5)$, $B(5;2)$, $C(7;-6)$.
Вариант 26. $A(4;5)$, $B(-7;-1)$, $C(1;-6)$.
Вариант 27. $A(-5;4)$, $B(2;9)$, $C(3;-5)$.
Вариант 28. $A(3;-5)$, $B(8;7)$, $C(-4;3)$.
Вариант 29. $A(4;1)$, $B(-7;-5)$, $C(8;-6)$.
Вариант 30. $A(3;7)$, $B(-4;5)$, $C(6;-3)$.

Задание № 3. Определить и построить кривые.

Вариант 1. а) $25x^2 + y^2 = 100$; б) $-x^2 + 4y^2 = 16$; в) $y^2 = -2x$.
Вариант 2. а) $16x^2 + 9y^2 = 288$; б) $4x^2 - 5y^2 = 40$; в) $3x^2 = -4y$.
Вариант 3. а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $25x^2 - y^2 = 25$; в) $2x^2 = y$.
Вариант 4. а) $x^2 + 16y^2 = 64$; б) $-5x^2 + 9y^2 = 90$; в) $y^2 = 10x$.
Вариант 5. а) $9x^2 + 7y^2 = 63$; б) $x^2 - 8y^2 = 16$; в) $5y^2 = -4x$.
Вариант 6. а) $x^2 + y^2 = 8$; б) $-12x^2 + y^2 = 36$; в) $x^2 = 4y$.
Вариант 7. а) $5x^2 + 3y^2 = 60$; б) $-9x^2 + 5y^2 = 45$; в) $3x^2 = -y$.
Вариант 8. а) $9x^2 + 2y^2 = 36$; б) $5x^2 - 16y^2 = 80$; в) $y^2 = -4x$.

Вариант 9. а) $7x^2 + 8y^2 = 112$; б) $x^2 – 16y^2 = 48$; в) $3y^2 = –8x$.
Вариант 10. а) $2x^2 + 9y^2 = 18$; б) $8x^2 – y^2 = 64$; в) $2x^2 = y$.
Вариант 11. а) $12x^2 + y^2 = 24$; б) $2x^2 – 9y^2 = 18$; в) $x^2 = – 6y$.
Вариант 12. а) $9x^2 + 16y^2 = 144$; б) $9x^2 – 4y^2 = 36$; в) $y^2 = – 3x$.
Вариант 13. а) $4x^2 + 49y^2 = 196$; б) $–9x^2 + 8y^2 = 72$; в) $y^2 = 5x$.
Вариант 14. а) $x^2 + 8y^2 = 32$; б) $9x^2 – 25y^2 = 225$; в) $x^2 = –2y$.
Вариант 15. а) $9x^2 + y^2 = 9$; б) $4x^2 – 9y^2 = 36$; в) $x^2 = 6y$.
Вариант 16. а) $3x^2 + 16y^2 = 48$; б) $–16x^2 + y^2 = 64$; в) $y^2 = 4x$.
Вариант 17. а) $9x^2 + 5y^2 = 45$; б) $– 4x^2 + 25y^2 = 100$; в) $y^2 = –7x$.
Вариант 18. а) $4x^2 + y^2 = 4$; б) $–x^2 + 9y^2 = 81$; в) $x^2 = 10y$.
Вариант 19. а) $9x^2 + 8y^2 = 72$; б) $4x^2 – 9y^2 = 108$; в) $x^2 = –2y$.
Вариант 20. а) $x^2 + 16y^2 = 64$; б) $– 8x^2 + 25y^2 = 200$; в) $y^2 = 5x$.
Вариант 21. а) $9x^2 + 4y^2 = 144$; б) $25x^2 – 4y^2 = 100$; в) $y^2 = –x$.
Вариант 22. а) $x^2 + 4y^2 = 4$; б) $–4x^2 + 49y^2 = 196$; в) $2x^2 = 5y$.
Вариант 23. а) $9x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 – 16y^2 = 32$; в) $3x^2 = –y$.
Вариант 24. а) $x^2 + 4y^2 = 24$; б) $4x^2 – 9y^2 = 36$; в) $y^2 = 12x$.
Вариант 25. а) $9x^2 + 25y^2 = 90$; б) $–x^2 + 4y^2 = 36$; в) $x^2 = –10y$.
Вариант 26. а) $7x^2 + 5y^2 = 35$; б) $4x^2 – 9y^2 = 72$; в) $3y^2 = 2x$.
Вариант 27. а) $x^2 + 10y^2 = 40$; б) $9x^2 – 7y^2 = 63$; в) $2y^2 = 5x$.
Вариант 28. а) $x^2 + 9y^2 = 36$; б) $–4x^2 + 9y^2 = 36$; в) $x^2 = –8y$.
Вариант 29. а) $2x^2 + y^2 = 8$; б) $4x^2 – 9y^2 = 1$; в) $x^2 = 5y$.
Вариант 30. а) $9x^2 + 8y^2 = 72$; б) $–81x^2 + y^2 = 81$; в) $y^2 = –12x$.

Задание № 4. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Требуется найти:

1) координаты и модули векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$;
2) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) площадь грани $A_1A_2A_3$;
4) объём пирамиды;
5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
6) уравнение прямой A_1A_2;
7) уравнение высоты и её длину, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
Сделать чертёж.

Вариант 1. $A_1(–3;2;–1)$, $A_2(–1;–2;4)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;4;–3)$.
Вариант 2. $A_1(–5;2;–1)$, $A_2(–3;–1;2)$, $A_3(–4;–3;1)$, $A_4(2;3;5)$.
Вариант 3. $A_1(3;1;–2)$, $A_2(2;4;6)$, $A_3(–1;2;2)$, $A_4(1;3;–1)$.
Вариант 4. $A_1(2;–2;1)$, $A_2(–3;2;4)$, $A_3(1;–1;3)$, $A_4(–1;–2;–1)$.
Вариант 5. $A_1(3;2;–2)$, $A_2(1;–1;5)$, $A_3(4;3;1)$, $A_4(–2;1;3)$.
Вариант 6. $A_1(–1;4;–2)$, $A_2(2;1;3)$, $A_3(–3;2;2)$, $A_4(–1;3;4)$.
Вариант 7. $A_1(–2;3;–1)$, $A_2(3;–2;4)$, $A_3(–1;2;1)$, $A_4(1;4;3)$.
Вариант 8. $A_1(2;–1;1)$, $A_2(3;–2;4)$, $A_3(–4;3;–2)$, $A_4(–5;1;3)$.
Вариант 9. $A_1(2;–3;–2)$, $A_2(4;–1;3)$, $A_3(–1;–2;2)$, $A_4(3;1;4)$.
Вариант 10. $A_1(1;–2;3)$, $A_2(2;–1;4)$, $A_3(–1;–3;1)$, $A_4(5;2;–3)$.

Вариант 11. $A_1(4;3;1)$, $A_2(-1;2;6)$, $A_3(2;4;-2)$, $A_4(3;5;4)$.
Вариант 12. $A_1(-1;2;-3)$, $A_2(-2;4;4)$, $A_3(-3;3;2)$, $A_4(4;1;1)$.
Вариант 13. $A_1(4;-1;1)$, $A_2(1;2;-1)$, $A_3(-2;3;3)$, $A_4(2;4;-2)$.
Вариант 14. $A_1(3;-1;2)$, $A_2(-2;1;3)$, $A_3(4;2;1)$, $A_4(5;-3;4)$.
Вариант 15. $A_1(-1;4;3)$, $A_2(2;5;1)$, $A_3(1;1;-2)$, $A_4(3;2;4)$.
Вариант 16. $A_1(-1;2;-1)$, $A_2(-3;1;5)$, $A_3(-2;3;2)$, $A_4(4;-4;1)$.
Вариант 17. $A_1(-2;1;-2)$, $A_2(-1;3;1)$, $A_3(-3;4;2)$, $A_4(2;5;3)$.
Вариант 18. $A_1(-1;-2;1)$, $A_2(8;7;3)$, $A_3(3;-4;7)$, $A_4(2;4;-6)$.
Вариант 19. $A_1(2;9;5)$, $A_2(3;7;1)$, $A_3(5;-4;7)$, $A_4(-6;-1;2)$.
Вариант 20. $A_1(-1;4;5)$, $A_2(8;7;-1)$, $A_3(3;5;7)$, $A_4(2;2;6)$.
Вариант 21. $A_1(3;8;-1)$, $A_2(5;-4;2)$, $A_3(2;7;-5)$, $A_4(4;1;1)$.
Вариант 22. $A_1(-1;8;6)$, $A_2(2;3;1)$, $A_3(5;-6;4)$, $A_4(6;4;-3)$.
Вариант 23. $A_1(1;-7;2)$, $A_2(-3;4;3)$, $A_3(4;-5;1)$, $A_4(3;2;-8)$.
Вариант 24. $A_1(1;4;-3)$, $A_2(2;8;-5)$, $A_3(3;-7;2)$, $A_4(-1;1;4)$.
Вариант 25. $A_1(5;2;6)$, $A_2(6;-1;2)$, $A_3(4;3;-1)$, $A_4(-3;6;1)$.
Вариант 26. $A_1(3;-2;5)$, $A_2(2;1;-7)$, $A_3(8;4;4)$, $A_4(4;-3;-1)$.
Вариант 27. $A_1(4;-2;6)$, $A_2(6;-1;4)$, $A_3(3;3;1)$, $A_4(-3;5;9)$.
Вариант 28. $A_1(2;-2;2)$, $A_2(4;-5;9)$, $A_3(1;7;5)$, $A_4(6;4;-2)$.
Вариант 29. $A_1(-3;4;4)$, $A_2(2;-5;6)$, $A_3(-2;1;7)$, $A_4(-1;7;3)$.
Вариант 30. $A_1(-1;5;4)$, $A_2(3;7;1)$, $A_3(2;-4;3)$, $A_4(-2;4;-5)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М. : Высш. шк., 2005. — 479 с.

2. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — М. : физ.-мат. лит., 2001.

3. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» : Мир и Образование, 2003. — 304 с.