Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

ЭКОНОМЕТРИКА

Методические указания по выполнению практических работ

Составитель С. В. Харланова

Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 330.43(076.5)
ББК 65в631я73
Э40

Э40 **Эконометрика** : [Электронный ресурс] : методические указания по выполнению практических работ / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. С. В. Харланова — Электронные текстовые и графические данные (1,44 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения: 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Предназначены для студентов-бакалавров экономических профилей и заочной формы обучения. Приведены необходимые теоретические сведения и формулы, даны типовые задания и примеры решения типовых задач.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 330.43(076.5)
ББК 65в6я73

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Эконометрика — это раздел экономики, занимающийся разработкой и применением статистических методов для измерения взаимосвязей между экономическими показателями. Эконометрика представляет собой синтез экономики, математики и статистики. Экономическая составляющая является основной.

Задачами эконометрики являются:

1) построение экономико-математических моделей на основе статистических данных;

2) разработка методов определения параметров и статистический анализ моделей;

3) проверка адекватности построенных моделей.

Эконометрика широко применяется в планировании, управлении, банковском деле и финансах.

Эконометрическая модель представляет собой функциональную зависимость некоторого фактора Y от p независимых факторов $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_p) + \varepsilon$, где ε — случайная составляющая. В качестве зависимой переменной может выступать любой показатель, например, расходы на питание, курс акций, урожайность зерновых культур.

Эконометрические модели бывают:

1) регрессионные — модели парной и множественной регрессии;

2) структурные — системы одновременных уравнений и рекурсивные модели;

3) линейные, нелинейные, полиномиальные и др.;

4) статистические и динамические.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1.1. Случайные величины и законы их распределения

Случайной величиной называется переменная, которая в результате испытаний принимает, в зависимости от случая, одно из возможного множества своих значений.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Для дискретной случайной величины множество ее возможных значений — конечно или счетно, для непрерывной случайной величины — бесконечно и несчетно.

Наиболее полным описанием случайной величины является закон распределения, представляющий собой соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов n, т. е. $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Для дискретной случайной величины X закон распределения можно задать рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Здесь $p_i = P(X = x_i)$, при этом $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Дискретная случайная величина может быть задана графически многоугольником распределения, представляющим собой ломаную на плоскости XOP, соединяющей точки (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 1.1).

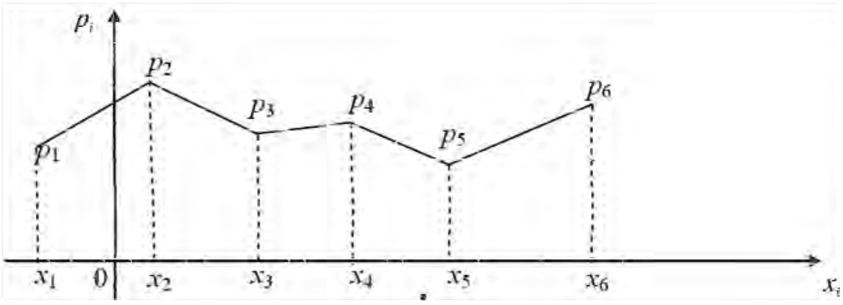

Рис. 1.1. Многоугольник распределения

Универсальной формой задания закона распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин является функция распределения (или интегральная функция распределения). *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.1}$$

Для непрерывной случайной величины графиком $F(x)$ является некоторая непрерывная линия, для дискретной случайной величины — некоторая ступенчатая линия.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

4) $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$. (1.2)

Другой формой задания закона распределения является *плотность вероятности* $f(x)$ непрерывной случайной величины X (дифференциальная функция распределения):

$$f(x) = F'(x); \tag{1.3}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{1.4}$$

Свойства функции плотности вероятности:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $P(a \le x \le b) = \int\limits_a^b f(x)dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. (1.5)

Пример 1.1. Дискретная случайная величина задана законом распределения

x_i	1	2	5	7
p_i	0,4	0,2	0,15	0,25

Найти функцию распределения и построить ее график.

Р е ш е н и е. Найдем функцию распределения F(x) по формуле (1.1):

при $x \le 1$ $F(x) = 0$; при $1 < x \le 2$ $F(x) = 0,4$;

при $2 < x \le 5$ $F(x) = 0,4 + 0,2 = 0,6$;

при $5 < x \le 7$ $F(x) = 0,4 + 0,2 + 0,15 = 0,75$;

при $x > 7$ $F(x) = 0,4 + 0,2 + 0,15 + 0,25 = 1$.

По вычисленным значениям строим график функции (рис. 1.2).

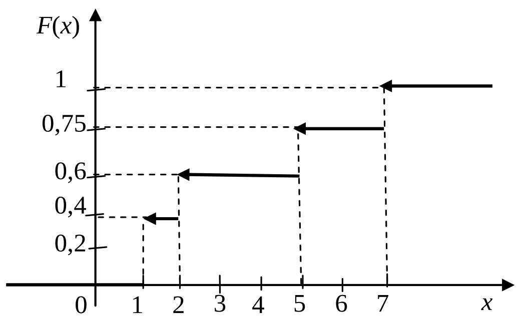

Рис. 1.2. Функция распределения $F(x)$

Пример 1.2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3. \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Требуется: а) найти плотность вероятности $f(x)$; б) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; в) найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (2,5; 3).

Р е ш е н и е. Для отыскания $f(x)$ воспользуемся формулой (1.3). Получим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 2(x-2), & 2 < x \le 3. \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 1.3 и 1.4.

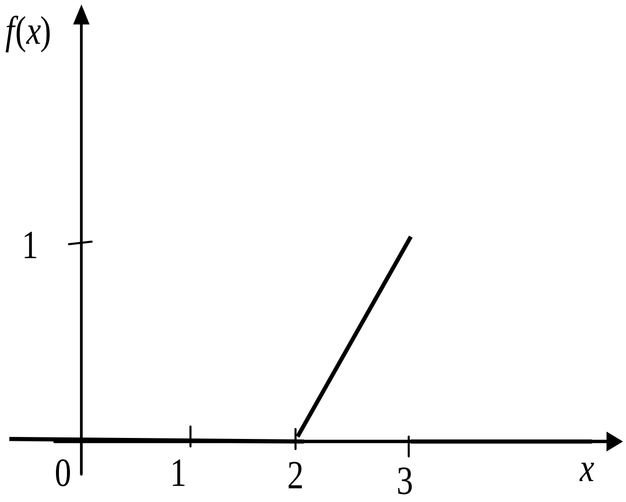

Рис. 1.3. Плотность вероятности $f(x)$

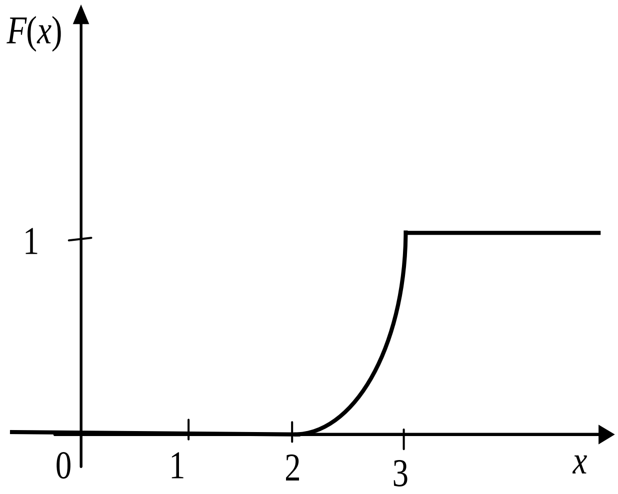

Рис. 1.4. Функция распределения $F(x)$

Вероятность попадания в заданный интервал найдем по формуле (1.2):

$$P(2{,}5 < X < 3) = F(3) - F(2{,}5) = (x-2)^2\Big|_{x=3} - (x-2)^2\Big|_{x=2,5} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Пример 1.3. Дана плотность вероятности случайной величины x:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{\alpha}, & 1 < x \le 4. \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Требуется: а) найти коэффициент α и функцию распределения $F(x)$; б) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Р е ш е н и е. Коэффициент α найдем по формуле (1.5). Так как функция ненулевая только в промежутке от –1 до 4, то

$$\int_1^4 \frac{3x^2 - 2x}{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha}(x^3 - x^2)\Big|_1^4 = \frac{1}{\alpha}48 = 1 \Rightarrow \alpha = 48.$$

Для нахождения $F(x)$ воспользуемся формулой (1.4).

Если $x \le 1$, то $f(x) = 0$. Следовательно $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

Если $1 < x \le 4$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^x \frac{3x^2 - 2x}{48} dx = \frac{1}{48}(x^3 - x^2)\Big|_1^x = \frac{1}{48}(x^3 - x^2)$.

Если $x > 4$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_1^4 \frac{3x^2 - 2x}{48} dx + \int\limits_1^x 0dx = \frac{1}{48}(x^3 - x^2)\Big|_1^4 = 1$.

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 1.5 и 1.6.

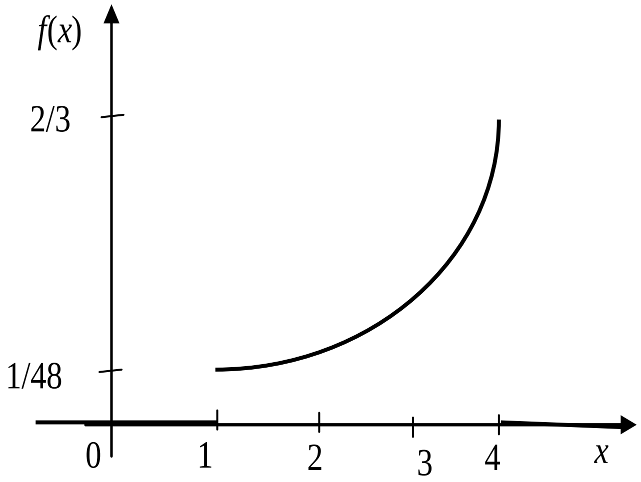

Рис. 1.5. Плотность вероятности $f(x)$

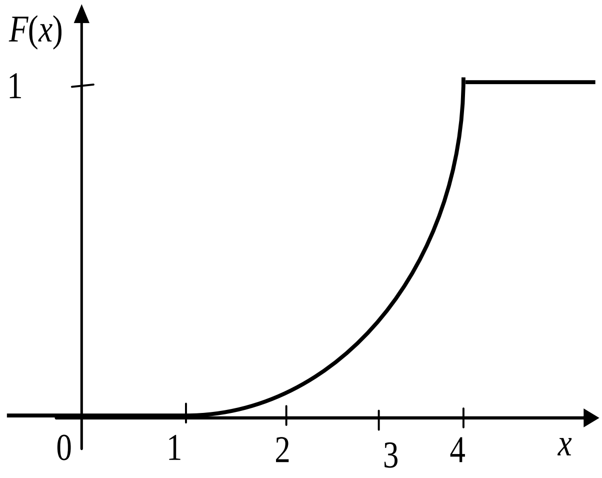

Рис. 1.6. Функция распределения $F(x)$

1.2. Числовые характеристики случайных величин

Числовые характеристики — это числа, которые в сжатой форме выражают наиболее важные черты распределения случайной величины. Основными из них являются математическое отклонение, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и др.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \tag{1.6}$$

Для непрерывной случайной величины X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx . \tag{1.7}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины на числовой оси.

Свойства математического ожидания:

1) $M(C) = C$, где C — постоянная величина;

2) $M(C\,X) = C\,M(X)$;

3) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, где X, Y — независимые случайные величины;

5) $M\,(X \pm C) = M(X) \pm C$.

Дисперсией случайной величины X называется математическое отклонение квадрата ее отклонения от математического ожидания: $D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$.

Для дискретной случайной величины X:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-M(X)\right]^2 p_i \text{ или } D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2. \qquad (1.8)$$

Для непрерывной случайной величины X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2. \qquad (1.9)$$

Дисперсия характеризует собой меру рассеивания случайной величины относительно среднего значения.

Свойства дисперсии:

1) $D(C)$ = 0, где С — постоянная величина;

2) $D(C\,X) = C^2\,D(X)$;

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, где X, Y — независимые случайные величины.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметическое значение квадратного корня из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (1.10)$$

Пример 1.4. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X по данным примера 1.1.

Р е ш е н и е. Математическое ожидание найдем по формуле (1.6):

$$M(X)=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}15+7\cdot 0{,}25=3{,}3.$$

Дисперсию найдем по формуле (1.8):

$$M(X^2)=1^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}2+5^2\cdot 0{,}15+7^2\cdot 0{,}25=17{,}2;$$

$$D(X)=17{,}2-3{,}3^2=6{,}31.$$

По формуле (1.10):

$$\sigma(X)=\sqrt{6{,}31}\approx 2{,}51.$$

Пример 1.5. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X по данным примера 1.2.

Р е ш е н и е. Математическое ожидание найдем по формуле (1.7):

$$M(X)=\int_2^3 x\cdot 2(x-2)dx=\int_2^3(2x^2-4x)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{4}{2}x^2\right)\Big|_2^3=\frac{8}{3}.$$

Дисперсию найдем по формуле (1.9):

$$M(X^2)=\int_2^3 x^2\cdot 2(x-2)dx=\int_2^3(2x^3-4x^2)dx=\left(\frac{2}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_2^3=\frac{43}{6}.$$

$$D(X)=\frac{43}{6}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

По формуле (1.10):

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} \approx 0,24 .$$

1.3. Некоторые законы распределения случайных величин

Рассмотрим наиболее часто используемые в эконометрике законы распределения случайных величин.

1. Дискретная случайная величина X имеет *биномиальный закон распределения*, если вероятность наступления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с вероятностью p, происходит ровно k раз, вычисляется по формуле

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad k = \overline{0, n} .$$

Числовые характеристики: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пример 1.6. Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которых выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша каждого билета равна 0,05.

Р е ш е н и е. Так как вероятность выигрыша каждого билета одинакова и не зависит от других билетов, то в данном случае имеем дело с биномиальным распределением случайной величины X. Следовательно

$M(X) = np = 40 \cdot 0,05 = 2$; $D(X) = npq = 40 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 1,9$.

2. Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения* (закон Гаусса), если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$, где $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Кривую нормального закона распределения называют *нормальной или гауссовой кривой* (рис. 1.7).

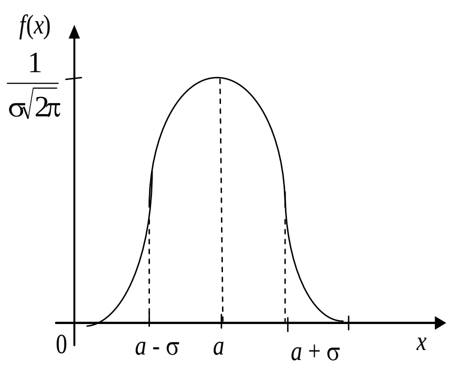

Рис. 1.7. Кривая Гаусса

Если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то нормальный закон распределения называется стандартным.

Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ по формуле:

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ — интегральная функция Лапласа.

Свойства случайной величины, распределенной по нормальному закону:

1) $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$; (1.11)

2) $P\left(|x-a| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.

Из второго свойства вытекает правило трех сигм: если случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(a, \sigma^2)$, то с вероятностью 0,997 ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Пример 1.7. Известно, что вес X — вылавливаемых в пруду зеркальных карпов подчиняется нормальному закону, причем $M(X) = 500$ г и $\sigma(X) = 75$ г. Найти вероятность того, что вес наудачу взятого карпа будет в пределах от 425 до 550 г.

Р е ш е н и е. По условию $\alpha = 425$, $\beta = 550$, $a = 500$, $\sigma = 75$.

По формуле (1.11):

$$P(425 < X < 550) = \Phi\left(\frac{550-500}{75}\right) - \Phi\left(\frac{425-500}{75}\right) = \Phi(0,67) - \Phi(-1) =$$

$$= \Phi(0,67) + \Phi(1) = 0,2486 + 0,3413 = 0,5899.$$

3. *Распределением* χ^2 (Хи-квадрат, критерий Пирсона) называется распределение

$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} Z_i^2$, где Z_i ($I = 1, 2, \ldots, k$) имеет нормальное распределение $N(0, 1)$.

4. *Распределением Стьюдента* (t-распределением) называется распределение случайной величины

$t = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{1}{k}\chi^2}}$, где $Z \sim N(0, 1)$; χ^2 — независимая от Z случайная величина, имеющая χ^2-распределение с k степенями свободы. При $k \geq 100$ t-распределение приближается к нормальному.

5. *Распределением Фишера — Снедекора* (F-распределением) называется распределение случайной величины

$$F = \frac{\frac{1}{k_1}\chi^2(k_1)}{\frac{1}{k_2}\chi^2(k_2)},$$ где $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ — случайные величины, имеющие χ^2-распределение с k_1 и k_2 степенями свободы.

2. ПАРНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

2.1. Основные определения

В эконометрике очень часто применяются многомерные случайные величины.

Упорядоченный набор $X = X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин называется *n-мерной случайной величиной.*

Двумерной случайной величиной будем называть пару случайных величин X и Y.

Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = x$, т. е. $M_x(Y)$, есть функция от x, называемая функцией регрессии Y по X.

Ковариацией $\mathrm{cov}(X, Y)$ случайных величин X и Y называется

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y).$$

Ковариация двух случайных величин характеризует степень зависимости случайных величин и их рассеивание относительно их математических ожиданий. Ковариация — величина размерная, зависит от единиц измерений случайных величин X и Y. Этих недостатков лишен коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется

$$r = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции — величина безразмерная, характеризует собой тесноту линейной связи между случайными величинами.

Свойства коэффициента корреляции:

1) $-1 \le r \le 1$;

2) $r = 0$, если случайные величины X и Y независимы;

3) $r > 0$, между X и Y прямая зависимость; $r < 0$, между X и Y обратная зависимость;

4) $|r| = 1$, то между X и Y существует линейная функциональная зависимость.

2.2. Парный регрессионный анализ. Метод наименьших квадратов. Коэффициент корреляции

Задачами регрессионного анализа является установление формы зависимости между переменными, оценка функции регрессии, прогноз значений зависимой переменной.

Различают следующие типы зависимостей величин X и Y:

1. Функциональная зависимость: $Y = f(X)$.

2. Корреляционная зависимость: $Y = f(X) + \varepsilon$, где ε — случайная компонента, независящая от X.

Задача. Пусть имеются n пар наблюдений — (x_1, y_1), (x_2, y_2), … (x_n, y_n). Требуется оценить зависимость Y от X. Изобразив графически данные точки, получим так называемое поле корреляции (или облако точек).

В зависимости от вида поля корреляции различают следующие регрессионные модели:

1) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}$ — парная линейная регрессия;

2) $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}$ — степенная регрессия; (2.1)

3) $y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}$ — логарифмическая регрессия и другие.

Будем предполагать, что облако точек вытянуто относительно некоторой прямой, т. е. уравнение регрессии имеет вид (2.1).

Оценкой уравнения (2.1) будет уравнение

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i. \tag{2.2}$$

По методу наименьших квадратов неизвестные параметры b_0, b_1 выбираются таким образом, что сумма квадратов отклонений эмпирических (наблюдаемых) значений y_i от значений $\hat{y}_i$, найденных по уравнению регрессии (2.2), была минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - y_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(b_0 + b_1 x_i - y_i \right)^2 \to \min. \tag{2.3}$$

Решение (2.3) сводится к нахождению экстремума функции двух переменных $S = S(b_0, b_1)$. Для этого составляют и решают систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial b_0} = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial b_1} = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решая систему (2.4), найдем

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}, \tag{2.5}$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}, \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\,. \qquad (2.6)$$

В соответствии с теоремой Гаусса — Маркова оценки b_0 и b_1 являются наилучшими линейными несмещенными оценками [1, 2].

Для оценки тесноты линейной связи между рядами данных x_i и y_i найдем коэффициент корреляции:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}\,. \qquad (2.7)$$

2.3. Интервальная оценка функции регрессии и ее параметров

Доверительный интервал для функции регрессии, т. е. для условного математического ожидания $M_x(Y)$, который с заданной надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ накрывает неизвестное значение $M_x(Y)$, имеет вид:

$$\hat{y} - t_{1-\alpha,\, n-2} s_{\hat{y}} \le M_x(Y) \le \hat{y} + t_{1-\alpha,\, n-2} s_{\hat{y}}\,, \qquad (2.8)$$

где $\hat{y}$ — групповая средняя, найденная по уравнению регрессии; $t_{1-\alpha;\, n-2}$ — табличное значение распределения Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы и уровнем значимости α; $s_{\hat{y}} = \sqrt{s_{\hat{y}}^2}$ — стандартная ошибка групповой средней $\hat{y}$, найденная по формуле

$$s_{\hat{y}}^2 = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right) \text{ — оценка дисперсии групповой средней;} \qquad (2.9)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2 \text{ — остаточная дисперсия.} \qquad (2.10)$$

Доверительный интервал для индивидуальных значений y_0^* *при* $x = x_0$ зависимой переменной имеет вид:

$$\hat{y}_0 - t_{1-\alpha,\, n-2} s_{\hat{y}_0} \le y_0^* \le \hat{y}_0 + t_{1-\alpha,\, n-2} s_{\hat{y}_0}\,, \qquad (2.11)$$

где

$$s_{\hat{y}_0}^2 = s^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right) \qquad (2.12)$$

показывает оценку дисперсии индивидуального значения y_0^*.

Доверительный интервал для параметров регрессионной модели описывается ниже.

Интервальная оценка параметра β_1 имеет вид:

$$b_1 - t_{1-\alpha;n-2}\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}} \le \beta_1 \le b_1 + t_{1-\alpha;n-2}\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}. \qquad (2.13)$$

Интервальная оценка для дисперсии σ^2 имеет вид:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-2}} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-2}}, \qquad (2.14)$$

где $\chi^2_{\alpha/2,\,n-2}$, $\chi^2_{1-\alpha/2,\,n-2}$ — табличные значения χ^2 — распределения с n – 2 степенями свободы и уровнем значимости α.

2.4. Оценка значимости уравнения регрессии. Коэффициент детерминации

После того как регрессионная модель получена, необходимо оценить ее значимость.

Оценить значимость уравнения регрессии означает установить, соответствует ли математическая модель, выражающая зависимость между переменными, эмпирическим данным, а также достаточно ли включенных в уравнении объясняющих переменных для описания зависимой переменной. Проверка значимости уравнения регрессии производится на основе дисперсионного анализа.

Согласно идее дисперсионного анализа, общая сумма квадратов отклонений (Q) зависимой переменной от средней равна сумме квадратов, обусловленной регрессией (Q_R) и остаточной сумме квадратов (Q_e), характеризующей влияние неучтенных факторов:

$$Q = Q_R + Q_e \text{ или } \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2.$$

Для проверки значимости уравнения регрессии применим F-критерий Фишера — Снедекора.

В случае линейной парной регрессии уравнение регрессии значимо на уровне α, если $F = \dfrac{Q_R(n-2)}{Q_e} > F_{\alpha,\,1,\,n-2}$, (2.15)

где $F_{\alpha,1,n-2}$ — табличное значение F-критерия Фишера — Снедекора, определенное на уровне значимости α при 1 и n – 2 степенях свободы.

Проверить значимость уравнения регрессии можно, оценив значимость коэффициента b_1 по критерию Стьюдента. Для этого проверим гипотезу $H_0:\beta_1 = 0$ (отсутствие связи между X и Y). Если $|t| > t_{1-\alpha,\,n-2}$, то гипотеза отвергается.

$$t = \frac{b_1 - \beta_1}{s}\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad s^2 = \frac{Q_e}{n-2}; \tag{2.16}$$

$t_{1-\alpha,\, n-2}$ — табличное значение распределения Стьюдента с $n – 2$ степенями свободы и уровнем значимости α.

Одной из наиболее эффективных оценок адекватности регрессионной модели является коэффициент детерминации:

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = 1 - \frac{Q_e}{Q}. \tag{2.17}$$

Величина R_2 показывает, какая часть вариации зависимой переменной обусловлена вариацией объясняющей переменной.

Свойства коэффициента детерминации:

1) $0 \le R_2 \le 1$;

2) если $R^2 = 1$, то между X и Y существует линейная функциональная зависимость;

3) если $R^2 = 0$, то вариация зависимой переменной полностью обусловлена воздействием неучтенных в модели переменных, и линия регрессии параллельна оси абсцисс.

З а м е ч а н и я.

1. Построенная модель считается хорошей, если $R_2 \ge 0{,}8$;

2. Для линейной парной регрессии между коэффициентами детерминации и корреляции существует зависимость: $R_2 = r^2$.

Пример 2.1. На основании данных (табл. 2.1) между личным располагаемым доходом x в \$ млрд и y — услуг на отдых жителей США в \$ млрд за 10 лет [2] требуется:

1) найти оценку коэффициентов регрессии, коэффициент корреляции.

2) оценить на уровне $\alpha = 5$ % значимость уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента;

3) найти коэффициент детерминации R^2;

4) найти 95-процентные доверительные интервалы для среднего и индивидуального значений расходов на отдых при $x = 722{,}5$. Найти с надежностью 0,9 интервальные оценки коэффициента регрессии β_1 и дисперсии σ^2.

5) построить график наблюдаемых и оцененных значений уравнения регрессии.

Таблица 2.1.

Год	Личный располагаемый доход x	Отдых y
1	479,7	9,6
2	489,7	10
3	503,8	10,4
4	524,9	10,9
5	542,3	11,3
6	580,8	11,6
7	616,3	11,9
8	646,8	12,4
9	673,5	12,7
10	701,3	13,4

Р е ш е н и е. Для определения вида уравнения регрессии построим корреляционное поле (рис 2.1.).

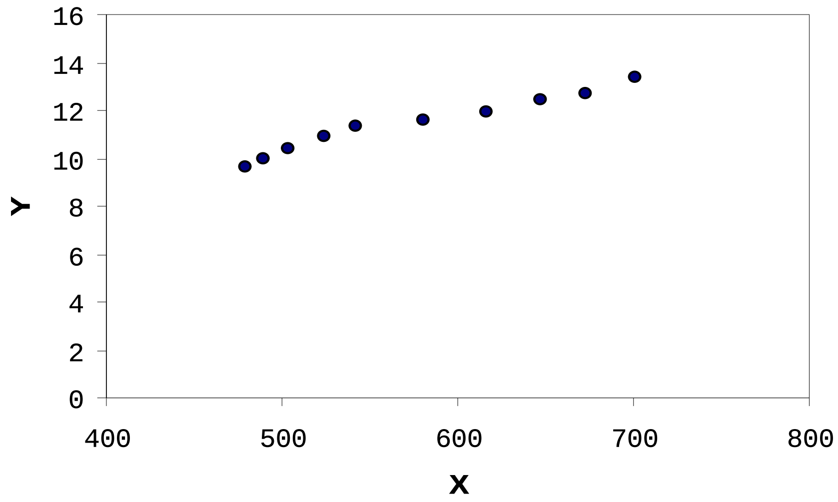

Рис. 2.1. Корреляционное поле

1. Видно, что данные вытянуты относительно прямой, поэтому предположим, что уравнение регрессии имеет вид (2.1). Оценкой уравнения (2.1) будет уравнение (2.2). Для нахождения коэффициентов b_0, b_1 применим формулы (2.5), (2.6), вычислив сначала следующие суммы:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = \left(479,7 + 489,7 + \ldots + 701,3\right) = 5759,1; \quad \overline{x} = \frac{1}{10}5759,1 = 575,91;$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = \left(9,6 + 10 + \ldots + 13,4\right) = 114,2; \quad \overline{y} = \frac{1}{10}114,2;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \left(479,7^2 + 489,7^2 + \ldots + 701,3^2\right) = 3374270,43;$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = \left(9,6^2 + 10^2 + \ldots + 13,4^2\right) = 1317,6;$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = \left(479,7 \cdot 9,6 + 489,7 \cdot 10 + \ldots + 701,3 \cdot 13,4\right) = 66633,48;$$

$$b_1 = \frac{10 \cdot 66633,48 \; - \; 5759,1 \cdot 114,2}{10 \cdot 3374270,43 - 5759,1^2} = 0,015;$$

$$b_0 = 11,42 - 0,015023 \cdot 575,91 = 2,768.$$

Таким образом, уравнение регрессии примет вид:

$$\hat{y}_i = 2,768 + 0,015 x_i.$$

Интерпретация полученного уравнения: если личный располагаемый доход x увеличить на 1 млрд \$, то расходы на отдых увеличатся на 0,015 млрд \$.

Найдем коэффициент корреляции по формуле (2.7)

$$r = \frac{10 \cdot 66633{,}48 \; - \; 5759{,}1 \cdot 114{,}2}{\sqrt{10 \cdot 3374270{,}43 - 5759{,}1^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 1317{,}6 - 114{,}2^2}} = 0{,}983.$$

Следовательно, связь между x и y — прямая и корреляционная.

2. Для оценивания значимости уравнения регрессии по критерию Фишера — Снедекора необходимо вычислить следующие суммы квадратов: $Q = \sum (y_i - \overline{y})^2;\; Q_e = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2;\; Q_R = Q - Q_e$.

Необходимые вычисления занесем в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Личный располагаемый доход x	Отдых y	$\hat{y}_i = 2{,}768 + 0{,}015x_i$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(\hat{y}_i - y_i)^2$	$(x_i - \overline{x})^2$
479,7	9,6	2,768 + 0,015·479,7= 9,964	$(9{,}6 - 1{,}42)^2 =$ $= 3{,}312$	$(9{,}694 - 9{,}6)^2$ $= 0{,}132$	(479,7 – $– 575{,}91)^2$ = 9256,364
489,7	10	10,114	2,016	0,013	7432,164
503,8	10,4	10,325	1,04	0,006	5199,852
524,9	10,9	10,642	0,27	0,067	2602,02
542,3	11,3	10,903	0,014	0,158	1129,632
580,8	11,6	11,48	0,032	0,014	23,9121
616,3	11,9	12,013	0,230	0,013	1631,352
646,8	12,4	12,47	0,960	0,005	5025,392
673,5	12,7	12,871	1,638	0,029	9523,808
701,3	13,4	13,288	3,92	0,013	15722,65
Σ			13,436	0,449	57547,149

$Q = 13{,}436$; $Q_e = 0{,}449$; $Q_R = 13{,}436 - 0{,}449 = 12{,}987$.

По формуле (2.15)

$$F = \frac{13{,}436 \cdot (10 - 2)}{0{,}449} = 239{,}39 > F_{0{,}05;1;8} = 4{,}2 \text{ (табличное значение)}.$$

Таким образом, уравнение регрессии значимо на уровне $\alpha = 5$ %.

Проверим значимость уравнения регрессии по формуле (2.16)

$$s^2 = \frac{0{,}449}{10 - 2} = 0{,}056; \quad s = \sqrt{0{,}056} = 0{,}237; \quad t = \frac{0{,}015}{0{,}237}\sqrt{57547{,}149} = 15{,}183.$$

Так как $t = 15{,}183 > t_{0{,}95;8} = 2{,}31$ (табличное значение), то гипотеза отвергается и коэффициент b_1, а значит и уравнение регрессии значимы на уровне $\alpha = 5$ %.

3. Найдем коэффициент детерминации по формуле (2.17)

$$R^2 = \frac{12{,}987}{13{,}436} \approx 0{,}97.$$

Это значит, что на 97 % вариация зависимой переменной y, т. е. расходов на отдых зависит от объясняющей переменной x, — личным располагаемым доходом, остальные 3 % приходятся на неучтенные факторы и ошибки измерений.

4. Доверительный интервал для функции регрессии найдем по формулам (2.8), (2.9). Сначала оценим условное математическое ожидание $M_x = 722{,}5(Y)$. Выборочной оценкой $M_x = 722{,}5(Y)$ является групповая средняя $\hat{y}_{x=722,5}$, которую найдем по уравнению регрессии:

$$\hat{y}_{x=722,5} = 2{,}678 + 0{,}015 \cdot 722{,}5 = 13{,}606 \text{ (млрд \$)}.$$

Вычислим оценку дисперсии групповой средней по (2.9):

$$s_{\hat{y}}^2 = 0{,}056\left(\frac{1}{10} + \frac{(722{,}5 - 575{,}91)^2}{57547{,}149}\right) = 0{,}027; \quad s_{\hat{y}} = \sqrt{0{,}027} = 0{,}163.$$

Тогда доверительный интервал для функции регрессии примет вид:

$$13{,}606 - 2{,}31 \cdot 0{,}163 \le M_{x=722,5}(Y) \le 13{,}606 + 2{,}31 \cdot 0{,}163;$$

$$13{,}229 \le M_{x=722,5}(Y) \le 13{,}983.$$

Следовательно, средний расход на отдых жителей США с личным располагаемым доходом 722,5 млрд \$ с надежностью 0,95 находится в пределах от 13,229 до 13,983 млрд \$.

Для построения доверительного интервала для индивидуального значения y_0^* воспользуемся формулами (2.11), (2.12).

Оценка дисперсии индивидуальных значений y_0 при $x = x_0$

$$s_{\hat{y}_0}^2 = 0{,}056\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(722{,}5 - 575{,}91)^2}{57547{,}149}\right) = 0{,}083; \quad s_{\hat{y}_0} = \sqrt{0{,}083} = 0{,}287,$$

а соответствующий доверительный интервал для индивидуального значения y_0^* примет вид:

$$13{,}606 - 2{,}31 \cdot 0{,}287 \le y_0^* \le 13{,}606 + 2{,}31 \cdot 0{,}287;$$

$$12{,}943 \le y_0^* \le 14{,}269.$$

Итак, индивидуальный расход на отдых жителей США с личным располагаемым доходом 722,5 млрд \$ с надежностью 0,95 находится в пределах от 12,943 до 14,269 млрд \$.

Найдем доверительный интервал для параметра β_1 по формуле (2.13)

$$0{,}015 - 2{,}31\frac{0{,}237}{\sqrt{57547{,}149}} \le \beta_1 \le 0{,}015 + 2{,}31\frac{0{,}237}{\sqrt{57547{,}149}};$$

$$0{,}013 \le \beta_1 \le 0{,}017.$$

Таким образом, при изменении личного располагаемого дохода x на 1 млрд \$ с надежностью 0,95 расходы на отдых будут изменяться на величину, заключенную в интервале от 0,013 до 0,017 млрд \$.

Доверительный интервал для параметра σ^2 найдем по формуле (2.14). Учитывая, что $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$, то табличные значения критерия χ^2 будут: $\chi^2_{\alpha/2,\, n-2} = \chi^2_{0{,}025,\, 8} = 17{,}53$; $\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-2} = \chi^2_{0{,}975,\, 8} = 2{,}18$. Тогда

$$\frac{10 \cdot 0{,}056}{17{,}53} \le \sigma^2 \le \frac{10 \cdot 0{,}056}{2{,}18};$$

$$0{,}032 \le \sigma^2 \le 0{,}257.$$

Итак, с надежностью 0,95 дисперсия возмущений заключена в пределах от 0,032 до 0,257 млрд \$.

5. Построим наблюдаемые (x_i, y_i) и оцененные значения уравнения регрессии $\hat{y}_i$ (рис. 2.2).

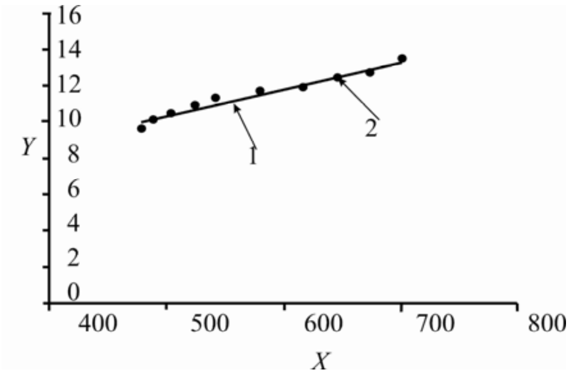

Рис. 2.2. Зависимость y от x: *1* — наблюдаемые значения; *2* — оцененные по уравнению регрессии

3. МНОЖЕСТВЕННЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Множественный регрессионный анализ. Стандартизированные коэффициенты регрессии и коэффициенты эластичности

Экономические явления часто определяются большим числом одновременно действующих факторов. Поэтому возникает задача исследования одной зависимой переменной Y от нескольких объясняющих переменных X_1, X_2, …, X_p. Эта задача решается с помощью *множественного регрессионного анализа.*

Модель множественной линейной регрессии можно представить в виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.1}$$

В матричном виде модель (3.1) имеет вид:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \tag{3.2}$$

где $Y = (y_1\ y_2 \ldots y_n)^T$ — матрица-столбец значений зависимой переменной размера n;

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$$ — матрица значений объясняющих переменных размера $n \times (p + 1)$;

$\beta = (\beta_0\ \beta_1 \dots \beta_p)^T$ — матрица-столбец параметров размера $(p + 1)$;

$\varepsilon = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)^T$ — матрица-столбец возмущений размера n.

З а м е ч а н и е. В матрицу X дополнительно введен столбец, все элементы которого равны 1, т. е. в модели (3.1) свободный член β_0 умножается на фиктивную переменную x_{i0}, принимающую значение 1 для всех i:

$x_{i0} = 1$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Оценкой модели (3.2) является уравнение;

$$Y = Xb + e, \tag{3.3}$$

где $b = (b_0\ b_1 \dots b_p)^T$, $\quad e = (e_1\ e_n \dots e_n)^T$.

Для оценки неизвестных параметров уравнения (3.3) применим метод наименьших квадратов. Для этого минимизируем остаточную сумму квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{y}_i - y_i \right)^2 = (Y - Xb)^T (Y - Xb) \to \min. \tag{3.4}$$

На основании необходимого условия экстремума функции нескольких переменных $S(b_0, b_1, \dots, b_\text{p})$, представляющей (3.4), необходимо приравнять к нулю частные производные по этим переменным или в матричном виде — вектор частных производных $\frac{\partial S}{\partial b} = \left(\frac{\partial S}{\partial b_0}\ \ \frac{\partial S}{\partial b_1} \dots\ \ \frac{\partial S}{\partial b_p} \right) = 0$. Получим систему нормальных уравнений в матричном виде для определения вектора b:

$$X^T X b = X^T Y, \tag{3.5}$$

где

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \dots & \sum x_{ip} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}{}^2 & \dots & \sum x_{i1} x_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ip} & \sum x_{i1} x_{ip} & \dots & \sum x_{ip}{}^2 \end{pmatrix}; \tag{3.6}$$

$$X^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_{i1} \\ \dots \\ \sum y_i x_{ip} \end{pmatrix}$$ — матрица-столбец свободных членов. (3.7)

Решением уравнения (3.5) является вектор

$$b = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y, \tag{3.8}$$

где $\left(X^T X\right)^{-1}$ — матрица, обратная матрице коэффициентов системы (3.5).

На практике бывает необходимо сравнить влияние на зависимую переменную различных объясняющих переменных, когда последние выражаются разными единицами измерения. В этом случае используют *стандартизированные коэффициенты регрессии* b'_j *и коэффициенты эластичности* E_j (j = 1, 2, … p):

$$b'_j = b_j \frac{s_{x_j}}{s_y}; \tag{3.9}$$

где s_{x_j} — среднее квадратическое отклонение по переменной x_j:

$$s_{x_j} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - (\overline{x}_j)^2} \tag{3.10}$$

s_y — среднее квадратическое отклонение по переменной у:

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \overline{y}^2}. \tag{3.11}$$

$$E_j = b_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}}, \tag{3.12}$$

где $\overline{x}_j$ — среднее значение переменной x_j; $\overline{y}$ — среднее значение переменной y.

Стандартизированный коэффициент регрессии b'_j показывает, на сколько величин s_y изменится в среднем зависимая переменная y, при увеличении только j-й объясняющей переменной на s_{x_j}, а коэффициент эластичности E_j — на сколько процентов (от средней) изменится в среднем у при увеличении только x_j на 1 %.

3.2. Доверительные интервалы для коэффициентов и функции регрессии

Определим значимость коэффициентов регрессии b_j и доверительный интервал для параметров регрессионной модели β_j (j = 1, 2, … p).

Проверим значимость коэффициента регрессии b_j по критерию Стьюдента. Для этого проверим гипотезу $H_0 : \beta_j = 0$.

Если

$$|t| = \frac{|b_j|}{s_{b_j}} > t_{1-\alpha,\, n-p-1}, \tag{3.13}$$

то гипотеза отвергается, следовательно коэффициент регрессии b_j значим на уровне значимости α, где

$$s_{b_j} = \sqrt{s^2 \cdot \left[(X'X)^{-1} \right]_{jj}} \tag{3.14}$$

является средним квадратическим отклонением (стандартной ошибкой) коэффициента регрессии b_j; $\left[(X'X)^{-1} \right]_{jj}$ — диагональным элементом матрицы $(X'X)^{-1}$; $t_{1-\alpha,\, n-p-1}$ — табличным значением критерия Стьюдента при уровне значимости α и с *n-p-1* степенями свободы; s^2 — несмещенной оценкой параметра σ^2:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-3}, \quad e_i = y_i - y_{i\,\text{оцен}}. \tag{3.15}$$

Доверительный интервал для параметра β_j имеет вид:

$$b_j - t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{b_j} \le \beta_j \le b_j + t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{b_j}. \tag{3.16}$$

Доверительный интервал для функции регрессии, т. е. для условного математического ожидания $M_x(Y)$, найденного в предположении, что объясняющие переменные X_1, X_2, …, X_p приняли значения, задаваемые вектором $X_0^T = (1 \;\; x_{10} \; x_{20} \ldots x_{p0})$, имеет вид:

$$\hat{y} - t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{\hat{y}} \le M_x(Y) \le \hat{y} + t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{\hat{y}}, \tag{3.17}$$

где $\hat{y}$ — групповая средняя, найденная по уравнению регрессии;

$$s_{\hat{y}} = \sqrt{s^2 X_0^T \left(X^T X \right)^{-1} X_0} \tag{3.18}$$

является стандартной ошибкой групповой средней.

Доверительный интервал для индивидуальных значений y_0^* имеет вид:

$$\hat{y}_0 - t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{\hat{y}0} \le y_0^* \le \hat{y}_0 + t_{1-\alpha,\, n-p-1} s_{\hat{y}_0}, \tag{3.19}$$

где

$$s_{\hat{y}_0} = \sqrt{s^2 \left(1 + X_0^T \left(X^T X \right)^{-1} X_0 \right)}. \tag{3.20}$$

Доверительный интервал для параметра σ^2 имеет вид:

$$\frac{ns^2}{\chi^2_{\alpha/2,\ n-p-1}} \le \sigma^2 \le \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\ n-p-1}}, \tag{3.21}$$

где $\chi^2_{\alpha/2,\ n-p-1}$, $\chi^2_{1-\alpha/2,\ n-p-1}$ — табличные значения χ^2-распределения с n–p–1 степенями свободы и уровнем значимости α.

3.3. Оценка значимости множественной регрессии. Коэффициент детерминации. Скорректированный коэффициент детерминации

В случае множественной регрессии коэффициент детерминации определяется по формуле

$$R^2 = \frac{Q_R}{Q} = \frac{b^T X^T Y^T - n\bar{y}^2}{Y^T Y - n\bar{y}^2} = 1 - \frac{e^T e}{y^T y}, \tag{3.22}$$

где $Q_e = e^T e = \sum_{i=1}^{n} e_i^2;\ y^T y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$ (3.23)

Критерий значимости уравнения регрессии определяется по формуле

$$F = \frac{R^2(n-p-1)}{(1-R^2)p} > F_{\alpha,\ p,\ n-p-1}, \tag{3.24}$$

где $F_{\alpha,\ p,\ n-p-1}$ — табличное значение F-критерия Фишера — Снедекора, определенное на уровне значимости α при p и n–p–1 степенях свободы.

Использование только одного коэффициента детерминации R^2 для выбора лучшего уравнения регрессии может оказаться недостаточным. На практике бывают случаи, когда плохо определенная модель регрессии дает высокий коэффициент R^2. Недостатком этого коэффициента является то, что он увеличивается при добавлении новых объясняющих переменных, хотя это и не всегда означает улучшение качества регрессионной модели. В этом случае лучше использовать скорректированный коэффициент детерминации $\hat{R}^2$, определяемый по формуле

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}\left(1 - R^2\right). \tag{3.25}$$

Чем больше число объясняющих переменных p, тем меньше $\hat{R}^2$ по сравнению с R^2. Скорректированный коэффициент $\hat{R}^2$ может уменьшаться при введении в уравнение новых объясняющих переменных, не оказывающих заметного влияния на зависимую переменную.

3.4. Нелинейные модели регрессии

Мы рассматривали линейные модели регрессии, в которых переменные имели первую степень (модели, линейные по переменным), а параметры выступали в виде коэффициентов при этих переменных (модели, линейные по параметрам). Однако соотношения между социально-экономическими явлениями часто носят нелинейный характер: производственные функции (функция Кобба — Дугласа), функции спроса и т. д.

Для оценивания параметров нелинейной модели используют подход, основанный на линеаризации модели и заключающийся в том, что с помощью подходящих алгебраических преобразований исходных переменных исследуемую зависимость представляют в виде линейного соотношения между преобразованными переменными.

Если модель не линейна по переменным, то введением новых переменных ее можно привести к линейному виду:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}^2 + \beta_2 \sqrt{x_{i2}} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.26}$$

Введя переменные $z_1 = x_1^2$ и $z_2 = \sqrt{x_2}$, модель (3.26) приводится к линейному виду: $y_i = \beta_0 + \beta_1 z_{i1} + \beta_2 z_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}$.

Более сложной проблемой является нелинейность модели по параметрам. К числу таких моделей относятся мультипликативная модель

$$y_i = \beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{3.27}$$

и экспоненциальная модель

$$y_i = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}} \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.28}$$

Эти модели можно привести к линейному виду с помощью логарифмирования обеих частей уравнения. Тогда (3.27) примет вид:

$$\ln y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_{i1} + \beta_2 \ln x_{i2} + \ln \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n},$$

а модель (3.28):

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ln \varepsilon_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пример 3.1. На основании данных (табл. 3.1) между личным располагаемым доходом x_1 в млрд \$, x_2 — индекс относительной цены на отдых в млрд \$ и y — услуги на отдых жителей США в млрд \$ за 10 лет [2]: и предположения, что уравнение регрессии имеет вид

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon, \tag{3.29}$$

требуется:

1. Найти оценку коэффициентов регрессии.

2. Сравнить раздельное влияние на зависимую переменную каждой из объясняющих переменных, используя стандартизированные коэффициенты регрессии и коэффициенты эластичности.

3. Проверить значимость коэффициентов регрессии при α = 0,1 и найти 90-процентные доверительные интервалы для коэффициентов регрессии и дисперсии σ^2, а также 95-процентные доверительные интервалы для среднего и индивидуального значений расходов на отдых при личном располагаемом доходе 722,5 млрд \$ и индексе относительной цены 100 млрд \$.

4. Найти множественный и скорректированный коэффициенты детерминации и пояснить их смысл. Проверить значимость полученного уравнения регрессии на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 3.1

Год	Личный располагаемый доход x_1	Индекс относительной цены на отдых x_2	Отдых y
1	479,7	86,5	9,6
2	489,7	88,6	10
3	503,8	90,6	10,4
4	524,9	91,6	10,9
5	542,3	92,8	11,3
6	580,8	94,6	11,6
7	616,3	95,7	11,9
8	646,8	96,5	12,4
9	673,5	97,8	12,7
10	701,3	99,8	13,4

Р е ш е н и е. 1. Введем обозначения

$$Y = \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 10 \\ \dots \\ 13{,}4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 479{,}7 & 86{,}5 \\ 1 & 489{,}7 & 88{,}6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 701{,}3 & 99{,}8 \end{pmatrix}.$$

Оценкой уравнения (3.29) является уравнение $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Для нахождения произведения матриц $X^T X$ и $X^T Y$ по формулам (3.6), (3.7) составим табл. 3.2. В итоге получим

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 479{,}7 & 489{,}7 & \dots & 701{,}3 \\ 86{,}5 & 88{,}6 & \dots & 99{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 479{,}7 & 86{,}5 \\ 1 & 489{,}7 & 88{,}6 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 701{,}3 & 99{,}8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 5759{,}1 & 934{,}49 \\ 5759{,}1 & 3374270{,}43 & 541112{,}87 \\ 934{,}49 & 541112{,}87 & 87484{,}67 \end{pmatrix}.$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 479{,}7 & 489{,}7 & \dots & 701{,}3 \\ 86{,}5 & 88{,}6 & \dots & 99{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9{,}6 \\ 10 \\ \dots \\ 13{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114{,}2 \\ 66633{,}48 \\ 10717{,}58 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\left(X^T X\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|X^T X\right|} \overline{X^T X} = \begin{pmatrix} 506{,}96 & 0{,}39 & -7{,}81 \\ 0{,}39 & 0{,}0003 & -0{,}01 \\ -7{,}81 & -0{,}01 & 0{,}12 \end{pmatrix}.$

Вектор b найдем по формуле (3.8)

$$b = \begin{pmatrix} 503,66 & 0,39 & -7,76 \\ 0,39 & 0,0003 & -0,01 \\ -7,76 & -0,01 & 0,12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 114,2 \\ 66633,48 \\ 10717,58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,32 \\ 0,005 \\ 0,204 \end{pmatrix}.$$

Итак, уравнение множественной регрессии имеет вид:

$$\hat{y} = -10,32 + 0,005 x_1 + 0,204 x_2.$$

Оно показывает, что при увеличении только личного располагаемого дохода x_1 (при неизменном x_2) на 1 млрд \$ расходы на отдых для жителей США увеличиваются в среднем на 0,005 млрд \$, а при увеличении только индекса относительной цены на отдых x_2 (при неизменном x1) на 1 млрд \$ расходы на отдых увеличиваются в среднем на 0,204 млрд \$.

2. Для сравнения влияния каждой объясняющей переменной на зависимую переменную вычислим стандартизированные коэффициенты регрессии по формулам (3.9)—(3.11) и коэффициенты эластичности по формуле (3.12), используя табл. 3.2.:

$$\overline{x}_1 = \frac{5759,1}{10} = 575,91; \quad \overline{x}_2 = \frac{934,49}{10} = 93,449; \quad \overline{y} = \frac{114,2}{10} = 11,42.$$

$$s_{x_1} = \sqrt{\frac{3374270,43}{10} + 575,91^2} = 817,98; \; s_{x_2} = \sqrt{\frac{87484,67}{10} + 93,449^2} = 132,22;$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1317,6}{10} + 11,42^2} = 16,19.$$

$$b_1' = 0,005 \frac{817,98}{16,19} = 0,25; \quad b_2' = 0,204 \frac{132,22}{16,19} = 1,67.$$

$$E_1 = 0,005 \frac{575,91}{11,42} = 0,25; \quad E_2 = 0,204 \frac{93,449}{11,42} = 1,67.$$

Следовательно, увеличение личного располагаемого дохода и индекса относительной цены на отдых только на одно s_{x1} или на одно s_{x2} увеличивает в среднем расходы на отдых соответственно на $0,25 s_y$ или на $1,67 s_y$, а увеличение этих переменных на 1 % приводит к росту расходов на отдых соответственно на 0,25 и 1,67 %. Таким образом, по обоим показателям, на отдых большее влияние оказывает фактор «Индекс относительной цены», по сравнению с фактором «Личный располагаемый доход».

3. Построим доверительный интервал для $M_x(Y)$, где $X_0^T = (1 \quad 722,5 \quad 100)$.

Найдем групповую среднюю по уравнению регрессии:

$$\hat{y} = -10,32 + 0,005 \cdot 722,5 + 0,204 \cdot 100 = 13,6925 \text{ (млрд \$)}.$$

Для построения доверительного интервала для $Mx(Y)$ необходимо знать дисперсию его оценки $s_{\hat{y}}^2$. Для ее вычисления обратимся к табл. 3.2 и формуле (3.15): $s^2 = \dfrac{0,53}{10-2-1} = 0,076$.

Таблица 3.2

i	x_{i1}	x_{i2}	y_i	x^2_{i1}	x^2_{i2}	y^2_i	$x_{i1}\,x_{i2}$	$y_i\,x_{i1}$	$y_i\,x_{i2}$	$\hat{y}_i$	$e^2_i = (\hat{y}_i - y_i)^2$
1	479,7	86,5	9,6	230112,09	7489,85	92,16	41515,11	4605,12	830,82	9,73	0,02
2	489,7	88,6	10	239806,09	7849,12	100	43385,1	4897	885,95	10,2	0,04
3	503,8	90,6	10,4	253814,44	8214,45	108,16	45661,21	5239,52	942,59	10,69	0,08
4	524,9	91,6	10,9	275520,01	8388,27	118,81	48074,29	5721,41	998,3	10,99	0,01
5	542,3	92,8	11,3	294089,29	8608,27	127,69	50315	6127,99	1048,42	11,32	0
6	580,8	94,6	11,6	337328,64	8948,81	134,56	54942,61	6737,28	1097,34	11,88	0,08
7	616,3	95,7	11,9	379825,69	9163,35	141,61	58995,56	7333,97	1139,13	12,29	0,15
8	646,8	96,5	12,4	418350,24	9307,15	153,76	62399,09	8020,32	1196,27	12,59	0,04
9	673,5	97,8	12,7	453602,25	9562,63	161,29	65860,69	8553,45	1241,92	13	0,09
10	701,3	99,8	13,4	491821,69	9952,77	179,56	69964,21	9397,42	1336,83	13,54	0,02
Σ	5759,1	934,49	114,2	3374270,43	87484,67	1317,6	541113,87	66633,48	10717,58	116,23	0,53

Определим стандартную ошибку групповой средней $\hat{y}$ по формуле (3.18). Сначала найдем

$$X_0^T\left(X^TX\right)^{-1}X_0=\begin{pmatrix}1 & 722{,}5 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}506{,}96 & 0{,}39 & -7{,}81\\ 0{,}39 & 0{,}0003 & -0{,}01\\ -7{,}81 & -0{,}01 & 0{,}12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 722{,}5\\ 100\end{pmatrix}=0{,}575;$$ тогда $s_{\hat{y}}=\sqrt{0{,}076\cdot 0{,}575}=0{,}209$.

Табличное значение критерия Стьюдента $t_{0,95;7}$ = 2,36.

По формуле (3.17) вычисляем:

$$13{,}6925-2{,}36\cdot 0{,}209\le M_x(Y)\le 13{,}6925+2{,}36\cdot 0{,}209.$$

$$13{,}2\le M_x(Y)\le 14{,}19 \text{ (млрд \$).}$$

Итак, с надежностью 0,95 средний расход на отдых для жителей США при личном располагаемом доходе 722,5 млрд $ и индексе относительной цены 100 млрд $ находится в пределах от 13,2 до 14,19 млрд $.

Найдем теперь доверительный интервал для индивидуального значения y_0^* при $X_0^T=(1 \quad 722{,}5 \quad 100)$:

по формуле (3.20) $s_{\hat{y}_0}=\sqrt{0{,}076\cdot(1+0{,}575)}=0{,}346$;

по формуле (3.19) $13{,}6925-2{,}36\cdot 0{,}346\le y_0^*\le 13{,}6925+2{,}36\cdot 0{,}346$.

$12{,}88\le y_0^*\le 14{,}51$ (млрд $).

Итак, с надежностью 0,95 индивидуальный расход на отдых для жителей США при личном располагаемом доходе 722,5 млрд $ и индексе относительной цены 100 млрд $ находится в пределах от 12,88 до 14,51 млрд $.

Проверим значимость коэффициентов регрессии b_1 и b_2 по формуле (3.13). Найдем сначала стандартные ошибки этих коэффициентов по (3.14)

$$s_{b_1}=\sqrt{0{,}076\cdot 0{,}0003}=0{,}005;\quad s_{b_2}=\sqrt{0{,}076\cdot 0{,}12}=0{,}095.$$

Так как $t_{b_1}=\dfrac{0{,}005}{0{,}005}=1<t_{0,9;7}=1{,}89$, то коэффициент b_1 незначим на 10-процентном уровне.

Так как $t_{b_2}=\dfrac{0{,}204}{0{,}095}=2{,}15>t_{0,9;7}=1{,}89$, то коэффициент b_2 значим на 10-процентном уровне.

Построим доверительный интервал только для значимого коэффициента b_2 по (3.16):

$$0{,}204-1{,}89\cdot 0{,}095\le \beta_2\le 0{,}204+1{,}89\cdot 0{,}095;$$

$$0{,}024\le \beta_2\le 0{,}384.$$

Таким образом, с надежностью 0,9 при изменении индекса относительной цены на 1 млрд $ (при неизменном личном располагаемом доходе) расходы на отдых будут меняться в пределах от 0,024 до 0,384 млрд $.

Найдем доверительный интервал для дисперсии σ^2 по (3.21).

Табличные значения критерия χ^2 будут: $\chi^2_{\alpha/2,n-3} = \chi^2_{0{,}05,7} = 14{,}1$; $\chi^2_{1-\alpha/2,n-3} = \chi^2_{0{,}95,7} = 2{,}17$. Тогда

$$\frac{10 \cdot 0{,}076}{14{,}1} \le \sigma^2 \le \frac{10 \cdot 0{,}076}{2{,}17}.$$

$$0{,}054 \le \sigma^2 \le 0{,}35.$$

Итак, с надежностью 0,9 дисперсия возмущений заключена в пределах от 0,054 до 0,35 млрд \$.

4. Найдем коэффициент детерминации R^2 по (3.22).

Найдем сначала по (3.23):

$$y^T y = (9{,}6 - 11{,}42)^2 + (10 - 11{,}42)^2 + \ldots + (13{,}4 - 11{,}42)^2 = 13{,}44,$$ тогда

$$R^2 = 1 - \frac{0{,}53}{13{,}44} = 0{,}96.$$

Получаем, что вариация зависимой переменной y (расходов на отдых) на 96 % объясняется изменчивостью включенных в модель объясняющих переменных, т. е. при личном располагаемом доходе x_1 и индексе относительной цены на отдых x^2, оставшиеся 4 % приходятся на неучтенные факторы и ошибки наблюдений.

Вычислим скорректированный коэффициент детерминации по (3.25):

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{10-1}{10-2-1}\left(1 - 0{,}96\right) = 0{,}95.$$

Скорректированный коэффициент детерминации $\hat{R}^2$ отличается от R^2 на статистическую погрешность.

Проверим значимость уравнения регрессии по (3.24):

$$F = \frac{0{,}96(10-2-1)}{(1-0{,}96)2} = 84 > F_{0{,}05,\,2,7} = 4{,}74,$$ т. е. уравнение регрессии значимо на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Пример 3.2. На основе данных примера 3.1 и предположения, что уравнение регрессии имеет вид:

$$y(x) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \varepsilon, \tag{3.30}$$

требуется:

1. Найти оценку коэффициентов регрессии.
2. Оценить на уровне 5 % значимость уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера — Снедекора.
3. Найти коэффициент детерминации R^2. Сравнить, какое уравнение регрессии лучше для вашего случая: линейное или нелинейное.

Р е ш е н и е. Оценкой уравнения (3.30) является уравнение $\hat{y} = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b2}$.

Приведем его к линейному виду:

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2$$

или

$$\hat{\tilde{y}} = \tilde{b}_0 + b\tilde{x}_1 + b_2\tilde{x}_2,$$

где $\tilde{b}_0 = \ln b_0$, $\hat{\tilde{y}} = \ln \hat{y}$, $\tilde{x}_1 = \ln x_1$, $\tilde{x}_2 = \ln x_2$

Для нахождения коэффициентов регрессии поступим аналогично примеру 3.1, составив табл. 3.3, в которой будут фигурировать не исходные данные, а логарифмы от исходных данных.

Таблица 3.3

i	$\ln x_{i1}$	$\ln x_{i2}$	$\ln y_i$	$(\ln x_{i1})^2$	$(\ln x_{i2})^2$	$(\ln y_i)^2$	$\ln x_{i1} \ln x_i^2$	$\ln y_i \ln x_{i1}$	$\ln y_i \ln x_{i2}$	$\hat{y}_i$	$e^2_i = (\hat{y}_i - y_i)^2$
1	6,17	4,46	2,26	38,11	19,9	5,12	27,54	13,96	10,09	9,57	0,001
2	6,19	4,48	2,3	38,36	20,11	5,3	27,77	14,26	10,32	10,03	0,001
3	6,22	4,51	2,34	38,72	20,31	5,48	28,04	14,57	10,55	10,52	0,014
4	6,26	4,52	2,39	39,23	20,41	5,71	28,29	14,96	10,79	10,8	0,01
5	6,3	4,53	2,42	39,64	20,52	5,88	28,52	15,27	10,98	11,13	0,03
6	6,36	4,55	2,45	40,51	20,7	6,01	28,96	15,6	11,15	11,68	0,006
7	6,42	4,56	2,48	41,26	20,81	6,13	29,3	15,91	11,3	12,06	0,026
8	6,47	4,57	2,52	41,89	20,88	6,34	29,57	16,29	11,5	12,34	0,004
9	6,51	4,58	2,54	42,41	21	6,46	29,85	16,55	11,65	12,74	0,002
10	6,55	4,6	2,6	42,94	21,19	6,74	30,16	17,01	11,95	13,32	0,006
Σ	63,47	45,37	24,3	403,06	205,82	59,16	288	154,38	110,29	$\hat{y}_i$	0,098

Используя данные табл. 3.3, получим:

$$\tilde{X}^T\tilde{X} = \begin{pmatrix} n & \sum \ln x_1 & \sum \ln x_2 \\ \sum \ln x_1 & \sum (\ln x_1)^2 & \sum \ln x_1 \cdot \ln x_2 \\ \sum \ln x_2 & \sum \ln x_1 \cdot \ln x_2 & \sum (\ln x_2)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 63,47 & 45,37 \\ 63,47 & 403,06 & 288 \\ 45,37 & 288 & 205,82 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{X}^T\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \sum \ln y \\ \sum \ln y \cdot \ln x_1 \\ \sum \ln y \cdot \ln x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24,3 \\ 154,38 \\ 110,29 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|\tilde{X}^T\tilde{X}\right|}\overline{\tilde{X}^T\tilde{X}} = \begin{pmatrix} 7773,92 & 916,64 & -2989,54 \\ 916,64 & 127,06 & -379,83 \\ -2989,54 & -379,83 & 1190,45 \end{pmatrix}.$

Тогда вектор $\tilde{b}$ имеет вид:

$$\tilde{b} = \left(\tilde{X}^T\tilde{X}\right)^{-1}\tilde{X}^T\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 7773,92 & 916,64 & -2989,54 \\ 916,64 & 127,06 & -379,83 \\ -2989,54 & -379,83 & 1190,45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24,3 \\ 154,38 \\ 110,29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,09 \\ 0,18 \\ 1,85 \end{pmatrix}.$$

Итак, $\ln b_0 = -7,09 \Rightarrow b_0 = e^{-7,09} = 0,0008; \quad b_1 = 0,18; \quad b_2 = 1,85$.

Уравнение нелинейной множественной регрессии примет вид:

$$\hat{y} = 0,0008 x_1^{0,18} x_2^{1,85}.$$

Найдем коэффициент детерминации по (3.22), используя (3.23) и данные табл. 3.3:

$$R^2 = 1 - \frac{0,098}{13,44} = 0,99.$$

Получилось, что вариация зависимой переменной на 99 % объясняется изменчивостью объясняющих переменных, входящих в модель.

Так как коэффициент детерминации для линейного случая всего на 0,03 меньше, чем для нелинейного, то не имеет смысла строить нелинейную множественную регрессию.

Проверим значимость уравнения регрессии по (3.24):

$F = \dfrac{0,99 \cdot (10-2-1)}{(1-0,99) \cdot 2} = 346,5 > F_{0,05;\,2;7} = 4,74$, т. е. уравнение регрессии значимо на уровне значимости $\alpha = 0,05$.

4. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Под *временным рядом* (*динамическим рядом*) в экономике понимают последовательность наблюдений некоторого фактора (случайной величины) Y в последовательные моменты времени. Отдельные наблюдения называются *уровнями ряда* и обозначаются $y_t \ (t = \overline{1,n})$, n — число уровней.

В общем виде при исследовании экономического временного ряда y_t выделяют несколько составляющих:

$$y_t = u_t + v_t + c_t + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1,n},$$

где u_t — тренд, плавно меняющаяся компонента, описывающая чистое влияние долговременных факторов, т. е. длительную тенденцию изменения признака; v_t — сезонная компонента, отражающая повторяемость экономических процессов в течение не очень длительного периода (года, квартала, месяца, недели); c_t — циклическая компонента, отражающая повторяемость экономических процессов в течение длительных периодов; ε_t — случайная компонента, отражающая влияние неподдающихся учету и регистрации случайных факторов; u_t, v_t, c_t — закономерные (неслучайные) компоненты.

Основные этапы анализа временных рядов:

1) графическое представление и описание поведения временного ряда;

2) выделение и удаление закономерных составляющих временного ряда: тренда, сезонной и циклической составляющих;

3) сглаживание и фильтрация (удаление низко- или высокочастотных составляющих временного ряда);

4) исследование случайной составляющей временного ряда, построение и проверка адекватности математической модели для ее описания;

5) прогнозирование развития изучаемого процесса на основе имеющегося временного ряда;

6) исследование взаимосвязи между различными временными рядами.

Одной из главных задач исследования экономического временного ряда является выявление основной тенденции изучаемого процесса, выраженной неслучайной составляющей $f(t)$. Для решения этой задачи требуется подобрать вид функции $f(t)$. Наиболее часто используют следующие функции:

линейная — $f(t) = b_0 + b_1 t$;

полиномиальная — $f(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$;

экспоненциальная — $f(t) = e^{b_0 + b_1 t}$;

логистическая — $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$.

Для выявления основной тенденции используют метод наименьших квадратов, описанный в п. 2. Значения временного ряда y_t рассматриваются как зависимая переменная, а время t — как объясняющая:

$$y_t = f(t) + \varepsilon_t, \tag{4.1}$$

где ε_t — возмущения, удовлетворяющие основным предпосылкам регрессионного анализа [1].

Пусть оценка уравнения регрессии (4.1) имеет вид

$$\hat{y} = f(t) = b_0 + b_1 t, \tag{4.2}$$

тогда коэффициенты b_0 и b_1 уравнения (4.2) находят по формулам (2.5) и (2.6), заменяя x_i на t:

$$b_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} t y_t - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)}{n\sum_{t=1}^{n} t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2}; \tag{4.3}$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{t}; \quad \overline{t} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} t; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t; \tag{4.4}$$

где $\sum_{t=1}^{n} t = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{t=1}^{n} t^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

При прогнозировании на основе моделей временных рядов исходят из того, что тенденция развития, установленная в прошлом, может быть распространена на будущий период. Если рассматривать временной ряд как регрессионную модель изучаемого признака по переменной «время», то по формулам (2.8) и (2.11) можно дать точечный и интервальный прогноз значений зависимой переменной Y.

Значимость уравнения тренда определяется по формуле (3.24).

Пример 4.1. Имеются следующие данные о расходах на отдых в млрд $ за 10 лет:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	9,6	10	10,4	10,9	11,3	11,6	11,9	12,4	12,7	13,4

Полагая, что тренд линейный $\hat{y} = b_0 + b_1 t$, необходимо

1) найти уравнение тренда и оценить его значимость на уровне 0,05;

2) дать точечный и с надежностью 0,95 интервальный прогнозы среднего и индивидуального значений расходов на отдых на одиннадцатый год.

Р е ш е н и е. Найдем коэффициенты b_0 и b_1 по (4.3), (4.4):

$$\sum_{t=1}^{10} t = \frac{10(10+1)}{2} = 55; \quad \sum_{t=1}^{10} t^2 = \frac{10(10+1)(2\cdot 10+1)}{6} = 385;$$

$$\sum_{t=1}^{10} y_t = 9,6 + 10 + \ldots + 13,4 = 114,2; \; \sum_{t=1}^{10} y_t t = 1\cdot 9,6 + 2\cdot 10 + \ldots + 10\cdot 13,4 = 661,3;$$

$$\sum_{t=1}^{10} y^2_t = 9,6^2 + 10^2 + \ldots + 13,4^2 = 1317,6;$$

$$b_1 = \frac{10\cdot 661,3 - 55\cdot 114,2}{10\cdot 385 - 55^2} = 0,402; \quad b_0 = \frac{114,2}{10} - 0,402\cdot\frac{55}{10} = 9,209.$$

Итак, уравнение тренда $\hat{y} = 9,209 + 0,402t$, т. е. расходы на отдых ежегодно увеличиваются на 0,402 млрд $.

Проверим значимость уравнения тренда по F-критерию на 5-процентном уровне значимости. Для этого вычислим следующие суммы квадратов:

$$Q_R = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t - \bar{y}_t\right)^2 = b_1^2\left(\sum_{t=1}^{n} t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} t\right)^2\right) = 0,402^2\left(385 - \frac{1}{10}55^2\right) = 13,33;$$

$$Q = \sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \bar{y}_t\right)^2 = \sum_{t=1}^{n} {y_t}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)^2 = 1317,6 - \frac{1}{10}114,2^2 = 13,436;$$

$$Q_e = Q - Q_R = 13,436 - 13,33 = 0,106.$$

Так как $F = \dfrac{Q_R(n-2)}{Q_e} = \dfrac{13,33\cdot(10-2)}{0,106} = 1006,04 > F_{0,05;1;8} = 5,32$, то уравнение тренда значимо.

Найдем точечный прогноз расходов на отдых на 11 год:

$\hat{y}_{t=11} = 9,209 + 0,402\cdot 11 = 13,631$ млрд $.

Найдем оценку s^2 дисперсии σ^2:

$$s^2 = \frac{Q_e}{n-2} = \frac{0,106}{10-2} = 0,013.$$

Вычислим оценку дисперсии групповой средней по (2.9):

$$s_{\hat{y}}^2 = 0,013\left(\frac{1}{10}+\frac{\left(11-\frac{55}{10}\right)^2}{385-\frac{55}{10}}\right)=0,002; \quad s_{\hat{y}}=\sqrt{0,002}=0,04.$$

Интервальная оценка прогноза среднего значения расходов на отдых по (2.11):

$$13,631-2,36\cdot 0,04\le \bar{y}(11)\le 13,631+2,36\cdot 0,04;$$
$$13,54\le \bar{y}(11)\le 13,73.$$

Для нахождения интервальной оценки прогноза индивидуального значения $y^*(11)$ вычислим дисперсию его оценки по (2.12):

$$s_{\hat{y}_0}^2 = 0,013\left(1+\frac{1}{10}+\frac{\left(11-\frac{55}{10}\right)^2}{385-\frac{55}{10}}\right)=0,015; \quad s_{\hat{y}}=\sqrt{0,015}=0,12,$$

а интервальную оценку — по (2.11):

$$13,631-2,36\cdot 0,12\le y^*(11)\le 13,631+2,36\cdot 0,12;$$
$$13,35\le y^*(11)\le 13,91.$$

Таким образом, с надежностью 0,95 среднее значение расходов на отдых на 11 год будет заключено в пределах от 13,54 до 13,73 млрд $, а его индивидуальное значение — от 13,35 до 13,91 млрд $.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Дискретная случайная величина задана X законом распределения. Найти:

1) интегральную функцию $F(x)$ и построить ее график; 2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X [3].

1.1

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

1.2

x_i	1	3	5	7
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

1.3

x_i	–1	2	5	8
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

1.4

x_i	–3	–1	0	3
p_i	0,1	0,3	0,2	0,4

1.5

xi	2	6	7	9
pi	0,4	0,3	0,1	0,2

1.6

x_i	–10	–7	–4	–3
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

1.7

x_i	–4	0	2	5
pi	0,1	0,2	0,3	0,4

1.8

x_i	1	2	6	8
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

1.9

x_i	4	6	8	11
p_i	0,3	0,4	0,1	0,2

1.10

x_i	0	5	10	15
p_i	0,5	0,1	0,3	0,1

1.11

x_i	–5	0	5	10
p_i	0,2	0,2	0,3	0,3

1.12

x_i	–4	–2	1	3
p_i	0,4	0,1	0,2	0,3

1.13

x_i	–3	–1	2	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

1.14

x_i	2	3	6	9
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

1.15

x_i	0	3	6	8
p_i	0,3	0,1	0,4	0,1

1.16

x_i	1	3	5	9
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.17

x_i	–7	–4	1	3
p_i	0,1	0,1	0,4	0,4

1.18

x_i	4	5	8	11
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

1.19

x_i	6	8	10	12
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

1.20

x_i	–5	–3	1	4
p_i	0,1	0,5	0,3	0,1

1.21

x_i	–8	–6	–3	–1
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

1.22

x_i	–4	–1	1	4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

1.23

x_i	0	3	6	9
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

1.24

x_i	2	5	8	12
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.25

x_i	1	4	7	9
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

1.26

x_i	3	5	8	12
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.27

x_i	–3	0	4	6
p_i	0,3	0,5	0,1	0,1

1.28

x_i	–4	–1	2	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.29

x_i	5	7	8	10
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

1.30

x_i	–1	0	3	5
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Задача 2. Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией $F(x)$. Найти: 1) вероятность попадания случайной величины X в интервал (a, b); 2) дифференциальную функцию $f(x)$; 3) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X; 4) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$ [3].

2.1

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{x^2}{\pi^2}, & \text{при} \quad 0<x\le\pi,\\ 1, & \text{при} \quad x>\pi\end{cases}$$

$a=1;\quad b=2$

2.2

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{64}{81}x^2, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{9}{8}\\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{9}{8}\end{cases}$$

$a=0,54;\quad b=0,9$

2.3

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 2\\ (x-2)^2, & \text{при} \quad 2<x\le 3\\ 1, & \text{при} \quad x>3\end{cases}$$

$a=2,5;\quad b=3$

2.4

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{6}, & \text{при} \quad 1<x\le 3\\ 1, & \text{при} \quad x>3\end{cases}$$

$a=1;\quad b=2$

2.5

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{2x^2+3x}{2}, & \text{при} \quad 0<x\le 1\\ 1, & \text{при} \quad x>1\end{cases}$$

$a=0;\quad b=0,5$

2.6

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0\\ \dfrac{16x^2}{25}, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{5}{4}\\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{5}{4}\end{cases}$$

$a=0,5;\quad b=1$

2.7

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 1 \\ \ln x, & \text{при} \quad 1 < x \le e \\ 1, & \text{при} \quad x > e \end{cases}$$

$a = 2; \quad b = e$

2.8

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 100 \\ 1-\left(\dfrac{100}{x}\right)^3, & \text{при} \quad x > 100 \end{cases}$$

$a = 110; \quad b = 120$

2.9

$$F(x)=\begin{cases} e^x, & \text{при} \quad x \le 0 \\ 1, & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

$a = -2; \quad b = 0$

2.10

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ 1-e^{2x}, & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

$a = 0; \quad b = 2$

2.11

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{e^2}, & \text{при} \quad 0 < x \le e \\ 1, & \text{при} \quad x > e \end{cases}$$

$a = 1; \quad b = 2$

2.12

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 3 \\ \dfrac{x^4-81}{175}, & \text{при} \quad 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

$a = 3{,}2; \quad b = 3{,}5$

2.13

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^4}{16}, & \text{при} \quad 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

$a = 1; \quad b = 1{,}5$

2.14

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{25}, & \text{при} \quad 1 < x \le 6 \\ 1, & \text{при} \quad x > 6 \end{cases}$$

$a = 2; \quad b = 4$

2.15

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -2 \\ \dfrac{(x+2)^3}{216}, & \text{при} \quad -2 < x \le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

$a = -1; \quad b = 3$

2.16

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x^3-x}{60}, & \text{при} \quad 1 < x \le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

$a = 1; \quad b = 2$

2.17

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le 0 \\ \dfrac{64x^2}{49}, & \text{при} \quad 0 < x \le \dfrac{7}{8} \\ 1, & \text{при} \quad x > \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

$a = 0{,}5; \quad b = 1$

2.18

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x \le -2 \\ \dfrac{x^3+8}{16}, & \text{при} \quad -2 < x \le 2 \\ 1, & \text{при} \quad x > 2 \end{cases}$$

$a = -1; \quad b = 1$

2.19

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^3-x^2}{48}, & \text{при} \quad 1<x\le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

$a=2; \quad b=3$

2.20

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \\ x^5, & \text{при} \quad 0<x\le 1 \\ 1, & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

$a=0{,}1; \quad b=0{,}8$

2.21

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \\ \dfrac{x^2-x}{2}, & \text{при} \quad 0<x\le 2 \\ 1, & \text{при} \quad x>2 \end{cases}$$

$a=1; \quad b=1{,}5$

2.22

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \\ 2, & \text{при} \quad 0<x\le 1 \\ 1, & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

$a=0; \quad b=0{,}7$

2.23

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 3 \\ (x-3)^3, & \text{при} \quad 3<x\le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

$a=3; \quad b=3{,}5$

2.24

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 3 \\ \dfrac{(x-3)^2}{4}, & \text{при} \quad 3<x\le 5 \\ 1, & \text{при} \quad x>5 \end{cases}$$

$a=3; \quad b=4$

2.25

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le -1 \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & \text{при} \quad -1<x\le \dfrac{1}{3} \\ 1, & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$a=-0{,}5; \quad b=0$

2.26

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{4}(5x-x^2), & \text{при} \quad 0<x\le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

$a=1; \quad b=2$

2.27

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 0 \\ \dfrac{3x^2+5x}{8}, & \text{при} \quad 0<x\le 1 \\ 1, & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

$a=0; \quad b=0{,}5$

2.28

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 2 \\ \dfrac{(x-2)^3}{8}, & \text{при} \quad 2<x\le 4 \\ 1, & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

$a=3; \quad b=4$

2.29

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 4 \\ \dfrac{(x-4)^2}{4}, & \text{при} \quad 4<x\le 6 \\ 1, & \text{при} \quad x>6 \end{cases}$$

$a=4; \quad b=5$

2.30

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при} \quad x\le 2 \\ \dfrac{x^2-4}{5}, & \text{при} \quad 2<x\le 3 \\ 1, & \text{при} \quad x>3 \end{cases}$$

$a=2, \quad b=2{,}5$

Задача 3. На основании данных между личным располагаемым доходом x в млрд $ и y — видом потребительских расходов жителей США в млрд $ за 10 лет и предположения, что уравнение регрессии имеет вид:

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

требуется: 1) найти оценку коэффициентов регрессии, коэффициент корреляции; 2) оценить на уровне α = 5 % значимость уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера и t-критерия Стьюдента; 3) найти коэффициент детерминации R^2; 4) найти 95-процентные доверительные интервалы для среднего и индивидуального значений потребительских расходов при x = 723 для вариантов 1…15 и x = 989 для вариантов 16…30. Найти с надежностью 0,9 интервальные оценки коэффициента регрессии $\beta 1$ и дисперсии σ^2; 5) построить на графике наблюдаемые и оцененные значения уравнения регрессии.

3.1

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Питание y	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6	118,6	123,4

3.2

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Одежда y	36,3	36,6	37,3	38,9	39,6	42,6	44,2	46,9	46,9	49

3.3

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Бензин y	13,7	14,2	14,3	14,9	15,3	16	16,8	17,8	18,4	19,9

3.4

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Моторное масло y	5,2	5	4,7	4,7	4,9	5,2	5,5	5,6	5,6	5,3

3.5

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Табак y	10,7	10,9	11,2	11,2	11,4	11,3	11,6	11,7	11,8	11,7

3.6

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Косметика *y*	3,1	3,5	3,9	4,2	4,5	4,8	5,3	5,9	6,3	6,6

3.7

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Лекарства *y*	3,5	3,9	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5	5,8	6,4

3.8

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Плата за жилье *y*	60,9	64	67	70,7	74	77,4	81,6	85,3	89,1	93,5

3.9

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Газ *y*	3,9	4,1	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,4	5,7	5,9

3.10

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Вода *y*	2	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9	3	3	3,1

3.11

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Телефон *y*	4,7	5	5,4	5,7	6,1	6,6	7,3	8,1	8,7	9,5

3.12

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Медицинские услуги *y*	8,8	9	9,1	9,8	10,2	11,9	12,1	12,1	12,5	12,8

3.13

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Частное образование *y*	5,6	6	6,3	6,6	7	7,4	8,1	8,8	9,3	10

3.14

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Воздушный транспорт *y*	0,9	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6	1,7	2,1	2,4

3.15

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Услуги стоматологов *y*	3,2	3,2	3,3	3,5	3,4	3,9	4	4,1	4,3	4,4

3.16

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Питание *y*	125,9	129,4	130	132,4	129,4	128,1	132,3	139,7	145,2	146,1

3.17

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Одежда *y*	50	49,4	51,8	55,4	59,3	58,7	60,9	63,8	67,5	73,6

3.18

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Бензин *y*	21,4	22,9	24,2	25,4	26,2	24,8	25,6	26,8	27,7	28,3

3.19

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Моторное масло *y*	5	4,7	4,6	5	5,4	4,2	4,2	4,6	4,4	4,7

3.20

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Табак *y*	11,4	11,7	11,8	12,2	12,8	13	12,9	13,7	13,1	13,5

3.21

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Косметика *y*	6,8	7	7,1	7,4	7,9	7,8	7,4	7,5	7,8	8,1

3.22

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Лекарства *y*	7	7,7	8	8,7	9,3	9,8	9,7	10	10,2	10,4

3.23

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Плата за жилье *y*	98,4	102	106,4	112,5	118,2	124,2	128,3	134,9	141,3	148,5

3.24

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Газ *y*	6,2	6,3	6,4	6,6	6,4	6,5	6,6	6,7	6,5	6,7

3.25

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Вода *y*	3,3	3,5	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4	4,3	4,4	4,5

3.26

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Телефон *y*	10,4	11,2	11,7	12,4	13,7	14,4	15,9	17,1	18,3	20

3.27

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Медицинские услуги *y*	13,6	14,4	14,8	15,7	16,9	17,2	17,8	18	19,2	18,6

3.28

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Частное образование *y*	10,6	10,9	11,2	11,7	11,9	11,7	12,1	12,2	12,2	12,7

3.29

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Воздушный транспорт *y*	2,8	2,7	2,8	3,1	3,4	3,7	3,6	4	4,3	4,7

3.30

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход *x*	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Услуги стоматологов *y*	4,8	5,1	5,1	5,3	6,1	6,2	6,4	6,9	7,2	8,1

Задача 4. На основании данных между личным располагаемым доходом x_1 в млрд $, x_2 — индексом относительной цены потребительских расходов млрд $ и y — видом потребительских расходов жителей США в млрд $ за 10 лет и предположения, что уравнение регрессии имеет вид:

$$y(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon,$$

требуется:

1) найти оценку коэффициентов регрессии;

2) сравнить раздельное влияние на зависимую переменную каждой из объясняющих переменных, используя стандартизированные коэффициенты регрессии и коэффициенты эластичности;

3) проверить значимость коэффициентов регрессии при α = 0,05 и найти 95-процентныие ные доверительные интервалы для коэффициентов регрессии и дисперсии σ^2, а также доверительные интервалы для среднего и индивидуального значений y при условии, что объясняющие переменные приняли значения, задаваемые вектором $X_0^T = (1 \quad x_{10} \quad x_{20})$;

4) найти множественный и скорректированный коэффициенты детерминации и пояснить их смысл. Проверить значимость полученного уравнения регрессии на уровне $\alpha = 0{,}05$.

4.1

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на питание x_2	97,7	97,1	97,2	96,9	96,8	97,1	97,8	100	98,3	98,2
Питание y	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6	118,6	123,4

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.2

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на одежду x_2	102	101,4	101,1	100	99,6	98,8	98,2	98,2	100	101,7
Одежда y	36,3	36,6	37,3	38,9	39,6	42,6	44,2	46,9	46,9	49

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 105)$

4.3

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на бензин x_2	116,4	117,5	115,6	114,7	113	111,2	113,3	112,7	113,5	110,9
Бензин y	13,7	14,2	14,3	14,9	15,3	16	16,8	17,8	18,4	19,9

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 105)$

4.4

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3

4.4 (окончание)

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Индекс относительной цены на моторное масло x^2	110,1	106	109,2	107,6	108,3	104,2	104,7	104,5	105,2	104,4
Моторное масло y	5,2	5	4,7	4,7	4,9	5,2	5,5	5,6	5,6	5,3

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.5

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на табак x_2	86,4	87,9	87,9	87,4	88	88,4	90,4	91,8	92,8	94,9
Табак y	10,7	10,9	11,2	11,2	11,4	11,3	11,6	11,7	11,8	11,7

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 95)$

4.6

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на косметику x_2	119,8	117,5	116,1	115,5	114,2	112,6	110,2	105,9	105	104,1
Косметика y	3,1	3,5	3,9	4,2	4,5	4,8	5,3	5,9	6,3	6,6

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.7

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на лекарства x_2	139,9	137,6	134,7	130,5	127,5	125,4	122,8	119,8	116,3	112,2
Лекарства y	3,5	3,9	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5	5,8	6,4

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 110)$

4.8

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на оплату за жилье x_2	104,5	104,5	105	105	104,8	104,5	104	102,6	102,2	100,9
Плата за жилье y	60,9	64	67	70,7	74	77,4	81,6	85,3	89,1	93,5

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.9

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на газ x_2	106,1	111	111,4	109,6	108	106,9	105,4	103,1	100,4	97,5
Газ y	3,9	4,1	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,4	5,7	5,9

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.10

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на воду x_2	82,7	83,7	85,1	86	87,4	87,6	88	88,8	88,7	89,4
Вода y	2	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9	3	3	3,1

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 90)$

4.11

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены за телефон x_2	125,1	124,6	123,8	122	120,3	118,7	115,2	109,6	108,1	104,1
Телефон y	4,7	5	5,4	5,7	6,1	6,6	7,3	8,1	8,7	9,5

$X_0^T = (1 \quad 705 \quad 100)$

4.12

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на медицинские услуги x_2	79,5	80,1	81,4	82,5	83,2	83,9	85,2	88	91,9	93,3
Медицинские услуги y	8,8	9	9,1	9,8	10,2	11,9	12,1	12,1	12,5	12,8

$X_0^T = (1\ \ 705\ \ \ 95)$

4.13

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на частное образование x_2	87,1	87,3	87,9	88,6	89,4	90,3	91,3	92,7	94,3	94,9
Частное образование y	5,6	6	6,3	6,6	7	7,4	8,1	8,8	9,3	10

$X_0^T = (1\ \ 705\ \ \ 95)$

4.14

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на воздушный транспорт x_2	97,6	102,4	108	111,8	102,1	100,3	99,1	96,5	94,3	92,7
Воздушный транспорт y	0,9	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6	1,7	2,1	2,4

$X_0^T = (1\ \ 705\ \ \ 90)$

4.15

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	479,7	489,7	503,8	524,9	542,3	580,8	616,3	646,8	673,5	701,3
Индекс относительной цены на услуги стоматологов x_2	86,3	86,4	86	86,8	88,1	88,9	90,2	90,7	92,9	94,2
Услуги стоматологов y	3,2	3,2	3,3	3,5	3,4	3,9	4	4,1	4,3	4,4

$X_0^T = (1\ \ 705\ \ \ 95)$

4.16

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на питание x_2	99	100	98,3	100	108,1	112,5	111,9	108,9	107,4	110,6
Питание y	125,9	129,4	130	132,4	129,4	128,1	132,3	139,7	145,2	146,1

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 115)$

4.17

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на одежду x_2	102,9	102,5	101,3	100	98	95	91,2	89,5	87,9	84,2
Одежда y	50	49,4	51,8	55,4	59,3	58,7	60,9	63,8	67,5	73,6

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 80)$

4.18

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на бензин x_2	109,7	105,8	102,3	100	103,5	127	126	124,8	124,7	121,6
Бензин y	21,4	22,9	24,2	25,4	26,2	24,8	25,6	26,8	27,7	28,3

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 125)$

4.19

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на моторное масло x_2	102	101,2	103,1	100	108,6	156,8	157,7	161	172,2	169,5
Моторное масло y	5	4,7	4,6	5	5,4	4,2	4,2	4,6	4,4	4,7

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 170)$

4.20

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на табак x_2	96,8	99,5	99,2	100	97,3	92,7	92,3	91,4	90,6	89,2
Табак y	11,4	11,7	11,8	12,2	12,8	13	12,9	13,7	13,1	13,5

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 85)$

4.21

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на косметику x_2	104,2	102,1	100,9	100	97,2	97,9	102,5	103	102,9	101,3
Косметика y	6,8	7	7,1	7,4	7,9	7,8	7,4	7,5	7,8	8,1

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 100)$

4.22

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на лекарства x_2	108,5	105,9	103,3	100	94,9	89,3	89,9	90,6	91,2	91,1
Лекарства y	7	7,7	8	8,7	9,3	9,8	9,7	10	10,2	10,4

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 90)$

4.23

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на оплату за жилье x_2	100	99,6	100	100	99,1	95,1	93,3	93,7	94,5	94,7
Плата за жилье y	98,4	102	106,4	112,5	118,2	124,2	128,3	134,9	141,3	148,5

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 90)$

4.24

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на газ x_2	95	95,8	98,4	100	98,9	101,2	112,5	125,1	140,4	144,1
Газ y	6,2	6,3	6,4	6,6	6,4	6,5	6,6	6,7	6,5	6,7

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 90)$

4.25

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на воду x_2	91,3	94,1	99,8	100	99,5	95,9	97,7	103,2	108	112,3
Вода y	3,3	3,5	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4	4,3	4,4	4,5

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 115)$

4.26

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены за телефон x_2	100,9	97,6	98,1	100	97,1	92	88,2	86,8	83	78,5
Телефон y	10,4	11,2	11,7	12,4	13,7	14,4	15,9	17,1	18,3	20

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 105)$

4.27

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на медицинские услуги x_2	95,5	98	100,5	100	97,5	96,7	101	106,8	110,3	111,5
Медицинские услуги y	13,6	14,4	14,8	15,7	16,9	17,2	17,8	18	19,2	18,6

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 115)$

4.28

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на частное образование x_2	96,3	97,9	98,8	100	101,5	103,5	104,8	106,5	107	108
Частное образование y	10,6	10,9	11,2	11,7	11,9	11,7	12,1	12,2	12,2	12,7

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 110)$

4.29

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на воздушный транспорт x_2	95,4	98,3	101	100	98,3	96,9	98	100,9	101,2	98,9
Воздушный транспорт y	2,8	2,7	2,8	3,1	3,4	3,7	3,6	4	4,3	4,7

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 105)$

4.30

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Личный располагаемый доход x_1	722,5	751,6	779,2	810,3	865,3	858,4	875,8	906,8	942,9	988,8
Индекс относительной цены на услуги стоматологов x_2	96,6	97,5	99,5	100	97,4	95,4	97,7	98,9	100,4	100,4
Услуги стоматологов y	4,8	5,1	5,1	5,3	6,1	6,2	6,4	6,9	7,2	8,1

$X_0^T = (1 \quad 990 \quad 105)$

Задача 5. На основе данных задачи 4 и предположения, что уравнение регрессии имеет вид:

$$y(x) = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \varepsilon,$$

1) найти оценку коэффициентов регрессии.

2) оценить на уровне 5 % значимость уравнения регрессии с помощью F-критерия Фишера — Снедекора;

3) найти коэффициент детерминации R^2. Сравнить какое уравнение регрессии лучше для вашего случая: линейное или нелинейное.

Задача 6. Пусть y — вид потребительских расходов жителей США в млрд $ за 10 лет. Полагая, что тренд линейный $\hat{y} = b_0 + b_1 t$:

1) найти уравнение тренда и оценить его значимость на уровне 0,05;

2) дать точечный и с надежностью 0,95 интервальный прогнозы среднего и индивидуального значений расходов на одиннадцатый год.

6.1

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Питание *y*	99,7	100,9	102,5	103,5	104,6	108,8	113,7	116,6	118,6	123,4

6.2

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Одежда *y*	36,3	36,6	37,3	38,9	39,6	42,6	44,2	46,9	46,9	49

6.3

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Бензин *y*	13,7	14,2	14,3	14,9	15,3	16	16,8	17,8	18,4	19,9

6.4

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Моторное масло *y*	5,2	5	4,7	4,7	4,9	5,2	5,5	5,6	5,6	5,3

6.5

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Табак *y*	10,7	10,9	11,2	11,2	11,4	11,3	11,6	11,7	11,8	11,7

6.6

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Косметика *y*	3,1	3,5	3,9	4,2	4,5	4,8	5,3	5,9	6,3	6,6

6.7

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Лекарства *y*	3,5	3,9	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,5	5,8	6,4

6.8

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Плата за жилье *y*	60,9	64	67	70,7	74	77,4	81,6	85,3	89,1	93,5

6.9

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Газ y	3,9	4,1	4,3	4,7	4,9	5,1	5,3	5,4	5,7	5,9

6.10

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вода *y*	2	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	2,9	3	3	3,1

6.11

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Телефон *y*	4,7	5	5,4	5,7	6,1	6,6	7,3	8,1	8,7	9,5

6.12

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Медицинские услуги *y*	8,8	9	9,1	9,8	10,2	11,9	12,1	12,1	12,5	12,8

6.13

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частное образование *y*	5,6	6	6,3	6,6	7	7,4	8,1	8,8	9,3	10

6.14

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Воздушный транспорт *y*	0,9	0,9	1	1,1	1,2	1,4	1,6	1,7	2,1	2,4

6.15

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Услуги стоматологов *y*	3,2	3,2	3,3	3,5	3,4	3,9	4	4,1	4,3	4,4

6.16

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Питание *y*	125,9	129,4	130	132,4	129,4	128,1	132,3	139,7	145,2	146,1

6.17

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Одежда *y*	50	49,4	51,8	55,4	59,3	58,7	60,9	63,8	67,5	73,6

6.18

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Бензин *y*	21,4	22,9	24,2	25,4	26,2	24,8	25,6	26,8	27,7	28,3

6.19

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Моторное масло y	5	4,7	4,6	5	5,4	4,2	4,2	4,6	4,4	4,7

6.20

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Табак *y*	11,4	11,7	11,8	12,2	12,8	13	12,9	13,7	13,1	13,5

6.21

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Косметика *y*	6,8	7	7,1	7,4	7,9	7,8	7,4	7,5	7,8	8,1

6.22

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Лекарства *y*	7	7,7	8	8,7	9,3	9,8	9,7	10	10,2	10,4

6.23

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Плата за жилье y	98,4	102	106,4	112,5	118,2	124,2	128,3	134,9	141,3	148,5

6.24

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Газ y	6,2	6,3	6,4	6,6	6,4	6,5	6,6	6,7	6,5	6,7

6.25

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вода y	3,3	3,5	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4	4,3	4,4	4,5

6.26

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Телефон y	10,4	11,2	11,7	12,4	13,7	14,4	15,9	17,1	18,3	20

6.27

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Медицинские услуги y	13,6	14,4	14,8	15,7	16,9	17,2	17,8	18	19,2	18,6

6.28

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частное образование y	10,6	10,9	11,2	11,7	11,9	11,7	12,1	12,2	12,2	12,7

6.29

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Воздушный транспорт y	2,8	2,7	2,8	3,1	3,4	3,7	3,6	4	4,3	4,7

6.30

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Услуги стоматологов y	4,8	5,1	5,1	5,3	6,1	6,2	6,4	6,9	7,2	8,1

Библиографический список

1. *Кремер, Н. Ш., Путко, Б. А.* Эконометрика : учеб. для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2003. — 311 с.

2. *Доугерти, К.* Введение в эконометрику / пер. с англ. — М. : ИНФРА-М, 2001. — 402 с.

3. *Горелова, Г. В., Кацко, И. А.* Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. — Ростов н/Д : Феникс, 2004. — 476 с.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2013 г., поз. 15

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *И. Б. Чижикова*
Компьютерная правка и верстка *Н. А. Каширина*

Подписано в свет 28.11.2013.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,6. Объем данных 1,44 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru