

Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

В. Л. Харланов

ОСНОВЫ СЕЙСМОСТОЙКОГО СТРОИТЕЛЬСТВА

Учебное пособие

Волгоград. ВолгГАСУ. 2016



© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2016



УДК 699.841(075.8)
ББК 38.79я73
Х211

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, *В. Л. Мондрус*,
заведующий кафедрой строительной механики
Московского государственного строительного университета;
доктор технических наук, профессор, *В. А. Пшеничкина*,
заведующая кафедрой строительных конструкций, оснований и надежности сооружений
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Харланов, В. Л.

Х211 Основы сейсмостойкого строительства [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. Л. Харланов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (1,2 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2016. — Электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-810-0

Изложены современные методы расчета строительных конструкций на сейсмические нагрузки. Рассмотрены основные принципы определения сейсмических реакций.

Для магистров направления «Строительство».

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader и системой ссылок.

**УДК 699.841(075.8)
ББК 38.79я73**

ISBN 978-5-98276-810-0



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ	7
2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ	10
2.1. Аналитическое решение	10
2.2. Интеграл Дюамеля	13
2.3. Методы прямого интегрирования.....	14
3. МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	19
3.1. Принцип Даламбера.....	19
3.2. Частотный анализ уравнения движения.....	20
3.3. Нормальные координаты.....	22
3.4. Сложение форм колебаний.....	24
3.5. Многокомпонентное воздействие.....	28
3.6. Особенности поведения симметричных систем.....	29
4. РАСЧЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ	30
4.1. Формирование матрицы масс.....	30
4.2. Формирование матрицы коэффициентов затухания.....	32
4.3. Принципы построения расчетных динамических моделей	34
4.3.1. Основные положения	34
4.3.2. Сокращение несущественных степеней свободы	35
4.3.3. Сокращение поступательных степеней свободы	38
4.4. Введение грунтового основания в динамическую модель	42
5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	46
5.1. Геометрическая и физическая нелинейность	46
5.2. Уравнение движения.....	46
5.3. Приведение уравнения движения к виду, удобному для дифференцирования	48
5.4. Формирование касательной матрицы жесткости.....	49
5.4.1. Основные принципы формирования жесткости	49
5.4.2. Здания с жесткой конструктивной схемой	50
5.4.3. Каркасные железобетонные здания.....	52
5.4.4. Здания со стальным каркасом.....	54
5.5. Дegrадация жесткости и несущей способности элементов в процессе сейсмического воздействия .. 63	
5.5.1. Дegrадация железобетонных конструкций.....	64
5.5.2. Дegrадация стальных конструкций	65
5.6. Критерии разрушения.....	65
6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ	67
6.1. Вычисление сейсмических сил по формам колебаний	67
6.2. Нормирование коэффициента динамичности.....	69
6.3. Редуцирование реакций неупругих систем.....	69
6.4. Спектры реакций неупругих осцилляторов.....	73
6.5. Сложение форм колебаний.....	76
6.6. Расчет на сейсмические воздействия по нормам	77
6.6.1. Динамическая модель	77
6.6.2. Выбор направления сейсмического воздействия	77
7. СЕЙСМОИЗОЛЯЦИЯ	81
7.1. Классификация современных систем сейсмоизоляции	81
7.2. Нормирование систем сейсмоизоляции	82
7.3. Основные типы сейсмоизоляции	83
7.3.1. Резинометаллические сейсмоизолирующие опоры	83
7.3.2. Стальные витые пружины с демпферами вязкого трения.....	84
7.3.3. Изоляторы маятникового типа.....	85
7.3.4. Элементы гистерезисного затухания	87
7.3.5. Конструкции, использующие сухое трение Аммонтона — Кулона.....	88
7.4. Расчет сейсмоизолированных зданий	89
7.5. Спектры реакций сейсмоизолированных систем	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	93
ПРИЛОЖЕНИЕ. Функции VBA	94

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической основой всех расчетов на динамические воздействия является классическая механика. Законы динамики были установлены Ньютоном и носят его имя. Эти законы являются обобщением опытных фактов и образуют систему, которую нужно рассматривать в целом. Опытной проверке подвергается не каждый закон в отдельности, а вся система в целом.

Ввиду важности законов и определений, приведем их в том виде, в каком они были сформулированы самим Ньютоном (перевод акад. А. Н. Крылова).

Определение 1. Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.

Определение 2. Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе.

Определение 3. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Определение 4. Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Закон 1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Закон 2. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

Закон 3. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — воздействие двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

В соответствии с первым законом Ньютона определяют инерциальные и неинерциальные (движущиеся с ускорением) системы отсчета. Второй закон справедлив только в инерциальных системах отсчета. Третий закон дает определение силы как меры взаимодействия тел.

Математическая формулировка второго закона

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \quad (\text{B.1})$$

где m — масса; v — скорость; F — сила (векторная сумма всех сил), действующая на тело.

Величины v и F — векторные, поэтому классическую (ньютоновскую) механику иногда называют векторной.

В строительной механике в качестве сил, действующих на тело, принимают силы упругого отпора F_s , вязкого трения (демпфирования) F_d и независимые внешние нагрузки $P(t)$. Масса обычно не меняется во времени. Выразив силу F через вышеописанные силы, получим векторное уравнение движения

$$m\ddot{y}_{abc} = F_s + F_d + P(t), \quad (\text{B.2})$$

где \ddot{y}_{abc} — ускорение массы в инерциальной системе отсчета, точками обозначено дифференцирование по времени.

Проведем простейший эксперимент. Подвесим груз на пружине и немного оттянем груз вниз от положения равновесия. Затем отпустим груз. Груз будет колебаться вверх-вниз достаточно долго. Если изобразить колебания во времени, то получим кривую близкую к синусоиде. Закон изменения положения груза относительно начального равновесия вдоль вертикальной оси описывается функцией

$$y = A \cos(\omega t), \quad (\text{B.3})$$

где A и ω — постоянные, называемые амплитудой и круговой частотой колебаний.

Дифференцируя дважды уравнение (B.3), получим значение скорости и ускорения

$$\dot{y} = -A\omega \sin(\omega t), \quad \ddot{y} = -A\omega^2 \cos(\omega t). \quad (\text{B.4})$$

Сравнивая выражения (B.3) и (B.4), получим

$$\ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \dot{y} = -\omega y \operatorname{tg}(\omega t). \quad (\text{B.5})$$

Пренебрегая силами вязкого сопротивления и при отсутствии внешней динамической силы, с учетом (B.5) уравнение движения (B.2) примет вид

$$-m\omega^2 y = F_s.$$

Изменяя массу груза в проведенном эксперименте, можно убедиться, что величина $m\omega^2$ постоянна и численно равна жесткости пружины k . Действительно, согласно закону Гука, удлинение пружины пропорционально приложенной к ней силе. Таким образом

$$F_s = -k y.$$

Колебания в рассмотренном опыте со временем затухают. Опыты показывают, что при движении тело испытывает сопротивление, сила которого приблизительно пропорциональна скорости

$$F_d = -c \dot{y},$$

где c — коэффициент вязкого трения.

Сейсмическое воздействие является кинематическим, т. е. $P(t) = 0$. В качестве системы отсчета обычно принимают неинерциальную систему, расположенную на фундаменте сооружения. Уравнение движения при поступательном движении основания примет вид

$$m(\ddot{y} + \ddot{y}_0) = F_d + F_s, \quad (B.6)$$

где \ddot{y}_0 — ускорение свободной поверхности грунта — акселерограмма землетрясения.

Уравнение (B.6) является основным для расчета на сейсмические воздействия линейных, нелинейных и неупругих систем на поступательные колебания основания, вызванного сейсмическим воздействием.

В настоящее время для анализа динамической реакции зданий и сооружений применяют два принципиальных подхода: детерминированный и вероятностный. Выбор метода зависит от способа определения нагрузки. Детерминированный метод применяют, когда изменение нагрузки во времени хорошо известно, даже если она является нерегулярной и носит случайный характер. Анализ динамической реакции в детерминированном методе, как правило, выполняют на всем временном интервале. В детерминированном анализе выделяются три основных направления: спектральный анализ, модальный анализ, прямое интегрирование уравнений движения. Спектральный анализ не полностью детерминирован, так как реакции системы определяют не по акселерограмме землетрясения, а по спектру динамических реакций линейных осцилляторов. Этот спектр основан не только на статистической обработке акселерограмм реальных землетрясений, но и в некоторой степени учитывает особенности работы реальных конструкций на динамические нагрузки высокой интенсивности.

Записи реальных акселерограмм имеют три компонента: две горизонтальные, как правило, в направлениях север-юг и запад-восток и вертикальную. Основными реакциями строительных систем на сейсмические воздействия являются упругий отпор и перемещения. Производные реакции — скорости и ускорения. Если связь между отпором и перемещением линейна, то такие перемещения называются линейными. Если траектория разгрузки совпадает с траекторией нагружения, то системы являются упругими. В упругих системах после снятия нагрузки нет остаточных перемещений.

В табл. B.1 приведены возможности и ограничения трех методов определения сейсмической реакции строительных систем. Количество динамических степеней свободы для всех методов не ограничено.

Таблица B.1

Ограничение методов определения сейсмической реакции

Метод	Количество компонент	Характеристика систем
Прямое интегрирование	3	Нелинейные, неупругие
Модальный анализ	3	Линейные, упругие, с малым демпфированием
Спектральный анализ	1	То же

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Современная сейсмология устанавливает причины землетрясения как результат разрушения основных пород в результате тектонических процессов. Энергия, выделяемая в результате такого разрушения, измеряется в условных единицах — магнитудах. На поверхности земли землетрясение проявляется движением грунта. Это движение может быть записано регистрирующими приборами. Обычно запись движения грунта представляется в виде акселерограммы — зависимости ускорения грунта от времени. Как правило, регистрация ведется в трех ортогональных направлениях: север — юг (с — ю), запад — восток (з — в) и вертикальном (в). Более удобно обозначать эти направления декартовыми координатами X , Y и Z . На рис. 1.1 приведен пример записи акселерограммы землетрясения по трем направлениям.

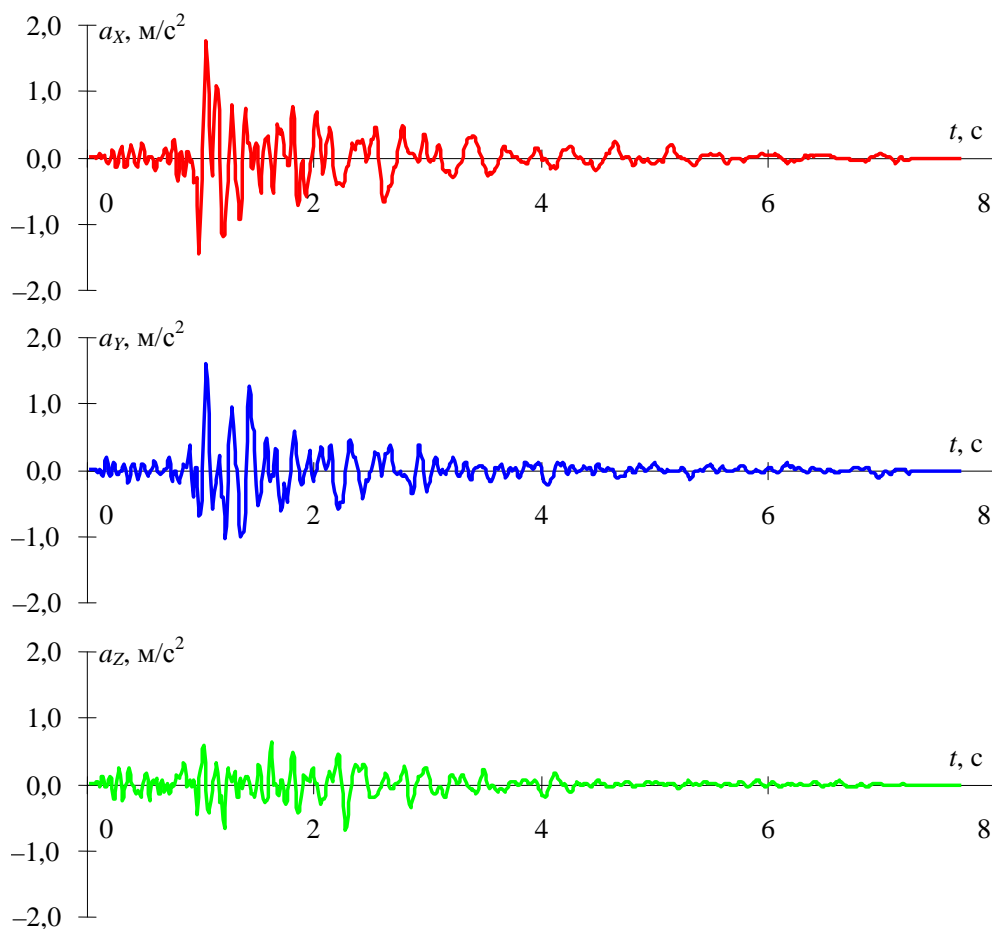


Рис. 1.1. Компоненты акселерограммы землетрясения

Для исследования интенсивности землетрясения удобнее представить все три компоненты в виде глобальной акселерограммы с максимальной амплитудой. Для построения акселерограммы главного направления определяется максимальная амплитуда с учетом трех компонент. Затем определяются направляющие косинусы и строится глобальная акселерограмма. Если известны координаты очага землетрясения, то глобальная акселерограмма может быть построена по азимуту очага. На рис. 1.2 представлена глобальная акселерограмма, построенная по трем исходным компонентам рис. 1.1.

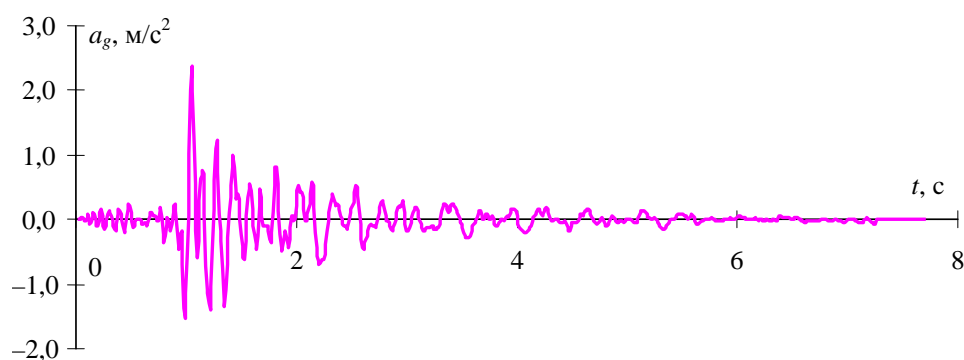


Рис. 1.2. Акселерограмма главного направления

Основной характеристикой землетрясения является его интенсивность или сила, выраженная в баллах. Существует несколько различных шкал интенсивности. Наиболее распространенные: Модифицированная шкала Меркалли (США) — ММ, Международная шкала Медведева (СССР) — Шпонхойера (ГДР) — Карника (ЧССР) — МСК-64, шкала сейсмической интенсивности JMA (Япония). По мнению японского ученого Ш. Окомото, шкала МСК-64 наиболее удачна для определения интенсивности землетрясения, так как учитывает три четких фактора:

- 1) ощущения людей и воздействия на различные предметы;
- 2) степень повреждения зданий различных типов;
- 3) остаточные явления в грунтах и изменение режима подземных вод.

Все шкалы интенсивности являются субъективными. Другими словами, по имеющейся записи акселерограммы нельзя однозначно определить интенсивность землетрясения и, следовательно, степень возможных повреждений зданий и сооружений. Тем не менее можно установить некоторые интервалы для связи интенсивности и некоторых характеристик акселерограммы.

Во всех нормах сейсмостойкого строительства за основную характеристику акселерограммы принята ее максимальная амплитуда $\ddot{y}_{0,\max}$. В нормах РФ принято следующее соответствие между максимальной амплитудой и интенсивностью: 1 м/с^2 соответствует интенсивности 7, 2 м/с^2 — 8 и 4 м/с^2 — 9 баллам. Второй важной характеристикой является спектральный состав акселерограммы. В нормах эта характеристика нормируется графиком коэффициента динамичности. Спектральный состав зависит от свойств грунтов площадки, на которой записана акселерограмма. Более подробно [см. в главе 6](#).

Кроме этих двух критериев предложены энергетические, характеризующие кинетическую энергию, акселерограммы:

интенсивность Ариаса

$$I_A = \int_0^t \ddot{y}_o(t)^2 dt; \quad (1.1)$$

абсолютная кумулятивная скорость (CAV) или критерий импульса

$$CAV = \int_0^t |\ddot{y}_o(t)| dt; \quad (1.2)$$

удельная плотность энергии

$$SED = \int_0^t (\dot{y}_o(t))^2 dt. \quad (1.3)$$

Прочие характеристики акселерограммы: продолжительность воздействия, «резонансная» частота, максимальная реакция линейного осциллятора. В таблице 1.1 приведены характеристики акселерограмм землетрясений интенсивностью 8—9 баллов.

Приблизительные зависимости между некоторыми характеристиками и силой землетрясения в баллах для грунтов I категории по сейсмическим свойствам:

$$I = 1,52 \ln(\ddot{y}_{o, \max}) + 7,2, R^2 = 0,85;$$

$$I = 1,3 \ln(CAV) + 8, R^2 = 0,92,$$

где I — интенсивность в баллах; R^2 — критерий достоверности.

Таблица 1.1

Характеристики акселерограмм землетрясений

Критерии	Турция	Северная Италия	Центральная Италия	Босния и Герцеговина	Черногория	Эль-Центро
$\ddot{y}_{o, \max}$, м/с ²	3,386	3,395	3,972	3,551	3,680	3,35
I_A	4,112	3,267	1,003	2,960	12,295	6,792
CAV	4,214	4,050	1,289	3,390	14,751	6,410
SED	0,0241	0,0144	0,00128	0,0135	0,279	0,220
S_{\max} , кН	9,25	11,35	7,71	12,81	10,26	9,43
$T_{\text{рез}}$, с	0,5	0,16	0,12	0,22	0,98	0,21
Длина, с	15,86	24,6	7,28	37,12	47,82	11,61
Категория грунта	II	I	I	II	III	II
Дата	19.08.1976	16.09.1976	14.06.1972	13.08.1981	16.04.1979	18.06.1940

Примечание к табл. 1.1: $\ddot{y}_{o, \max}$ — максимальная амплитуда акселерограммы; S_{\max} — максимальный отпор линейного осциллятора; $T_{\text{рез}}$ — значение периода линейного осциллятора, при котором возникает максимальный отпор; I_A , CAV, SED — энергетические критерии акселерограммы. Категория грунта соответствует принятой в СП 14.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

2.1. Аналитическое решение

Для простоты рассмотрим систему с одной степенью динамической свободы. Обычно такие системы представляются консолью с массой на невесомом стержне конечной жесткости (рис. 2.1).

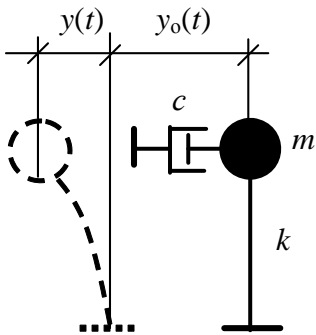


Рис. 2.1. Линейный осциллятор

Для упругой линейной системы справедливы соотношения

$$F_s = -k y(t), \quad F_d = -c \dot{y}(t),$$

где k и c — коэффициенты жесткости и вязкого трения.

Подставив значения для упругого отпора и сил вязкого трения в уравнение (B.6), получим уравнение для упругой линейной системы

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = m \ddot{y}_0, \quad (2.1)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени. Знак минус перед правой частью опущен, так как направление воздействия не имеет значения.

С математической точки зрения получено неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение уравнения (2.1) представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + ky = 0. \quad (2.2)$$

С физической точки зрения уравнение (2.2) является уравнением свободных колебаний неконсервативной системы.

Общее решение уравнения (2.2), в свою очередь, состоит из суммы двух линейно независимых частных решений.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{\lambda t}, \quad \text{где } \lambda = \text{const},$$

тогда

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставив полученные значения в уравнение и исключив множитель $\exp(\lambda t)$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 m + \lambda c + k = 0.$$

Решение этого уравнения относительно λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Введем обозначения $\alpha = -\frac{c}{2m}$ и $\beta = \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} = \sqrt{\frac{k}{m} (\xi^2 - 1)}$, где

$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ — коэффициент затухания, тогда корни уравнения можно записать в виде $\lambda_1 = \alpha + \beta$, $\lambda_2 = \alpha - \beta$.

Возможны следующие случаи решения характеристического уравнения:

1) $\xi = 1$ — уравнение имеет два кратных корня ($\lambda_1 = \lambda_2$);

2) $\xi > 1$ — уравнение имеет два действительных корня ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), причем оба корня отрицательны;

3) $\xi < 1$ — уравнение имеет два комплексных корня.

Общее решение уравнения (2.2) для трех случаев демпфирования:

1) система с критическим демпфированием

$$y = (C_1 + C_2 t) e^{\alpha t};$$

2) передемпфированная система

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta t)} + C_2 e^{(\alpha - \beta t)};$$

3) недодемпфированная система

$$y = e^{\alpha t} [C_1 \cos(\omega^* t) + C_2 \sin(\omega^* t)]$$

или

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\omega^* t + \varphi_0),$$

где $\omega^* = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$ — частота собственных колебаний демпфированной системы; $A e^{\alpha t}$ — амплитуда колебаний; φ_0 — начальная фаза. Величины A и φ_0 определяются начальными условиями.

Для всех материалов, применяемых в строительстве, коэффициент затухания много меньше критического ($\xi \ll 1$), поэтому во всех динамических расчетах принимают $\omega^* = \omega$, где ω — собственная частота колебаний консервативной системы ($\xi = 0$).

Для исследования уравнения (2.1) удобно принять массу $m = 1$. Тогда, с учетом введенных ранее обозначений, получим выражение

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \ddot{y}_0. \quad (2.3)$$

С физической точки зрения уравнение (2.3) является уравнением движения системы с одной степенью свободы и единичной массой, или линейным осциллятором. Все линейные системы с конечным числом динамических степеней свободы могут быть приведены к этому уравнению.

Частное решение неоднородного уравнения (2.3) зависит от вида правой части. Если правая часть имеет вид

$$\ddot{y}_0 = P(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) + Q(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены от t , то форма частного решения определяется следующим образом:

1) если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения

$$y^* = U(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) + V(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t); \quad (2.4)$$

2) если число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение

$$y^* = t \left[U(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) + V(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right]. \quad (2.5)$$

При этом решение сохраняется, если один из многочленов правой части тождественно равен нулю.

Пример 2.1. Рассмотрим линейный осциллятор с периодом собственных колебаний $T = 0,5$ с и коэффициентом затухания $\xi = 0,05$. Акселерограмму зададим функцией вида $\ddot{y}_0(t) = t e^{-2t} \sin(10t)$. Уравнение осциллятора

$$\ddot{y} + 2 \cdot 0,05 \cdot 12,57 \dot{y} + 12,57^2 y = t e^{-2t} \sin(10t).$$

Корни характеристического уравнения линейного осциллятора

$$\lambda_1 = -0,63 + i12,55, \lambda_2 = -0,63 - i12,55.$$

Так как число $\alpha + i\beta$ ($-2 + i10$) не является корнем характеристического уравнения, то частное решение представим в виде (2.4)

$$y^* = (U_0 + U_1 t)e^{-2t} \cos(10t) + (V_0 + V_1 t)e^{-2t} \sin(10t).$$

Подставив частное решение в исходное уравнение и сгруппировав коэффициенты при \sin , \cos , $t\sin$ и $t\cos$, получим систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных

$$\begin{cases} V_0(\omega^2 + 2\xi\omega\alpha + \alpha^2 - \beta^2) + 2V_1(\xi\omega + \alpha) - 2U_0\beta(\xi\omega + \alpha) - 2U_1\beta = 0; \\ 2V_0\beta(\xi\omega + \alpha) + 2V_1\beta + U_0(\omega^2 + 2\xi\omega\alpha + \alpha^2 - \beta^2) - 2U_1(\xi\omega + \alpha) = 0; \\ V_1(\omega^2 + 2\xi\omega\alpha + \alpha^2 - \beta^2) - 2U_1\beta(\xi\omega + \alpha) = 1; \\ 2V_1\beta(\xi\omega + \alpha) + U_1(\omega^2 + 2\xi\omega\alpha + \alpha^2 - \beta^2) = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения коэффициентов полиномов U и V :

$$V_0 = 3,97e - 3, V_1 = 1,39e - 2, U_0 = -2,54e - 3, U_1 = 6,41e - 3.$$

Общее решение однородного уравнения представим в виде

$$y_0 = e^{-\xi\omega t} [C_1 \cos(\omega^* t) + C_2 \sin(\omega^* t)],$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяют из граничных условий при $t = 0$.

$$C_1 = 2,54e - 3, C_2 = -3,95e - 3,$$

$$\omega^* = \omega\sqrt{1-\xi} = 12,57\sqrt{1-0,05^2} = 12,55.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(t) = e^{-0,63t} \{2,54e - 3 \cos(12,55t) - 3,95e - 3 \sin(12,55t)\} + e^{-2t} \{(-2,54e - 3 + 6,41e - 3 t) \cos(10t) + (3,97e - 3 + 1,39e - 2 t) \sin(10t)\}.$$

Графическое представление решения приведено на рис. 2.2.

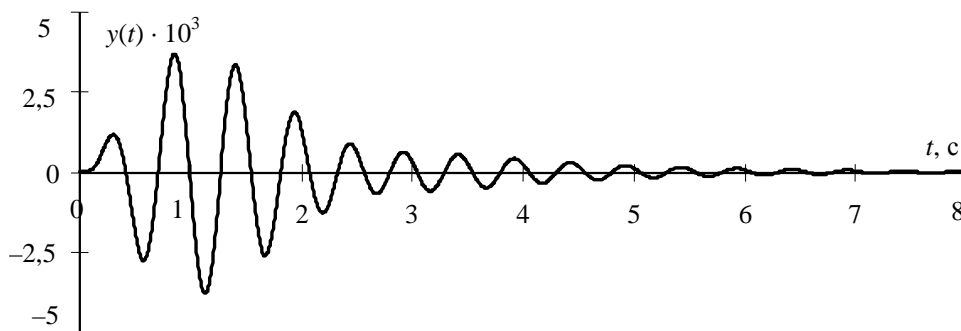


Рис. 2.2. Колебания системы с одной степенью свободы

2.2. Интеграл Дюамеля

С математической точки зрения акселерограмма землетрясения является стохастическим процессом. Аналитическое решение в явном виде для такого процесса не существует. Дюамель предложил рассматривать акселерограмму как сумму мгновенных импульсов прямоугольной формы продолжительностью τ . Решение уравнения движения на одиночный мгновенный импульс для линейного осциллятора представимо в форме

$$y = A e^{-\xi\omega t} \sin(\omega^* \bar{t} + \varphi_0),$$

где $\bar{t} = t - \tau$.

В момент времени $t = \tau$, $y(0) \approx 0$, $\dot{y}(0) = \ddot{y}_0 \tau$. Начальное условие для скорости получено из закона сохранения импульса. Из начальных условий найдем $A = \ddot{y}_0 \tau / \omega^*$, $\varphi_0 = 0$. Общее решение

$$y = \frac{\ddot{y}_0 \tau}{\omega^*} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega^* (t - \tau)). \quad (2.6)$$

Воспользуемся приближенной функцией (2.6) для поиска частного решения уравнения движения с произвольной правой частью. Приращение перемещения на интервале времени $d\tau$ от приращения импульса будет

$$dy = \frac{\ddot{y}_0 d\tau}{\omega^*} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega^* (t - \tau)). \quad (2.7)$$

Для того чтобы получить значение перемещения в любой момент времени, необходимо проинтегрировать выражение (2.7)

$$y(t) = \frac{1}{\omega^*} \int_0^t \ddot{y}_o(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega^*(t-\tau)) d\tau. \quad (2.8)$$

Полученное выражение называется интегралом Дюамеля и является общим решением неоднородного линейного дифференциального уравнения с произвольной правой частью и нулевыми начальными условиями. Очевидно, что само это решение требует численного интегрирования.

2.3. Методы прямого интегрирования

Интеграл Дюамеля может быть проинтегрирован любым численным методом. Основной недостаток численного решения интеграла Дюамеля в его громоздкости и пригодности только для линейных систем с постоянными коэффициентами. Для решения уравнения движения общего вида существуют более эффективные методы, получившие наименование методов прямого интегрирования.

К этим методам относятся метод центральных разностей и решения, основанные на методе конечных элементов. Суть любого численного решения состоит в том, что весь диапазон разбивается на малые участки и на каждом участке рассматриваются хорошо интегрируемые функции, в той или иной степени приближенные к точному решению.

Метод центральных разностей основан на простой геометрической интерпретации скорости и ускорения

$$\dot{y}(t + \Delta t) = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t};$$

$$\ddot{y}(t + \Delta t) = \frac{\dot{y}(t + \Delta t) - \dot{y}(t)}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - 2y(t) + y(t - \Delta t)}{\Delta t^2}.$$

Подставив выражения для скорости и ускорения в уравнение движения, находят перемещение для времени $t + \Delta t$. Основной недостаток метода центральных разностей — постоянный шаг интегрирования на всем временном диапазоне.

Метод конечных элементов основан на задании искомой функции в виде полинома. Рассмотрим функцию формы в точке $t + \tau$ ($\tau \in [0, \Delta t]$) в виде параболы ([рис. 2.3](#))

$$y(t + \tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2,$$

тогда скорость и ускорение на интервале

$$\dot{y}(t + \tau) = a_1 + 2a_2\tau, \quad \ddot{y}(t + \tau) = 2a_2.$$

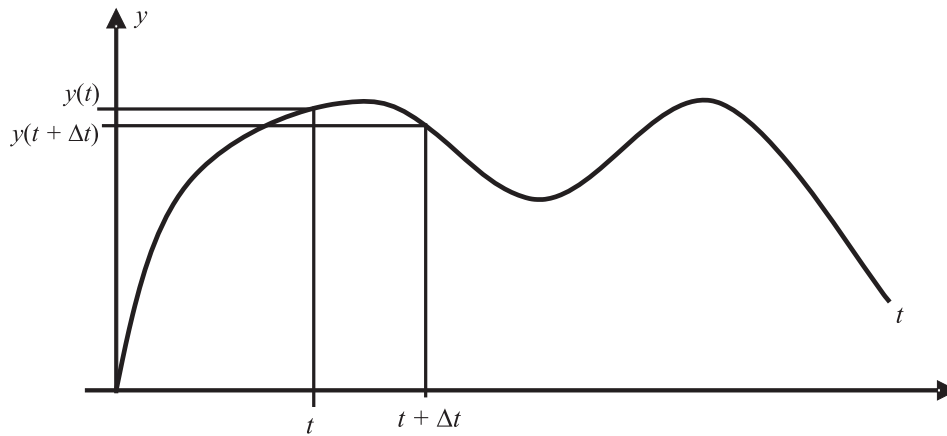


Рис. 2.3. К определению функции формы

Коэффициенты a_0 и a_1 определяются граничными условиями. При $\tau = 0 \rightarrow a_0 = y(t)$, $a_1 = \dot{y}(t)$. Коэффициент a_2 определяется на границах интервала при $\tau = 0$ и $\tau = \Delta t$

$$\ddot{y}(t) = 2a_2, \quad \ddot{y}(t + \Delta t) = 2a_2,$$

тогда

$$a_2 = \frac{\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t + \Delta t)}{4}$$

или

$$a_2 = \frac{\ddot{y}(t)}{2} + \frac{\Delta\ddot{y}}{4},$$

где $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}(t + \Delta t) - \ddot{y}(t)$ — приращение ускорения на интервале.

Подставив найденные значения коэффициентов a_i в выражения для перемещения и скорости, получим для $\tau = \Delta t$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \dot{y}(t)\Delta t + (\ddot{y}(t) / 2 + \Delta\ddot{y} / 4)\Delta t^2;$$

$$\dot{y}(t + \Delta t) = \dot{y}(t) + (\ddot{y}(t) + \Delta\ddot{y} / 2)\Delta t$$

или, заменив разности $y(t + \Delta t) - y(t)$ и $\dot{y}(t + \Delta t) - \dot{y}(t)$ соответствующими приращениями Δy и $\Delta\dot{y}$, получим

$$\Delta y = \dot{y}(t)\Delta t + (\ddot{y}(t) / 2 + \Delta\ddot{y} / 4)\Delta t^2;$$

$$\Delta\dot{y} = (\ddot{y}(t) + \Delta\ddot{y} / 2)\Delta t.$$

Выразим приращения скорости и ускорения через приращение перемещения

$$\Delta\dot{y} = 2\Delta y / \Delta t - 2\dot{y}(t);$$

$$\Delta\ddot{y} = 4\Delta y / \Delta t^2 - 4\dot{y}(t) / \Delta t - 2\ddot{y}(t).$$

Подставив полученные значения приращений в уравнение движения, получим разрешающее уравнение относительно приращения перемещения

$$\bar{k} \Delta y = \bar{p}, \quad (2.9)$$

где

$$\bar{k} = k + 4m / \Delta t^2 + 2c / \Delta t;$$

$$\bar{p} = m[\Delta \ddot{y}_0 + 4\dot{y} / \Delta t + 2\ddot{y}(t)] + 2c \dot{y}(t);$$

$$\Delta \ddot{y}_0 = \ddot{y}_0(t + \Delta t) - \ddot{y}_0(t).$$

После определения Δy вычисляют приращения скорости и полные значения перемещений и скоростей в конце интервала

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta y;$$

$$\dot{y}(t + \Delta t) = \dot{y}(t) + \Delta \dot{y}.$$

Ускорение находится из условия равновесия

$$\ddot{y}(t + \Delta t) = \ddot{y}_0(t + \Delta t) - [k y(t + \Delta t) + c \dot{y}(t + \Delta t)] / m.$$

Метод называется методом Ньюмарка или методом с постоянным ускорением на шаге интегрирования.

Следующий метод называется методом линейного ускорения. Функция формы принимается в виде кубического полинома

$$y(t + \tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3.$$

Определив коэффициенты a_i из граничных условий, найдем приращения для скорости и ускорения

$$\Delta \dot{y} = 3\Delta y / \Delta t - 3\dot{y}(t) - \ddot{y}(t)\Delta t / 2;$$

$$\Delta \ddot{y} = 6\Delta y / \Delta t^2 - 6\dot{y}(t) / \Delta t - 3\ddot{y}(t).$$

Приращение перемещения также определяется из уравнения (2.9), в котором

$$\bar{k} = k + 6m / \Delta t^2 + 3c / \Delta t;$$

$$\bar{p} = m[\Delta \ddot{y}_0 + 6\dot{y}(t) / \Delta t + 3\ddot{y}(t)] + c[3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\Delta t / 2].$$

Дальнейший алгоритм такой же, как и для метода Ньюмарка.

Метод линейного ускорения, в отличие от метода Ньюмарка, является условно устойчивым, т. е. сходимость метода существенно зависит от величины шага интегрирования. Шаг интегрирования для этого метода не должен превышать $1/20$ периода собственных колебаний. В противном случае происходит неограниченный рост перемещений в процессе интегрирования уравнения движения. Для устранения этого недостатка Вильсоном предложено рассматривать расширенный интервал времени $\tau = \theta \Delta t$. При $\theta > 1,37$ процесс становится устойчивым.

Формулы для определения перемещений преобразуют следующим образом после подстановки расширенного интервала τ :

$$\Delta \dot{y} = 3\Delta y / \tau - 3\dot{y}(t) - \ddot{y}(t)\tau / 2;$$

$$\Delta \ddot{y} = 6\Delta y / \tau^2 - 6\dot{y}(t) / \tau - 3\ddot{y}(t);$$

$$\bar{k} = k + 6m / \tau^2 + 3c / \tau;$$

$$\bar{p} = m[\Delta \ddot{y}_0 \theta + 6\dot{y}(t) / \tau + 3\ddot{y}(t)] + c[3\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\tau / 2].$$

После определения приращения перемещения на расширенном интервале определяется приращение ускорения на исходном интервале Δt

$$\Delta \ddot{y} = [6\Delta y / \tau^2 - 6\dot{y}(t) / \tau - 3\ddot{y}(t)] / \theta.$$

Метод получил наименование θ -метод Вильсона. По сравнению с методом Ньюмарка этот метод не имеет особых преимуществ. Его недостатком является тот факт, что при $\theta > 1,5$ происходит искусственное уменьшение частоты колебаний и увеличение затухания.

Пример 2.2. Проинтегрируем уравнение движения из примера 2.1 методом Ньюмарка. Шаг интегрирования принят $1/20 T$ и равен 0,025 с. Вычисления сведены в [табл. 2.1](#). Полученное решение представлено на рис. 2.4.

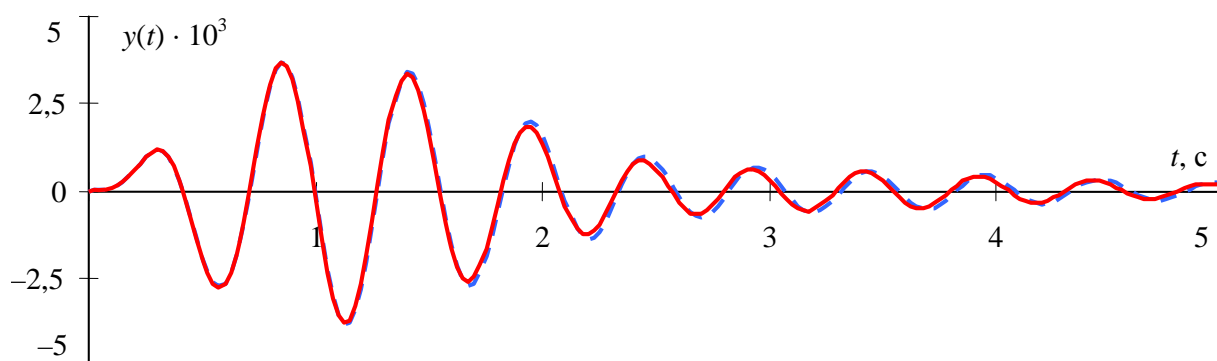


Рис. 2.4. Сравнение численного интегрирования методом Ньюмарка (—) с аналитическим (пунктир) решением

Сравнение результатов численного решения с аналитическим показывает хорошую сходимость метода Ньюмарка. Существенные погрешности вблизи нулевых значений перемещений, связанные с ошибками округления, не оказывают влияния на значения реакций вблизи максимумов. При уменьшении шага интегрирования в 2 раза до $1/40 T$ погрешности стремятся к нулю.

Строго говоря, неконсервативные системы не имеют периода, так как по определению период — расстояние по временной оси между одинаковыми амплитудами. В практике расчетов строительных конструкций под термином «период» обычно понимается величина обратная частоте колебаний, а не его математическое определение. Именно в такой интерпретации этот термин используется в дальнейшем изложении.

Таблица 2.1

Линейный осциллятор

t, c	\bar{k}	\bar{p}	Δy	\tilde{y}	k	y	\dot{y}	\ddot{y}	\ddot{y}_0	Погрешность, %
0	0	0	0	0,00E+00	158	0	0	0	0	0
0,025	6658	0,006	8,84E-07	7,07E-05	158	9E-07	7,07E-05	0,0057	0,0059	-184
0,050	6658	0,039	5,8E-06	3,22E-04	158	7E-06	3,93E-04	0,0201	0,0217	-42
0,075	6658	0,126	1,9E-05	7,33E-04	158	3E-05	1,13E-03	0,0385	0,0440	-16
0,100	6658	0,285	4,28E-05	1,17E-03	158	7E-05	2,30E-03	0,0552	0,0689	-7,24
0,125	6658	0,507	7,62E-05	1,50E-03	158	1,45E-04	3,80E-03	0,0648	0,0924	-3,21
0,150	6658	0,765	1,15E-04	1,60E-03	158	2,60E-04	5,40E-03	0,0631	0,1108	-1,09
0,175	6658	1,013	1,52E-04	1,39E-03	158	4,12E-04	6,78E-03	0,0478	0,1213	0,12
0,200	6658	1,198	1,80E-04	8,34E-04	158	5,92E-04	7,62E-03	0,0189	0,1219	0,85
0,225	6658	1,265	1,90E-04	-3,1E-05	158	7,82E-04	7,58E-03	-0,0214	0,1116	1,29
...										
0,6	6658	0,533	8E-05	8,77E-03	158	-2,66E-03	7,58E-03	0,3600	-0,0505	0,55
...										
1,125	6658	-1,748	-2,61E-04	1,19E-02	158	-3,81E-03	-4,55E-03	0,4926	-0,1148	-0,24
...										
1,925	6658	1,593	2,39E-04	-7,21E-03	158	1,94E-03	5,97E-03	-0,2979	0,016	-5,00
...										
3,425	6658	0,391	5,865-05	-2,15E-03	158	5,64E-04	1,27E-03	-0,0896	0,0011	-3,83

3. МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Принцип Даламбера

При исследовании системы с одной степенью свободы значение силы отпора было получено из решения уравнения движения консервативной системы и подтверждено опытом ([см. «Введение»](#)). Было также установлено, что сила отпора в точности соответствует закону Гука. В дальнейших выкладках по существу было использовано уравнение равновесия.

В 1743 г. французский математик сформулировал утверждение, получившее название «принцип Даламбера». Согласно этому утверждению все законы движения системы материальных точек могут быть сведены к законам равновесия. Если геометрически неизменяемая система материальных точек со связями находится в состоянии равновесия под действием внешних нагрузок, то справедливо условие

$$F_{si} + P_i = 0 \quad \{i = 1, 2, \dots, n\},$$

где F_{si} — результирующая реакция; P_i — результирующая всех внешних (активных) сил, действующих на точку i .

Если активная сила изменяется во времени, то, согласно второму закону Ньютона, происходит изменение количества движения

$$m_i \ddot{y}_i = F_{si} + P_i.$$

Если ввести силу $S_i = P_i - m_i \ddot{y}_i$, получившую название «потерянной силы», то второй закон Ньютона запишется в виде

$$F_{si} + S_i = 0.$$

Это уравнение движения по своей структуре полностью совпадает с уравнением равновесия. Потерянную силу S_i можно представить в виде суммы двух сил: активной силы P_i и так называемой силы инерции $I_i = -m_i \ddot{y}_i$. Тогда уравнение движения запишется в виде уравнения равновесия трех сил

$$F_{si} + P_i + I_i = 0.$$

Иллюстрация идеи Даламбера представлена на [рис. 3.1](#). На рис. 3.1, *а* — векторное изображение закона Ньютона, рис. 3.1, *б* иллюстрирует идею принципа Даламбера, рис. 3.1, *в* дает представление о потерянной силе.

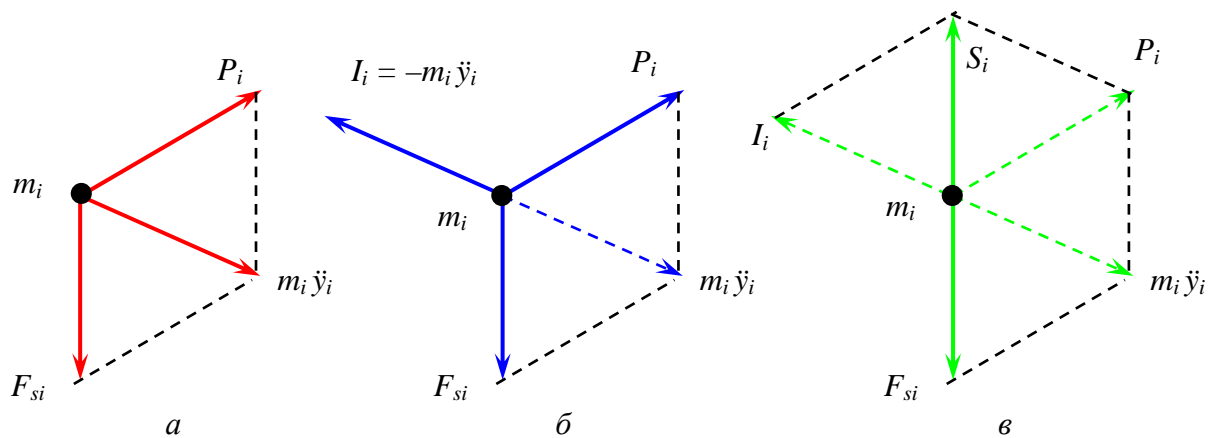


Рис. 3.1. Идея Даламбера: *a* — векторное изображение закона Ньютона; *б* — принцип Даламбера; *в* — потерянная сила

Даламбер обобщил условие равновесия одной точки на произвольную механическую систему. В соответствии с принципом Даламбера динамическое условие равновесия можно получить, если к статическому уравнению равновесия добавить инерционную силу. Благодаря этому принципу вывод уравнения динамического равновесия для произвольной системы существенно упрощается. Уравнение статики для систем со многими степенями свободы известно из курса «Строительной механики»

$$r y = P,$$

где r — матрица жесткости системы; y — искомые перемещения; P — внешняя нагрузка.

Добавив силу инерции, получим уравнение динамического равновесия

$$m \ddot{y} + r y = P.$$

Аналогично поступим с силами демпфирования. Окончательно уравнение динамического равновесия системы со многими степенями свободы при сейсмическом воздействии примет вид

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + r y = m \ddot{y}_0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) полностью соответствует уравнению (2.1), но записано в матричной форме.

3.2. Частотный анализ уравнения движения

Свободные колебания консервативной системы со многими степенями свободы описывается уравнением

$$m \ddot{y} + r y = 0, \quad (3.2)$$

где 0 — нулевой вектор.

По аналогии с анализом системы с одной степенью свободы предположим, что система совершает гармонические колебания

$$y = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.3)$$

где \hat{y} — вектор, характеризующий формы колебаний системы, у которой изменяются только амплитуды.

Два раза продифференцируем (3.3) и подставим в (3.2)

$$(r - \omega^2 m) \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

или, опустив член $\sin(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$(r - \omega^2 m) \hat{y} = 0. \quad (3.4)$$

Нетривиальное решение (3.4) относительно \hat{y} возможно при условии равенства нулю определителя системы

$$\|r - \omega^2 m\| = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) называется частотным уравнением системы.

Раскрыв определитель (3.5), получим уравнение n -й степени относительно ω^2 . Решение уравнения даст n значений ω

$$\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N),$$

где N — количество степеней свободы. При $N \rightarrow \infty$ — $\omega_{\max} \rightarrow \infty$.

Проблема нахождения частот колебаний корреспондирует проблеме собственных значений в линейной алгебре. Перепишем уравнение (3.4) в виде

$$r \hat{y} = \lambda m \hat{y}, \quad (3.6)$$

где введено обозначения $\lambda = \omega^2$.

В терминах линейной алгебры величины λ и \hat{y} называют соответственно собственными значениями (числами) и собственными векторами. Существуют процедуры, позволяющие определить собственные числа и вектора непосредственно из уравнения (3.6). Если матрица масс диагональная, то проблема существенно упрощается. Введем обозначения

$$k = m^{-1/2} r m^{-1/2}, \quad v = m^{1/2} \hat{y}.$$

Тогда уравнение (3.6) запишется в стандартном виде

$$\lambda = v^T k v.$$

где λ — диагональная матрица собственных чисел; v — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы k .

Собственные векторы и собственные значения обладают следующими свойствами:

- 1) собственный вектор v_i имеет единственное собственное значение λ_i ;
- 2) если v_i — собственный вектор с собственным значением λ_i и q — любое отличное от нуля число, то qv_i — также собственный вектор с собственным значением λ_i ;
- 3) если v_i и v_j собственные векторы с собственными числами λ_i и λ_j , причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, то v_i и v_j линейно независимы;

4) собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Необходимое и достаточное условие ортогональности

$$v^T v = E,$$

где E — единичная матрица. Следствие: $v^{-1} = v^T$.

Условие ортогональности для векторов \hat{y}

$$\hat{y}^T m \hat{y} = E. \quad (3.7)$$

Векторы, для которых выполняется условие (3.7), называют ортонормированными.

Умножим обе части уравнения (3.6) слева на транспонированную матрицу собственных векторов \hat{y}^T

$$\hat{y}^T r \hat{y} = \omega^2 \hat{y}^T m \hat{y}, \quad (3.8)$$

или с учетом (3.7)

$$\hat{y}^T r \hat{y} = \omega^2,$$

где ω^2 — диагональная матрица.

Следует отметить, что величины ω^2 не являются собственными значениями матрицы жесткости r .

3.3. Нормальные координаты

Введем обобщенные координаты

$$y = \Phi q, \quad (3.9)$$

где Φ — матрица, составленная из столбцов собственных векторов; q — вектор-столбец обобщенных (модальных) координат.

По существу мы произвели замену вектора \hat{y}_i i -й формы собственных колебаний вектором $q_i \phi_i$, причем q_i — скаляр. Такая замена возможна благодаря второму свойству собственных векторов. После подстановки обобщенных координат в уравнение движения (3.1) получим

$$m \Phi \ddot{q} + c \Phi \dot{q} + r \Phi q = m e \ddot{y}_o, \quad (3.10)$$

где e — вектор, определяющий перемещение масс при единичном перемещении основания. По сути это вектор косинусов между направлением сейсмического воздействия и направлениями динамических свобод.

Умножив слева обе части уравнения на транспонированную матрицу собственных векторов, получим систему несвязных уравнений

$$\Phi^T m \Phi \ddot{q} + \Phi^T c \Phi \dot{q} + \Phi^T r \Phi q = \Phi^T m e \ddot{y}_o,$$

где $\Phi^T m \Phi$, $\Phi^T c \Phi$ и $\Phi^T r \Phi$ — диагональные матрицы.

Таким образом, для любой i -й формы собственных колебаний (моды) получено единственное уравнение относительно обобщенной координаты q_i

$$\varphi_i^T m \varphi_i \ddot{q}_i + \varphi_i^T c \varphi_i \dot{q}_i + \varphi_i^T r \varphi_i q_i = \varphi_i^T m e \ddot{y}_o, \quad (3.11)$$

где φ_i — собственный вектор i -й формы.

Введем следующие обозначения:

$M_i = \varphi_i^T m \varphi_i$ — модальная масса;

$C_i = \varphi_i^T c \varphi_i$ — модальное демпфирование;

$R_i = \varphi_i^T r \varphi_i$ — модальная жесткость;

$L_i = \varphi_i^T m e$ — модальная активная масса.

С учетом принятых обозначений уравнение (3.11) примет вид

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + R_i q_i = L_i \ddot{y}_o.$$

Так как модальная масса отлична от нуля, ее можно исключить из уравнения равновесия для модальной координаты. Тогда, с учетом (3.8), уравнение для i -й формы примет вид линейного осциллятора

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{L_i}{M_i} \ddot{y}_o, \quad (3.12)$$

где L_i/M_i — коэффициент сейсмической нагрузки.

По аналогии с системой с одной степенью свободы введены обозначения

$$\frac{C_i}{M_i} = 2\xi_i \omega_i, \quad \frac{R_i}{M_i} = \omega_i^2.$$

Решив уравнение (3.12) относительно обобщенных координат q_i , посредством преобразования (3.9) определяют перемещения u_j в геометрических координатах. Поскольку обобщенные координаты получены посредством ортогональных преобразований исходных матриц, они получили название нормальных координат. Кроме того, обобщенные координаты характеризуют главные формы собственных колебаний систем без затухания и называются также главными координатами. И, наконец, они называются модальными (от лат. *modus* — образ, способ, правило), характеризующими метод расчета. Наиболее употребительно название «нормальные», подчеркивающие получение несвязной системы уравнений.

Замечание. Для корректного представления уравнения (3.12) необходимо выполнение двух условий:

1) матрица демпфирования должна удовлетворять условию

$$\varphi_i^T c \varphi_i = 2\xi_i \omega_i \varphi_i^T m \varphi_i;$$

2) коэффициент затухания должен быть много меньше 1 для всех форм собственных колебаний. То есть должно выполняться условие

$$\omega_i \approx \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}.$$

Если не выполняется первое условие, то не удастся получить несвязные уравнения и разложение по формам теряет смысл. Если не выполняется второе условие, то разложение по формам не сводится к проблеме собственных значений линейной алгебры.

Пример 3.1. Определим периоды и формы колебаний плоской системы, представленной на рис. 3.2. Система имеет три динамических степени свободы — две поступательные и одну вращательную. С поступательными степенями свободы связаны массы величиной 200 т, с вращательной — 150 тм³. Матрица жесткости системы

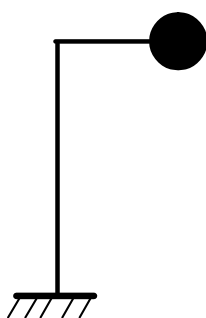


Рис. 3.2. Плоская система

$$r = \begin{bmatrix} 70743 & 7949 & -9687 \\ 7949 & 55739 & 32901 \\ -9687 & 32901 & 60732 \end{bmatrix}.$$

Матрица $k = m^{-1/2} r m^{-1/2}$

$$k = \begin{bmatrix} 353,7154 & 39,747 & -55,93 \\ 39,7466 & 278,694 & 189,956 \\ -55,931 & 189,956 & 404,883 \end{bmatrix}.$$

Определим собственные числа матрицы k

$$\lambda = \{123 \ 369 \ 544\}$$

и действительные собственные векторы

$$\Phi = Vm^{-1/2} = \begin{bmatrix} -0,01927 & 0,06749 & -0,00859 \\ 0,05457 & 0,02067 & 0,03994 \\ -0,04692 & -0,00491 & 0,06664 \end{bmatrix},$$

где V — собственные векторы матрицы k .

Частоты собственных колебаний

$$\omega = \{11,1 \ 19,2 \ 23,3\}$$

и периоды по формам колебаний $T_i = 2\pi/\omega_i$

$$T = \{0,566 \ 0,327 \ 0,269\}.$$

В данном примере собственные векторы ортонормированы. Вычисления проведены в электронной таблице MS Excel с использованием функций приложения.

3.4. Сложение форм колебаний

После определения реакции системы в нормальных координатах осуществляется переход к геометрическим координатам. В соответствии с (3.9) перемещение k -й массы

$$y_k = \sum_{i=1}^n q_i \Phi_{i,k}, \tag{3.13}$$

где n — количество учитываемых форм.

Не все формы вносят одинаковый вклад в общую реакцию. Как правило, для зданий и сооружений простой формы достаточен учет не более трех низ-

ших форм. Формы упорядочиваются по возрастанию собственных частот или, что то же самое, по убыванию периодов колебаний. Для сложных конструктивных систем необходимо учитывать большее количество форм. Для оценки вклада каждой формы в общую реакцию введено понятие *эффективной модальной массы*.

Упругий отпор системы можно выразить через нормальные координаты

$$F_s = r y = r \Phi q. \quad (3.14)$$

Ввиду эквивалентности инерционных и восстанавливающих (отпор) сил уравнение (3.8) в нормальных координатах примет вид

$$r \Phi = m \Phi \omega^2, \quad (3.15)$$

где ω^2 — диагональная матрица.

Подставляя (3.15) в (3.14), получим

$$F_s = m \Phi \omega^2 q.$$

Вектор упругого отпора для i -й формы

$$f_{s,i} = m \varphi_i \omega_i^2 q_i.$$

Пусть q^* — решение уравнения

$$\ddot{q}_i^* + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i^* + \omega_i^2 q_i^* = \ddot{y}_o, \quad (3.16)$$

тогда

$$f_{s,i} = m \varphi_i \frac{L_i}{M_i} \omega_i^2 q_i^*. \quad (3.17)$$

Векторная сумма упругих сил в направлении сейсмического воздействия по i -й форме

$$e^T f_{s,i} = e^T m \varphi_i \frac{L_i}{M_i} \omega_i^2 q_i^*$$

или, учитывая, что $e^T m \varphi_i = \varphi_i^T m e = L_i$,

$$e^T f_{s,i} = \frac{L_i^2}{M_i} \omega_i^2 q_i^*,$$

где величина L_i^2/M_i называется эффективной модальной массой и имеет размерность массы.

Сумма эффективных модальных масс равна векторной сумме сосредоточенных масс основной системы

$$e^T m e = \sum_1^N \frac{L_i^2}{M_i} = \sum_1^N \frac{(\varphi_i^T m e)^2}{\varphi_i^T m \varphi_i},$$

где N — количество динамических степеней свободы (сосредоточенных масс).

Гораздо удобнее выразить эффективную модальную массу i -й формы через ее долю от общей массы

$$m_i^{eff} = \frac{L_i^2}{M_i m_{глоб}}, \quad (3.18)$$

где введено обозначение $m_{глоб} = e^T m e$.

Во многих нормах введено требование учета тех форм, у которых $m_i^{eff} > 0,05$ и сумма эффективных модальных масс учитываемых форм должна быть не менее 0,85. Нормы СП 14 устанавливают сумму эффективных модальных масс форм, учитываемых в расчете, не менее 0,9 для горизонтальных колебаний и 0,75 — для вертикальных. Однако это требование правомерно только для систем в виде консольного стержня с равномерно распределенной массой. Для сложных конструктивных схем максимальные напряжения могут определяться высшими формами с небольшой эффективной модальной массой.

Пример 3.2. Пусть основание системы примера 3.1 совершает колебания с ускорением $\ddot{y}_o = 100t \exp(-2t) \sin(11t)$, направленные под углом 30° к горизонту (рис. 3.3). Вектор направляющих косинусов для трех степеней свободы

$$e^T = \{0,866 \ 0,5 \ 0\}.$$

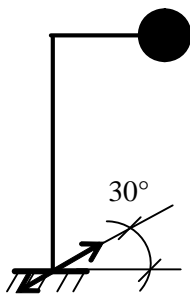


Рис. 3.3. Расчетная схема

Ввиду того, что собственные векторы ортонормированы относительно матрицы масс ($\Phi^T m \Phi = E$), модальные массы для всех форм колебаний равны единице.

Модальное демпфирование примем в предположении одинакового для всех форм коэффициента затухания $\xi = 0,05$

$$C_1 = 2 \cdot 0,05 \cdot 11,1 = 1,11; \quad C_2 = 1,92; \quad C_3 = 2,33.$$

Модальные жесткости в данном случае равны собственным числам

$$R_1 = 123; \quad R_2 = 369; \quad R_3 = 544.$$

Коэффициенты сейсмической нагрузки

$$L_1/M_1 = (-0,01927 \cdot 0,866 \cdot 200 + 0,05457 \cdot 0,5 \cdot 200 + 0)/1 = 2,119;$$

$$L_2/M_2 = (0,06749 \cdot 0,866 \cdot 200 + 0,02067 \cdot 0,5 \cdot 200 + 0)/1 = 13,756;$$

$$L_3/M_3 = (-0,00859 \cdot 0,866 \cdot 200 + 0,03994 \cdot 0,5 \cdot 200 + 0)/1 = 2,506.$$

Суммарная эффективная масса

$$200 \cdot 0,866^2 + 200 \cdot 0,5^2 = 200.$$

Эффективные модальные массы для трех форм

$$M_1^{eff} = 2,119^2/200 = 0,0225; \quad M_2^{eff} = 0,9461; \quad M_3^{eff} = 0,0314.$$

В результате проведенных преобразований получены три независимых уравнения:

$$\ddot{q}_1 + 1,11 \dot{q}_1 + 123 q_1 = 2,12 \ddot{y}_o;$$

$$\ddot{q}_2 + 1,92 \dot{q}_2 + 369 q_2 = 13,76 \ddot{y}_o;$$

$$\ddot{q}_3 + 2,33 \dot{q}_3 + 544 q_3 = 2,51 \ddot{y}_o.$$

Решение в нормальных координатах представлено на рис. 3.4.

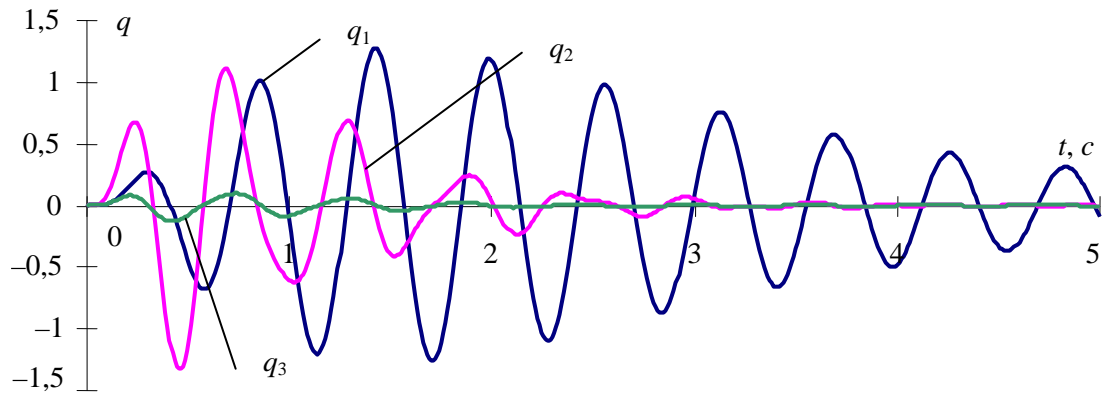


Рис. 3.4. Нормальные координаты

На рис. 3.5 представлено изменение упругого отпора во времени с учетом трех форм колебаний. В табл. 3.1 приведен вклад каждой формы в упругую реакцию. Величина M_{\max} — максимальный изгибающий момент в опорном сечении стойки.

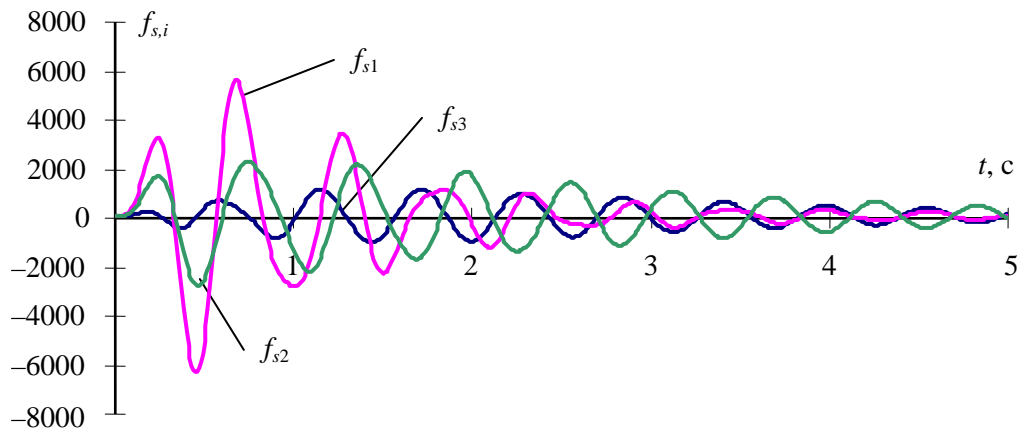


Рис. 3.5. Изменение упругого отпора во времени: f_{s1} — горизонтальная сила; f_{s2} — вертикальная; f_{s3} — момент

Таблица 3.1

Формы колебаний

Форма	1	2	3
f_{s1}	-0,015	1,032	-0,017
f_{s2}	0,149	0,697	0,154
f_{s3}	0,996	-0,047	0,051
M_{\max}	0,266	0,731	0,002

Анализ табл. 3.1 показывает, что, несмотря на небольшую модальную массу, 1-я форма вносит определенный вклад в упругие реакции. Это объясняется тем, что первая форма крутильная. В европейских нормах введено требование учета всех форм с $T_i > 0,2$ с, в случае если первая или вторая формы являются крутильными. Следует различать крутильную форму колебаний и динамические степени свободы, связанные с поворотом масс. Вклад каждой формы в разные типы реакций существенно различен, хотя корреляция с эффективной модальной массой сохраняется.

3.5. Многокомпонентное воздействие

Записи реальных акселерограмм состоят из трех ортогональных направлений. Как правило, все три компоненты линейно независимы. Если в качестве входного воздействия используются все три компоненты акселерограммы, то вектор нагрузок формируется как векторная сумма трех компонент

$$P_{eff} = \sum_1^3 e_j \ddot{y}_{o,j}, \quad (3.19)$$

где индекс j — обозначает направление по одной из трех ортогональных осей.

Модальное уравнение движения в случае многокомпонентного воздействия для i -й формы

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{\Phi_i^T m P_{eff}}{M_i}.$$

Эффективную модальную массу в этом случае можно определить только тогда, когда в уравнение движения по каждой форме входит воздействие только по одному из направлений. Это возможно в том случае, когда перемещение точечной массы по одному из направлений не вызывает ее перемещений по другим направлениям.

Оценить вклад конкретной формы в общую реакцию можно по максимальной кинетической энергии

$$W_{k,i} = \frac{1}{2} M_i \dot{q}_{\max,i}^2,$$

где $\dot{q}_{\max,i}$ — максимальная скорость за все время воздействия.

Оценить вклад формы можно также по максимальной энергии деформирования

$$W_{s,i} = \frac{1}{2} f_{s,i} q_{\max,i} = \frac{1}{2} (q_{\max,i} \omega_i)^2,$$

где $f_{s,i} = q_{\max,i} \omega_i^2$ — максимальный упругий отпор в нормальных координатах по i -й форме.

Для консервативной системы (при отсутствии демпфирования) значения двух энергий равны. Для систем с демпфированием максимальные значения энергии деформирования и кинетической отличаются, но сохраняется общая тенденция уменьшения энергий от низших форм к высшим. В любом случае для оценки вклада любой из форм в общую реакцию системы необходимо провести временной анализ по всем формам.

Пример 3.3. Рассмотрим предыдущий пример при воздействии акселерограммы с компонентами ускорений $\ddot{y}_{o1} = 87t \exp(-2t) \sin(11t)$ по горизонтальной оси и $\ddot{y}_{o2} = 50t \exp(-1,5t) \sin(19t)$ по вертикальной. Три компоненты вектора эффективной нагрузки определяются следующим образом:

$$p_{eff,1} = -0,01927 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o1} + 0,05457 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o2} = -3,85 \ddot{y}_{o1} + 10,9 \ddot{y}_{o2};$$

$$p_{eff,2} = 0,06749 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o1} + 0,02067 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o2} = 13,5 \ddot{y}_{o1} + 4,13 \ddot{y}_{o2};$$

$$p_{eff,3} = -0,00859 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o1} + 0,03994 \cdot 200 \cdot \ddot{y}_{o2} = -1,72 \ddot{y}_{o1} + 7,99 \ddot{y}_{o2}.$$

Левая часть уравнений движения в нормальных координатах та же, что и в предыдущем примере.

Доля кинетической энергии по формам 0,70; 0,20; 0,10. Распределение энергии деформирования по формам 0,54; 0,34; 0,13. В табл. 3.2 представлен удельный вклад каждой формы в различные реакции системы.

Таблица 3.2

Вклад форм колебаний

Форма	1	2	3
f_{s1}	-0,01	1,00	0,01
f_{s2}	0,19	0,28	0,53
f_{s3}	0,19	0,02	0,79
M_{max}	0,54	0,47	-0,01

Анализ табл. 3.2 показывает, что удельный вклад каждой формы в полную реакцию разный для конкретной реакции. 3-я форма вносит существенный вклад в вертикальную реакцию и поворот и абсолютно не влияет на изгибающий момент в опорном сечении. Горизонтальная реакция полностью определяется 2-й формой.

3.6. Особенности поведения симметричных систем

Рассмотрим шарнирно-опертую балку с равномерно распределенной нагрузкой при сейсмическом воздействии, перпендикулярном оси балки (рис. 3.6). Уравнение движения по i -й форме (уравнение (3.12) в развернутом виде)

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (\varphi_i^T m / \varphi_i^T m \varphi) \ddot{y}_o.$$

Собственные формы колебаний балки определяют выражением

$$\varphi_{i,k} = \sin\left(\frac{i\pi}{l} x_k\right),$$

где i — номер формы; l — длина балки; x_k — расстояние от левой опоры до k -й массы.

Для четных форм числитель в формуле (3.12) обращается в ноль. Следовательно, правая часть уравнения тождественно равна нулю и колебаний по этим формам не происходит.

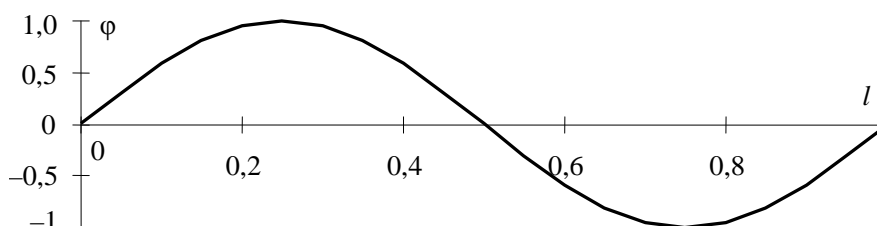


Рис. 3.6. Вторая форма собственных колебаний (φ_2) шарнирно-опертой балки с равномерно распределенной массой

4. РАСЧЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. Формирование матрицы масс

Наиболее простой способ задания характеристик масс для любой системы связан с предположением, что полная масса сосредотачивается в узлах определения поступательных перемещений. Например, для каркасных систем при расчете на сейсмические воздействия учитывают только горизонтальные перемещения этажей или ярусов и массы сосредотачиваются в уровнях перекрытий. В общем случае массы сосредоточены в узлах системы. Если рассматриваются только поступательные степени свободы и с каждым узлом связана только одна степень свободы, то матрица масс является диагональной, в которой число строк равно числу степеней свободы. Недиagonальные члены равны нулю, так как ускорение любой массы определяется приложением инерционной силы только к этой массе.

Для того чтобы учесть инерционные силы от степеней свободы, связанных с поворотом узлов, необходимо задать матрицу распределенных масс. Используя МКЭ, коэффициенты матрицы масс для каждого элемента конструкции можно определить аналогично коэффициентам жесткости.

Рассмотрим линейный элемент, нагруженный равномерно распределенной массой. Используя принцип виртуальной работы инерционных сил на возможных перемещениях, коэффициент влияния m_{ij} может быть определен по формуле

$$m_{ij} = m \int_0^L f_i(x) f_j(x) dx, \quad (4.1)$$

где m — равномерно распределенная по длине элемента масса; L — длина элемента; f_i, f_j — функции формы.

Таким образом, для любого линейного элемента с равномерно распределенной массой с тремя степенями свободы в каждом узле имеем

$$\begin{pmatrix} N_{k1} \\ Q_{k1} \\ M_{k1} \\ N_{k2} \\ Q_{k2} \\ M_{k2} \end{pmatrix} = \frac{mL}{420} \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22L & 0 & 54 & 13L \\ 0 & -22L & 4L^2 & 0 & -13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 156 & 22L \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 22L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где N, Q, M — компоненты узловых инерционных сил; $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\phi}$ — ускорения узлов по соответствующим степеням свободы; индексы 1 и 2 обозначают узлы k -го элемента.

Для массы, распределенной по площадке размером $a \times b$, коэффициенты влияния

$$m_{ij} = \int_0^a \int_0^b f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy, \quad (4.3)$$

где f_i, f_j — функции формы пластинчатого элемента.

Например, для массы, равномерно распределенной по площадке $a \times b$, при учете поступательных перемещений в плоскости площадки в каждом узле учитывают две степени свободы. Узловые компоненты инерционных сил в этом случае вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} Q_{kx1} \\ Q_{ky1} \\ Q_{kx2} \\ Q_{ky2} \\ Q_{kx3} \\ Q_{ky3} \\ Q_{kx4} \\ Q_{ky4} \end{pmatrix} = \frac{abm}{36} \begin{pmatrix} 4 & & & & & & & & \\ 0 & 4 & & & & & & & \\ 2 & 0 & 4 & & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 4 & & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & & \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{Y}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{Y}_3 \\ \ddot{X}_4 \\ \ddot{Y}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где Q_k — соответствующие инерционные силы в узлах k -й площадки; \ddot{X}, \ddot{Y} — ускорения узлов; цифровые индексы — номера узлов, которые пронумерованы по часовой стрелке.

Матрица масс системы формируется из матриц масс элементов аналогично матрице жесткости.

Если здание регулярно по высоте, то его расчетная схема может быть представлена в виде невесомого консольного стержня с массами в уровне перекрытий. В этом случае массы, связанные с тремя инерционными степенями свободы, прикладываются в центре жесткости плана перекрытия:

$$M_x = M_y = m a b;$$

$$M_\phi = M_x \frac{a^2 + b^2}{12} + M_x (x^2 + y^2),$$

где m — равномерно распределенная масса по площадке $a \times b$; x, y — расстояние между центрами масс и жесткостей по соответствующим осям.

Если отсутствуют крутильные колебания основания, то массы M_x и M_y прикладываются в центре масс, а масса M_ϕ исключается из расчета.

4.2. Формирование матрицы коэффициентов затухания

Матрица демпфирования может приниматься пропорциональной матрице масс или матрице жесткости. В первом случае силы затухания обратно пропорциональны, а во втором прямо пропорциональны частоте колебаний.

Матрицу демпфирования очень часто принимают пропорциональной матрицам масс и жесткости соответствующей упругой системы. В этом случае коэффициенты матрицы постоянны в течение всего процесса динамического воздействия, т. е.

$$\frac{dF_d}{d\dot{y}} = c = \text{const.}$$

В соответствии с формулой Релея

$$c = \xi \left(m \omega_1 + \frac{R}{\omega_1} \right), \quad (4.5)$$

где c — матрица коэффициентов демпфирования; ξ — коэффициент затухания (например, 0,025 — для стальных элементов, 0,05 — для железобетонных); ω_1 — частота собственных колебаний по первой форме.

В общем случае матрица демпфирования имеет вид

$$c = m \Phi \zeta \Phi^T m, \quad (4.6)$$

где Φ — нормированная матрица форм колебаний ($\Phi^T m \Phi = E$); ζ — диагональная матрица из элементов $\zeta_n = 2 \xi_n \omega_n / M_n$.

Как известно, затухание имеет двойную природу — вязкое и гистерезисное. Гистерезисное затухание является преобладающим и не зависит от скорости (частоты колебаний). Формула (4.6) является по существу компромиссным приведением гистерезисного затухания к вязкому. При учете неупругого поведения материала гистерезисное затухание учитывается при вычислении матрицы жесткости конструкции и не требует приведения к вязкому затуханию. Тем не менее вязкое затухание присутствует в любой конструкции и не связано с неупругими деформациями. Представление вязкого затухания в форме (4.6) является наиболее универсальным способом его учета в динамическом анализе. Кроме того, такая форма позволяет учитывать затухание при сочетании в одном сооружении разных материалов, например металлических надстроек над железобетонными зданиями, стальные каркасы первых этажей панельных зданий и т. д. Тем не менее представление демпфирования в форме (4.6) актуально только при преобразованиях к нормальным координатам. В случае интегрирования уравнения движения прямыми методами структура матрицы демпфирования может быть произвольной. Кроме того, формула (4.6) предполагает линейное затухание в процессе всего воздействия.

Матрица затухания может быть принята пропорциональной матрице масс. В этом случае коэффициенты матрицы затухания могут быть вычислены по следующей формуле:

$$c = \xi m, \tag{4.7}$$

где ξ — матрица коэффициентов затухания, определяемых для каждой формы колебаний $\xi_i = \gamma_i \omega_i$. С достаточной степенью точности коэффициенты матрицы затухания могут быть приняты пропорциональными частоте первой формы.

Пример 4.1. Для выявления различий между тремя формами представления затухания посчитана система с тремя инерционными степенями свободы, представленная на рис. 4.1.

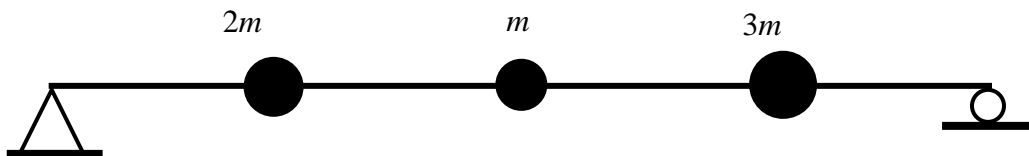


Рис. 4.1. Расчетная динамическая модель трехмассовой системы

Периоды по формам колебаний составили 3,14; 0,93 и 0,33 с. Величина коэффициента неупругого сопротивления принята 0,5 с тем, чтобы наглядно было видно различие между тремя типами затухания. На среднюю массу приложен синусоидальный импульс продолжительностью 0,5 с, амплитудой 20 кН. На рис. 4.2 приведены перемещения средней массы для трех форм представления коэффициентов затухания.

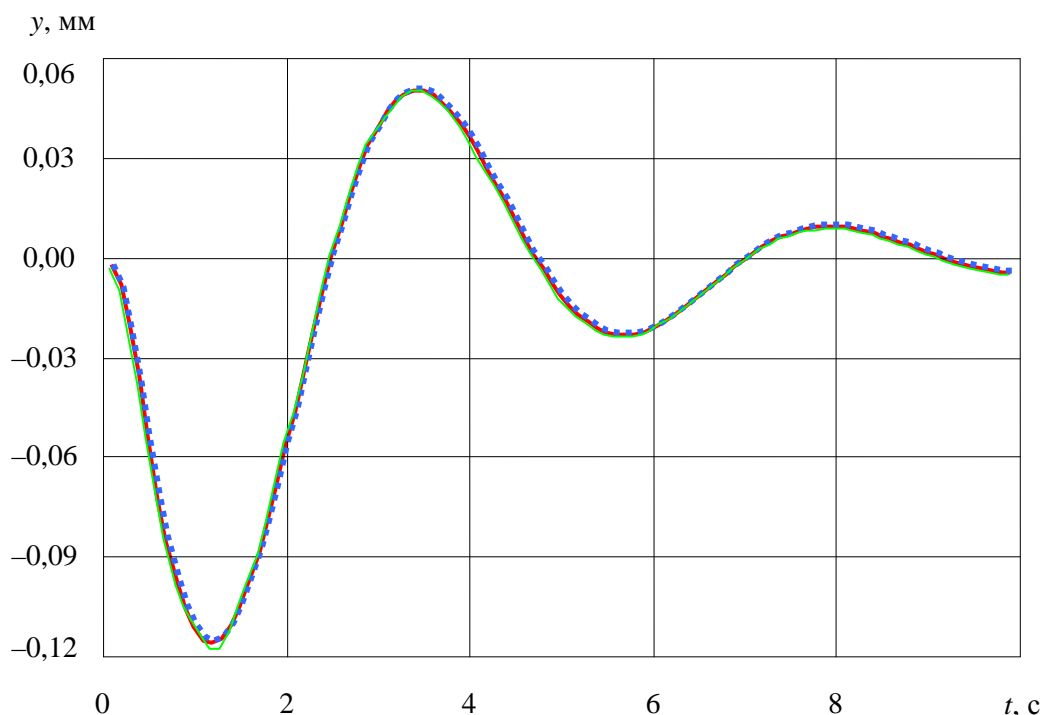


Рис. 4.2. Перемещение массы при трех типах диссипации

Как видно из рис. 4.2, перемещения практически не отличаются. Таким образом, форма определения вязкого затухания не имеет существенного значения в расчетах упругих систем.

Коэффициенты затухания в формах (4.5)—(4.7) могут применяться для систем с линейным затуханием. Если затухание нелинейно в процессе воздействия, формы (4.5)—(4.7) принимают в качестве начальных и корректируют в процессе воздействия. Матрица демпфирования системы в этом случае строится аналогично матрице жесткости.

4.3. Принципы построения расчетных динамических моделей

4.3.1. Основные положения

Для достоверного определения напряженно-деформированного состояния конструкции ее расчетная статическая модель (РСМ) должна быть наиболее подробной и отображать все степени свободы моделируемой конструкции. Современные программные комплексы позволяют моделировать системы, насчитывающие сотни тысяч статических степеней свободы. В динамическом анализе реакцию сооружения определяют, как правило, не более десятка степеней свободы, соответствующие низшим формам колебаний. Таким образом, для определения динамической реакции возможно построение упрощенной модели, которую принято называть расчетной динамической моделью (РДМ), а степени свободы этой модели — инерционными степенями свободы.

В основе спектральной теории динамического анализа лежит представление о том, что сооружение, как упругая система с N степенями свободы, реагирует на динамическое воздействие каждой составляющей своего спектра собственных колебаний. Поэтому и решение поставленной задачи проводится посредством разложения движения системы по собственным формам колебаний. Каждая такая форма ведет себя как система с одной степенью свободы с собственной частотой колебаний. Общая реакция сооружения определяется сложением реакций от отдельных форм по той или иной статистической теории. Для спектрального анализа построение упрощенной РДМ не актуально, так как существуют процедуры, позволяющие определить низшие формы колебаний без решения полной проблемы собственных чисел и векторов.

Детерминированный временной анализ динамической реакции, выполняемый прямыми методами численного интегрирования уравнения движения, не требует разложения колебаний по формам. Тем не менее точность полученных результатов, а зачастую и сходимость метода существенно зависят от величины шага интегрирования. Для получения желаемой точности максимальный шаг интегрирования не должен превышать 0,1 минимального периода спектра собственных колебаний эквивалентной упругой системы. Иначе говоря, величину шага интегрирования определяет высшая форма колебаний расчетной динамической модели. Однако слишком малая величина шага интегрирования приводит к большим вычислительным погрешностям. Кроме того, на каждом шаге интегрирования необходимо определять напря-

жения во всех элементах РСМ, что существенно увеличивает время счета при достаточно малом шаге интегрирования.

Это означает, что необходимо построить расчетную динамическую модель, в которой исключены несущественные инерционные степени свободы. В динамических моделях первого поколения расчетная статическая модель и расчетная динамическая модель принимались эквивалентными. В моделях следующих поколений, требующих более подробного определения усилий и напряжений в элементах конструкций, РСМ принимается более детальной, в ней учитываются все степени свободы. Для того чтобы динамический анализ выполнялся эффективно, необходимо сначала разработать детальную РСМ для анализа статических напряжений, а затем существенно сократить число инерционных степеней свободы перед выполнением динамического анализа, т. е. построить РДМ, достоверно отражающую поведение рассчитываемой системы в процессе динамического воздействия.

Существуют два общих принципа для сокращения инерционных степеней свободы. Первый из них основан на допущении, что инерционные силы определяют только ограниченным количеством выбранных степеней свободы РСМ. Остальные степени свободы не включают в динамическую модель и могут быть исключены из системы (например, углы поворота дискретных масс). Во втором подходе число степеней свободы ограничивается исходя из предположения, что перемещения сооружения связаны определенными соотношениями и амплитуды принимаются в качестве обобщенных координат при динамическом анализе.

По существу эти два подхода определяют два этапа построения динамической модели. На первом этапе исключают несущественные степени свободы, с которыми связано небольшое количество кинетической энергии. Во многих случаях этого оказывается достаточно для формирования динамической модели, например в расчетах малоэтажных зданий и зданий с регулярной конструктивной схемой на горизонтальную сейсмическую нагрузку. На втором этапе осуществляется дальнейшее сокращение степеней свободы с конденсацией масс по выбранным направлениям. На этом этапе необходимо применять второй подход к формированию расчетной динамической модели.

4.3.2. Сокращение несущественных степеней свободы

В расчетах подавляющего большинства строительных конструкций масса сосредотачивается в узлах пересечения элементов. В общем случае каждый узел имеет шесть степеней свободы. Пренебрежение инерцией поворота сосредоточенных масс, с которыми связана лишь небольшая часть кинетической энергии, позволяет существенно уменьшить размер динамической матрицы. Для ряда конструктивных решений можно достигнуть дальнейшего уменьшения размера РДМ, пренебрегая осевыми деформациями стержней. Исключение несущественных степеней свободы может быть выполнено методом статической конденсации Гайана или методом усечения матрицы единичных перемещений.

Наиболее эффективен метод, основанный на усеченной матрице единичных перемещений по искомым степеням свободы. Рассмотрим возможность применения этого метода в детерминированном анализе, выполняемого методами прямого интегрирования уравнений движения.

Перепишем уравнение (2.1) в виде

$$r y(t) = -m \ddot{y}_o(t) - m \ddot{y}(t) - c \dot{y}(t), \quad (4.8)$$

при этом РДМ (4.8) полностью эквивалентна РСМ. Введем обозначение

$$S(t) = m \ddot{y}_o(t) + m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t).$$

С другой стороны, динамические силы $\bar{S}(t)$ могут быть найдены из расчета усеченной системы:

$$R y(t) = -\bar{S}(t), \quad (4.9)$$

где $\bar{S}(t) = \bar{m} \ddot{y}_o(t) + \bar{m} \ddot{y}(t) + \bar{c} \dot{y}(t)$; \bar{m} и \bar{c} — соответственно матрицы масс и демпфирования усеченной системы; R — матрица жесткости усеченной системы.

Ввиду того, что исключенные степени свободы не оказывают существенного влияния на величины инерционных сил, можно принять $\bar{S}(t) \in S(t)$ по соответствующим степеням свободы. После вычисления инерционных сил для усеченной системы по формуле (4.9), последние прикладываются по соответствующим направлениям основной системы уравнения (4.8), которое превращается в статическое уравнение РСМ. Усеченная система является расчетной динамической моделью. Такой метод формирования динамической модели позволяет создать модель практически любого вида: от простейшей консольной до сложной, эквивалентной РСМ. При этом должно выполняться условие, что исключенные из динамического анализа инерционные степени свободы не оказывают существенного влияния на динамическую реакцию исследуемой конструкции. Массы усеченной РДМ собираются по грузовым площадям. В РДМ должны включаться все поступательные степени свободы, за исключением степеней, связанных с осевыми деформациями стержней. Например, если два узла соединены стержнем и поступательная степень свободы для каждого узла совпадает с осью стержня, то две степени свободы объединяются в одну. Если один из концов стержня закреплен, то соответствующие степени свободы исключаются из РДМ для обоих узлов, принадлежащих стержню.

Пример 4.2. Рассмотрим определение сейсмической реакции для двух эквивалентных моделей, представленных на [рис. 4.3](#). Сечения стоек 300×300 , ригелей — 450×300 , высота этажа 3000. Обе схемы рассчитаны на акселерограмму Эль Центро.

Исследованы две динамические модели: a — с тремя степенями свободы в каждом свободном узле и распределенной по ригелям массой и b — приведенная к невесомому консольному стержню с сосредоточенными массами. Для первой модели число степеней свободы равно 27, для второй — 4. Матрица жесткости консольного стержня модели b получена из модели a методом усечения единичной матрицы перемещений. Для этого строится матрица единичных перемещений ярусов РСМ с последующим обращением матрицы податливости. Массы модели b собраны по грузовым площадям.

Сейсмические силы в уровне ярусов рамы для модели *б* определены по формуле (4.9). В табл. 4.1 приведены значения периодов для двух схем.

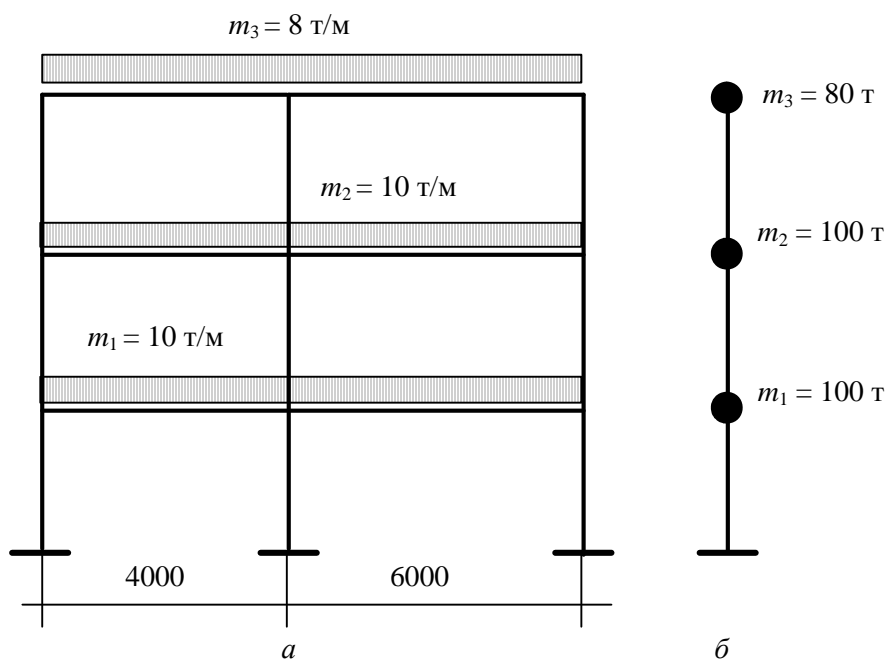


Рис. 4.3. Динамические модели простейшей системы

Таблица 4.1

Сравнение периодов колебаний для двух моделей

РДМ	№ формы						
	1	2	3	4	5	...	27
<i>a</i>	1,2290	0,4171	0,2696	0,1332	0,1163	...	0,007
<i>б</i>	1,2289	0,4171	0,2708	—	—	...	—
Невязка, %	0,028	0,0	0,043	—	—	...	—

В табл. 4.2 приведены значения усилий в стойке и ригеле первого этажа от особого сочетания нагрузок.

Таблица 4.2

Усилия в элементах для двух моделей

РДМ	Стойка первого этажа			Ригель	
	<i>N</i> , кН	<i>Q</i> , кН	<i>M</i> , кНм	<i>Q</i> , кН	<i>M</i> , кНм
<i>a</i>	1336	301,6	465,0	439,6	621,9
<i>б</i>	1338	305,2	470,8	439,8	624,0
Невязка, %	0,15	1,2	1,25	0,05	0,34

Периоды по формам для двух РДМ практически совпадают. Максимальный шаг интегрирования для детерминированного анализа не должен превышать $7E-4$ с для РДМ *a* и $0,027$ с — для РДМ *б*. Таким образом время счета РДМ *a* в 40 раз больше, чем РДМ *б*.

На рис. 4.4 представлены перемещения третьего яруса при воздействии акселерограммы Эль-Центро.

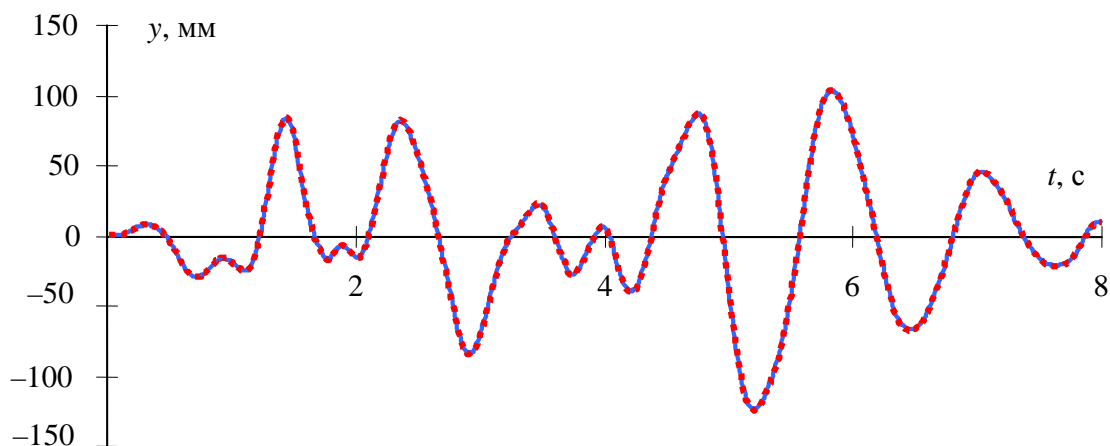


Рис. 4.4. Перемещение третьего яруса рамы:
точками обозначены перемещения консольной трехмассовой системы (РДМ б)

Таким образом, для систем, динамическая модель которых может быть представлена в виде консольного стержня, результаты расчета по двум схемам идентичны как по перемещениям, так и по усилиям в элементах РСМ. Конденсация масс и выбор основных степеней свободы для таких систем не представляет больших затруднений. При этом перемещения системы и усилия в элементах для двух схем РДМ практически не отличаются.

4.3.3. Сокращение поступательных степеней свободы

В [примере 4.2](#) исключались несущественные степени свободы, с которыми связано лишь небольшое количество кинетической энергии сооружения. На практике довольно часто приходится строить РДМ, для которых необходимо добиться значительного сокращения степеней свободы, в том числе по направлениям действия динамической нагрузки. В этом случае применяют методы, основанные на использовании обобщенных координат, характеризующих амплитуды предполагаемых перемещений. Все эти методы аналогичны методу Релея, основанному на равенстве максимальных значений кинетической и потенциальной энергий свободных колебаний консервативной системы. Обобщение метода Релея для оценки высших форм колебаний дано Ритцем и известно как метод Релея — Ритца. Все эти методы применяют, в основном, для решения неполной проблемы собственных чисел и не применяют для формирования РДМ.

Для правильного составления сокращенной РДМ второго этапа необходимо предварительно провести полный спектральный анализ РСМ и выбрать места приложения масс. Матрица жесткости сокращенной РДМ строится аналогично построению матрицы жесткости первого этапа — методом усе-

чения единичной матрицы перемещений. Матрица масс РДМ второго этапа определяется из последовательного решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^T R \bar{\Phi} &= \lambda; \\ \bar{m} &= (\bar{\Phi} \bar{\Phi}^T)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $\bar{\Phi}$ — матрица собственных векторов усеченной системы; R — матрица жесткости усеченной системы; λ — диагональная матрица первых n собственных чисел исходной системы; \bar{m} — искомая матрица конденсированной системы.

В первом приближении матрица конденсированной системы \bar{m} может быть найдена следующим образом:

1) определяют места приложения масс и строится матрица жесткости усеченной системы R ;

2) для усеченной системы с единичной матрицей масс определяют собственные числа и вектора из условия $R \tilde{\Phi} = \tilde{\lambda} \tilde{\Phi}$;

3) собственные вектора конденсированной системы определяют из предположения о равенстве частот полной и конденсированных систем:

$$\bar{\Phi}_i = \tilde{\Phi}_i \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i}{\lambda_j}}, \text{ где } \lambda_j \text{ — соответствующее собственное число полной системы;}$$

4) матрица масс конденсированной системы вычисляется по второму уравнению (4.10).

Матрица масс, полученная по предлагаемой методике, не является диагональной.

Построение адекватной РДМ второго этапа по описанным методикам существенно зависит от выбора мест приложения конденсируемых масс. Следует также учитывать, что при детерминированном анализе нелинейных систем динамические характеристики последних могут существенно меняться в процессе воздействия и РДМ, полученная в результате спектрального анализа упругой системы, может оказаться неадекватной.

Пример 4.3. В качестве примера рассмотрим шарнирную балку, загруженную произвольной распределенной нагрузкой. Длина балки 8 м, жесткость 1000 кНм². В качестве эталонного примем решение с 19 сосредоточенными эквидистантно расположенными массами, собранными по грузовым площадям. Значения масс приведены в табл. 4.3. Максимальный период колебаний составил 1,358, минимальный — 0,01 с. Максимальный шаг интегрирования принят 1/20 минимального периода и составляет 5Е–4 с. Пять первых форм собственных колебаний представлены на [рис. 4.5](#).

Таблица 4.3

Значения масс

№ массы																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Величина массы, т																		
2,1	1,7	2	2,8	2,2	2	4	2	3	2,5	2	1,5	1,8	1,5	2	2	2	2,5	2

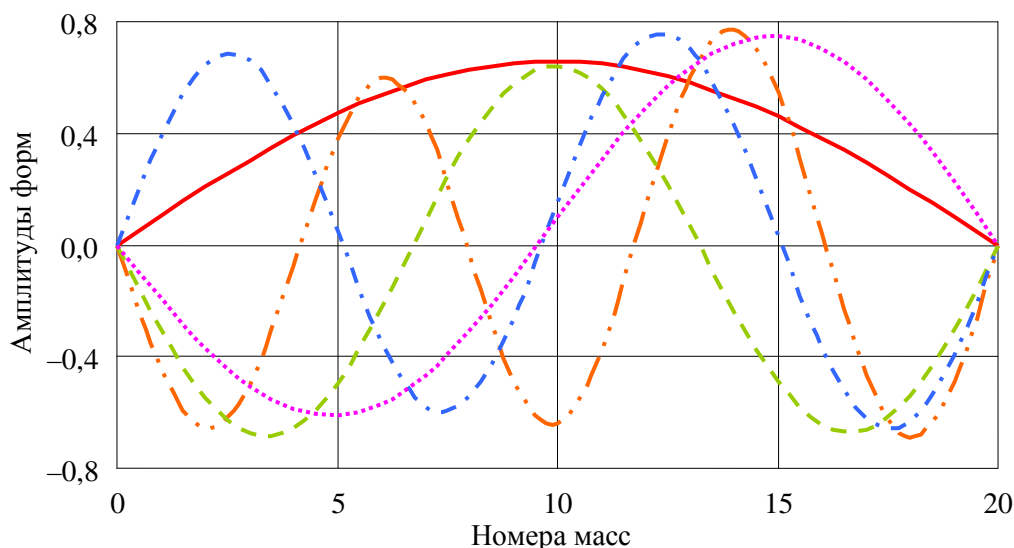


Рис. 4.5. Формы колебаний полной системы

Пусть к массе № 7, отстоящей на расстоянии 2,8 м от левой опоры, приложен одиночный импульс. В первом приближении рассмотрим одномассовую РДМ с массой в точке 7. Масса в этой точке, согласно методу Релея, составила 23,2 т. На рис. 4.6 представлено перемещение 7-й массы для двух систем.

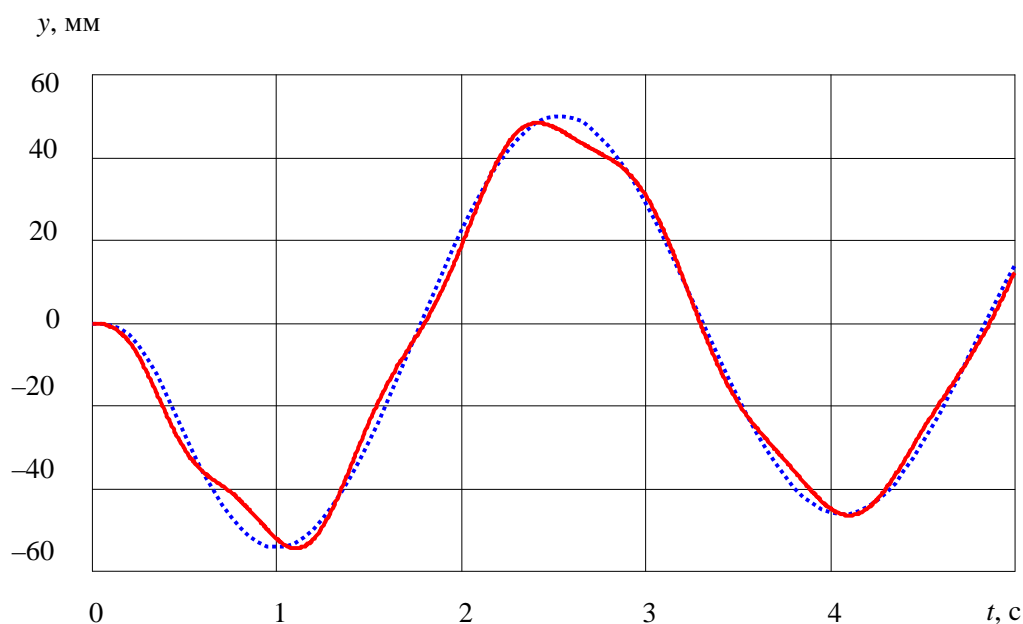


Рис. 4.6. Перемещения массы № 7 от одиночного импульса: точки — система с одной массой

Период по первой форме и перемещения массы практически совпадают, однако усилия в двух системах существенно различны: максимальный изгибающий момент в эталонной системе 8,826, в одномассовой — 11,164 кНм. Сведение системы к одномассовой ведет к существенному изменению усилий, что неприемлемо. Для улучшения РДМ необходимо учитывать более одной степени свободы, используя, например, метод последовательной частотно-динамической конденсации. Если ввести в модель еще одну массу, например в точке 14, то разница в перемещениях для двух схем увеличивается, а разница между усилиями сокращается. Последовательно вводя массы можно добиться приемлемого приближения как по перемещениям, так и по усилиям.

Для дальнейшего исследования несколько усложним задачу. К массе № 7 приложена сила, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой 52,5 рад/с, что соответствует пятой форме колебаний. Очевидно, что для учета резонансных явлений необходим учет первых пяти частот собственных колебаний. Задача построения динамической модели сводится к двум моментам: определение мест приложения и величин масс. Первую задачу можно решить анализируя учитываемые формы колебаний полной системы ([см. рис. 4.5](#)). Для решения второй задачи — определения величин масс конденсированной системы — необходимо найти все собственные числа и вектора полной модели.

Из анализа форм колебаний полной системы массы динамической модели должны располагаться в точках 2, 6, 10, 14 и 18. Таким образом, точка 7 с приложенной к ней нагрузкой в указанную систему не попадает. Из этого положения может быть два выхода — либо добавить точку 7 к имеющемуся списку, либо заменить ближайшую к ней. Выберем второй путь и заменим в РДМ шестую точку седьмой.

Теперь необходимо определить величины масс РДМ. Определить величины масс по грузовым площадям невозможно, так как в этих случаях динамические характеристики РДМ будут существенно отличаться от действительных. Для определения величин масс используем энергетическую форму метода последовательной конденсации. Основной предпосылкой этого метода является допущение о равенстве кинетических энергий основной и конденсированной систем. Второе допущение заключается в том, что частоты и формы свободных колебаний конденсированной системы близки к основным частотам и формам колебаний полной. Строго говоря, в результате такой конденсации получается приближенная РДМ. При этом приближение можно осуществить либо по перемещениям, либо по усилиям. В табл. 4.4 представлены значения масс для усеченной РДМ и периоды колебаний по пяти формам.

Таблица 4.4

Значения масс и периоды колебаний

Номера масс	2	7	10	14	18
Массы РДМ, т	14	3,3	14	6	5
Периоды РДМ, с	3,0503	0,617	0,3651	0,1702	0,1365
Периоды полной системы, с	3,0593	0,7421	0,3365	0,1866	0,1197

На рис. 4.7 и [4.8](#) приведены перемещения масс № 7 и № 10 в процессе динамического воздействия для двух РДМ. Максимальные изгибающие моменты составили: 9,546 кНм для полной РДМ и 9,790 кНм для усеченной.

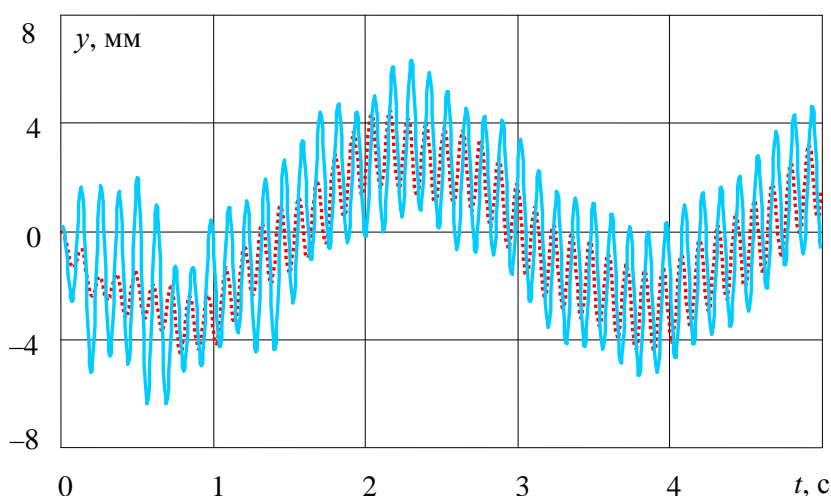


Рис. 4.7. Перемещение массы № 7: точки — перемещения полной системы

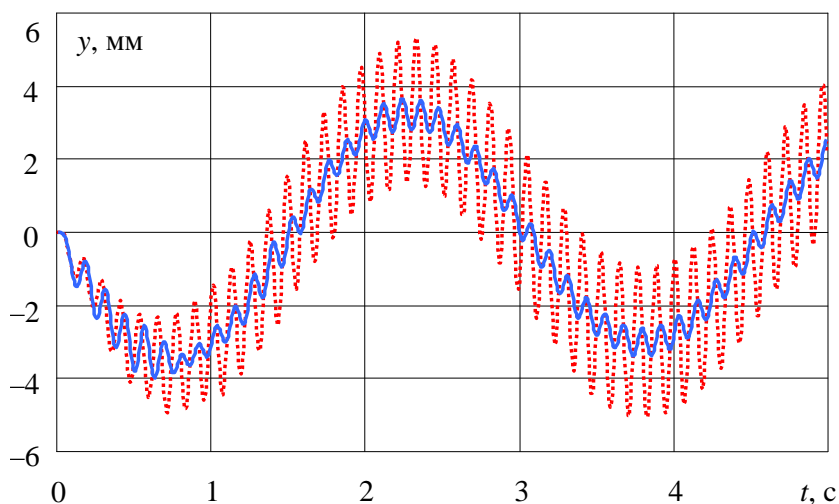


Рис. 4.8. Перемещение массы № 10: точки — перемещения полной системы

Задача сокращения поступательных степеней существенно упрощается, если масса равномерно распределена по высоте или длине конструкции. Тогда диагональная матрица масс может быть представлена в виде

$$m = M/n E,$$

где M — суммарная масса; n — количество масс, учитываемых в динамическом анализе; E — единичная матрица.

В этом случае не нужно проводить дополнительного анализа форм колебаний, а приемлемая точность достигается при $n = 10$. При этом жесткость конструкции на различных участках должна отличаться не более 15 %. Аналогичный результат получается для систем с монотонно пропорционально убывающими массами и жесткостями.

4.4. Введение грунтового основания в динамическую модель

В некоторых задачах, например при учете податливости основания, введения сейсмозащиты из упругих элементов (сейсмоизоляции) между каркасом и фундаментом, вычисление правой части уравнений (3.10) или (3.19) представляется некорректным. Например, динамический анализ систем сейсмоизоляции невозможно проводить по классическим моделям, даже если РДМ может быть представлена в виде консольного стержня. Основная причина невозможности применения классической РДМ заключается в том, что единичное статическое перемещение основания не вызывает единичного перемещения по всем степеням свободы и соотношение между полными и относительными перемещениями не будет линейным. В этих случаях расчет необходимо вести на полные перемещения и ускорения, а не на относительные. Уравнение движения для упругой системы имеет следующий вид:

$$m \ddot{y}^t + c \dot{y}^t + r y^t = c \dot{y}_o + r y_o, \quad (4.11)$$

где $y^t = y_0 + y$ — полные перемещения системы; y_0 — перемещение свободной поверхности грунта основания.

Правая часть уравнения (4.11) представляет собой эффективную сейсмическую нагрузку, выраженную через коэффициенты затухания и жесткости системы. Перемещение y_0 , скорость \dot{y}_0 свободной поверхности грунта и эффективная нагрузка $P_0(t)$ могут быть определены из уравнения

$$m_0 \ddot{y}_0 + c_0 \dot{y}_0 + r_0 y_0 = P_0(t) \quad (4.12)$$

прямыми методами численного интегрирования при заданной акселерограмме свободной поверхности грунта \ddot{y}_0 .

Уравнение (4.11) идентично (2.1), однако на практике не используется, так как применяемое в этом случае выражение для эффективной сейсмической нагрузки более сложное, а сейсмическое воздействие обычно задается в виде ускорений основания.

Динамическая модель, реализующая данную схему, представлена на рис. 4.9. Основная трудность построения модели заключается в определении величины массы основания. Коэффициент затухания для основания находится в пределах 0,3...0,5 критического. Если масса основания намного больше массы сооружения, то результаты, полученные по формулам (2.1) и (4.11), идентичны. Такой подход весьма упрощен, тем не менее он позволяет учесть податливость основания и элементы сейсмозащиты.

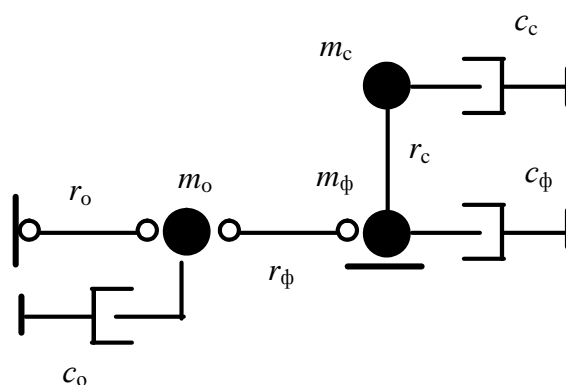


Рис. 4.9. Динамическая модель «основание — фундамент — сооружение» при расчете на горизонтальную сейсмику

Основной недостаток описанного выше подхода заключается в том, что он не дает возможности учесть влияние присоединенного сооружения на колебания свободной поверхности грунта. Если известна акселерограмма коренной породы \ddot{y}_s , то моделирование грунта основания не представляет сложной задачи. Практически все записи землетрясений получены на свободной поверхности грунта. В работе В. А. Игнатъева «Редукционные методы расчета в статике и динамике пластинчатых систем» (Саратов, 1992) описаны модели расчета по схеме «основание — фундамент — сооружение», позволяющие исключить движение коренной породы. Простейшая из них может быть сведена к виду

$$\tilde{m} \ddot{y}^t + \tilde{c} \dot{y}^t + \tilde{r} y^t = p_c, \quad (4.13)$$

где $\tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{r}$ — матрицы масс, диссипации и жесткости системы «основание — фундамент — сооружение» ([см. рис. 4.9](#)).

Блочная структура матриц

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} c_c & c_{c\phi} & c_{c_o} \\ c_{\phi c} & c_\phi & c_{\phi o} \\ c_{o c} & c_{o\phi} & c_o \end{pmatrix}, \quad \tilde{r} = \begin{pmatrix} r_c & r_{c\phi} & r_{c_o} \\ r_{\phi c} & r_\phi & r_{\phi o} \\ r_{o c} & r_{o\phi} & r_o \end{pmatrix}, \quad p_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_o \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где эффективная нагрузка p_o приложена только по степени свободы массы грунта основания и определяется по формуле (4.12).

Если для исследуемой площадки имеется расчетная акселерограмма, то динамические характеристики основания формируются довольно просто. В каждой акселерограмме можно выявить доминантную частоту. Например, для акселерограммы Эль-Центро доминантная частота равна 18 рад/с. Зная массу грунта основания, вовлекаемую в динамический процесс, можно легко подсчитать оставшиеся характеристики:

$$c_o = \gamma_o \bar{\omega}_o m_o, \quad r_o = m_o \bar{\omega}_o^2, \quad (4.15)$$

где $\bar{\omega}_o$ — доминантная частота акселерограммы.

Пример 4.4. Для примера рассмотрена динамическая модель в виде невесомого консольного стержня, деформирующегося по форме сдвига, с четырьмя сосредоточенными массами. Величины всех масс 275 т, жесткость стержня на сдвиг 1Е6 кН. Периоды упругой системы составляют 0,502; 0,174; 0,114 и 0,093 с. Коэффициенты неупругого сопротивления 0,1 для стержня и 0,3 для грунта. В качестве кинематического воздействия принята синтезированная акселерограмма $\ddot{y}_o = 5t \exp(-0,5t) \sin(10t)$. РДМ приняты в трех вариантах:

- 1) классическая консольная РДМ без учета инерционных свойств основания;
- 2) с массой грунта 1Е7 т. Жесткость стержня, моделирующего работу грунта основания, составила 1Е9 кН;
- 3) с массой грунта 1Е4 т. Жесткость стержня — 1Е6 кН.

В табл. 4.5 представлены поперечные силы по ярусам стержня.

Таблица 4.5

Значения поперечных сил по ярусам стержня

РДМ	Поперечные силы по ярусам, кН			
	1	2	3	4
1	12 122	10 122	7266	3794
2	12 118	10 118	7263	3792
3	8726	7193	5119	2660

Отклонения усилий для РДМ 1 и 2 не превышают 0,1 %, что свидетельствует об эквивалентности двух схем. Для РДМ 3 наблюдается примерно 30%-е снижение сейсмической реакции.

Если масса грунта превосходит полную массу сооружения в 100 и более раз, то две схемы РДМ эквивалентны.

Рассмотренная модель основания самая простая и позволяет весьма приближенно учесть влияние основания на сейсмическую реакцию верхнего строения. Эта модель может быть применена для расчета сейсмоизолированных систем. Для расчета тяжелых заглубленных и подземных сооружений на сейсмические воздействия разработаны более совершенные модели «основание — фундамент — сооружение».

РДМ-2 целесообразно применять для сейсмоизолированных систем и протяженных сооружений, например мостов. В последнем случае модель позволяет учесть разновременность прихода сейсмических волн на удаленные друг от друга опоры.

5. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

5.1. Геометрическая и физическая нелинейность

Система является нелинейной, если связь между внешним возмущением и откликом не подчиняется линейному закону. Внешним воздействием для строительной конструкции является приложенная к ней нагрузка. Откликом строительной конструкции на нагрузку являются ее перемещения. Каждая система имеет внутренние связи между своими элементами. В случае строительных конструкций это связь между перемещениями и деформациями и между деформациями и напряжениями. Нелинейность проявляется, если одна из связей нелинейная. В первом случае нелинейность называют геометрической, во втором — физической. Для большинства строительных конструкций в процессе сейсмического воздействия наиболее сильно проявляется физическая нелинейность. Физическая нелинейность связана с неупругими свойствами строительных материалов. Для большинства материалов разгрузка происходит по линейному закону и после снятия нагрузки остаются остаточные перемещения.

5.2. Уравнение движения

Уравнение (2.1) неприменимо для анализа нелинейных систем, поскольку предполагает линейную связь между перемещениями и реакциями. Для вывода уравнения движения нелинейной системы используем метод равновесия. Уравнения движения любой динамической системы представляют собой выражение второго закона Ньютона, который устанавливает, что скорость изменения импульса любой массы равна действующей на нее силе:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} \right), \quad (5.1)$$

где $F(t)$ — вектор приложенной силы; y — вектор геометрических координат массы m .

Для большинства задач динамики сооружений масса, как правило, остается постоянной в течение всего воздействия. Тогда уравнение (5.1) получит вид

$$F(t) = m \ddot{y}(t), \quad (5.2)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени.

В общем случае сила $F(t)$ может включать в себя разные виды сил, приложенных к массе. Для строительных конструкций учитываются: силы упругого сопротивления (отпора); вязкого затухания (демпфирования); силы, обусловленные продольным изгибом, и независимо заданные внешние нагрузки. Таким образом, если, согласно принципу Даламбера, ввести силу инерции, то уравнение движения системы будет выражать условие равновесия всех сил, приложенных к массе:

$$m \ddot{y}(t) = P(t) - (F_d(t) + F_s(t) + F_g(t)), \quad (5.3)$$

где $F_d(t)$, $F_s(t)$, $F_g(t)$ — векторы сил демпфирования, отпора и продольно-поперечного изгиба; $P(t)$ — вектор внешней нагрузки (эффективная нагрузка).

Если известны скорости изменения сил, то уравнение (5.3) можно переписать в следующем виде:

$$m \ddot{y}(t) + \int_0^t \{ \dot{F}_d(t) + \dot{F}_s(t) + \dot{F}_g(t) \} dt = P(t), \quad (5.4)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени.

Как показывают эксперименты, скорость изменения нагрузки не оказывает существенного влияния на физические свойства материала. Силы отпора зависят в основном от перемещений и практически не зависят от скорости изменения нагрузки. Продифференцировав силы отпора по перемещениям, получим выражение для скорости изменения сил отпора

$$\dot{F}_s(t) = \frac{dF_s}{dy} \dot{y}(t), \quad (5.5)$$

где $\frac{dF_s}{dy}$ — касательная матрица жесткости.

Аналогичные преобразования можно произвести для сил продольного изгиба и демпфирования. Подставив выражения вида (5.5) в (5.4) и осуществив замену переменного (интегрирование подстановкой), получим уравнение движения нелинейной системы

$$m \ddot{y}(t) + \int_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}(t)} \frac{dF_d}{d\dot{y}} d\dot{y} + \int_{y(0)}^{y(t)} \left(\frac{dF_s}{dy} + \frac{dF_g}{dy} \right) dy = P(t), \quad (5.6)$$

где $\frac{dF_d}{d\dot{y}}$, $\frac{dF_s}{dy}$ и $\frac{dF_g}{dy}$ — соответствующие касательные матрицы; $y(0)$, $y(t)$ — начальное и текущее состояние системы. В начальный момент времени ($t = 0$) $\dot{y}(0) = y(0) = 0$.

Основываясь на экспериментальные данные, можно сделать вывод, что диссипативные свойства системы, отвечающие рассеиванию энергии вследствие вязкого трения, малы по сравнению с гистерезисным затуханием и практически не меняются в процессе воздействия. Таким образом, нелинейное

поведение конструкции вызвано в основном неупругими свойствами материала и геометрической нелинейностью, связанной с продольно-поперечным изгибом стоек. Диссипация большинства конструкций находится в линейной зависимости от скорости и второй член уравнения (5.6) может быть принят по линейной зависимости. Исключение составляют демпферы вязкого трения, применяемые в системах сейсмоизоляции.

5.3. Приведение уравнения движения к виду, удобному для дифференцирования

Прежде всего выразим геометрическую жесткость, обусловленную продольно-поперечным изгибом, через составляющие ее компоненты. Ввиду малости перемещений можно пренебречь изменением геометрии конструкции в процессе воздействия, поэтому касательную геометрическую жесткость можно представить пропорциональной матрице коэффициентов геометрической жесткости

$$\frac{dF_g}{dy} = g \left(\frac{d\{N(y)y\}}{dy} \right),$$

где g — матрица коэффициентов геометрической жесткости; $N(y)$ — нормальные силы в стержнях.

Продифференцировав произведение, получим

$$\frac{dF_g}{dy} = g \left(\frac{dN(y)}{dy} y + N(y) \right). \quad (5.7)$$

Далее разобьем временной интервал на малые конечные промежутки времени Δt и заменим интегралы конечной суммой. Тогда уравнение (5.6) с учетом преобразования (5.7) запишется в виде

$$m \ddot{y}(t) + \sum_i \frac{dF_d}{d\dot{y}} \Delta \dot{y} + \sum_i \left[\frac{dF_s}{dy} + g \left(N(y) + \frac{dN(y)}{dy} y \right) \right] \Delta y = P(t). \quad (5.8)$$

Вычтем из уравнения в момент времени $t + \Delta t$ уравнение для времени t . Сгруппировав коэффициенты относительно неизвестных приращений, получим уравнение движения шагового метода

$$m \Delta \ddot{y} + \frac{dF_d}{d\dot{y}} \Delta \dot{y} + \left[\frac{dF_s}{dy} + g N(y) \right] \Delta y = \Delta P - g \Delta N y, \quad (5.9)$$

где y и $N(y)$ — соответственно перемещения системы и нормальные силы в стойках на предыдущем шаге интегрирования; ΔN — приращение продольных сил на данном шаге.

Уравнение (5.9) решается относительно приращения перемещения любым из описанных выше методов.

5.4. Формирование касательной матрицы жесткости

5.4.1. Основные принципы формирования жесткости

Принципы формирования касательной матрицы жесткости различны для различных материалов и конструктивных схем. Для сейсмостойкого строительства применяют, в основном, железобетонные и стальные конструкции. Железобетонные конструкции выполняют в виде рамных (малоэтажное строительство), рамно-связевых и связевых систем. Основными конструктивными элементами железобетонных конструкций являются линейные элементы (ригели и колонны) и стены (плоские или объединенные в пространственные конструкции). Для металлических конструкций характерны тонкостенные составные стержни.

Пример 5.1. В [примере 2.2](#) изменим упругую систему на идеальную упругопластическую. Предельное значение упругого отпора примем 0,3. Для упругой системы максимальный упругий отпор составил 0,6. В стадии нагрузки при достижении упругим отпором данной величины жесткость осциллятора и соответственно его круговая частота обращаются в ноль. На рис. 5.1 приведены перемещения упругой и упругопластической систем в процессе воздействия. На рис. 5.2 — зависимость «упругий отпор — перемещение».

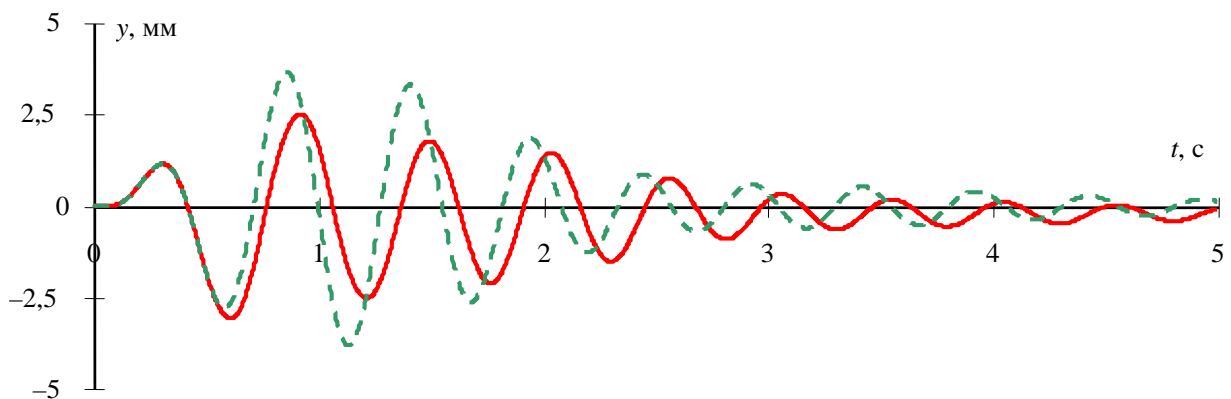


Рис. 5.1. Перемещения нелинейного осциллятора: пунктиром показано перемещение упругого осциллятора

Перемещения неупругого осциллятора получились меньше соответствующего упругого. Это объясняется значительным поглощением воспринятой энергии за счет неупругих деформаций. Поглощенная энергия численно равна площади петли на рис. 5.2. Из-за сходства зависимости S — y с петлей гистерезиса поглощение энергии сейсмического воздействия неупругими деформациями называют гистерезисным затуханием.

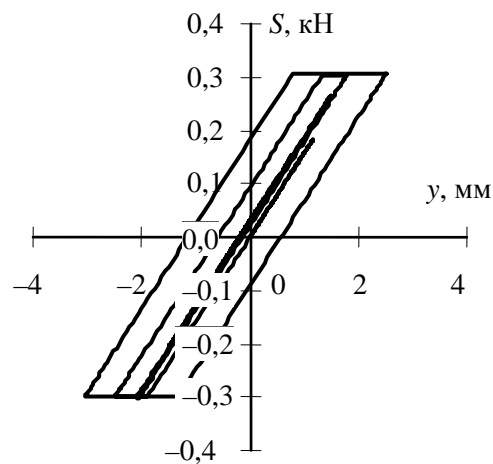


Рис. 5.2. Зависимость S — y

5.4.2. Здания с жесткой конструктивной схемой

К таким зданиям относятся практически все здания, выполненные из крупных панелей или в монолитном железобетоне, и здания из легкого бетона с плотностью не ниже 1800 кг/м^3 . РДМ, как правило, может быть представлена в виде невесомого консольного стержня с массами, сосредоточенными в уровнях этажа. Основной вклад в горизонтальные перемещения РДМ зданий до 9 этажей вносят деформации сдвига. Перемещения от изгибных деформаций малы и ими можно пренебречь. Конструктивная схема регулярна как в плане, так и по высоте. Начальный период по первой форме обычно лежит в пределах $0,1 \dots 0,5 \text{ с}$.

Железобетонные стены работают в основном в условиях сдвига. Связь между поперечной силой и перекосом этажа аппроксимируется зависимостью, предложенной С. Е. Фрайфельдом, в которой полная деформация выражена суммой упругой и пластической

$$\Delta = \frac{Q}{Kg_0} \left(1 + \eta \left(\frac{Q}{[Q]} \right)^\mu \right), \quad (5.10)$$

где Δ — полный перекося в пределах этажа; Q — поперечная сила в сечении; Kg_0 — начальная жесткость элемента; η — отношение пластической деформации к упругой в момент разрушения; $[Q]$ — предельная поперечная сила; μ — показатель нелинейности.

Касательную жесткость элемента определим, продифференцировав уравнение (5.10) по Q

$$Kg' = \frac{Kg_0}{1 + \eta(\mu + 1) \left(\frac{Q}{[Q]} \right)^\mu}. \quad (5.11)$$

Коэффициенты η и μ определяют опытным путем из условий

$$\begin{aligned} \frac{[Q]}{Kg_0} (1 + \eta) &= \Delta_p; \\ \int_0^{\Delta_p} Q(\Delta) d\Delta &= W_p, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где Δ_p — максимальное перемещение, достигнутое до разрушения образца; W_p — энергия, затраченная на разрушение опытного образца.

По СП 63 в первом приближении коэффициенты η и μ можно определить с помощью трехлинейной диаграммы состояния бетона, представленной на [рис. 5.3](#).

Коэффициент η определяется из первого уравнения системы (5.12)

$$\eta = \left(\varepsilon_{b2} - \frac{R_b}{E_b} \right) \frac{E_b}{R_b}. \quad (5.13)$$

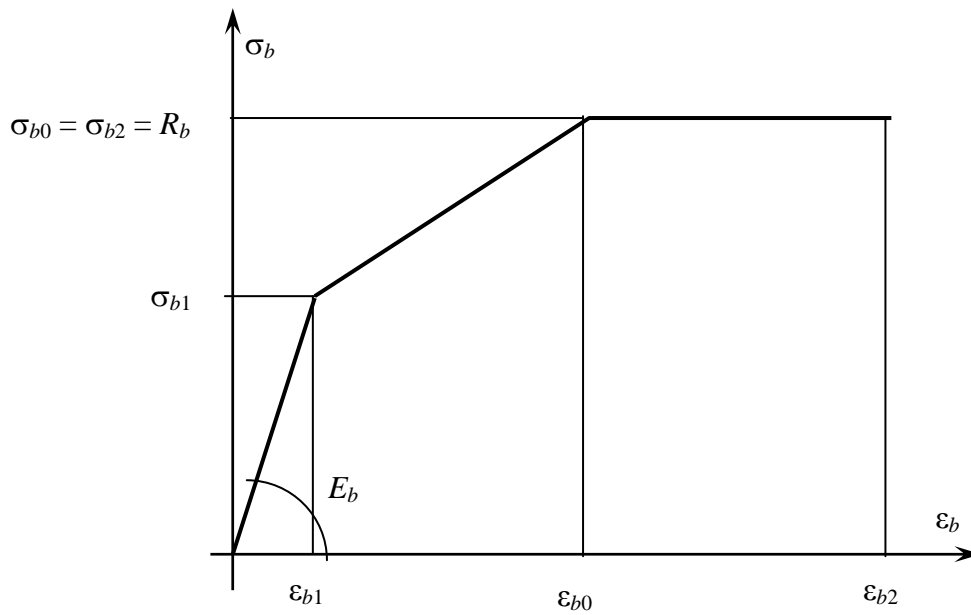


Рис. 5.3. Диаграмма состояния бетона (СП 63)

Коэффициент нелинейности деформирования μ определяется из второго условия системы (5.12). При этом энергия разрушения W_p численно равна площади диаграммы деформирования

$$\mu = \frac{\eta R_b^2}{E_b (\varepsilon_{b2} R_b - W_p) - 0,5 R_b^2} - 2. \quad (5.14)$$

На рис. 5.4 представлена нормативная трехлинейная диаграмма деформирования бетона класса В40.

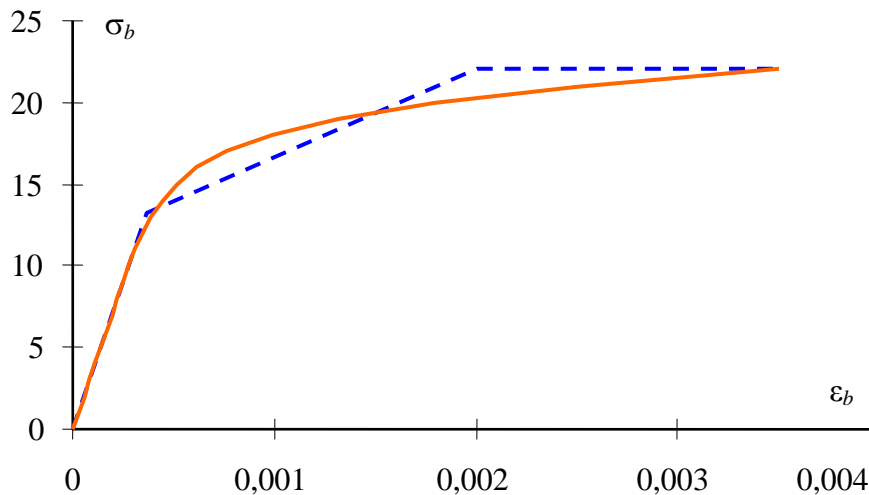


Рис. 5.4. Аппроксимирующая функция диаграммы состояния бетона класса В40: пунктиром показана нормативная зависимость

Пример 5.2. Проведем анализ нелинейного осциллятора, моделирующего здание из тяжелого бетона класса В25 на акселерограмму Эль-Центро. Начальный период колебания принят 0,21 с. Этому периоду соответствует жесткость осциллятора 894 кН/м при массе 1 т. Предельная реакция принята 2,4 кН, коэффициенты η и μ соответственно равны 6,24 и 7,95.

Результаты расчета представлены на рис. 5.5 и 5.6. Максимальная реакция составляет 2,3 кН. Суммарная энергия неупругих деформаций за все время воздействия 0,136 кДж. Максимальная энергия, поглощенная в пластическом полцикле, 0,026 кДж. Энергия разрушения 0,039 кДж. Максимальная реакция соответствующего линейного осциллятора равна 9,4 кН. Максимальное перемещение нелинейного осциллятора 0,016 м, соответствующего линейного 0,0105 м.

Снижение (редукция) силовой реакции нелинейного осциллятора составило $9,4/2,3 = 4,09$, при этом перемещение увеличилось в 1,45 раз.

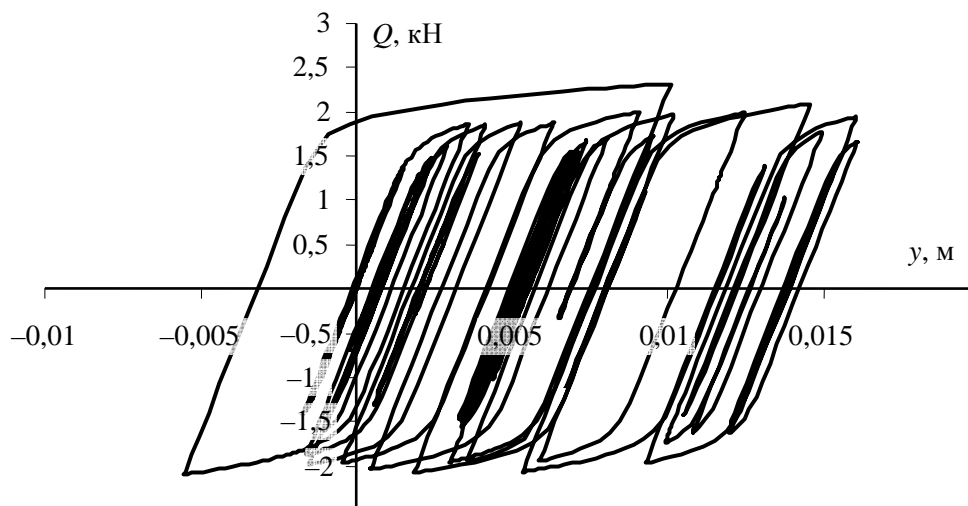


Рис. 5.5. Диаграмма деформирования нелинейного осциллятора

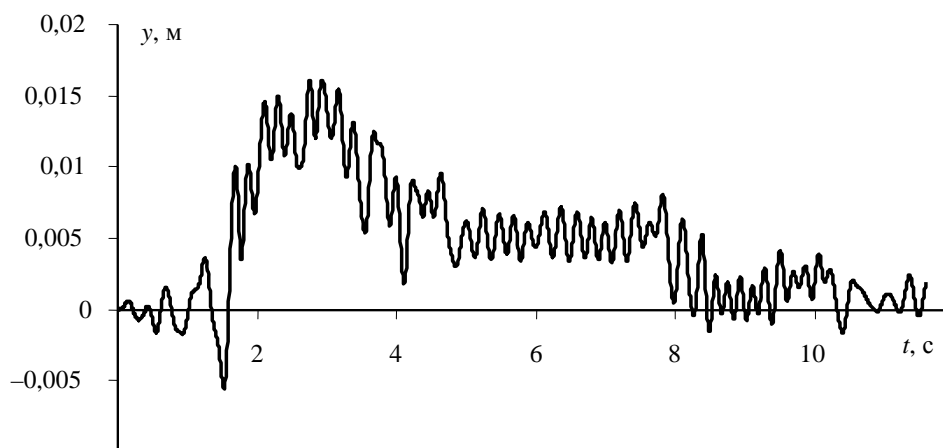


Рис. 5.6. Перемещение массы нелинейного осциллятора в процессе воздействия

5.4.3. Каркасные железобетонные здания

Наиболее простым методом, учитывающим пластические деформации изгибаемых железобетонных элементов, является метод пластического шарнира. Суть метода заключается в назначении пластических шарниров в опорных сечениях ригеля. Если изгибающий момент от всех нагрузок превосходит предельный, вычисленный по нормам проектирования железобетонных изгибаемых элементов, то в сечении образуется пластический шарнир. В процессе разгрузки происходит закрытие шарнира. Разрушение элемента зависит от количества циклов открытия-закрытия пластического шарнира, которое определяется экспериментально.

Пример 5.3. Исследовать трехпролетную, трехэтажную раму (рис. 5.7) из железобетона класса В25, армированную арматурой А400. Распределенная нагрузка на ригели от веса конструкций 27 кН/м, полезная нагрузка — 12 кН/м. Сечения колонн 400 × 400, ригелей — 400 × 480(h). Предельный изгибающий момент, воспринимаемый опорным сечением ригеля при его оптимальном армировании, принят 250 кНм. Коэффициент затухания $\xi = 0,05$. Здание рассчитано на акселерограмму Эль-Центро. На рис. 5.8 представлена диаграмма деформирования опорного сечения в координатах «угол поворота — изгибающий момент». Количество циклов образования пластического шарнира равно 5.

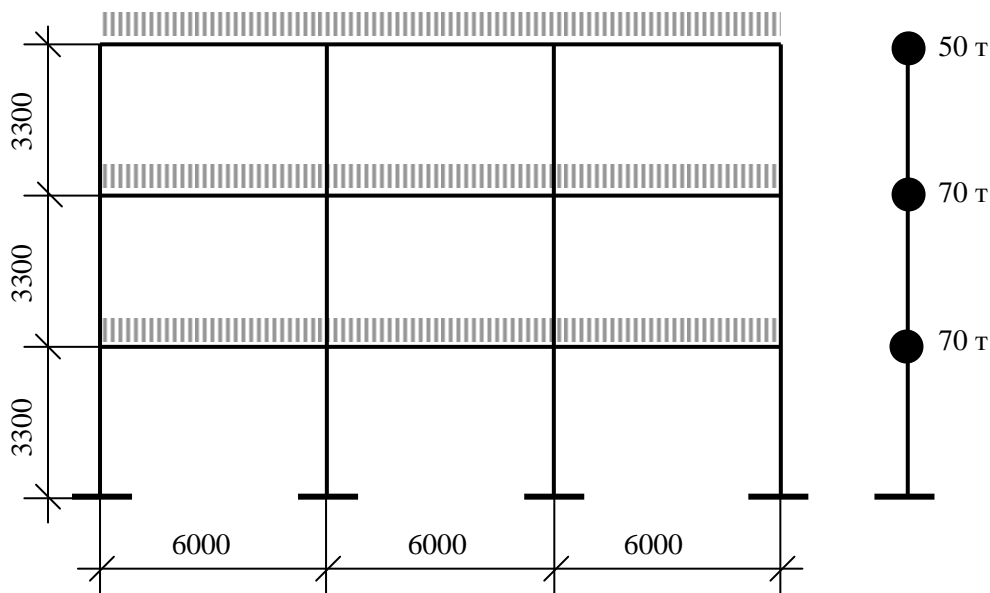


Рис. 5.7. Расчетная схема рамы и ее динамическая модель

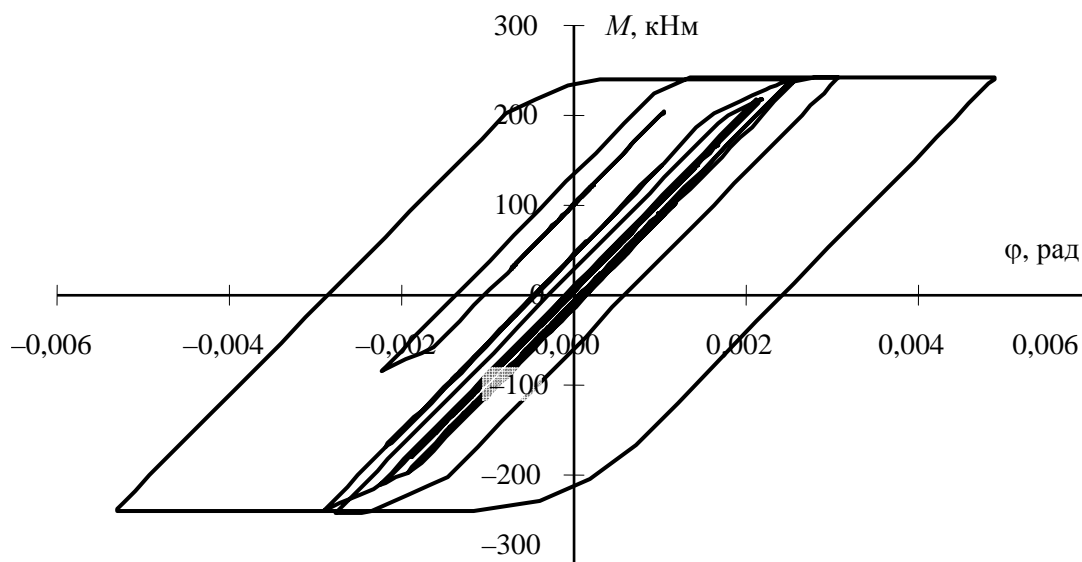


Рис. 5.8. Диаграмма деформирования ригеля первого этажа

Существенным недостатком этого метода является предположение о работе стоек в упругой стадии, что не соответствует действительности. Более достоверные результаты можно получить при расчете по нелинейной деформационной модели. Для этого назначается несколько характерных сечений по длине стержня. От количества сечений зависит точность расчета. В процессе

расчета на каждом шаге интегрирования определяется НДС каждого сечения и определяется касательная жесткость сечения. Далее строится матрица компонентов касательной жесткости элемента.

Определение жесткости сечения обычно производится по СП 63 с использованием двухлинейных диаграмм состояния бетона и арматуры. Жесткость всего стержня переменной жесткости вычисляется численно или аналитически по известным зависимостям строительной механики.

5.4.4. Здания со стальным каркасом

Металлические каркасы строительных конструкций состоят, как правило, из тонкостенных пластинчатых стержней (двутавры, швеллеры, уголки и т. д.). Поэтому моделировать их работу логичнее всего с помощью прямоугольных конечных элементов. В качестве элемента, моделирующего работу стержня, можно применить элемент плоского напряженного состояния (балка-стенка) либо комбинированный элемент: балка-стенка + изгибаемая плита. Достоинство комбинированного элемента заключается в возможности учета эффекта потери местной устойчивости стенки или полки тонкостенного стержня от местной нагрузки. Недостаток — большее число неизвестных в узлах в сравнении с элементом плоского напряженного состояния. Этот недостаток перекрывает достоинства, так как количество уравнений возрастает в два раза по сравнению с элементом балка-стенка. Кроме того, потерю местной устойчивости можно предотвратить конструктивными мероприятиями (установка ребер жесткости) либо назначением соотношения размеров таким образом, чтобы исключить местную потерю устойчивости. Местные напряжения, как правило, не оказывают существенного влияния на общее состояние конструкции, так как при проектировании конструкций, воспринимающих значительные местные нагрузки, всегда предусматривают конструктивные мероприятия, устраняющие концентрации напряжений.

В качестве элемента, моделирующего работу тонкостенных стержней, выбран прямоугольный элемент плоского напряженного состояния. Количество неизвестных в каждом узле — 2 линейных перемещения по направлениям X_m и Y_m (рис. 5.9).

В настоящее время для изотропных упругопластических материалов, эксплуатируемых в обычных условиях, наиболее широко применяют две теории:

деформационная теория пластичности (теория малых упругопластических деформаций) и теория пластического течения. В обеих теориях для объемной деформации справедлив закон Гука и соотношения между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций не зависят от конкретного вида напряженного состояния. Эти теории наиболее исследованы и дают наиболее

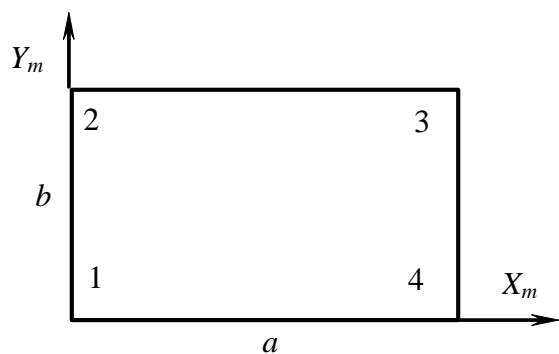


Рис. 5.9. Схема конечного элемента

близкие результаты к экспериментальным данным. Известно, что деформационная теория пластичности является частным случаем теории пластического течения. Для простых процессов (изменение напряжения пропорционально одному параметру) результаты по обеим теориям совпадают. В стержневых элементах, как правило, определяющими напряжениями являются нормальные напряжения, поэтому при любых комбинациях усилий в стержнях будет изменяться только один компонент напряжений, следовательно, будет иметь место простой процесс. Исключением являются стенки ригелей, несущих распределенную нагрузку. В этом случае появляются значительные касательные напряжения и процесс нагружения перестает быть простым. Например, при постоянной распределенной нагрузке и изменении узловых моментов происходит рост нормальных напряжений при постоянстве касательных. Кроме того, в деформационной теории нет явного разделения деформаций на упругую и пластическую части, что в ряде случаев может создать дополнительные трудности. Поэтому для определения НДС принята теория пластического течения. Так как моделирование тонкостенных стержней осуществляется элементами плоского напряженного состояния, то все дальнейшие выкладки проведены для этого состояния.

Основные уравнения теории пластического течения получают из постулата Друкера:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^n &= 0 \text{ при } f < 1 \text{ или при } f \geq 1 \text{ и } \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \leq 0; \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^n &= F \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f} \text{ при } f \geq 1 \text{ и } \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

где f — функция напряжений; F — скалярная функция, зависящая от пластических деформаций, напряжений и программы нагружения (функция упрочнения); σ_{ij} , ε_{ij} — обобщенные напряжения и деформации.

Существует несколько способов задания функции напряжений в зависимости от применяемой теории прочности. Для металлов наиболее применима четвертая теория прочности, или теория октаэдрических касательных напряжений. Согласно этой теории пластическое состояние не зависит от вида напряженного состояния и наступает, когда энергия деформаций формоизменения достигнет определенного значения. Для плоского напряженного состояния в упругой стадии энергия деформации формоизменения для единицы объема имеет вид

$$V_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2). \quad (5.16)$$

Выражение, стоящее в скобках, соответствует второму инварианту девиатора напряжений.

Для одноосного напряженного состояния

$$V_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_1^2. \quad (5.17)$$

Энергия формоизменения зависит от уровня напряжений и не зависит от конкретного вида напряженного состояния, поэтому при одном и том же уровне напряжений энергии формоизменения единицы объема по формулам (5.16) и (5.17) будут равны. Приравняв правые части уравнений (5.16) и (5.17) и приняв $\sigma_1 = \sigma_T$, получим условие текучести Губера — Мизеса — Генки для плоского напряженного состояния, отражающее условие постоянства энергии формоизменения:

$$\sigma_T^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2. \quad (5.18)$$

В теории пластического течения для упрочняющегося материала поверхность (5.16) сохраняется, но вместо константы σ_T используется переменная σ_i (интенсивность напряжения), характеризующая деформацию поверхности напряжения. Интенсивность напряжений — это величина одноосного напряжения, при котором энергия формоизменения сложного напряженного состояния в упругой стадии равна энергии формоизменения одноосного состояния с данной величиной напряжения. Численно интенсивность напряжений равна второму инварианту девиатора напряжений. Обычно функция напряжений задается в безразмерном виде $f = \sigma_i / \sigma_T$.

Подставив выражение для функции напряжений в (5.15) и представив скорости дифференциалами, получим выражения для пластических деформаций в приращениях

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^{\text{п}} &= F(\sigma_x - 0,5\sigma_y) \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}, \\ d\varepsilon_y^{\text{п}} &= F(\sigma_y - 0,5\sigma_x) \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}, \\ d\gamma_{xy}^{\text{п}} &= 3F\tau_{xy} \frac{d\sigma_i}{\sigma_i}, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

где $d\sigma_i = \frac{1}{\sigma_i} (d\sigma_x(\sigma_x - 0,5\sigma_y) + d\sigma_y(\sigma_y - 0,5\sigma_x) + 3d\tau_{xy}\tau_{xy})$; F — функция упрочнения.

Определим функцию упрочнения F . Для этого выразим приращение энергии неупругих деформаций с точностью до множителей второго порядка малости

$$dV^{\text{п}} = \sigma_x d\varepsilon_x^{\text{п}} + \sigma_y d\varepsilon_y^{\text{п}} + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^{\text{п}}, \quad (5.20)$$

подставив значения деформаций из формулы (5.19) и преобразовав переменные, получим

$$dV^n = F d\sigma_i \sigma_i,$$

или в развернутом виде

$$dV^n = F \left[\sigma_x (d\sigma_x - 0,5 d\sigma_y) + \sigma_y (d\sigma_y - 0,5 d\sigma_x) + 3\tau_{xy} d\tau_{xy} \right]. \quad (5.21)$$

Приращение энергии формоизменения для упругих деформаций

$$dV_\phi^y = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_i d\sigma_i.$$

Приращение энергии формоизменения единицы объема для плоского напряженного состояния с учетом вышеизложенного получит вид

$$dV_\phi = F d\sigma_i \sigma_i + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_i d\sigma_i. \quad (5.22)$$

Аналогично вычисляется приращение энергии формоизменения единицы объема для одноосного напряженного состояния:

$$dV_\phi^1 = \sigma_1 (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^y) + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_1 d\sigma_1, \quad (5.23)$$

где $(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^y) = d\varepsilon_1^n$ — неупругие деформации для одноосного напряженного состояния при уровне напряжения σ_1 .

Энергия формоизменения, согласно постулату Губера — Мизеса — Генки, зависит от уровня напряжений и не зависит от вида напряженного состояния. Если $\sigma_1 = \sigma_i$, то $V_\phi = V_\phi^1$. Соответственно и приращение энергий для двух видов напряженного состояния равны, если равны приращения напряжений.

Приравняв правые части формул (5.22) и (5.23), получим значение функции упрочнения

$$F = \frac{d\varepsilon_1^n}{d\sigma_1} = \frac{1}{E'}, \quad (5.24)$$

где E' — мгновенная касательная жесткость, определяемая по диаграмме $\varepsilon_1^n — \sigma_1$ для одноосного напряженного состояния.

Зависимость $\varepsilon_1^n — \sigma_1$ строится по диаграмме растяжения $\varepsilon_1 — \sigma_1$ посредством вычитания упругих деформаций — $\varepsilon_1^n = \varepsilon_1 — \sigma_1/E$.

Для проведения численного исследования необходимо определить касательную (мгновенную) жесткость конечного элемента, адекватно отражающую его напряженное состояние в пластической стадии. Непосредственное применение модуля касательной жесткости в форме (5.22) некорректно, так как он отражает только меру упрочнения при вычислении пластических деформаций. Необходимо определить жесткость пластинчатого элемента, связывающую полные перемещения с полными усилиями и, соответственно, деформации с напряжениями.

Уравнения теории упругости в матричном виде относительно неизвестных компонентов векторов σ , ε , u состоят:

из матричного уравнения, связывающего деформации и перемещения

$$\varepsilon = A u, \quad (5.25)$$

матричного уравнения упругости

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (5.26)$$

граничных условий на поверхности с заданными силами

$$A_S \sigma = g_S, \quad (5.27)$$

граничных условий на поверхности с заданными перемещениями

$$u = u_S. \quad (5.28)$$

В формулах (5.25)—(5.28) введены следующие обозначения:

1) векторы напряжений σ , деформаций ε и перемещений u

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}, \varepsilon^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}, u^T = \{u_x, u_y\};$$

2) A — матрица операций дифференцирования

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad (5.29)$$

3) векторы поверхностных сил g_S и перемещений u_S

$$g_S = \{X_n, Y_n\}, u_S = \{u_{Sx}, u_{Sy}\},$$

где n — нормаль к поверхности тела;

4) D — матрица упругости

$$D = E \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu^2} & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\nu)} \end{pmatrix}; \quad (5.30)$$

5) A_S — матрица направляющих косинусов нормали n к поверхности

$$A_S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Объемные силы не учитывают ввиду их малости по сравнению с внешними нагрузками.

Рассмотрим процесс перехода элемента из состояния 1 в состояние 2 при изменении внешней нагрузки на величину dP (рис. 5.10). Дополнительно введем в рассмотрение условно-упругую (замещающую) систему. Эта система отличается от рассматриваемой только тем, что связь между приращениями напряжений и приращениями полных деформаций линейна и определяется соотношением (5.26)

$$\sigma = D^* \varepsilon,$$

где D^* — матрица упругости замещающей системы; $\varepsilon = \varepsilon^y + \varepsilon^п$ — сумма упругих и пластических деформаций.

Векторы перемещений для обеих систем равны, равны также величины работ, совершаемых внешними нагрузками на соответствующих перемещениях.

Докажем, что матрица упругости замещающей системы при переходе из состояния 1 в состояние 2 пропорциональна матрице упругости исходной системы. Для этого запишем в матричной форме зависимость между приращениями напряжений и перемещений

$$d\sigma = A D du^y, \tag{5.32}$$

где $d\sigma$ — вектор приращения напряжений; A — матрица операций дифференцирования; D — матрица упругости упругой линейной системы; du^y — вектор приращения упругих перемещений.

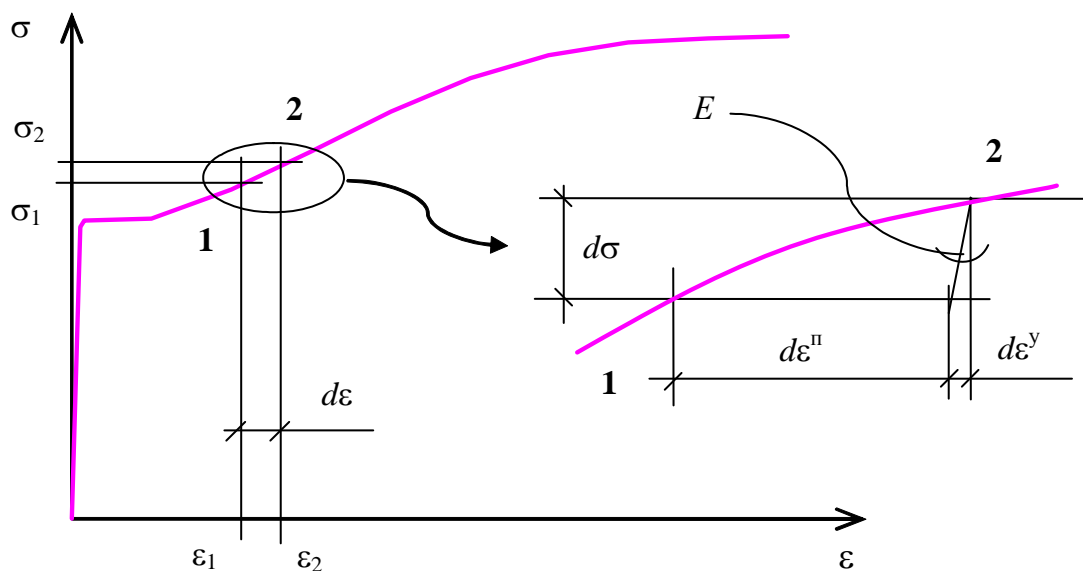


Рис. 5.10. К определению условной жесткости

С другой стороны, тот же переход осуществим при помощи условно-упругой (замещающей) системы:

$$d\sigma = A D^* du, \tag{5.33}$$

где D^* — искомая матрица; du — вектор приращения полных перемещений.

Приравняв правые части уравнений (5.32) и (5.33), найдем

$$D^* = \chi D,$$

т. е. матрица упругости замещающей (условно-упругой) системы пропорциональна матрице упругости упругой системы.

Так как матрица жесткости упругой системы пропорциональна модулю упругости E , то для замещающей системы необходимо найти соответствующий модуль $E^* = \chi E$. Очевидно, что при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 (см. рис. 5.10) работы внутренних сил замещающей и действительной систем должны быть равны. Это следует из равенства соответствующих работ внешних сил. Работа внутренних сил в единице объема исходной системы с точностью до вторых величин малости

$$dV = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\tau_{xy}.$$

Подставив значения дифференциалов деформаций из формулы (5.19), получим выражение для приращения энергии деформирования действительной системы

$$dV = \left(\sigma_x (\sigma_x - 0,5\sigma_y) + \sigma_y (\sigma_y - 0,5\sigma_x) + 3\tau_{xy}^2 \right) \frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} + \frac{1}{E} \left(\sigma_x (d\sigma_x - \nu d\sigma_y) + \sigma_y (d\sigma_y - \nu d\sigma_x) + 2(1 + \nu)\tau_{xy} d\tau_{xy} \right). \quad (5.34)$$

Работа внутренних сил в единице объема замещающей системы

$$dV = \frac{1}{\chi E} \left(\sigma_x (d\sigma_x - \nu d\sigma_y) + \sigma_y (d\sigma_y - \nu d\sigma_x) + 2(1 + \nu)\tau_{xy} d\tau_{xy} \right). \quad (5.35)$$

Приравняв (5.34) и (5.35), получим выражение для модуля упругости замещающей системы. Обозначив второе слагаемое формулы (5.34) через $dV_{\text{упр}}$, получим значение коэффициента χ :

$$\chi = \frac{dV_{\text{упр}}}{\sigma_i d\varepsilon_i^n + dV_{\text{упр}}}, \quad (5.36)$$

который зависит от соотношения упругой и полной энергии деформации и не зависит от вида напряженного состояния.

Для моделирования геометрической нелинейности применен принцип статико-кинематической аналогии. Продольная сила вводится в качестве жесткостной характеристики элемента (рис. 5.11). Аналогичный подход используется и в методе начальных параметров. Применение такой аналогии накладывает некоторые ограничения на расположение пластинчатого элемента. Он должен располагаться таким образом, чтобы его ось X_m была направлена вдоль оси X_1 стержня. Нормальная сила N_m в пластинчатом элементе определяется следующим образом:

$$N_m = \frac{N E_m^*}{\sum_n E_j^*}, \quad (5.37)$$

где N — продольная сила в стойке; n — количество пластинчатых элементов в соответствующей плоскости; E_m^* , E_j^* — касательные модули упругости конечного элемента.

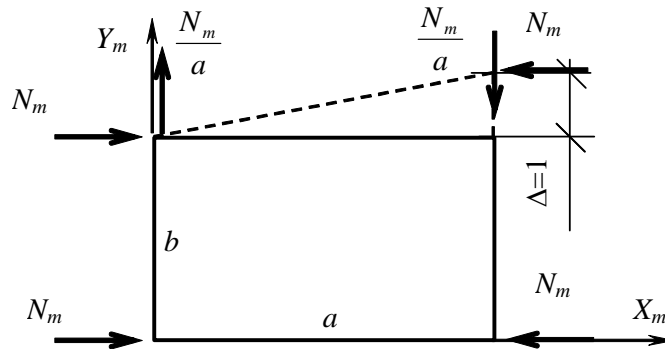


Рис. 5.11. Учет влияния продольных сил в жесткостных характеристиках конечного элемента

Пример 5.4. Для исследования влияния продольного изгиба стоек и неупругих деформаций на сейсмическую реакцию рассмотрена плоская рама из [примера 5.2](#). Стойки приняты из двутавров 30К1, ригели — 40Б1. Класс стали С235. В качестве скелетной ветви диаграммы деформирования принята двузвенная диаграмма с упрочнением. В качестве расчетной принята акселерограмма Эль-Центро. Коэффициент затухания $\xi = 0,025$. Периоды колебаний соответствующей консервативной системы составляют 0,77, 0,24 и 0,14 с. Перемещения верха рамы представлено на рис. 5.12. Там же показаны перемещения для упругой системы без учета физической нелинейности материала и влияния продольных сил в стойках. Качественная картина перемещений по первому и второму этажам аналогичная.

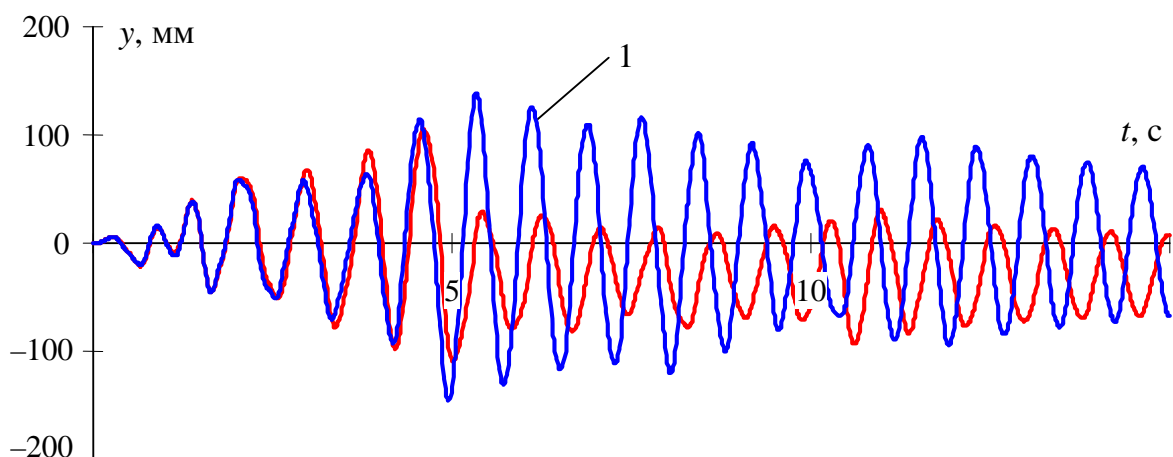


Рис. 5.12. Перемещения верха рамы: 1 — в упругой стадии работы

На [рис. 5.13](#) приведено значение упругого отпора (восстанавливающей силы) второй массы в процессе воздействия.

Анализ перемещений ярусов рамы показывает, что до момента времени 2 с перемещения упругой и неупругой систем полностью совпадают. Далее в неупругой системе развиваются пластические деформации и перемещения становятся меньше перемещений упругой. Деформации в конечных элементах неупругой системы увеличиваются по сравнению с упругой. Этот парадокс объясняется тем, что демпфирующие характеристики неупругой системы значительно выше упругой. Причем поглощение энергии осуществляется в основном неупругими деформациями материала. Естественно, что такое поглощение не зависит от скорости изменения нагрузки и, следовательно, от частоты колебаний.

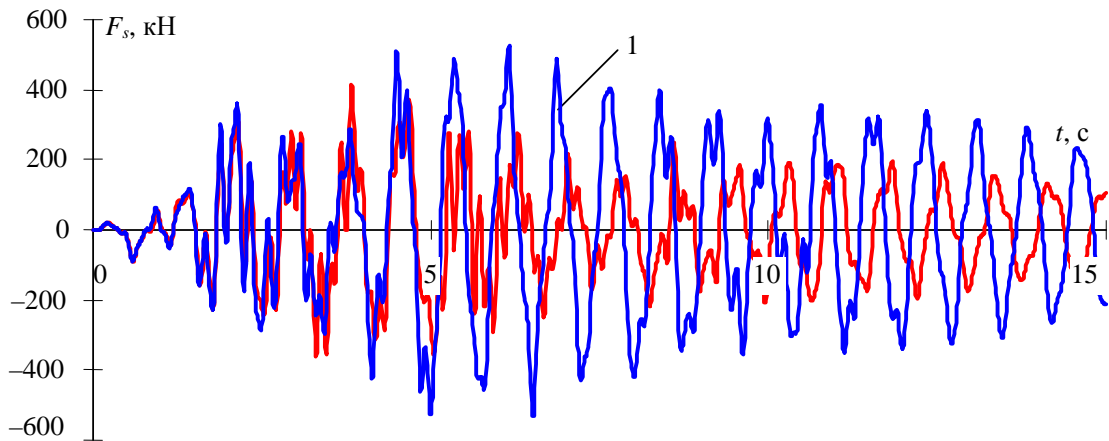


Рис. 5.13. Отпор второго яруса рамы: 1 — в упругой стадии работы

На рис. 5.14 приведены значения энергий в процессе воздействия. Энергия, воспринятая рамой, зависит только от соотношения спектров частот свободных колебаний рамы и эффективной нагрузки. С ростом пластических деформаций происходит сдвиг спектра частот собственных колебаний рамы в сторону более низких, что приводит к уменьшению энергии, воспринимаемой рамой. Это уменьшение наглядно видно на рис. 5.14. Энергия, воспринимаемая рамой, в неупругой системе практически полностью расходуется на пластические деформации. В упругой системе эта же энергия демпфируется вязким трением.

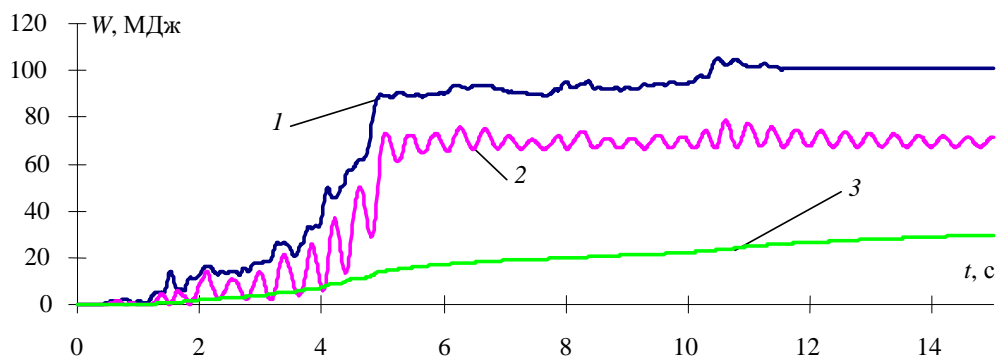


Рис. 5.14. Суммарные величины энергий неупругой системы, выделенные в процессе: 1 — воздействия; 2 — деформации; 3 — диссипации

На [рис. 5.15](#) и [5.16](#) приведены диаграммы деформирования в сечениях стойки и ригеля первого этажа.

Значения максимальных напряжений в стойке и ригеле приведены ниже.

Максимальные значения напряжений, МПа

	стойки	ригеля
неупругой	249	неупругого 248
упругой	775	упругого 606

Величина удельной энергии неупругого формоизменения составляет для ригеля — 8,53, для стойки — 17,75 МДж/м³. Сейсмические реакции упругой системы примерно в полтора раза больше сейсмических реакций неупругой. Этот эффект связан с большим поглощением энергии неупругими деформациями стальных конструкций.

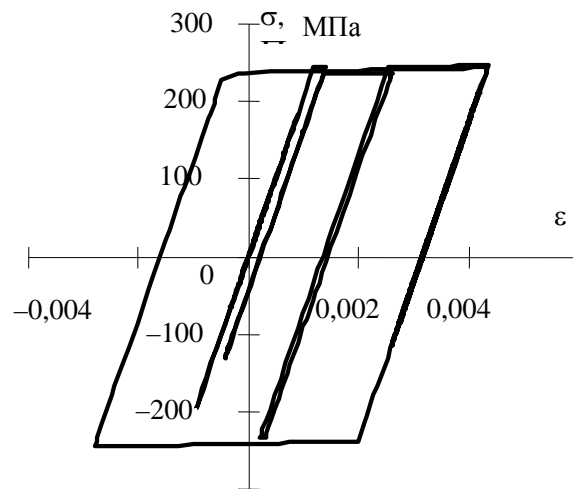


Рис. 5.15. Диаграмма деформирования опорного сечения полки стойки первого этажа

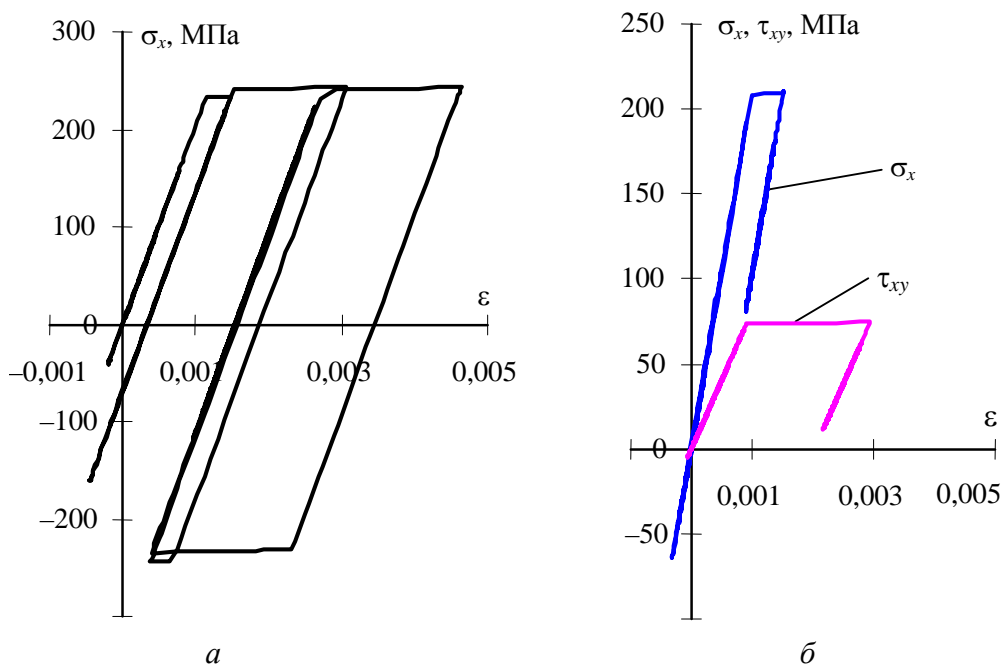


Рис. 5.16. Диаграмма деформирования в опорном сечении полки (а) и стенки (б) ригеля первого этажа

5.5. Деградация жесткости и несущей способности элементов в процессе сейсмического воздействия

В процессе воздействия, за счет накопления неупругих деформаций в элементах конструкции возможно снижение (деградация) жесткости и несущей способности конструкции в целом. Это снижение обусловлено накоплением неупругих деформаций, развитием микроразрушений, искривлением оси сжатых металлических элементов, развитием трещин в железобетонных

элементах. Разрушение конструкции в результате накопления неупругих деформаций называется малоцикловой усталостью. Дegradaция имеет различную природу для железобетонных и стальных конструкций.

5.5.1. Дegradaция железобетонных конструкций

Основные факторы, влияющие на дegradaцию железобетонных конструкций: развитие трещин в растянутой зоне бетона и пластические деформации арматуры. При смене знака нагружения, когда растянутая зона становится сжатой, изменяются начальные характеристики бетона и арматуры для следующего цикла нагружения. Разрушение железобетонной конструкции может наступить либо в пластическом полупероде при достижении энергии деформации энергии разрушения ($W_i = W_p$), либо в результате малоцикловой усталости ($\sum W_i = nW_p$, где n — количество пластических полуперодов до разрушения).

Очевидно, что в обоих случаях разрушения жесткость и несущая способность обращаются в ноль. При отсутствии неупругих деформаций снижение жесткости не происходит.

Оценка снижения жесткости после пластического полуперода может быть получена следующим выражением:

$$E^* = E_0 \left(1 - \frac{\sum W_{пл}}{nW_p} \right)^k, \quad (5.38)$$

где $k < 1$ — эмпирический коэффициент.

Аналогичным образом определяется снижение несущей способности после каждого пластического полуперода.

Пример 5.5. Рассмотрим поведение нелинейного осциллятора из [примера 5.2](#) при падении жесткости и несущей способности в процессе воздействия. Коэффициенты для вычисления пониженной жесткости (5.38) $n = 5$, $k = 0,5$. На рис. 5.17 представлена диаграмма деформирования.

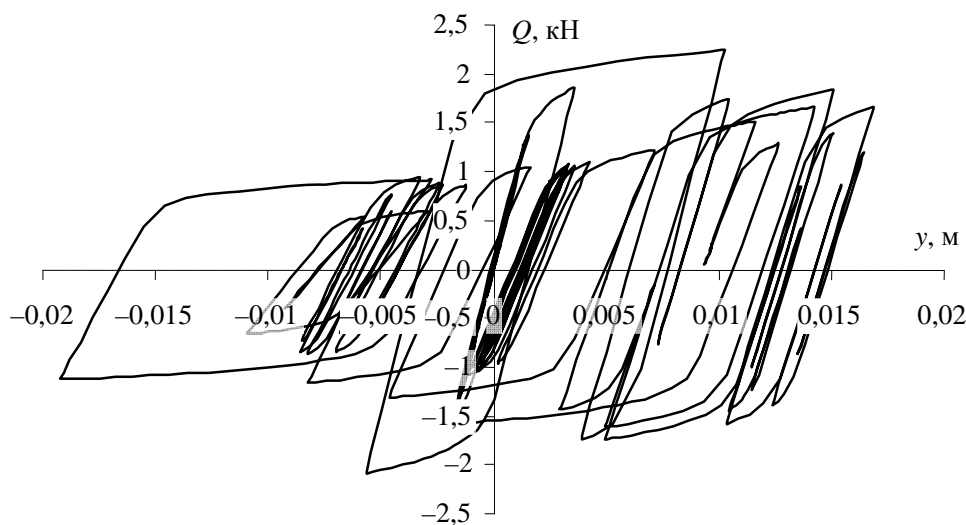


Рис. 5.17. Реакция нелинейного осциллятора с дegradiрующими в процессе воздействия жесткостью и несущей способностью

5.5.2. Деградация стальных конструкций

В стальных элементах малоцикловая усталость не столь критична, как для железобетонных. Кроме того, при циклическом нагружении в одном направлении при напряжениях более предела текучести проявляется явление наклепа. Снижение жесткости стальных стержней наблюдается только при внецентренном сжатии и знакопеременной пластике. Это явление связано, в основном, с искривлением продольной оси стержня при многократном знакопеременном нагружении. Чем меньше эксцентриситет приложения нагрузки, тем больше проявляется эффект снижения начальной жесткости. Такой учет может быть выполнен по приближенной формуле

$$E^* = E \left(\frac{\varepsilon_i^y}{\sum \varepsilon_i^n + \varepsilon_i^y} \right)^k, \quad (5.39)$$

где E — начальный модуль упругости; k — некоторый коэффициент, близкий к 1/2 и зависящий от конструктивных особенностей; $\sum \varepsilon_i^n$ и ε_i^y — соответственно накопленные пластические и соответствующие упругие деформации в пластическом полуцикле.

Эффект снижения жесткости внецентренно сжатого элемента может быть учтен посредством введения корректирующего коэффициента в форме (5.39). Показатель радикала k зависит, в основном, от гибкости сжатого элемента и относительного эксцентриситета приложения сжимающей силы.

Для изгибаемых элементов эффекта снижения начальной жесткости не наблюдается.

5.6. Критерии разрушения

В детерминированных расчетах на сейсмические нагрузки необходимо на каждом шаге иметь истинные напряжения и деформации в элементах конструкций. При этом установить момент разрушения конструкции в целом или отдельных ее частей, используя нормативные критерии, невозможно. В этих случаях используют критерии, определяющие надежность сооружения.

Надежность системы обусловлена накоплением повреждений в процессе воздействия. В зависимости от модели, используемой в динамическом анализе, применяют различные критерии для оценки надежности как отдельных элементов, так и конструкции в целом. Все применяемые критерии для неупругих систем подразделяют на три основные группы: энергетические, деформационные и динамические.

Энергетические критерии оперируют с величиной энергии, поглощенной конструкцией во время динамического воздействия. По существу, определяется величина энергии неупругих деформаций или энергия микроразрушений и сравнивается с некоторым предельным значением, характеризующим полное обрушение конструкции. Величина этой энергии определяется

экспериментально. К энергетическому критерию можно отнести метод, при котором сравнивается энергия, выделенная в процессе воздействия, с энергией, поглощенной системой. Поглощенная энергия определяется площадью петли гистерезиса, а выделенная — по известным зависимостям физики.

Деформационные критерии: предельные деформации, остаточные деформации, предельные относительные перемещения, податливость (предельное отношение неупругих и упругих перемещений). Наиболее широко в практике динамического анализа нелинейных систем применяется критерий предельных деформаций или перемещений.

Критерий остаточных деформаций заключается в сравнении остаточных деформаций в элементах системы после окончания воздействия с предельными деформациями скелетной ветви или ее частью. Этот критерий не позволяет исключать из ансамбля элементы, разрушенные в процессе воздействия. Кроме того, он существенно зависит от асимметрии воздействия.

По сути дела, в деформационных критериях тем или иным способом сравниваются характеристики нелинейной системы с упругими характеристиками аналогичной линейной.

К *динамическим* относят критерии, оперирующие предельными скоростями и ускорениями. Собственно ускорения и скорости в той или иной степени используются в деформационных критериях.

Наличие многообразия критериев надежности свидетельствует о том, что ни один из них не позволяет в полной мере оценить надежность конструкции при экстремальном воздействии. Наиболее общим является энергетический критерий, так как он включает в себя деформационные и силовые факторы. В настоящее время практически во всех нормах сейсмостойкого строительства развитых стран используется энергетический критерий Ньюмарка.

6. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Спектральный анализ является обобщением модального анализа и нелинейного расчета, проводимого методами прямого интегрирования. В отличие от модального спектральный анализ не требует расчета во временной области и проводится в частотном диапазоне. Для этого определяется максимальная реакция по каждой форме на некоторое унифицированное воздействие. Следует иметь в виду, что спектральный анализ проводится исключительно на одно направление сейсмического воздействия.

6.1. Вычисление сейсмических сил по формам колебаний

Максимальная реакция линейного осциллятора определяется двумя параметрами: соотношением собственной частоты осциллятора и спектра частот акселерограммы и максимальной ординатой акселерограммы. То есть, для акселерограммы строится спектр максимальных реакций линейных осцилляторов в диапазоне 0,25...25 Гц с затуханием 0,05 критического. Таким затуханием обладают практически все железобетонные конструкции. В уравнение линейного осциллятора (2.3) введем обозначение максимального упругого отпора по i -й форме в геометрических координатах

$$S_{\beta i} = \omega_i^2 y_{\max}, \quad (6.1)$$

где y_{\max} — максимальное перемещение линейного осциллятора от воздействия акселерограммы \ddot{y}_0 .

Величина упругого отпора определяется по спектру реакций линейных осцилляторов. На [рис. 6.1](#) представлены спектры реакций линейных осцилляторов для различных акселерограмм интенсивностью примерно 8...9 баллов по шкале МСК-64. Там же приведены нормируемые спектры для интенсивности сейсмического воздействия 9 баллов — $S_{\beta} = 4\beta(T)$. Характеристики акселерограмм приведены в табл. 1.1.

Для перехода от геометрических координат к нормальным (см. уравнение 3.12) достаточно значение упругого отпора, найденное по графику, умножить на коэффициент сейсмической нагрузки i -й формы

$$\omega_i^2 q_i = \frac{L_i}{M_i} S_{\beta i},$$

или, выполнив матричные операции в явном виде,

$$\omega_i^2 q_i = \frac{\sum_{j=1}^N \varphi_{ij} m_j e_j}{\sum_{j=1}^N \varphi_{ij}^2 m_j} S_{\beta i}.$$

И, наконец, находим геометрическое перемещение k -й массы по i -й форме (2.9)

$$y_{ik} = \frac{1}{\omega_i^2} \eta_{ik} S_{\beta i}, \quad (6.2)$$

где введено обозначение $\eta_{ik} = \frac{\varphi_{ik} \sum_{j=1}^N \varphi_{ij} m_j e_j}{\sum_{j=1}^N \varphi_{ij}^2 m_j}$ — относительное ускорение k -й

массы по i -й форме. Относительное ускорение — это отношение ускорения массы в данной точке к максимальной амплитуде акселерограммы.

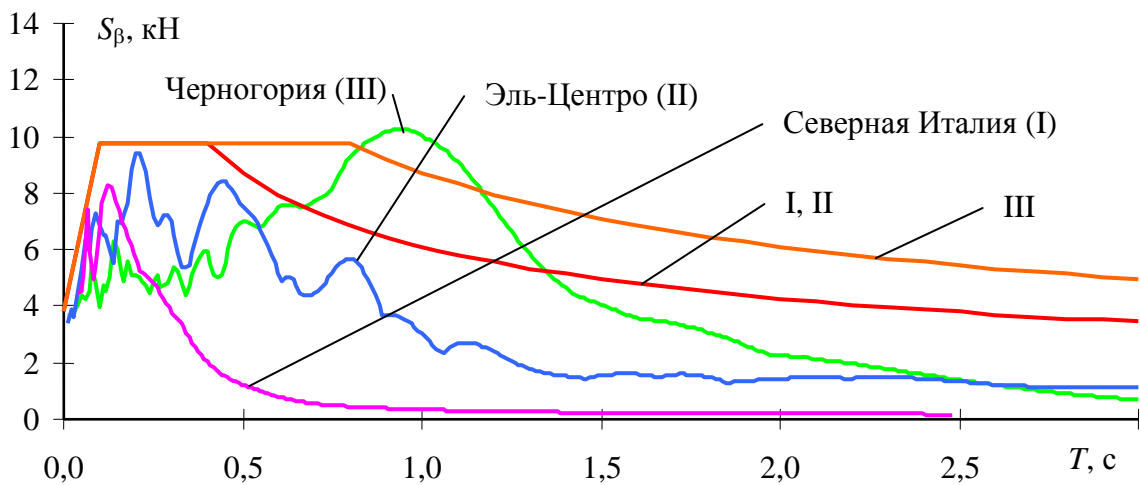


Рис. 6.1. Спектры реакций линейных осцилляторов с коэффициентом затухания 0,05 на различные землетрясения: римскими цифрами обозначена категория грунта по сейсмическим свойствам

Сейсмическая реакция в форме (6.2) не удобна для применения в большинстве расчетных комплексах. Используя свойство (3.15), можно перейти от реакции в форме перемещения к реакции в форме отпора

$$S_{ik} = m_k \eta_{ik} S_{\beta i}, \quad (6.3)$$

где S_{ik} — максимальная реакция (восстанавливающая сила или упругий отпор) k -й массы по i -й форме.

6.2. Нормирование коэффициента динамичности

Реакция линейного осциллятора находится в линейной зависимости от максимальной амплитуды воздействия $\ddot{y}_{o,\max}$ при прочих равных условиях. Нормативные кривые коэффициента динамичности являются огибающими спектров реакций линейных осцилляторов презентабельной выборки акселерограмм на площадках с соответствующими типами грунтовых условий. Коэффициент динамичности β_i является максимальным упругим отпором линейного осциллятора с частотой ω_i в геометрических координатах для гипотетической акселерограммы с максимальной амплитудой $\ddot{y}_{o,\max} = 1 \text{ м/с}^2$. Для перехода к заданной интенсивности вводится коэффициент балльности A , принимающий значения 1, 2 и 4 для интенсивности 7, 8 и 9 баллов соответственно. Максимальная реакция линейного осциллятора на соответствующее землетрясение примет вид

$$S_{\beta i} = A \beta_i,$$

соответственно, реакция k -й массы упругой системы по i -й форме

$$S_{ik} = A m_k \eta_{ik} \beta_i. \quad (6.4)$$

Нормируемый коэффициент динамичности определен для линейного осциллятора с затуханием 0,05 критического. Для стальных конструкций коэффициент затухания ниже, для каменных — выше. Кроме того, коэффициент затухания зависит в некоторой степени от конструктивных решений. Для корректировки коэффициента затухания введен коэффициент рассеивания энергии K_ψ .

6.3. Редуцирование реакций неупругих систем

Формула (6.4) справедлива для упругих линейных систем. Ни один строительный материал не является идеально упругим и линейным. В упругих системах рассеивание энергии происходит только за счет вязкого затухания. В неупругих системах значительная часть энергии землетрясения поглощается неупругими деформациями материала. Вследствие поглощения энергии происходит снижение величины сейсмической реакции неупругих систем по сравнению с аналогичными реакциями упругих. Это снижение называется редуцией.

Пример 6.1. Проведем простой численный эксперимент, который может быть выполнен в любой электронной таблице, например в MS Excel. Рассмотрим две системы: линейную и билинейную со скелетной кривой диаграммы Прандтля. Для сравнительного анализа размерность величин (кроме времени) не имеет значения.

Уравнение линейного осциллятора в общем случае

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = p(t). \quad (6.5)$$

Уравнение соответствующего нелинейного осциллятора

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \int_0^{y(t)} \frac{dS}{dy} dy = p(t), \quad (6.6)$$

где $\frac{dS}{dy}$ — касательная жесткость, равная ω^2 на упругом участке и 0 в пластической стадии.

Уравнения (6.5) и (6.6) могут быть решены любым методом прямого интегрирования.

Рассмотрим линейный осциллятор с периодом $T = 0,5$ с без затухания ($\xi = 0$), нагруженный одиночным импульсом синусоидальной формы продолжительностью 0,05 с, с максимальной амплитудой 50.

В данном случае уравнения проинтегрированы методом Ньюмарка с постоянным ускорением на участке. Шаг интегрирования $\Delta t = 0,001$ с.

На рис. 6.2 и 6.3 представлены перемещения и диаграммы деформирования соответствующих осцилляторов.

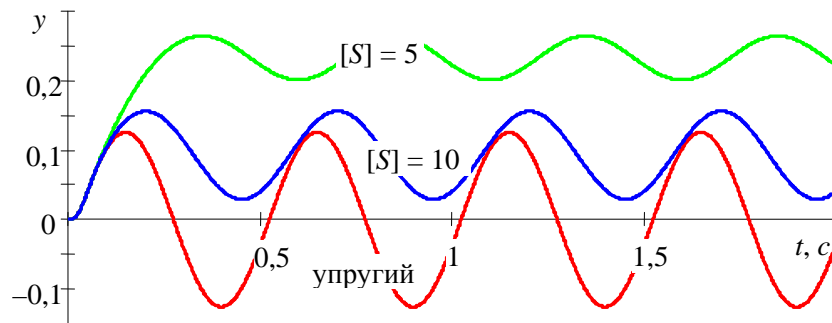


Рис. 6.2. Перемещения упругого и упругопластических осцилляторов в процессе воздействия

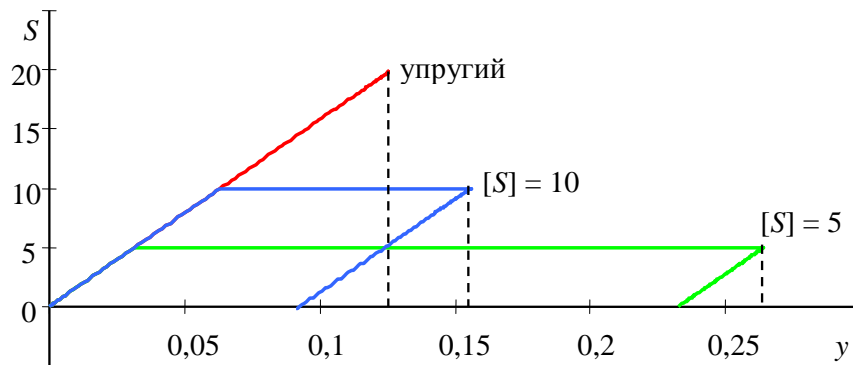


Рис. 6.3. Диаграммы деформирования упругого и упругопластических осцилляторов

Максимальная реакция линейного осциллятора $[S] = 20$, перемещение $y = 0,126$. Максимальное перемещение для нелинейного осциллятора с ограничением $[S] = 5$ составило $y = 0,264$; при $[S] = 10$ — $y = 0,156$.

Анализируя рис. 6.3, можно подтвердить постулат о равенстве энергии, воспринятой системой в независимости от характера ее деформирования. Коэффициент редукии для идеального упругопластического материала вычисляют по формуле

$$R = \sqrt{2 \frac{\varepsilon_R E}{\sigma_T} - 1}, \quad (6.7)$$

где ε_R — полная деформация разрушения; σ_T — предел текучести.

В 60-х годах прошлого века рядом исследователей был проведен сравнительный анализ реакций линейных и соответствующих нелинейных систем на сейсмические воздействия. Материал этих исследований обобщен в монографии Н. Ньюмарка, Э. Розенблюэта «Основы сейсмостойкого строительства» (М., 1980). Предложены три приближенные верхние границы перемещений нелинейной системы, ограниченных спектром реакций эквивалентных линейных осцилляторов:

- 1) максимальное перемещение, принятое по линейному спектру;
- 2) перемещение, при котором максимальная кинетическая энергия в полупериоде упругой системы равна энергии деформирования нелинейной;
- 3) перемещение, при котором ускорение, в соответствии со скелетной кривой, равно максимальному спектральному ускорению.

Действительное перемещение нелинейной системы принимается меньшим из трех.

Исследуя нелинейные системы на акселерограмму Эль-Центро с различными скелетными кривыми и нулевым затуханием, Ньюмарком выявлены три характерных участка интервалов периода, для которых наименьшее значение представляет одна из перечисленных границ.

По Ньюмарку соответствующие перемещения: $y_5 = 1,97$; $y_{20} = 0,256$; $y_{10} = 1,55$; $y_{20} = 0,2$.

Наиболее широко в строительстве применяется железобетон. По нормам СП 63 при расчете железобетонных элементов по нелинейной деформационной модели применяются трех- и двухзвенные диаграммы состояний. Величина предельной деформации для обоих случаев ограничивается величиной $\epsilon_{b2} = 0,0035$. Приняв $\sigma_T = R_b$ и $\epsilon_R = \epsilon_{b2}$, коэффициент редукиции для бетона класса В20, вычисленный по формуле (6.6), равен 3,97. То есть железобетонные конструкции, рассчитанные на сниженную в 4 раза сейсмическую нагрузку ($K_1 = 0,25$) не только не разрушатся, но и останутся ограниченно пригодными к эксплуатации после проектного землетрясения. Если предположить, что разрушение железобетонных элементов произойдет в результате разрыва растянутой арматуры, то коэффициент редукиции составит несколько десятков.

Для низкоуглеродистых сталей коэффициент редукиции $R = 4$ достигается при деформации 0,01, что составляет несколько процентов от деформации разрушения по СП 16.

Анализируя [рис. 6.2](#), нетрудно заметить, что относительные амплитуды колебаний неупругих осцилляторов существенно снижаются после прохождения пластического полупериода. Этот эффект объясняется поглощением энергии воздействия вследствие развития неупругих деформаций (гистерезисное затухание). При воздействии реальной акселерограммы, когда энергия подается не одновременно, а в процессе всего воздействия, перемещения неупругого осциллятора оказываются существенно меньше упругого.

Пример 6.2. Для иллюстрации этого положения рассмотрим реакции описанных выше осцилляторов на акселерограмму вида

$$p(t) = 18 t \exp(-1,5t) \sin(15t).$$

На рис. 6.4 и 6.5 представлены соответственно перемещения осцилляторов и диаграмма деформирования неупругого осциллятора с билинейной скелетной кривой. Максимальное перемещение и соответствующая реакция упругого линейного осциллятора составляют $S = 20$ и $y = 0,125$ (как и при одиночном импульсе). Соответствующие реакции для неупругого билинейного $S = 5$ и $y = 0,059$.

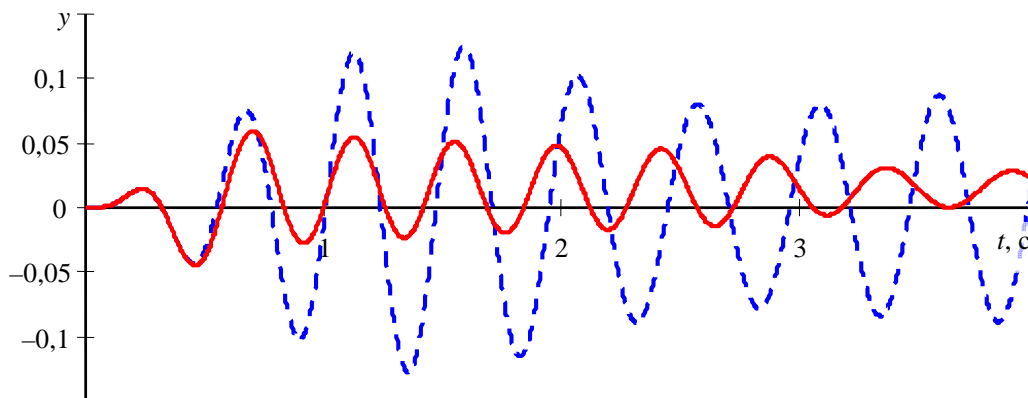


Рис. 6.4. Перемещения упругого (пунктир) и неупругого (сплошная) осцилляторов

Энергия, поглощенная за счет неупругих деформаций, примерно в 2 раза меньше соответствующей энергии при одиночном импульсе. Для линейного осциллятора (пунктирная кривая на рис. 6.4) наблюдается снижение амплитуды после 2 с колебаний. Этот эффект аналогичен эффекту биения при гармонических колебаниях. Вынуждающая сила и упругий отпор находятся в противофазе, и колебания гасятся без какого-либо демпфирования. Это явление отчасти объясняет имеющиеся факты больших разрушений при меньших интенсивностях.

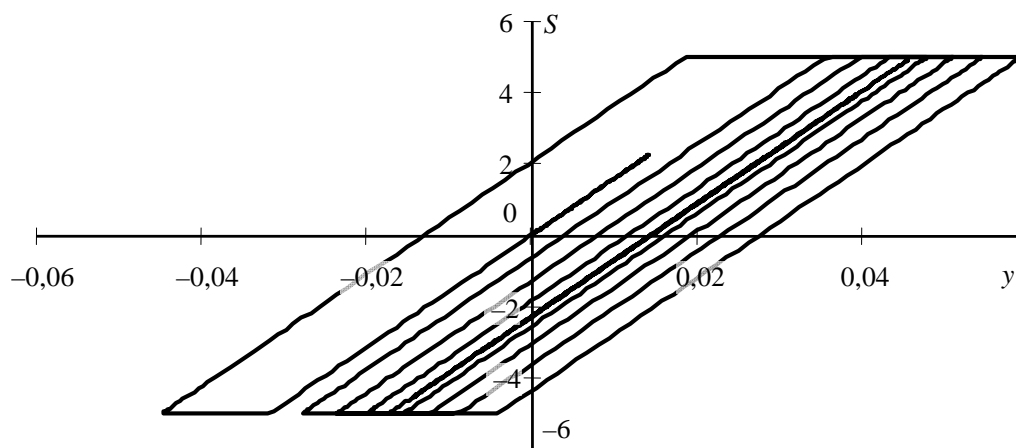


Рис. 6.5. Диаграмма деформирования осциллятора с билинейной скелетной кривой

Реальные акселерограммы являются случайными процессами и при расчете по ним могут проявляться различные эффекты, значительно искажающие действительную реакцию конструкции. При расчете по ЛСТ реакция сооружения зависит только от максимального ускорения и спектрального состава акселерограммы.

6.4. Спектры реакций неупругих осцилляторов

Связь между реакцией и перемещением нелинейного осциллятора может быть выражена по аналогии с (5.10)

$$y = \frac{S}{\omega^2} \left\{ 1 + \eta \left(\frac{S}{[S]} \right)^\mu \right\}, \quad (6.8)$$

где ω — частота осциллятора при нулевом перемещении; η — отношение пластической деформации к упругой; μ — параметр нелинейности; $[S]$ — предельный упругий отпор осциллятора.

Касательная жесткость нелинейного осциллятора

$$\frac{dS}{dy} = \omega^2 \left\{ 1 + \eta(\mu + 1) \left(\frac{S}{[S]} \right)^\mu \right\}^{-1}. \quad (6.9)$$

Коэффициенты η и μ определяются по диаграммам состояния соответствующего материала (5.13), (5.14).

Для исследования рассмотрены шесть акселерограмм, характеристики которых приведены в [табл. 1.1](#).

Предварительно проведен анализ пиковых значений реакций нелинейных осцилляторов для конструкций из тяжелого бетона класса В25. Предельный упругий отпор принят 90 % от нормируемого. Результаты анализа представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Реакции нелинейных осцилляторов с резонансной начальной частотой

Параметры	Турция	Северная Италия	Центральная Италия	Босния и Герцеговина	Черногория	Эль-Центро
T , с	0,44	0,15	0,11	0,20	0,90	0,20
$[S]$, кН	1,9	2,30	2,30	2,30	2,20	2,30
W_p , кДж	0,108	0,018	0,010	0,033	0,607	0,033
S_{max} , кН	1,83	2,23	2,25	2,25	2,04	2,25
W_{max} , кДж	0,076	0,014	0,008	0,027	0,312	0,027
W_{tot} , кДж	0,202	0,064	0,011	0,088	1,704	0,152
u_{max} , М	0,034	0,008	0,003	0,012	0,139	0,015
W_{tot}/W_p	1,87	3,49	1,074	2,69	2,81	4,63
K_1	0,20	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23

Примечание: W_{max} — максимальная энергия деформирования в полцикле; W_{tot} — суммарная энергия пластических деформаций. Отношение W_{tot}/W_p характеризует малоцикловую усталость.

На [рис. 6.6](#) представлены диаграммы деформирования нелинейных осцилляторов для двух крайних случаев — акселерограмм Центральной Италии ($W_{tot}/W_p = 1,074$) и Эль-Центро ($W_{tot}/W_p = 4,63$).

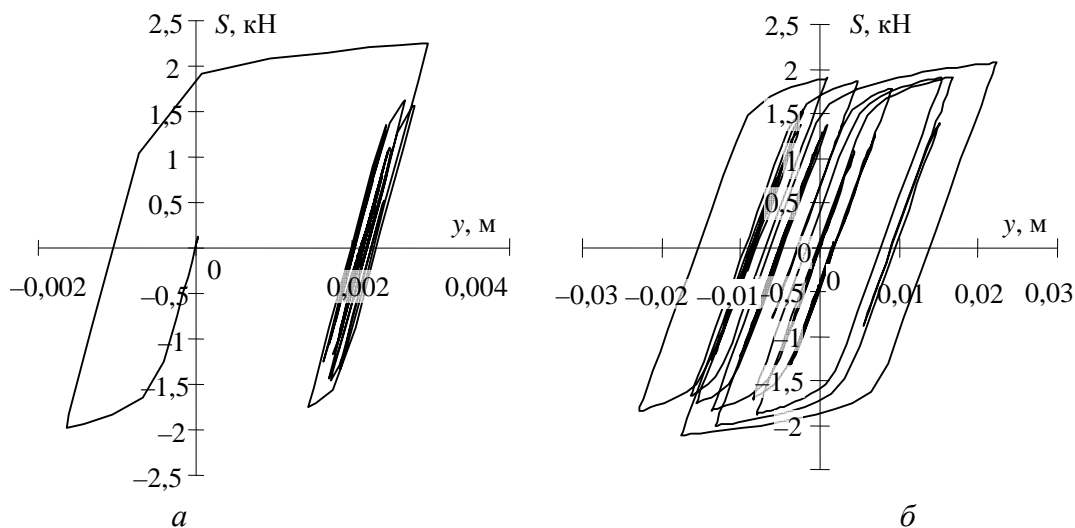


Рис. 6.6. Диаграммы деформирования нелинейного осциллятора: *а* — Центральная Италия; *б* — Эль-Центро

Можно выделить несколько основных критериев отказа строительных конструкций в процессе сейсмического воздействия:

- 1) разрушение в результате достижения максимальной энергии деформирования в одном из пластических полуциклов величины энергии разрушения при статическом действии нагрузки: $W_{\max} = W_p$;
- 2) разрушение в результате малоциклового усталости: $W_{\text{tot}}/W_p > [n]$, где $[n]$ определяется опытным путем;
- 3) потеря устойчивости сжатых элементов. Очевидно, этот критерий актуален для гибких систем;
- 4) большие абсолютные или остаточные перемещения.

Для всех критериев могут быть построены соответствующие спектры. Самым очевидным критерием является первый. На его основе построены спектры остальных критериев, представленных на рис. 6.7—6.9. При построении спектров для всех осцилляторов выполнялось условие $0,98 < W_{\max} / W_p < 1$. Спектры построены для бетона класса В25: $\eta = 6,24$, $\mu = 7,96$. Шаг по периоду 0,01с.

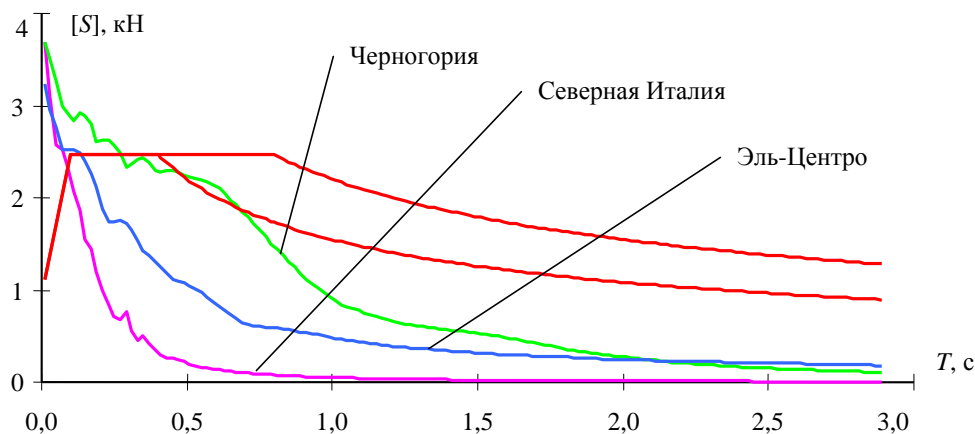


Рис. 6.7. Спектры упругого отпора нелинейных осцилляторов для конструкций из бетона класса В25. Нормируемые спектры приведены для 9 баллов, $K_1 = 0,26$

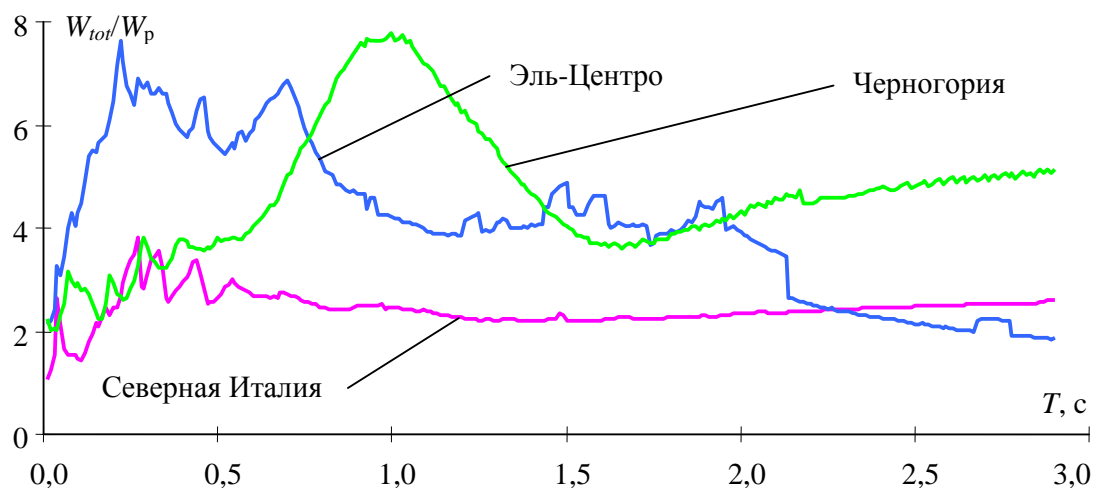


Рис. 6.8. Спектры относительных пластических деформаций W_{tot}/W_p

На рис. 6.9 представлены также нормируемые по СП 14 спектры перемещений линейных осцилляторов, вычисленные по формуле $y_{max} = 0,4 g K_1 \beta(T) (2\pi/T)^{-2}$, при $K_1 = 0,26$.

Для учета влияния осевых сил на реакцию линейного осциллятора в уравнение (6.6) необходимо добавить дополнительный член

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \int_0^{y(t)} \frac{dS}{dy} dy + k_g y = \ddot{y}_o, \quad (6.10)$$

где k_g — коэффициент геометрической жесткости.

Учитывая, что осциллятор обычно представляют в виде невесомого консольного стержня единичной длины и единичной массы, коэффициент геометрической жесткости $k_g = 0,981$ кН/м не зависит от собственной частоты колебания линейного осциллятора.

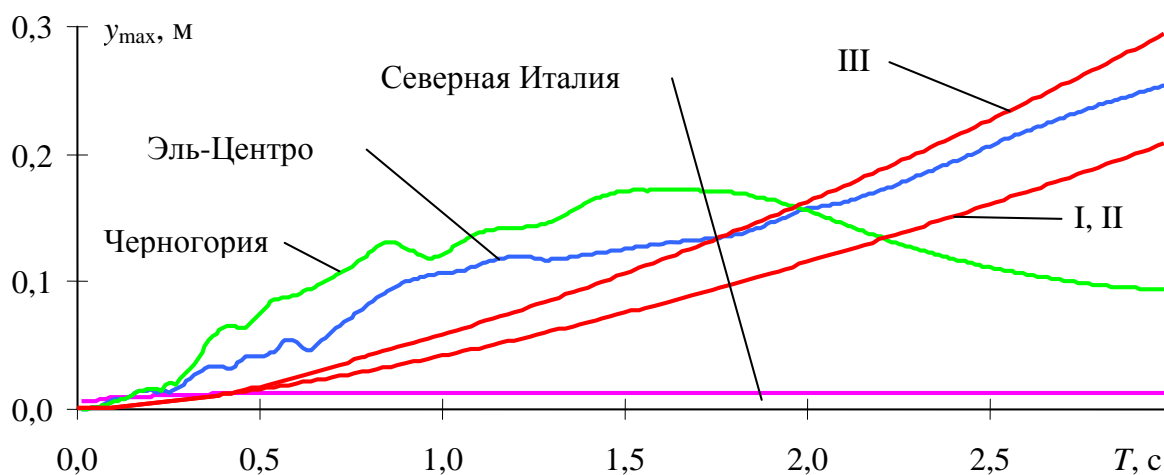


Рис. 6.9. Спектры максимальных перемещений

На [рис. 6.10](#) представлены спектры упругого отпора нелинейных осцилляторов для стали класса С345: $\eta = 70,88$, $\mu = 6,96$. Коэффициент затухания принят 2,5 % критического.

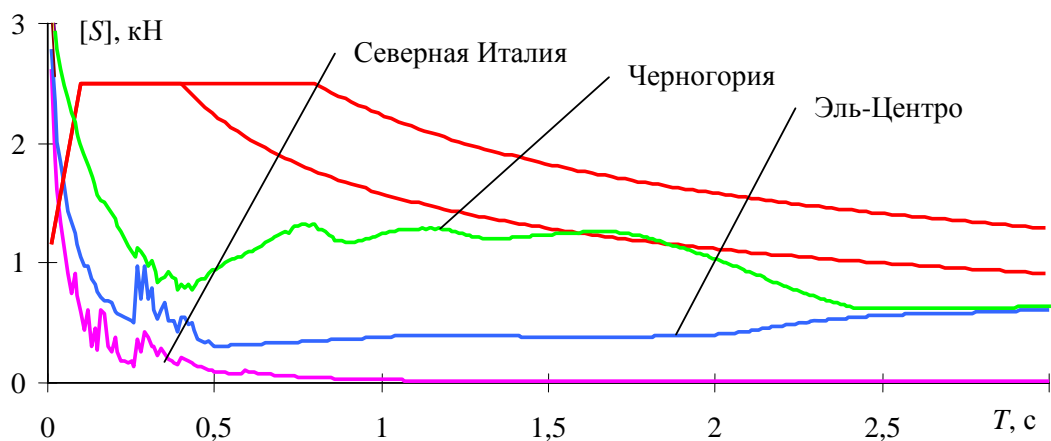


Рис. 6.10. Спектры упругого отпора нелинейного осциллятора для стали С345 с учетом осевых сил

Спектры реакций нелинейных осцилляторов дают лишь качественную картину снижения сейсмической реакции при учете неупругого деформирования материала. Эти спектры не позволяют учесть в полной мере конструктивные особенности зданий и сооружений, влияющих на степень снижения сейсмической реакции. Поэтому во всех нормах сейсмостойкого строительства применяют обобщенные коэффициенты снижения сейсмических реакций. В нормах СП 14 принят коэффициент, учитывающий допускаемые повреждения K_1 , зависящий от материала и конструктивных особенностей зданий и сооружений.

6.5. Сложение форм колебаний

После вычисления сейсмических сил определяют усилия и напряжения во всех элементах конструкции по каждой форме колебаний. Результирующие усилия по учитываемым формам нельзя получить простым суммированием, так как максимальные реакции по каждой форме колебаний возникают в разные моменты времени. Нормы регламентируют сложение форм осуществлять по формуле

$$N = \sqrt{\sum_n N_i^2}, \quad (6.11)$$

где n — количество учитываемых форм; N_i — усилие по i -й форме.

Для форм, частоты которых отличаются менее 10 %, рекомендуется в формуле (6.11) заменить сумму квадратов соответствующих форм на квадрат суммы.

Пример 6.3. Рассмотрим некоторую идеализированную систему, в которой усилие с учетом трех форм определяется выражением

$$N = \sum_{i=1}^3 N_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}\right),$$

при $N \in \{8, 5, 2\}$ и $T \in \{1, 0,7, 0,3\}$ по соответствующим формам.

Максимальное значение усилия, вычисленное по формуле, $N = 11,2$. Это усилие соответствует усилию, полученному в модальном временном анализе. В спектральном анализе определяют только значения максимальных амплитуд по формам — {8, 5, 2} и результирующее усилие по формуле (6.11) будет $N = (8^2 + 5^2 + 2^2)^{0,5} = 9,6$. Если периоды по формам отличаются менее 10 %, например, период по второй форме равен 0,91 с, то результирующая по нормам $N = ((8 + 5)^2 + 2^2)^{0,5} = 13,2$ при истинном значении $N = 12,0$.

6.6. Расчет на сейсмические воздействия по нормам

Современные расчетные комплексы позволяют выполнить расчет спектральным методом без особых затрат ручного труда. Тем не менее необходимо учитывать особенности спектрального метода при расчете зданий и сооружений на сейсмические воздействия.

6.6.1. Динамическая модель

При расчете спектральным методом не учитывается совместная работа системы «сооружение — основание». Надземная часть должна иметь жесткое сопряжение с фундаментом по его обрезу. При этом в надземную часть включается подвал при его наличии. Каждый деформационный блок рассчитывается отдельно, даже если находится на одном фундаменте с остальными.

Рекомендуется веса масс по ярусам собирать вручную и прикладывать одну массу на этаж в уровне перекрытия. Масса должна быть приложена в центре грузовой площади. В вес массы должны входить все расчетные нагрузки I ПС с соответствующими коэффициентами сочетаний для сейсмического воздействия. При автоматизированном сборе масс возможны случаи неучета форм колебаний со значительной эффективной модальной массой, что приводит к уменьшению сейсмической нагрузки.

Жесткий диск перекрытия моделируется либо объединением перемещений по соответствующим направлениям, либо введением дополнительных элементов большой жесткости на сжатие-растяжение. Объединять перемещения можно только в том случае, если вертикальные нагрузки не создают горизонтальных перемещений.

Для железобетонных конструкций модуль упругости бетона принимается расчетным для I ПС. Понижающие коэффициенты на модуль упругости бетона не вводятся.

При формировании динамической модели методом усечения матрицы единичных перемещений единичные перемещения следует определять в направлении сейсмического воздействия.

6.6.2. Выбор направления сейсмического воздействия

Нормы СП 14 предписывают «учитывать наиболее опасные, с точки зрения максимальных сейсмических реакций, направления сейсмических воздействий». Для симметричных в плане зданий расчет производится на два взаимно перпендикулярных горизонтальных воздействия, направленных по

осям симметрии. Для зданий сложной формы при несовпадении центров жесткости и масс также учитывают не менее двух направлений. Одно направление по линии, соединяющей центр жесткости и центр масс, и второе — перпендикулярно первому. В расчетных сочетаниях усилий должно присутствовать только одно из направлений.

Вертикальное направление сейсмического воздействия учитывается только в случаях, оговоренных в нормах СП 14.

Пример 6.4. Определим сейсмическую нагрузку на крупнопанельное пятиэтажное здание. План несущих стен приведен на рис. 6.11. Динамическая модель такого здания может быть представлена в виде невесомого консольного стержня, деформирующегося с учетом сдвига, с массами, сосредоточенными в уровне перекрытий. Для простоты рассмотрим только поперечную стену. Расчетная модель стены может быть представлена в виде изгибно-сдвигового стержня. Сечение стены 4000×160 , высота этажа 2,8 м. Массы в уровне перекрытий 100 т, покрытия — 80 т. Расчеты выполняются в электронной таблице MS Excel.

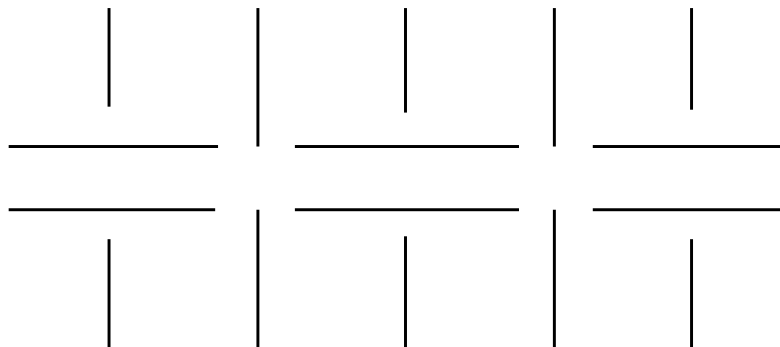


Рис. 6.11. План несущих стен крупнопанельного здания

Прежде всего необходимо сформировать матрицу жесткости элемента. Она может быть сформирована любым методом. Размер матрицы 4×4 .

Матрица жесткости изгибно-сдвигового стержня

$$R^1 = \frac{EI}{l(l^2 + 4d)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4(l^2 + d) & -6l & 2(l^2 - 2d) \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2(l^2 - 2d) & -6l & 4(l^2 + d) \end{bmatrix},$$

где $d = 3EI/GA_F$; l — длина элемента. Первая строка соответствует линейному перемещению первого узла, вторая строка — углу поворота. Третья и четвертая строки, соответственно, относятся к перемещениям второго узла.

Матрица жесткости системы строится из матриц жесткости элементов. Так как все элементы одинаковы, то элементы матрицы жесткости системы будут циклически повторяться. Фрагмент матрицы для двух первых узлов

$$R = \begin{bmatrix} R_{11}^1 + R_{33}^1 & R_{12}^1 + R_{34}^1 & R_{13}^1 & R_{14}^1 & 0 & 0 & \dots \\ R_{21}^1 + R_{34}^1 & R_{22}^1 + R_{44}^1 & R_{23}^1 & R_{24}^1 & 0 & 0 & \dots \\ R_{31}^1 & R_{32}^1 & R_{11}^1 + R_{33}^1 & R_{12}^1 + R_{34}^1 & R_{13}^1 & R_{14}^1 & \dots \\ R_{41}^1 & R_{42}^1 & R_{21}^1 + R_{34}^1 & R_{22}^1 + R_{44}^1 & R_{23}^1 & R_{24}^1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Отличие будет для последнего узла (двух последних строк и столбцов), так как к этому узлу примыкает один элемент. Размерность полученной матрицы 10×10 . Обратив матрицу жесткости и приложив единичные нагрузки по горизонтальным неизвестным, сформируем матрицу податливости размером 5×5 , из которой исключены степени свободы, связанные с поворотом узлов (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Матрица единичных перемещений (податливости)

7,058E-07	1,135E-06	1,563E-06	1,992E-06	2,421E-06
1,135E-06	3,127E-06	4,842E-06	6,557E-06	8,272E-06
1,563E-06	4,842E-06	8,977E-06	1,284E-05	1,669E-05
1,992E-06	6,557E-06	1,284E-05	1,997E-05	2,683E-05
2,421E-06	8,272E-06	1,669E-05	2,683E-05	3,783E-05

Используя процедуру Якоби для матрицы податливости, получим (табл. 6.3) собственные вектора и периоды колебаний (последняя строка).

Теперь можно вычислить относительные ускорения по формам колебаний и эффективные модальные массы (табл. 6.4).

Согласно нормам, в расчете учитываются формы с модальной массой более 5%. Таким образом, необходимо вычислить сейсмические силы для трех первых форм (табл. 6.5). Прежде всего необходимо вычислить коэффициенты динамичности. Для площадки, расположенной на грунтах II категории, $\beta_1 = 2,27$, $\beta_2 = 2,42$, $\beta_3 = 1,62$. Коэффициенты, зависящие от сейсмичности площадки строительства, назначения здания, материала и конструктивной схемы, принимаются по нормам. Для сейсмичности 9 баллов $A = 4 \text{ м/с}^2$. Остальные коэффициенты для крупнопанельного жилого дома: $K_1 = 0,25$, $K_\psi = 1$, $K_0 = 1$.

Таблица 6.3

Собственные вектора и периоды по формам

№ массы	Ф5	Ф4	Ф3	Ф1	Ф2
1	3,825E-02	6,202E-02	6,030E-02	5,839E-03	-3,196E-02
2	-5,673E-02	-3,606E-02	3,968E-02	1,904E-02	-5,954E-02
3	5,947E-02	-2,984E-02	-3,832E-02	3,702E-02	-5,228E-02
4	-3,999E-02	5,715E-02	-4,236E-02	5,745E-02	-6,372E-03
5	1,516E-02	-2,951E-02	4,370E-02	7,852E-02	5,767E-02
$T, \text{ с}$	0,0234	0,0286	0,0427	0,4863	0,0948

Таблица 6.4

Относительные ускорения и эффективные модальные массы

№ массы	η_5	η_4	η_3	η_1	η_2
1	5,023E-02	1,839E-01	3,271E-01	1,064E-01	3,324E-01
2	-7,450E-02	-1,069E-01	2,153E-01	3,469E-01	6,193E-01
3	7,811E-02	-8,848E-02	-2,079E-01	6,745E-01	5,438E-01
4	-5,252E-02	1,694E-01	-2,298E-01	1,047E+00	6,628E-02
5	1,991E-02	-8,749E-02	2,371E-01	1,430E+00	-5,998E-01
$m^{eff}, \%$	0,36	1,83	6,13	69,14	22,54

Сейсмические силы вычисляются по формуле

$$S_{ik} = K_0 K_1 A K_{\psi} m_k \eta_{ik} \beta_i = m_k \eta_{ik} \beta_i,$$

где индекс i — номер формы; k — номер массы (яруса).

Таблица 6.5

Сейсмические силы по трем формам

Форма	S1	S2	S3	S4	S5
Ф1	24,15	78,74	153,10	237,58	259,74
Ф2	80,44	149,86	131,61	16,04	-116,12
Ф3	53,00	34,88	-33,68	-37,23	30,72

И, наконец, найдем значения изгибающих моментов и поперечных сил (табл. 6.6). Суммарные значения вычислены по формуле (6.11).

Таблица 6.6

Значения сейсмических усилий по трем формам колебаний

Этажи	Усилия	Ф1	Ф2	Ф3	Сумма
1	Q , кН	753,32	261,82	47,69	798,95
	M , кНм	8091,99	723,86	73,96	8124,63
2	Q , кН	729,17	181,38	-5,31	751,41
	M , кНм	5982,69	-9,23	-59,57	5982,99
3	Q , кН	650,43	31,52	-40,19	652,43
	M , кНм	3941,01	-517,10	-44,70	3975,04
4	Q , кН	497,33	-100,08	-6,50	507,34
	M , кНм	2119,80	-605,37	67,82	2205,59
5	Q , кН	259,74	-116,12	30,72	286,17
	M , кНм	727,28	-325,14	86,03	801,29

7. СЕЙСМОИЗОЛЯЦИЯ

Величина энергии, переданная на здание, зависит от соотношения спектров сейсмического воздействия и собственных колебаний здания. Чем ближе пики спектров, тем больше, при прочих равных условиях, энергия, передаваемая зданию. Эта энергия, в основном, поглощается за счет неупругих деформаций конструкций. Исходя из вышесказанного, можно определить две основные задачи сейсмоизоляции:

- 1) развести спектры и тем самым уменьшить количество энергии, передаваемой на здание;
- 2) обеспечить поглощение оставшейся энергии при помощи специальных мероприятий.

7.1. Классификация современных систем сейсмоизоляции

Системы сейсмоизоляции классифицируют по следующим признакам:

- 1) по месту расположения:
 - а) между фундаментом и верхней частью здания или сооружения;
 - б) между фундаментом и основанием;
 - в) распределенная диссипативная система по нескольким уровням;
- 2) по способу уменьшения сейсмической нагрузки, передаваемой на сооружение:
 - а) увеличение основного периода колебаний сейсмически изолированного сооружения;
 - б) видоизменение основной формы колебаний;
 - в) увеличение демпфирования;
- 3) по виду отпора сейсмоизоляторов:
 - а) упругий отпор;
 - б) гравитационный отпор;
- 4) по типу демпфирования:
 - а) гистерезисное;
 - б) вязкое;
 - в) сухое трение.

Задача сейсмоизоляции — уменьшить третий член уравнения (2.1), воздействуя на соответствующие коэффициенты или добавляя соответствующие

компоненты. Для возможности учета системы сейсмоизоляции введем в уравнение (5.3) дополнительные члены

$$(m + m^g)\ddot{y} + (F_d + F_d^g) + (F_s + F_s^g) = P_o(t), \quad (7.1)$$

где члены с верхним индексом «г» представляют элементы сейсмоизоляции.

Уравнение (7.1) может применяться для исследования систем с любой системой сейсмоизоляции.

7.2. Нормирование систем сейсмоизоляции

В настоящее время в нормы включены только системы, удовлетворяющие определенным требованиям. Наиболее полно эти требования представлены в Европейских нормах. Аналогичные требования приняты в отечественных нормах СП 14. Нормируют только системы, расположенные между подземной (фундаменты) и надземной частями изолируемого объекта. При этом должен обеспечиваться свободный доступ ко всем элементам сейсмоизоляции с целью их инспектирования и замены. Сейсмоизоляция должна обеспечивать снижение горизонтальных сейсмических нагрузок на надземную часть здания. Уменьшение сейсмической реакции системы, воспринимающей горизонтальные силы, достигается путем увеличения основного периода колебаний изолированного сооружения. В то же время сейсмоизолирующие элементы должны обеспечивать эксплуатационную надежность при действии полной вертикальной нагрузки и ветра.

Система сейсмоизоляции может быть полной и неполной. При полной сейсмоизоляции изолированная конструкция находится в области упругих деформаций при расчетном сейсмическом воздействии. При неполной возможно развитие пластических деформаций. Нормируют только полные системы сейсмоизоляции. Для избегания ударных нагрузок во время сейсмического воздействия должны применяться демпфирующие устройства.

Основным элементом сейсмоизоляции являются виброизоляторы. Их устанавливают между надземной и подземной частями здания, и они должны быть надежно соединены с обеими частями. При этом над и под системой сейсмоизоляции предусматривают жесткие горизонтальные диафрагмы.

В соответствии с требованиями сформулированы основные правила, регламентирующие свойства виброизоляторов:

- 1) высокая вертикальная жесткость;
- 2) повышенная горизонтальная податливость;
- 3) вязкое или гистерезисное затухание;
- 4) способность к повторному центрированию;
- 5) достаточная упругая жесткость при несейсмических эксплуатационных горизонтальных нагрузках.

Основные характеристики виброизоляторов должны быть подтверждены испытанием на расчетную нагрузку с частотой 0,5 Гц.

7.3. Основные типы сейсмоизоляции

7.3.1. Резинометаллические сейсмоизолирующие опоры

Эти опоры представляют собой слоистую конструкцию, обеспечивающую вязкое и гистерезисное поглощение энергии. Моделируются линейно-неупругими стержнями с эффектом Баушингера. Основным недостатком — остаточные горизонтальные перемещения после сейсмического воздействия. Требуется полная замена изоляторов после воздействия. Основное преимущество — относительная дешевизна и простота монтажа.

Пример 7.1. В качестве примера рассмотрена РМО GZY 700 V5A фирмы Shantou Vibro Tech Industrial and Development Co Ltd. (VIBRO). Основные характеристики приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Характеристики резинометаллической опоры

Характеристика	Величина
Полное расчетное перемещение, мм	140
Проектная горизонтальная нагрузка, кН	260
Максимальная вертикальная нагрузка, кН	2800
Начальная горизонтальная жесткость, кН/м	9000
Жесткость за пределом упругости, кН/м	1290
Предел упругости, кН	80
Коэффициент вязкого затухания	0,19

Теоретические зависимости при испытании сейсмоизолятора гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц представлены на рис. 7.1—7.3.

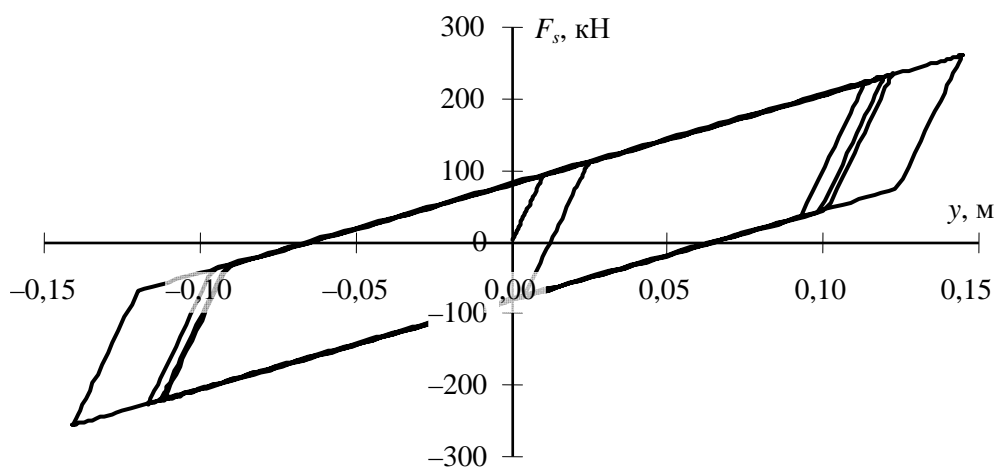


Рис. 7.1. Зависимость «упругий отпор — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой вида $P(t) = 0,8\sin(\pi t)$

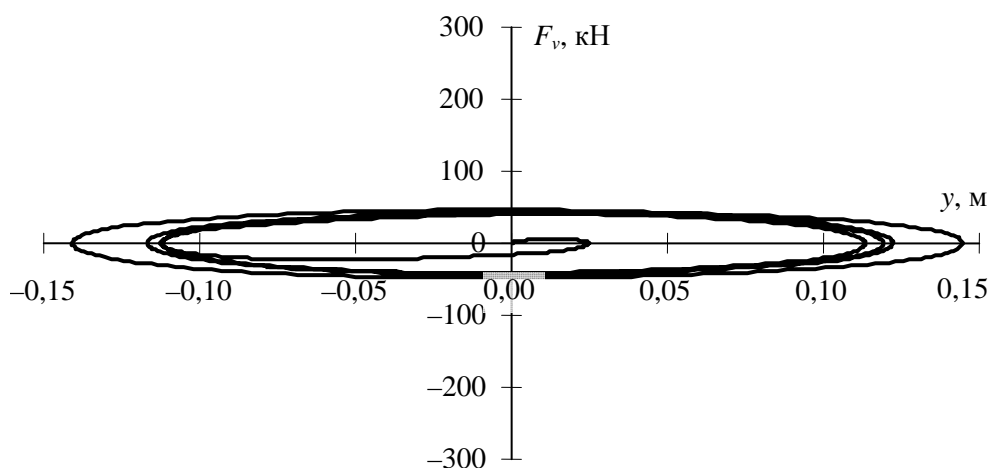


Рис. 7.2. Зависимость «диссипация — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц

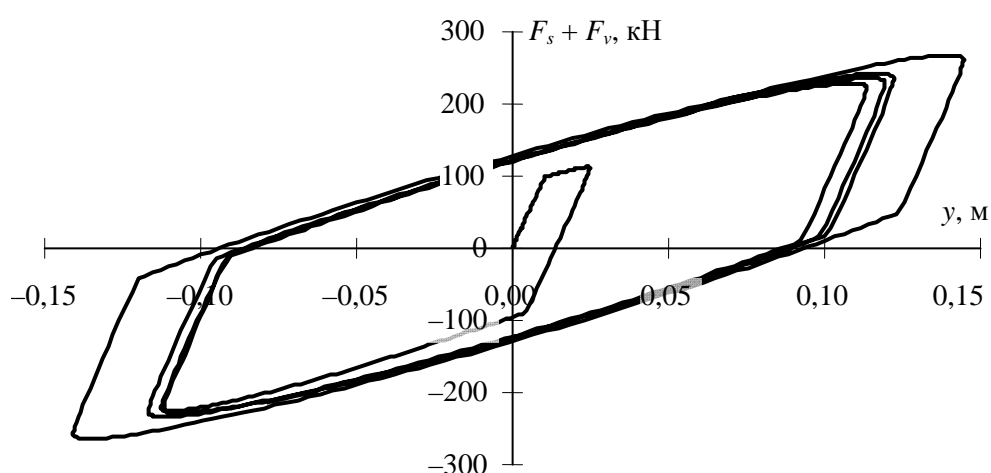


Рис. 7.3. Суммарная зависимость «упругий отпор + диссипация — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц

7.3.2. Стальные витые пружины с демпферами вязкого трения

Стальные пружины работают на сжатие и сдвиг. Жесткость пружин на сдвиг зависит от степени их сжатия. Пружины должны быть подобраны таким образом, чтобы сжатие пружин от вертикальной статической нагрузки не превышало 10 %.

Характеристики стальных спиральных пружин определяют по известным методикам, приведенным в «Справочнике проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический том» / под ред. А. А. Уманского (М., 1973). Жесткость пружины на сдвиг

$$K_y = K_z \left(0,72 - 1,28 \frac{\Delta l}{l - \Delta l} \right), \quad (7.2)$$

где K_z — жесткость пружины на сжатие; 0,72 и 1,28 — эмпирические коэффициенты для пружин с отношением длины к диаметру равном 2; Δl — вертикальное перемещение пружины; l — длина пружины, м.

Демпферы вязкого трения, как правило, устанавливаются совместно с пружинами и работают в двух направлениях независимо. Для демпферов с коэффициентом затухания не более 30 % критического уравнение движения может быть принято линейным.

Эта система наиболее эффективная. Существенным недостатком этой системы является низкая жесткость на эксплуатационные нагрузки.

Пример 7.2. Рассмотрим виброизолятор с динамическими характеристиками, аналогичными резинометаллическим изоляторам [примера 7.1](#). Характеристики виброизолятора приведены в табл. 7.2. Испытания данного изолятора представлены на рис. 7.4.

Таблица 7.2

Характеристики витой пружины с демпфером вязкого трения

Характеристика	Величина
Полное расчетное перемещение, мм	140
Проектная горизонтальная нагрузка, кН	260
Максимальная вертикальная нагрузка, кН	2800
Горизонтальная жесткость, кН/м	1860
Коэффициент вязкого затухания	0,3

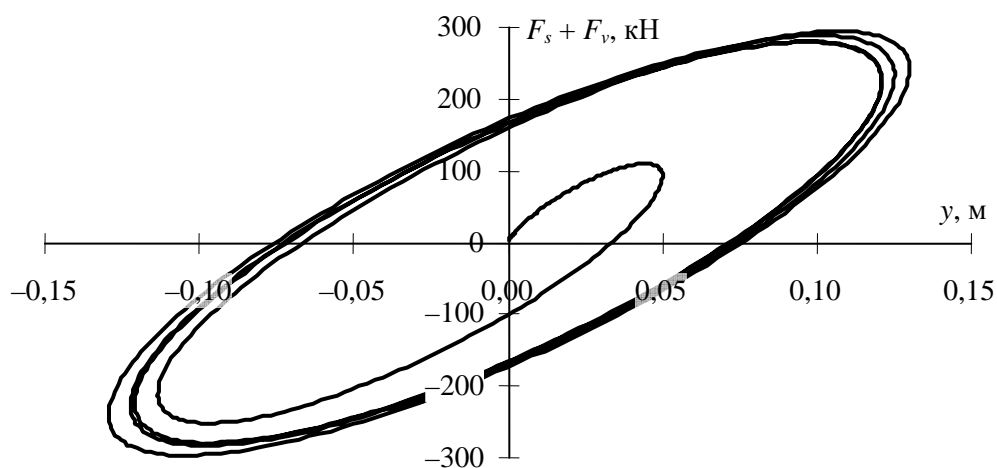


Рис. 7.4. Суммарная зависимость «упругий отпор + диссипация — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц

7.3.3. Изоляторы маятникового типа

К маятниковому типу изолятора относят здания на подвесах, кинематические фундаменты, сферические опоры. Снижение сейсмической нагрузки осуществляется за счет увеличения периода собственных колебаний. Часть сейсмического воздействия поглощается за счет работы гравитационных сил. Демпфирование осуществляется за счет сил трения в сферических опорах и кинематических фундаментов либо за счет установки дополнительных устройств в зданиях на подвесах.

Повышенная горизонтальная податливость требует проведения дополнительных мероприятий для обеспечения восприятия горизонтальных эксплуатационных нагрузок.

Отличительной особенностью таких изоляторов является гравитационная восстанавливающая сила. Уравнение движения сходно с уравнением движения маятника. На рис. 7.5 представлена динамическая модель колебания фундамента при сейсмическом воздействии и диаграмма состояния для сейсмоизоляции маятникового типа в относительных координатах.

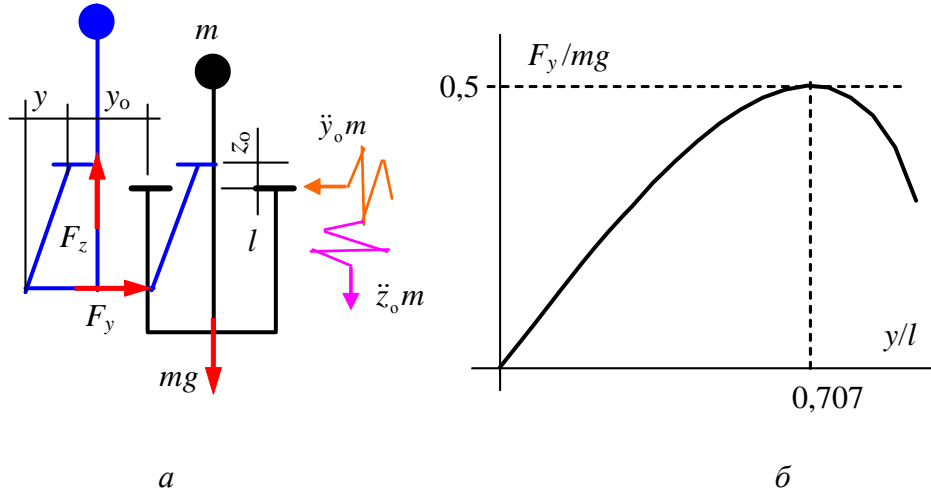


Рис. 7.5. Динамическая модель (а) и диаграмма состояния сейсмоизолятора маятникового типа (б) колебания фундамента при сейсмическом воздействии

Горизонтальные колебания при линейном демпфировании

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + m(g + \ddot{z}_0) \frac{y}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2} = -m \ddot{y}_0, \quad (7.3)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени; m — масса верхнего строения, приходящаяся на один изолятор; c — демпфирование; g — ускорение свободного падения; \ddot{z}_0 — вертикальная компонента акселерограммы; l — длина подвеса; \ddot{y}_0 — горизонтальная компонента акселерограммы.

Вертикальные колебания маятника могут быть получены из геометрической интерпретации в предположении абсолютной жесткости подвеса. Такая предпосылка справедлива для сферических опор

$$m \ddot{z} + c_z \dot{z} + m \frac{\ddot{y}}{|y|} \left(l - \sqrt{l^2 - y^2} \right) = -m \ddot{z}_0, \quad (7.4)$$

где c_z — демпфирование в вертикальном направлении; \ddot{z} — вертикальное ускорение массы относительно точки подвеса.

Для возможности интегрирования уравнения (7.3) численным методом преобразуем его согласно (5.6)

$$\ddot{y} + 2\xi \sqrt{g/l} \dot{y} + \frac{(g + \ddot{z}_0)}{l} \int_0^y \frac{1 - 2(y/l)^2}{\sqrt{1 - (y/l)^2}} dy = -\ddot{y}_0, \quad (7.5)$$

где ξ — коэффициент затухания.

На интервале интегрирования $t + \Delta t$ уравнение (7.5) в приращениях примет вид

$$\Delta\ddot{y} + c'\Delta\dot{y} + k'\Delta y = -\Delta\ddot{y}_0, \quad (7.6)$$

где введены обозначения $c' = 2\xi\sqrt{g/l}$ и $k' = \frac{(g + \ddot{z}_0)}{l} \frac{1 - 2(y/l)^2}{\sqrt{1 - (y/l)^2}}$. Префикс Δ

обозначает соответствующие приращения.

Пример 7.3. Рассмотрим испытание маятника с длиной подвеса 1 м и присоединенной массой 285 т на гармоническую нагрузку [примера 7.1](#). Коэффициент затухания $\xi = 0,05$. На рис. 7.6 представлены результаты испытаний.

Следует отметить, что в данном случае частота собственных колебаний маятника совпадает с частотой вынуждающей силы. Поэтому при малых коэффициентах затухания наблюдается резонанс.

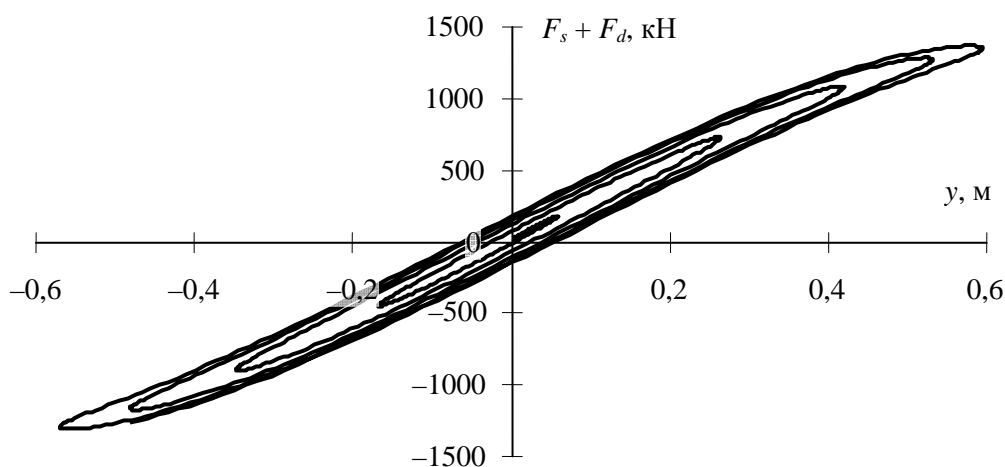


Рис. 7.6. Зависимость «упругий отпор + диссипация — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц маятникового сейсмоизолятора

7.3.4. Элементы гистерезисного затухания

Обычно в качестве элементов гистерезисного затухания применяют элементы из пластической стали. Для включения элементов в работу необходимо обеспечить свободное передвижение верхней части здания относительно фундамента и одновременно исключить поворот верха как жесткого целого. При этом разрушение элементов не должно приводить к обрушению конструкции изолированной части. Поэтому использование в качестве сейсмоизоляторов конструкций типа гибкого этажа недопустимо.

Недостатки те же, что и у резинометаллических изоляторов. Кроме того, возможно разрушение в результате малоциклового усталости. Для моделирования касательной жесткости сейсмоизолятора применяют зависимость (5.11) или (7.7).

$$GA(t) = GA(0) \left(\frac{Q_{уп}}{Q(t)} \right)^\mu, \quad (7.7)$$

где $GA(0)$ — начальная жесткость сечения (упругая); $Q_{уп}$ — предельная поперечная сила в сечении, до достижения которой материал работает в упругой стадии; $Q(t)$ — текущее значение поперечной силы; μ — коэффициент нелинейности.

Пример 7.4. Испытание сейсмоизолятора с начальной упругой жесткостью 9000 кПа, предельной упругой силой 80 кН и коэффициентом затухания 0,05 представлено на рис. 7.7.

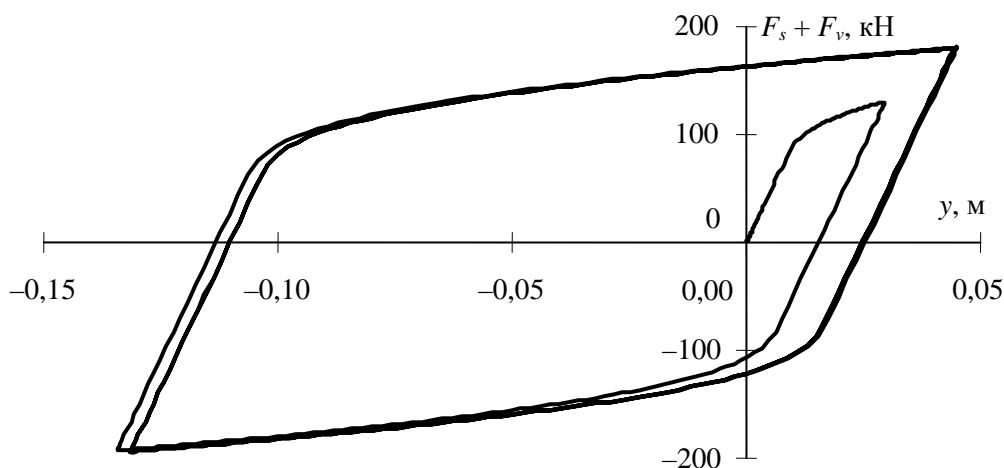


Рис. 7.7. Зависимость «упругий отпор + диссипация — перемещение» при испытании гармонической нагрузкой с частотой 0,5 Гц сейсмоизолятора гистерезисного типа

7.3.5. Конструкции, использующие сухое трение Аммонтона — Кулона

В качестве виброизоляции используют слой сыпучего материала между подземной и надземной частями здания или прокладки из фрикционных материалов. Основная идея такой изоляции заключается в том, что на изолированное строение передается нагрузка, не превышающая силу трения. Основным недостатком является невозможность учета в процессе сейсмического воздействия таких явлений, как штрибек-эффект, вибрационное сглаживание, фрикционные автоколебания.

Сухое трение моделируется идеальными жестко-пластическими элементами с большой жесткостью в состоянии покоя и с нулевой жесткостью в процессе движения. При достижении продольного усилия в стержне силы трения его жесткость обнуляется («выключается»). «Включение» элемента происходит при перемене знака скорости. В сейсмоизоляции данного типа предусматривают также упоры-ограничители, препятствующие значительному перемещению верхней части. Эти конструкции не удовлетворяют нормативным требованиям.

Пример 7.5. Испытание сейсмоизолятора сухого трения с коэффициентом трения 0,07 и коэффициентом вязкого затухания 0,05 представлено на рис. 7.8. Масса сейсмоизолированного объекта 285 т.

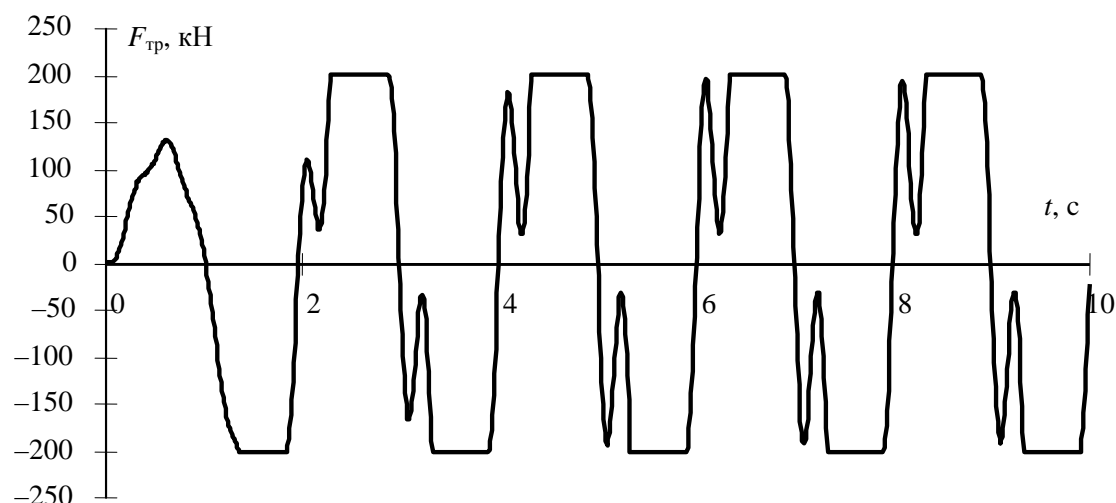


Рис. 7.8. Изменение силы трения во время воздействия

7.4. Расчет сейсмоизолированных зданий

Упрощенная расчетная динамическая модель системы сейсмоизоляции приведена на рис. 7.9. В этой схеме рассчитываемое здание моделируется консольным стержнем с массами, которые сосредоточены в уровне перекрытий и покрытия.

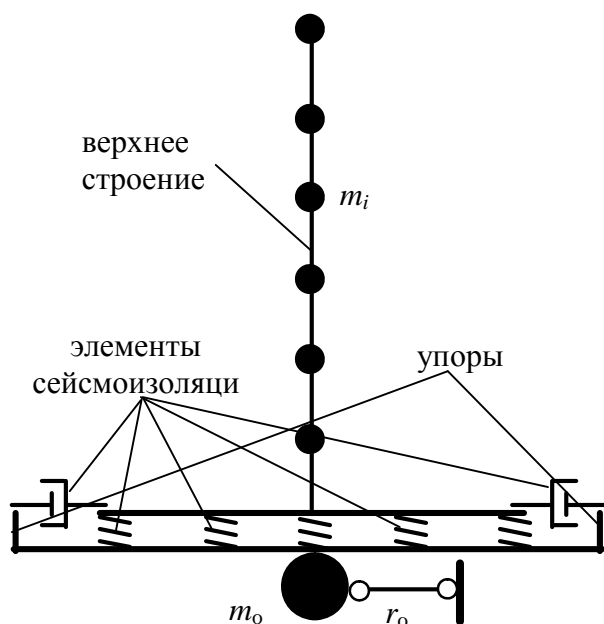


Рис. 7.9. Расчетная динамическая модель сейсмоизолированного здания

Динамический анализ таких систем сейсмоизоляции невозможно проводить по классическим моделям, даже если РДМ может быть представлена в виде консольного стержня. Основная причина невозможности применения классической РДМ заключается в том, что единичное статическое перемещение основания не вызывает единичного перемещения по всем степеням свободы и соотношение между полными и относительными перемещениями не будет линейным. В расчетную схему необходимо включить массу основания и связь, моделирующую динамические характеристики грунта. Уравнение движения описывается выражением (5.6) с правой частью, определяемой выражением (4.12),

$$m \ddot{y}(t) + \int_{\dot{y}(0)}^{\dot{y}(t)} \frac{dF_d}{d\dot{y}} d\dot{y} + \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dF_s}{dy} dy = P_o(t) \{1, 0 \dots 0\}^T, \quad (7.8)$$

где m — масса системы; \ddot{y} , \dot{y} , y — ускорение, скорость и перемещение системы; $\frac{dF_d}{dy}$, $\frac{dF_s}{dy}$ — касательные матрицы диссипации и жесткости; $\{1, 0 \dots 0\}^T$ — вектор-столбец с 1 по степени свободы массы грунта и 0 по всем остальным степеням.

В результате решения уравнения (7.8) определяют полные перемещения системы. Относительно горизонтальной оси неподвижна только точка закрепления стержня, моделирующего работу основания.

Пример 7.6. В качестве примера верхней части рассмотрена стена 5-этажного панельного здания с сечением 6000×200 , бетон В25. Высота первого этажа 2,6 м, высоты остальных этажей 2,8 м. Вес первого этажа принят 3000 кН, типовых этажей — 2750 кН, последнего этажа — 2000 кН. Масса грунта 10 Мт. Такая большая масса принята для того, чтобы исключить обратное влияние сооружения на грунт и провести сравнение с классической РДМ. Между фундаментной плитой и верхней частью здания встроены элементы сейсмоизоляции. Предполагается, что фундаментная плита колеблется совместно с грунтом основания. Такое допущение сделано для того, чтобы исключить влияние грунта на «чистоту» определения эффективности сейсмоизоляции.

В качестве входного воздействия принята акселерограмма Эль-Центро. Максимум спектра этой акселерограммы находится примерно в районе частоты 20 рад/с (характерная частота). Все расчеты выполнены методом Ньюмарка по программе, максимальный шаг интегрирования 0,002 с. Приведение матрицы демпфирования к РДМ осуществляется методом усечения матрицы единичных скоростей. Коэффициент пропорциональности равен γ/ω_1 , где γ — коэффициент неупругого сопротивления, ω_1 — собственная частота первой формы упругой консервативной системы. Результаты расчета при этом отличаются от результатов нормативного расчета не более 0,5 % по всем компонентам. Демпферы вязкого трения добавляются в матрицу демпфирования. Результаты расчета различных систем сейсмоизоляции приведены в табл. 7.3.

Таблица 7.3

Сравнение эффективности различных типов сейсмоизоляции

Факторы	Без сейсмо- изоляции	Маятниковые, $l = 1$ м	Пружины + вяз- кие демпферы	РМО	Сухое трение	Гистерезисные
Q , кН	10 464	3177	2724	1351	3402	2192
M , кНм	124 156	29 616	15 700	13 325	31 835	10 930
y , мм	0	202	106	94,6	980	12

Примечание: Q и M — максимальная поперечная сила и изгибающий момент в уровне первого этажа за все время воздействия; y — максимальное перемещение сейсмоизолированной части относительно фундамента.

7.5. Спектры реакций сейсмоизолированных систем

Уравнение линейного сейсмоизолированного осциллятора с затуханием 5 % от критического

$$\ddot{y} + \frac{0,1\omega c_n}{0,1\omega + c_n} \dot{y} + \int_0^{y(t)} \frac{\omega^2 k'_n}{\omega^2 + k'_n} dy = \ddot{y}_0, \quad (7.9)$$

где ω — собственная частота линейного осциллятора; $c_{и}$ — коэффициент затухания сейсмоизолятора; $k'_{и}$ — касательная жесткость сейсмоизолятора.

На рис. 7.10 приведены спектры реакций сейсмоизолированных линейных осцилляторов на акселерограммы землетрясений Эль-Центро и Бухарестского. Для сравнения приведены исходные спектры. Характеристики сейсмоизоляторов приняты по [примерам 7.1—7.5](#).

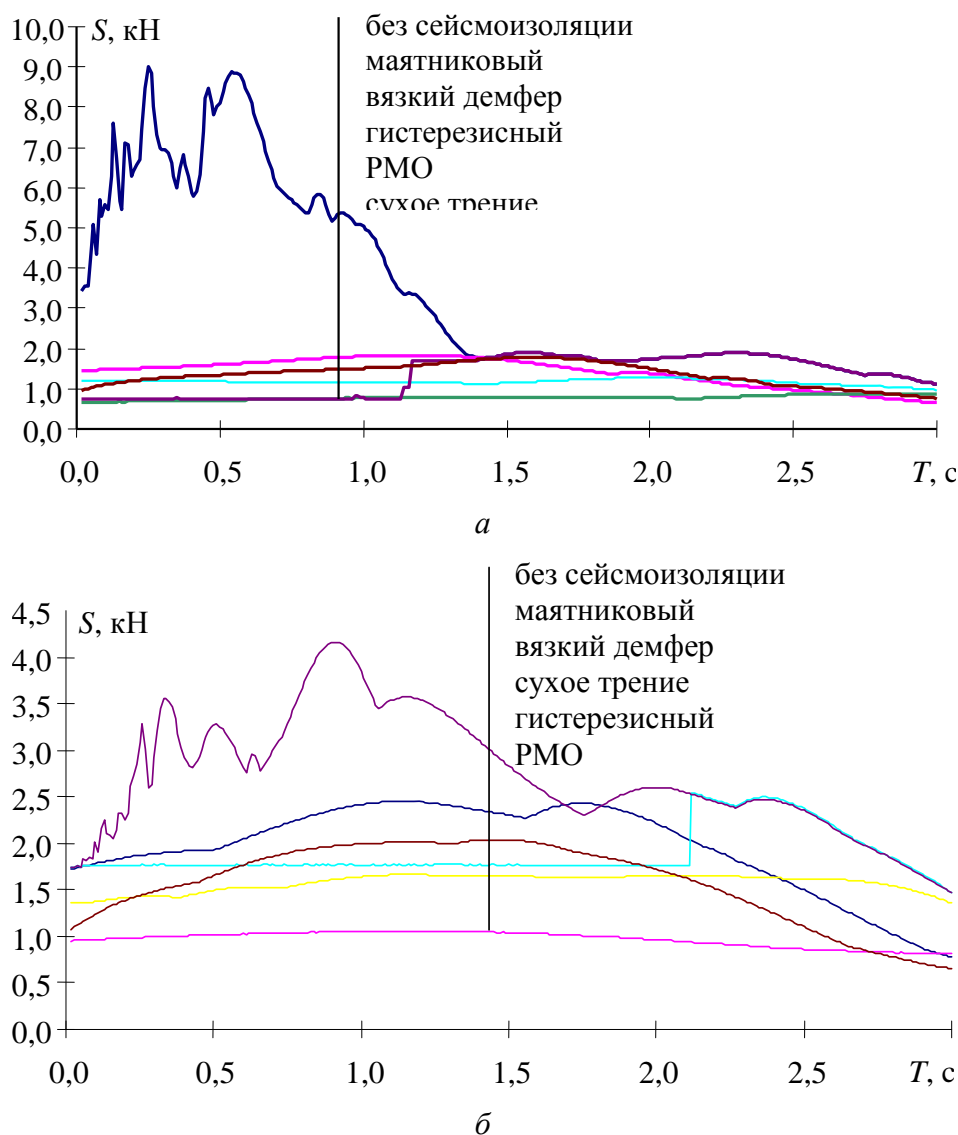


Рис. 7.10. Реакции сейсмоизолированных линейных осцилляторов на акселерограмму Эль-Центро (а) и Бухарестского землетрясений (б)

Спектры реакций сейсмоизолированных линейных осцилляторов позволяют выбрать наиболее эффективный тип сейсмоизоляции для конкретных условий строительства. Анализ спектров позволяет сделать вывод об эффективности сейсмоизоляции для зданий и сооружений с жесткой конструктивной схемой с периодами колебаний до 1 с. Для низкочастотных землетрясений представленные типы сейсмоизоляции менее эффективны, чем для высоко- и среднечастотных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для анализа сейсмической реакции объектов массового строительства, согласно действующим нормам, применяется линейная спектральная теория (ЛСТ). В качестве реакций рассматривается упругий отпор. После определения сейсмических реакций необходимо определить усилия и выполнить конструктивные расчеты элементов. Конструктивные расчеты, в зависимости от материала, выполняют по соответствующим разделам дисциплин строительных конструкций с введением дополнительных коэффициентов условий работы.

Динамический анализ нелинейных систем методом прямого интегрирования уравнений движения проводится для зданий и сооружений повышенного уровня ответственности. Этому анализу должен предшествовать линейный спектральный расчет и назначение размеров, сечений и армирования конструктивных элементов. По своей сути метод прямого интегрирования нелинейных систем является проверочным.

Модальный анализ может проводиться только для систем, в которых не возникают пластические деформации в процессе сейсмического воздействия.

Кроме детерминированного подхода к расчету на сейсмические воздействия существует и недетерминированный. Недетерминированный расчет приводит к вероятностному описанию реакций при нагрузке, определенной статистически. Недетерминированный анализ рассматривается в курсе «Вероятностные расчеты зданий и сооружений на динамические нагрузки».

Для более углубленного изучения предмета рекомендуется приведенная литература. Также рекомендуется периодические издания, освещающие вопросы сейсмостойкого строительства.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутенин, Н. В.* Введение в аналитическую механику / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. — М. : Наука, 1994. — 255 с.
2. Динамический расчет зданий и сооружений / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. — М. : Стройиздат, 1984. — 303 с.
3. *Клаф, Р.* Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. — М. : Стройиздат, 1979. — 320 с.
4. *Ньюмарк, Н.* Основы сейсмостойкого строительства / Н. Ньюмарк, Э. Розенблюэт. — М. : Стройиздат, 1980.
5. *Розин, Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л. А. Розин. — М. : Стройиздат, 1977. — 129 с.
6. *Смирнов, А. Ф.* Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашенников, Н. Н. Шапошников. — М. : Стройиздат, 1984. — 415 с.

ФУНКЦИИ VBA

Option Base 1

Function jacobi(massa As Range, gest As Range)

'massa — матрица масс, т, заданная в виде столбца длиной n

'gest — матрица жёсткости, размером n x n, кН, кНм

'результаты: в первых n строках собственные вектора,

'в последней n+1 строке — периоды, с

n = massa.Rows.Count

ReDim b(n)

ReDim v(n + 1, n)

ReDim z(n)

ReDim d(n)

ReDim mm(n)

ReDim A(n, n)

For i = 1 To n

For j = 1 To n

A(i, j) = gest.Cells(i, j)

Next

Next

For i = 1 To n

mm(i) = 1 / massa.Cells(i, 1) ^ 0.5

Next

For i = 1 To n

For j = 1 To n

A(i, j) = A(i, j) * mm(i) * mm(j)

Next

Next

'For i = 1 To n

'For j = 1 To n

'A(i, j) = A(i, j) * mm(j)

'Next

'Next

'GoTo outm

For p = 1 To n

For q = 1 To n

If p = q Then v(p, p) = 1 Else v(p, q) = 0

Next

Next

pr: For p = 1 To n

b(p) = A(p, p)

d(p) = A(p, p)

z(p) = 0

Next

rot = 0

For i = 1 To 200

swp: sm = 0

For p = 1 To (n - 1)

For q = (p + 1) To n

sm = sm + Abs(A(p, q))

```

Next
Next
If sm = 0 Then GoTo outm
If i < 4 Then tresh = 0.2 * sm / (n * n) Else tresh = 0
For p = 1 To (n - 1)
For q = (p + 1) To n
g = 10000 * Abs(A(p, q))
If (i > 4) And ((Abs(d(p)) + g) = Abs(d(p))) And (Abs(d(q)) + g = Abs(d(q))) Then
A(p, q) = 0
ElseIf Abs(A(p, q)) > tresh Then
rotate:   h = d(q) - d(p)
          If (Abs(h) + g) = Abs(h) Then
            t = A(p, q) / h
          Else
            theta = 0.5 * h / A(p, q)
            t = 1 / (Abs(theta) + (1 + (theta) ^ 2) ^ 0.5)
            If theta < 0 Then t = -t
          End If
          c = 1 / (1 + t ^ 2) ^ 0.5
          s = t * c
          tau = s / (1 + c)
          h = t * A(p, q)
          z(p) = z(p) - h
          z(q) = z(q) + h
          d(p) = d(p) - h
          d(q) = d(q) + h
          A(p, q) = 0
For j = 1 To (p - 1)
  g = A(j, p)
  h = A(j, q)
  A(j, p) = g - s * (h + g * tau)
  A(j, q) = h + s * (g - h * tau)
Next
For j = (p + 1) To (q - 1)
  g = A(p, j)
  h = A(j, q)
  A(p, j) = g - s * (h + g * tau)
  A(j, q) = h + s * (g - h * tau)
Next
For j = (q + 1) To n
  g = A(p, j)
  h = A(q, j)
  A(p, j) = g - s * (h + g * tau)
  A(q, j) = h + s * (g - h * tau)
Next
For j = 1 To n
  g = v(j, p)
  h = v(j, q)
  v(j, p) = g - s * (h + g * tau)
  v(j, q) = h + s * (g - h * tau)
Next

```

```

        rot = rot + 1
    End If '{ rotate}
Next
Next 'p,q
For p = 1 To n
    b(p) = b(p) + z(p)
    d(p) = b(p)
    z(p) = 0
Next
Next ' {swp}
outm:
For i = 1 To n
For j = 1 To n
v(i, j) = v(i, j) * mm(j)
Next
Next
For j = 1 To n
v(n + 1, j) = 6.283185307 / d(j) ^ 0.5
Next
jacobi = v
End Function

```

Function jacobia(massa As Range, podt As Range)

'massa — матрица масс, т, заданная в виде столбца длиной n
'EdY — матрица единичных перемещений размером n x n.
'результаты: в первых n строках собственные вектора,
'в последней n+1 строке — частоты, Гц с; n = massa.Rows.Count

```

    ReDim b(n) As Double
    ReDim v(n + 1, n) As Double
    ReDim z(n) As Double
    ReDim d(n) As Double
    ReDim mm(n) As Double
    ReDim A(n, n) As Double
    For i = 1 To n
    For j = 1 To n
A(i, j) = podt.Cells(i, j)
    Next
    Next
    For i = 1 To n
    mm(i) = massa.Cells(i, 1) ^ 0.5
    Next
    For i = 1 To n
    For j = 1 To n
A(i, j) = A(i, j) * mm(i) * mm(j)
    Next
    Next
    For p = 1 To n
    For q = 1 To n
    If p = q Then v(p, p) = 1 Else v(p, q) = 0
    Next
    Next

```



```

pr: For p = 1 To n
    b(p) = A(p, p)
    d(p) = A(p, p)
    z(p) = 0
Next
rot = 0
For i = 1 To 200
swp:  sm = 0
      For p = 1 To (n - 1)
        For q = (p + 1) To n
          sm = sm + Abs(A(p, q))
        Next
      Next
      If sm = 0 Then GoTo outm
      If i < 4 Then tresh = 0.2 * sm / (n * n) Else tresh = 0
      For p = 1 To (n - 1)
        For q = (p + 1) To n
          g = 10000 * Abs(A(p, q))
          If (i > 4) And ((Abs(d(p)) + g) = Abs(d(p))) And (Abs(d(q)) + g = Abs(d(q))) Then
            A(p, q) = 0
          ElseIf Abs(A(p, q)) > tresh Then
rotate:  h = d(q) - d(p)
          If (Abs(h) + g) = Abs(h) Then
            t = A(p, q) / h
          Else
            theta = 0.5 * h / A(p, q)
            t = 1 / (Abs(theta) + (1 + (theta) ^ 2) ^ 0.5)
            If theta < 0 Then t = -t
          End If
          c = 1 / (1 + t ^ 2) ^ 0.5
          s = t * c
          tau = s / (1 + c)
          h = t * A(p, q)
          z(p) = z(p) - h
          z(q) = z(q) + h
          d(p) = d(p) - h
          d(q) = d(q) + h
          A(p, q) = 0
        For j = 1 To (p - 1)
          g = A(j, p)
          h = A(j, q)
          A(j, p) = g - s * (h + g * tau)
          A(j, q) = h + s * (g - h * tau)
        Next
        For j = (p + 1) To (q - 1)
          g = A(p, j)
          h = A(j, q)
          A(p, j) = g - s * (h + g * tau)
          A(j, q) = h + s * (g - h * tau)
        Next
      For j = (q + 1) To n

```

```

        g = A(p, j)
        h = A(q, j)
        A(p, j) = g - s * (h + g * tau)
        A(q, j) = h + s * (g - h * tau)
    Next
    For j = 1 To n
        g = v(j, p)
        h = v(j, q)
        v(j, p) = g - s * (h + g * tau)
        v(j, q) = h + s * (g - h * tau)
    Next
    rot = rot + 1
End If '{ rotate}
Next
Next 'p,q
For p = 1 To n
    b(p) = b(p) + z(p)
    d(p) = b(p)
    z(p) = 0
Next
Next ' {swp}
outm: For i = 1 To n
    For j = 1 To n
        v(i, j) = v(i, j) / mm(i)
    Next
Next
For j = 1 To n
    v(n + 1, j) = 6.283185307 / d(j) ^ 0.5
Next
jacobia = v
End Function

```

Function etta(vector As Range, massa As Range)

```

' Вычисление коэффициента η
n = massa.Rows.Count
ReDim b(n)
ReDim v(n, n)
ReDim m(n)
For i = 1 To n
    m(i) = massa.Cells(i, 1)
    For j = 1 To n
        v(i, j) = vector.Cells(i, j)
    Next
Next
Next
For i = 1 To n
    chicl = 0
    znam = 0
    For j = 1 To n
        chicl = chicl + v(i, j) * m(j)
        znam = znam + v(i, j) ^ 2 * m(j)
    Next
Next

```

```

b(i) = v(i, i) * chisl / znam
Next
etta = b
End Function

```

Function bettaf(tper, td, ksi As Double, Ax As Range) As Double

'tper - период

'td - шаг акселерограммы

'ksi - коэф. затухания: сталь 0,025, ж/б 0,05

'Ax - значения акселерограммы (один столбец)

```
r = 6.2831853 / tper
```

```
c = 2 * ksi * r
```

```
r = r ^ 2
```

```
amax = 0
```

```
tmin = tper / 20
```

```
y = 0
```

```
tk = 0
```

```
aksk = 0
```

```
v = 0
```

```
A1 = 0
```

```
t = 0
```

```
A = 0
```

```
For i = 1 To Ax.Rows.Count
```

```
tn = tk
```

```
aksn = aksk
```

```
tk = tk + td
```

```
aksk = Ax.Cells(i, 1)
```

```
dt = td
```

```
If dt > tmin Then dt = dt / (Round(dt / tmin) + 1)
```

```
t = tn + dt
```

```
Do
```

```
ag = aksn + (aksk - aksn) / (tk - tn) * (t - tn)
```

```
dag = ag - A1
```

```
dy = (dag + 2 * v * c + 4 * v / dt + 2 * A) / (r + 2 * c / dt + 4 / (dt ^ 2))
```

```
dv = 2 * (dy / dt - v)
```

```
v = v + dv
```

```
y = y + dy
```

```
A = ag - (c * v + r * y)
```

```
If Abs(y) > amax Then
```

```
amax = Abs(y)
```

```
End If
```

```
t = t + dt
```

```
A1 = ag
```

```
Loop Until (t > (tk + 0.00001))
```

```
Next
```

```
bettaf = amax * r
```

```
End Function
```

Учебное электронное издание

Харланов Владимир Леонтьевич

ОСНОВЫ СЕЙСМОСТОЙКОГО СТРОИТЕЛЬСТВА

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*

Редактор *О. А. Шипунова*

Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Минимальные систем. требования:

PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 07.04.2016.

Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 5,0. Объем данных 1,2 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»

Редакционно-издательский отдел

400074, Волгоград, ул. Академическая, 1

<http://www.vgasu.ru>, info@vgasu.ru