

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Г. И. Беликов, В. И. Клименко

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИ ИЗГИБЕ:**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, РАСЧЕТНЫЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ**

*Учебно-практическое пособие*

2-е издание, исправленное

ISBN 978-5-98276-608-3



© Государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2009

© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2014

Волгоград  
ВолгГАСУ  
2014

УДК 539.3/.6(0758)  
ББК 30.121я73  
Б43

**Рецензенты:**

доктор технических наук *А. П. Николаев*  
(Волгоградский государственный аграрный университет),  
доктор технических наук *Н. Г. Бандурин*  
(Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет)

**Беликов, Г. И.**

Б43 Соппротивление материалов при изгибе: решение задач, расчетные и тестовые задания [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие. — 2-е изд., испр. / Г. И. Беликов, В. И. Клименко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (681 Кбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: РС 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-608-3

Изложены основные положения теории изгиба стержней. Приведены примеры построения эпюр внутренних усилий, определения напряжений и расчетов балок на прочность. Содержит расчетные и тестовые задания, вопросы для самоконтроля.

Для студентов, обучающихся по направлению 270800 «Строительство» (бакалавры, специалисты и магистры).

Первое издание вышло в 2009 г. в печатном виде под тем же названием. Авторы первого издания: Г.И. Беликов, В.И. Клименко, С.И. Родин, А.В. Черепеников.

**УДК 539.3/.6(075.8)**  
**ББК 30.121я73**

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПЛОСКИЙ ПРЯМОЙ ИЗГИБ	5
1.1. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости	5
1.2. Основные правила контроля правильности построения эпюр	8
2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ, ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ	9
3. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ	28
4. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ	30
5. РАСЧЕТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ	34
6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТИПЫ СЕЧЕНИЙ БАЛОК И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ	36
6.1. Примеры определения размеров сечений заданной формы при заданной нагрузке	37
6.2. Примеры проверки выполнения условий прочности при заданной нагрузке	38
6.3. Пример определения грузоподъемности балки	40
7. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ	41
7.1. Определение опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе	41
7.2. Определение напряжений при изгибе	42
7.3. Прочность балки при изгибе	43
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	45
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	45
ПРИЛОЖЕНИЕ	46

## ВВЕДЕНИЕ

Пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом, в котором рассматриваются основы раздела дисциплин технической механики и сопротивления материалов «Внутренние усилия и напряжения при изгибе стержней». Содержание пособия соответствует программе по данным дисциплинам для студентов, обучающимся по направлению «Строительство» (бакалавр, специалист, магистр).

В пособии рассматривается наиболее простой вид изгиба – плоский поперечный изгиб. Изгибом называется деформация, в процессе которой продольная ось бруса искривляется.

Плоский поперечный изгиб имеет место тогда, когда плоскость действия нагрузок проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения и продольную ось бруса.

Стержень (прямолинейный брус), работающий на изгиб, называется балкой. Материал балки предполагается линейно упругим. При плоском изгибе упругая линия балки плоская кривая.

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении балки возникает два внутренних усилия: поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ .

Для того, чтобы произвести расчет балок на прочность при изгибе, необходимо знать наибольшие значения поперечной силы  $Q_y^{нб}$  и изгибающего момента  $M_x^{нб}$  и положения сечений, в которых они действуют.

Для определения значений  $Q_y$  и  $M_x$  в сечениях балки используется метод сечений. По значениям  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях балки строят эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, которые представляют собой графическое изображение функций  $Q_y$  и  $M_x$ .

При расчете изгибаемых элементов на прочность используется метод расчета по первой группе предельных состояний. Во всех случаях наибольшие напряжения, возникающие в балке, не должны превышать некоторой допустимой для данного материала величины.

# 1. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

При плоском поперечном изгибе все нагрузки лежат в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей поперечного сечения и продольную ось балки.

При плоском поперечном изгибе внешние силы перпендикулярны продольной оси балки.

## 1.1. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении балки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , которые определяются методом сечений.

**Поперечная сила в произвольном сечении равна сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части, с учетом правила знаков для  $Q$ .** Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть отсечённую часть балки по ходу часовой стрелки (рис. 1.1).

**Изгибающий момент в произвольном сечении равен сумме моментов относительно центра тяжести данного сечения от всех внешних нагрузок, приложенных к рассматриваемой части, с учетом правила знаков для  $M$**  (рис. 1.2).

Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон. На рис. 2 показан элемент балки, в крайних сечениях которого приложены изгибающие моменты, вызывающие растяжение верхних и нижних волокон.

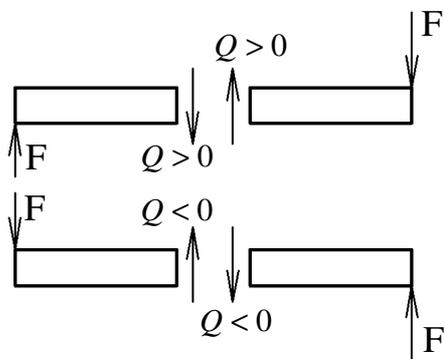


Рис. 1.1.

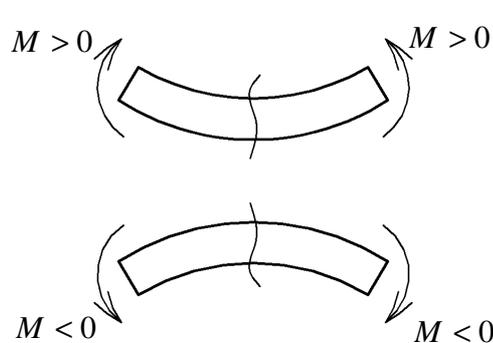


Рис. 1.2.

Для поперечной силы  $Q$  внешние силовые факторы, направленные по ходу вращения часовой стрелки, берутся в уравнении со знаком плюс, против вращения часовой стрелки – со знаком минус. Для изгибающего момента  $M$  внешние силовые факторы, вызывающие растяжение нижних волокон, берутся в уравнении со знаком плюс, вызывающие растяжение верхних волокон, – со знаком минус. Необходимо повторить правило определения момента силы. **Момент силы относительно какой либо точки равен произведению силы на плечо.** Плечо есть перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы.

Сложнее с распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$ . На практике распределённая нагрузка, расположенная по одну сторону от сечения, заменяется результирующей сосредоточенной силой, приложенной в центре тяжести площади распределённой нагрузки. Момент от распределённой нагрузки определяется как произведение результирующей сосредоточенной силы на плечо.

Рассмотрим призматический стержень (рис. 1.3). Свяжем с ним правую систему координат. Ось  $z$  направим вдоль оси стержня, а ось  $y$  направим вниз.

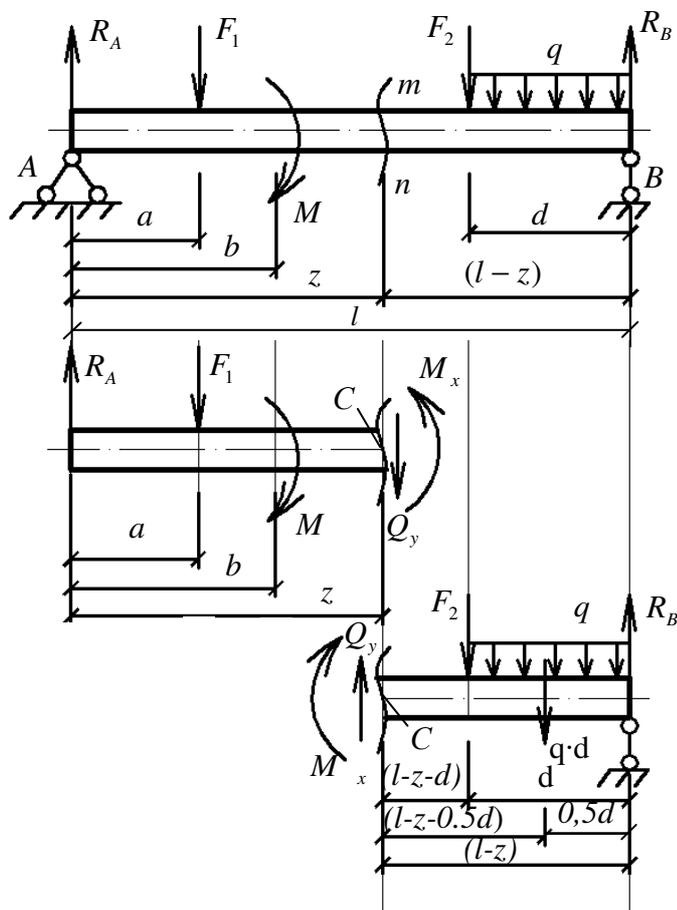


Рис. 1.3.

Условимся положительное направление оси  $y$  выбирать сверху вниз. На эпюре  $Q_y$  положительные ординаты будем откладывать вниз, отрицательные вверх (допускается традиционно откладывать положительные значения  $Q_y$  вверх), а ординаты эпюры  $M_x$  откладывать со стороны растянутых волокон. Положительные значения  $M_x$  откладываются вниз, так как эти моменты вызывают растяжение нижних волокон. Выпуклость кривой эпюры  $M_x$  в этом случае обращена в сторону положительных значений на оси  $y$  и кривая имеет отрицательную кривизну.

При определении внутренних усилий балка рассекается на произвольном расстоянии  $z$  от левого конца плоскостью, перпендикулярной к её оси. Составляя уравнения равновесия для левой или правой её части получим выражения для определения  $Q_y$  и  $M_x$ .

Поперечная сила  $Q_y$  равна сумме проекций на ось  $y$  всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения. Если внешняя сила стремится повернуть балку по ходу часовой стрелки, то соответствующее слагаемое берется с положительным знаком.

Изгибающий момент  $M_x$  равен сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения  $C$ . Если силовые факторы, вызывают растяжение нижних волокон, то соответствующее слагаемое берется с положительным знаком.

В общем случае выражения для внутренних усилий можно записать следующим образом.

Для части балки, находящейся слева от рассматриваемого сечения получим:

$$Q_y = -\sum F_y^{лев}, \quad M_x = -\sum M_c^{лев}.$$

Для части балки, находящейся справа от рассматриваемого сечения получим:

$$Q_y = \sum F_y^{лев}, \quad M_x = \sum M_c^{лев}.$$

Рассмотрим равновесие отсеченных частей балки.

Составим уравнение равновесия для части балки (рис. 3), находящейся слева от рассматриваемого сечения  $m-n$  и получим выражение для определения поперечной силы:

$$Q_y = R_A - F_1.$$

Из уравнения моментов относительно центра тяжести сечения для левой части балки получим:

$$M_x = R_A \cdot z - F_1 \cdot (z - a) + M, \quad b \leq z \leq (l - d).$$

Рассматривая равновесие правой части балки (рис. 3) получим выражения:

$$Q_y = -R_B + F_2 + q \cdot d$$

$$M_x = R_B \cdot (l - z) - F_2 \cdot (l - z - d) - q \cdot d \cdot (l - z - d/2), \quad b \leq z \leq (l - d).$$

Между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной нагрузкой имеются следующие соотношения:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{d^2M_x}{dz^2} = -q.$$

Эти соотношения называются дифференциальными зависимостями при изгибе. Они имеют большое значение при построении эпюр и их анализе.

## 1.2. Основные правила контроля правильности построения эпюр

1. На участке, где распределенная нагрузка отсутствует  $q=0$ , поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.
2. На участке, где распределенная нагрузка  $q=const$ , поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по квадратичной параболе.
3. В сечении, где приложена сила сосредоточенная  $F$ , на эпюре  $Q_y$  имеется скачок, величина которого равна этой силе, а на эпюре  $M$  будет излом, острие которого направлено в сторону действия этой силы.
4. В сечении, где приложен сосредоточенный изгибающий момент  $M$ , на эпюре  $Q_y$  нет никаких изменений, а на эпюре  $M_x$  имеется скачок, величина которого равна этому моменту.
5. Если на участке поперечная сила  $Q_y=0$ , то изгибающий момент  $M_x$  на этом участке имеет постоянное значение.
6. Если на участке балки эпюра  $Q_y$  является наклонной линией и пересекает в каком-то сечении ось абсцисс ( $Q_y=0$ ), то изгибающий момент  $M_x$  в этом сечении имеет экстремальное значение для данного участка.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ, ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Порядок построения эпюр внутренних усилий рассмотрим на примерах. Для составления выражений для поперечной силы и изгибающего момента применим метод сечений. Для этого рассекаем балку в произвольном сечении каждого участка или в характерных сечениях. Для построения эпюр поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  следует определять их значения в характерных сечениях балки.

**Пример 2.1.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для консольной балки, показанной на рис. 2.1.

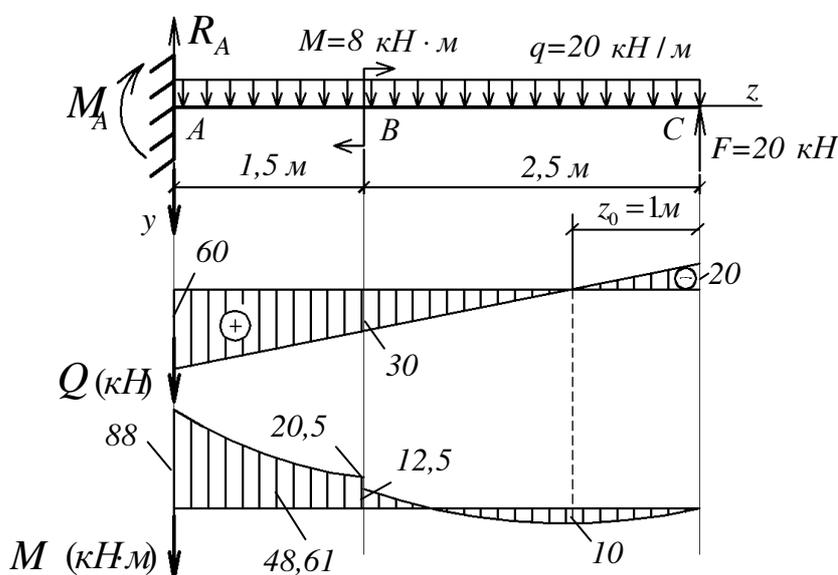


Рис. 2.1.

*Решение.* В защемлении  $A$  возникают опорная реакция  $R_A$  и опорный момент  $M_A$ .

Из уравнения равновесия определяем значения  $R_A$  и  $M_A$

$$\sum F_y = 0; \quad -R_A + q \cdot 4 - F = 0;$$

$$R_A = 20 \cdot 4 - 20 = 60 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A - M - q \cdot 4 \cdot 2 + F \cdot 4 = 0;$$

$$M_A = -8 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = -88 \text{ кН·м.}$$

Знак « $\leftarrow$ » означает, что опорный момент  $M_A$  имеет противоположное направление.

Для проверки правильности найденных значений  $R_A$  и  $M_A$  составим уравнение моментов относительно произвольной точки консольной балки, например  $B$  или  $C$ .

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0; \quad -M_A - R_A \cdot 4 - M + q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ &-(-88) - 60 \cdot 4 - 8 + 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ &0 \equiv 0.\end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

В соответствии с характером загрузки балки разобьем её на два участка. На каждом участке рассечём балку в произвольном сечении и рассмотрим для участка  $AB$  равновесие левой части балки, а для участка  $BC$  равновесие правой части.

Участок  $AB$  (слева),  $0 \leq z \leq 1,5$  м.

Выражения поперечных сил и изгибающих моментов будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}Q_y &= R_A - q \cdot z = 60 - 20 \cdot z; \\ M_x &= R_A \cdot z + M_A - q \cdot z \cdot z/2 = 60 \cdot z - 88 - 20 \cdot z^2/2.\end{aligned}$$

Эпюра  $Q_y$  изменяется по линейной зависимости, поэтому для построения эпюры достаточно вычислить значения  $Q_y$  в начале и конце участка. Эпюра  $M_x$  изменяется по нелинейной зависимости, поэтому для построения эпюры необходимо вычислить значения изгибающего момента в трех сечениях.

Вычислим значения  $Q_y$  и  $M_x$ :

при  $z = 0$ ;  $Q_A = 60$  кН;  $M_A = -88$  кН·м;

при  $z = 1,5$  м;  $Q_B = 60 - 20 \cdot 1,5 = 30$  кН;

$$M_B = 60 \cdot 1,5 - 88 - 20 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -20,5 \text{ кН·м};$$

при  $z = 0,75$  м;  $M_x = 60 \cdot 0,75 - 88 - 20 \cdot 0,75 \cdot 0,375 = -48,61$  кН·м.

Участок  $CB$  (справа),  $0 \leq z \leq 2,5$  м.

$$\begin{aligned}Q_y &= q \cdot z - F = 20 \cdot z - 20; \\ M_x &= -q \cdot z \cdot z/2 + F \cdot z = -20 \cdot z^2/2 + 20 \cdot z.\end{aligned}$$

Вычислим значения  $Q_y$  и  $M_x$ :

при  $z = 0$ ;  $Q_C = -20$  кН;  $M_C = 0$ ;

при  $z = 2,5$  м;  $Q_B = 20 \cdot 2,5 - 20 = 30$  кН;

$$M_B = -20 \cdot 2,5 \cdot 1,25 + 20 \cdot 2,5 = -12,5 \text{ кН·м}.$$

На участке  $CB$  имеется сечение, где  $Q_y = 0$ . Изгибающий момент в этом сечении достигает экстремального сечения. Определим положение этого сечения на участке  $CB$ .

$$Q_y = q \cdot z_0 - F = 20 \cdot z_0 - 20 = 0.$$

Откуда находим  $z_0 = 20 / 20 = 1$  м.

Экстремальное значение изгибающего момента  $M_x$  на участке  $BC$  равно:

$$M_x^{max} = F \cdot z_0 - q \cdot z_0 \cdot z_0 / 2 = 20 \cdot 1 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Все найденные значения  $Q_y$  и  $M_x$  откладываем на эпюрах в удобном масштабе. Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 2.1.

Опасным сечением будет сечение  $A$ , где  $M_x = -88 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $Q_y = 60 \text{ кН}$ .

**Пример 2.2.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для консольной балки, показанной на рис. 2.2

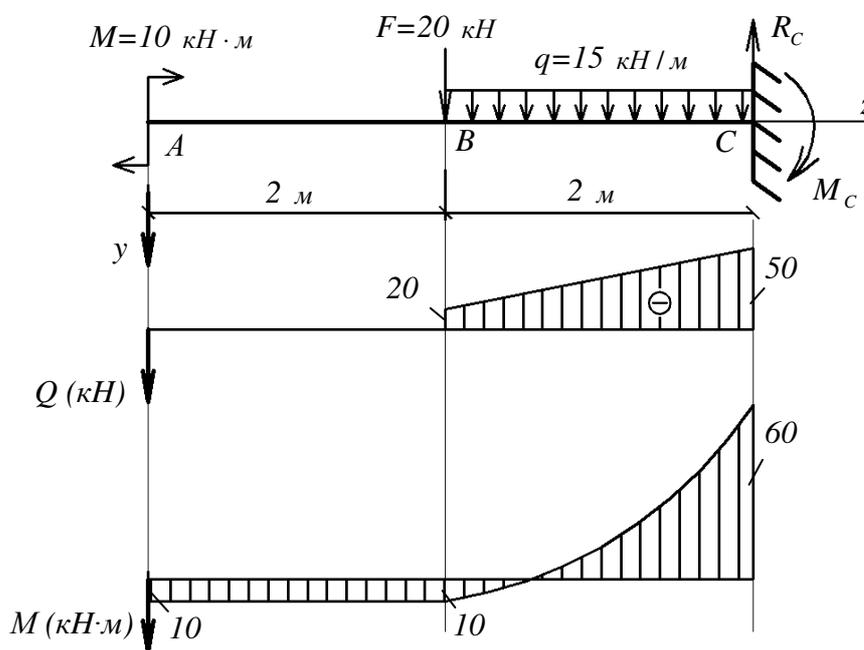


Рис. 2.2.

*Решение.* Применим способ вычисления  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях. Характерными сечениями для участка, где отсутствует распределённая нагрузка ( $q=0$ ) являются начало и конец участка.

Для участка, где действует распределённая нагрузка ( $q=const$ ), а изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, характерными являются три сечения: в начале участка, в конце участка, а также сечение между ними.

Если на участке, действует распределённая нагрузка ( $q=const$ ) и имеется сечение, где  $Q_y=0$ , то определяется положение этого сечения и значение экстремального момента  $M_x$  в этом сечении. Если на участке нет такого сечения, то определяется значение момента  $M_x$  в середине участка.

Для консольной балки можно построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  без предварительного определения опорной реакции  $R_C$  и опорного момента  $M_C$ .

Вычислим  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях, начиная со свободного конца, т.е. с сечения  $A$ .

Участок  $AB$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = 0$ ;  $M_x = M = 10$  кН·м;

сечение  $B$ :  $Q_B^{лев} = 0$ ;  $M_B = M = 10$  кН·м.

Участок  $BC$  (слева):

сечение  $B$ :  $Q_B^{np} = -F = -20$  кН;  $M_B = M = 10$  кН·м;

сечение  $C$ :  $Q_C = -F - q \cdot 2 = -20 - 15 \cdot 2 = -50$  кН;

$$M_C = M - F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 10 - 20 \cdot 2 - 15 \cdot 2 \cdot 1 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  представлены на рис. 2.2. На участке  $AB$  отсутствует распределенная нагрузка,  $Q_y = 0$ ,  $M_x = 10$  кН·м = const.

Опасным сечением будет сечение  $C$ , где  $M_x = -60$  кН·м,  $Q_y = -50$  кН.

По эпюрам  $Q_y$  и  $M_x$  можно определить значения опорной реакции и опорного момента в сечении  $C$ .

$$R_C = 50 \text{ кН}, M_C = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

**Пример 2.3.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для шарнирно опёртой балки, показанной на рис. 2.3.

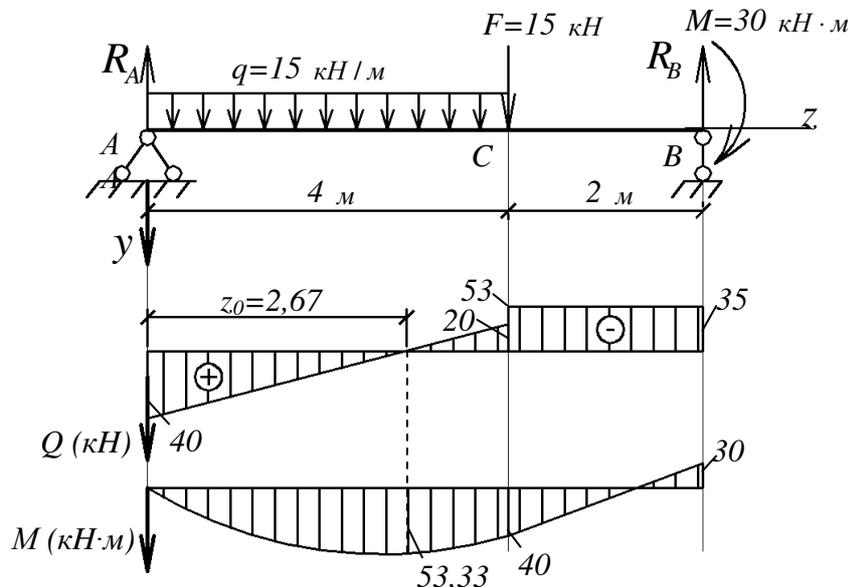


Рис. 2.3.

*Решение.* Из уравнений равновесия найдем опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$ .

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; & -R_A \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot (2 + 2) + F \cdot 2 - M = 0; \\ & -R_A \cdot 6 + 15 \cdot 4 \cdot 4 + 15 \cdot 2 - 30 = 0; \\ & R_A = 240 / 6 = 40 \text{ кН.} \\ \sum M_A = 0; & R_B \cdot 6 - M - F \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ & R_B \cdot 6 - 30 - 15 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ & R_B = 210 / 6 = 35 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ .

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & -R_A + q \cdot 4 + F - R_B = 0; \\ & -40 + 15 \cdot 4 + 15 - 35 = 0. \\ & 0 = 0 \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Вычислим  $Q$  и  $M_x$  в характерных сечениях.

Участок  $AC$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = R_A = 40$  кН;  $M_A = 0$ ;

сечение  $C$ :  $Q_C = R_A - q \cdot 4 = 40 - 15 \cdot 4 = -20$  кН;

$$M_C = R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 40 \cdot 4 - 15 \cdot 2 \cdot 4 = 40 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

На участке  $AC$  действует равномерно распределенная нагрузка, поэтому изгибающий момент  $M_x$  изменяется по закону квадратной параболы.

Для нахождения экстремального значения  $M_x$  определим положение сечения балки, в котором поперечная сила  $Q_y = 0$ :

$$Q_y = R_A - q \cdot z_0 = 0,$$

откуда находим

$$z_0 = R_A / q = 40 / 15 = 2,67 \text{ м.}$$

В этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_x^{\text{экс}} = R_A \cdot z_0 - q \cdot z_0 \cdot z_0 / 2 = 40 \cdot 2,67 - 15 \cdot 2,67^2 / 2 = 53,33 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Участок  $BC$  (справа):

сечение  $B$ :  $Q_B = -R_B = -35$  кН;  $M_B = -M = 30$  кН·м;

сечение  $C$ :  $Q_C = -R_B = -35$  кН;  $M_C = R_B \cdot 2 - M = 35 \cdot 2 - 30 = 40$  кН·м.

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис.2.3.

В опасном сечении  $Q_y = 0$  и  $M_x = 53,33$  кН·м.

**Пример 2.4.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для однопролётной балки с консолями, изображенной на рис. 2.4.

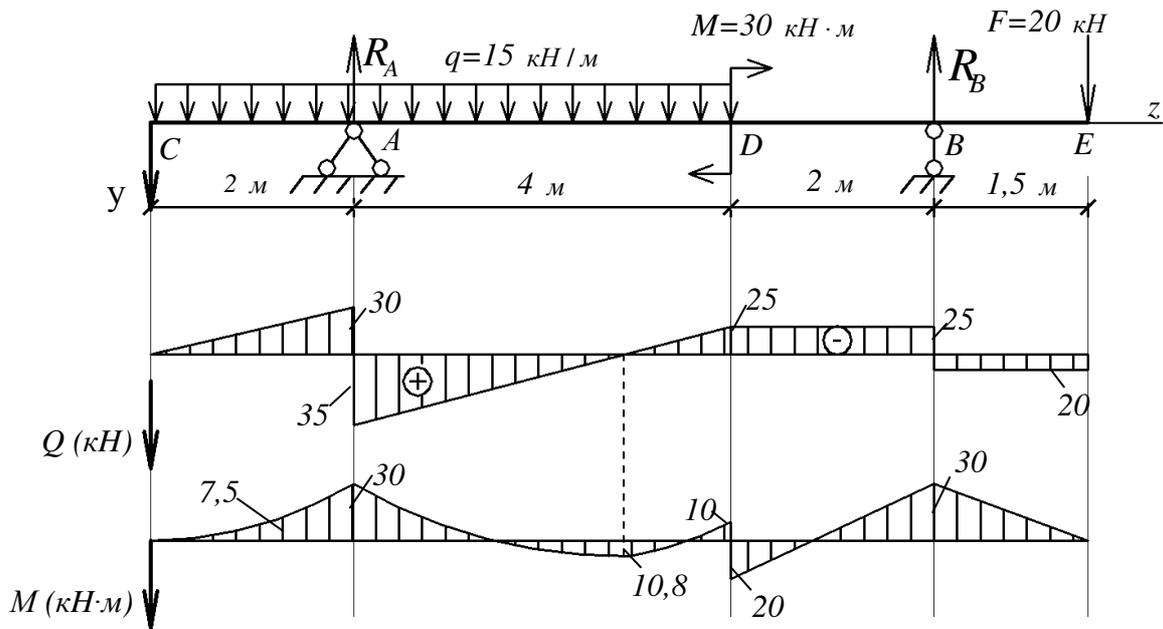


Рис. 2.4.

*Решение.* Из уравнений статики определяем опорные реакции.

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot (6/2 + 2) - M - F \cdot 1.5 = 0;$$

$$R_A = (15 \cdot 6 \cdot 5 - 30 - 20 \cdot 1.5) / 6 = 65 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 6 - F \cdot 7.5 - M - q \cdot 6 \cdot (6/2 - 2) = 0;$$

$$R_B = (20 \cdot 7.5 + 30 + 15 \cdot 6 \cdot 1) / 6 = 45 \text{ кН}.$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\sum F_y = 0; -R_A + q \cdot 6 + F - R_B = 0;$$

$$-65 + 15 \cdot 6 - 45 + 20 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Вычисляем поперечные силы и изгибающие моменты в характерных сечениях.

Участок  $AC$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = -q \cdot 2 = -15 \cdot 2 = -30 \text{ кН};$

$$M_A = -q \cdot 2 \cdot 1 = -15 \cdot 2 \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

сечение  $C$ :  $Q_C = 0; M_C = 0.$

Найдем значение изгибающего момента в середине участка  $AC$ :

$$M_x = -q \cdot 1 \cdot 1 / 2 = -7.5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок  $AD$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = -q \cdot 2 + R_A = -15 \cdot 2 + 65 = 35 \text{ кН};$

$$M_A = -q \cdot 2 \cdot 1 = -15 \cdot 2 \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (растянуты верхние волокна);}$$

сечение  $D$ :  $Q_D = R_A - q \cdot 6 = 65 - 15 \cdot 6 = -25 \text{ кН};$

$$M_B = R_A \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 6 / 2 = 65 \cdot 4 - 15 \cdot 6^2 / 2 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для нахождения экстремального значения  $M_x$  определим положение сечения балки, в котором поперечная сила  $Q_y = 0$ :

$$Q_y = -q \cdot z_0 + R_A = 0; \quad -15 \cdot z_0 + 65 = 0;$$

откуда находим

$$z_0 = 65 / 15 = 4,33 \text{ м}.$$

В этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_{\text{экс}} = -q \cdot z_0^2 / 2 + R_A \cdot (z_0 - 2) = -15 \cdot 4,33^2 / 2 + 65 \cdot 2,33 = 10,83 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок  $BE$  (справа):

сечение  $E$ :  $Q_E = F = 20 \text{ кН}$ ;  $M_E = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = F = 20 \text{ кН}$ ;  $M_B = -F \cdot 1,5 = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Участок  $BD$  (справа):

сечение  $B$ :  $Q_B = F - R_B = 20 - 45 = -25 \text{ кН}$ ;

$$M_B = -F \cdot 1,5 = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение  $D$ :  $Q_D = F - R_B = 20 - 45 = -25 \text{ кН}$ ;

$$M_D = -F \cdot 3,5 + R_D \cdot 2 = -20 \cdot 3,5 + 45 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В опасном сечении  $Q_y = 35 \text{ кН}$ ;  $M_x = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 2.4.

**Пример 2.5.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для балки с промежуточным шарниром  $C$ , показанной на рис. 2.5.

*Решение.* Расчетную схему балки с промежуточным шарниром можно представить в виде так называемой поэтажной схемы, в которой выделяется главная балка  $AC$  (несущая часть) и второстепенная балка  $CE$  (несомая часть).

Сначала необходимо сделать расчет второстепенной балки.

Определим опорные реакции балки  $CE$ .

$$\begin{aligned} \sum M_E &= 0; \quad -R_C \cdot 4 - M + F \cdot 3 = 0; \\ -R_C \cdot 4 - 24 + 40 \cdot 3 &= 0; \quad R_C = 96 / 4 = 24 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_C &= R_E \cdot 4 - F \cdot 1 - M = 0; \\ R_E \cdot 4 - 40 \cdot 1 - 24 &= 0; \quad R_E = 64 / 4 = 16 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_Y &= 0; \quad -R_C - R_E + F = 0; \\ -24 - 16 + 40 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

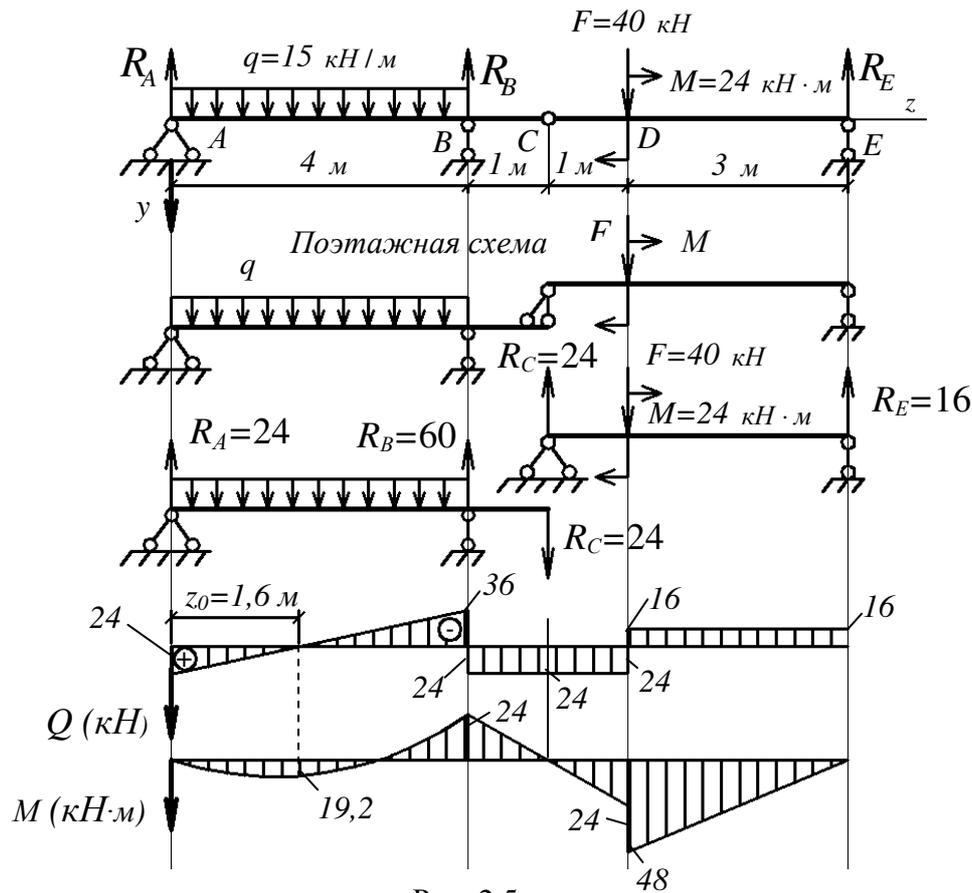


Рис. 2.5.

Опорные реакции определены правильно.

Вычисляем  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях балки  $CE$ .

Участок  $CD$  (слева):

сечение  $C$ :  $Q_C = R_C = 24$  кН;  $M_C = 0$ ;

сечение  $D$ :  $Q_D = R_C = 24$  кН;  $M_D = R_D \cdot 1 = 24 \cdot 1 = 24$  кН·м.

Участок  $ED$  (справа):

сечение  $E$ :  $Q_E = -R_E = -16$  кН;  $M_E = 0$ ;

сечение  $D$ :  $Q_D = -R_E = -16$  кН;  $M_D = R_E \cdot 3 = 16 \cdot 3 = 48$  кН·м.

Главная балка  $AC$  рассчитывается на действие распределенной нагрузки  $q = 15$  кН/м и сосредоточенной силы, численно равной опорной реакции  $R_C = 24$  кН балки  $CE$ , направленной в противоположную сторону.

Определим опорные реакции главной балки  $AC$ .

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; R_B \cdot 4 - R_C \cdot 5 - q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ -R_B \cdot 4 - 24 \cdot 5 - 15 \cdot 4 \cdot 2 &= 0; R_B = 240 / 4 = 60 \text{ кН}; \\ \sum M_B &= 0; -R_C \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0; \\ -R_A \cdot 4 + 15 \cdot 4 \cdot 2 - 24 \cdot 1 &= 0; R_A = 96 / 4 = 24 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0; -R_A - R_B + q \cdot 4 + R_C = 0; \\ &- 24 - 60 + 15 \cdot 4 + 24 = 0; \\ &0 = 0.\end{aligned}$$

Опорные реакции определены правильно.

Вычисляем  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях балки  $AC$ .

Участок  $CB$  (справа):

сечение  $C$ :  $Q_C = R_C = 24$  кН;  $M_C = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = R_C = 24$  кН;  $M_B = R_C \cdot 1 = 24 \cdot 1 = 24$  кН·м.

Участок  $AB$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = R_A = 24$  кН;  $M_A = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = R_A - q \cdot 4 = 24 - 15 \cdot 4 = 36$  кН;

$$M_B = R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 24 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для нахождения экстремального значения  $M_x$  определим положение сечения балки, в котором поперечная сила  $Q_y = 0$ :

$$Q_y = -q \cdot z_0 + R_A = 0; \quad -15 \cdot z_0 + 24 = 0,$$

откуда находим

$$z_0 = 24 / 15 = 1,6 \text{ м}.$$

В этом сечении изгибающий момент принимает экстремальное значение:

$$M_{\text{экс}} = R_A \cdot z_0 - q \cdot z_0^2 / 2 = 24 \cdot 1,6 - 15 \cdot 1,6^2 / 2 = 19,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 2.5.

**Пример 2.6.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для балки с промежуточным шарниром, показанной на рис. 2.6.

*Решение.* Расчетную схему балки представим в виде поэтажной схемы, в которой выделяется главная балка  $AC$  (несущая часть) и второстепенная балка  $CE$  (несомая часть). Несомая балка опирается на несущую балку в точке  $C$ .

Сначала необходимо сделать расчёт несомой балки. Действие сосредоточенной силы  $F$  учтём при расчете этой балки.

Определим опорные реакции  $R_C$  и  $R_D$  несомой балки:

$$\sum M_D = 0; F \cdot 3 - R_C \cdot 3 - q \cdot 1 \cdot 1 / 2 = 0;$$

$$30 \cdot 3 - R_C \cdot 3 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0;$$

$$R_C = 26,67 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0; -q \cdot 1 \cdot (3 + 0,5) + R_D \cdot 3 = 0;$$

$$- 20 \cdot 1 \cdot 3,5 + R_D \cdot 3 = 0;$$

$$R_D = 23,33 \text{ кН}.$$

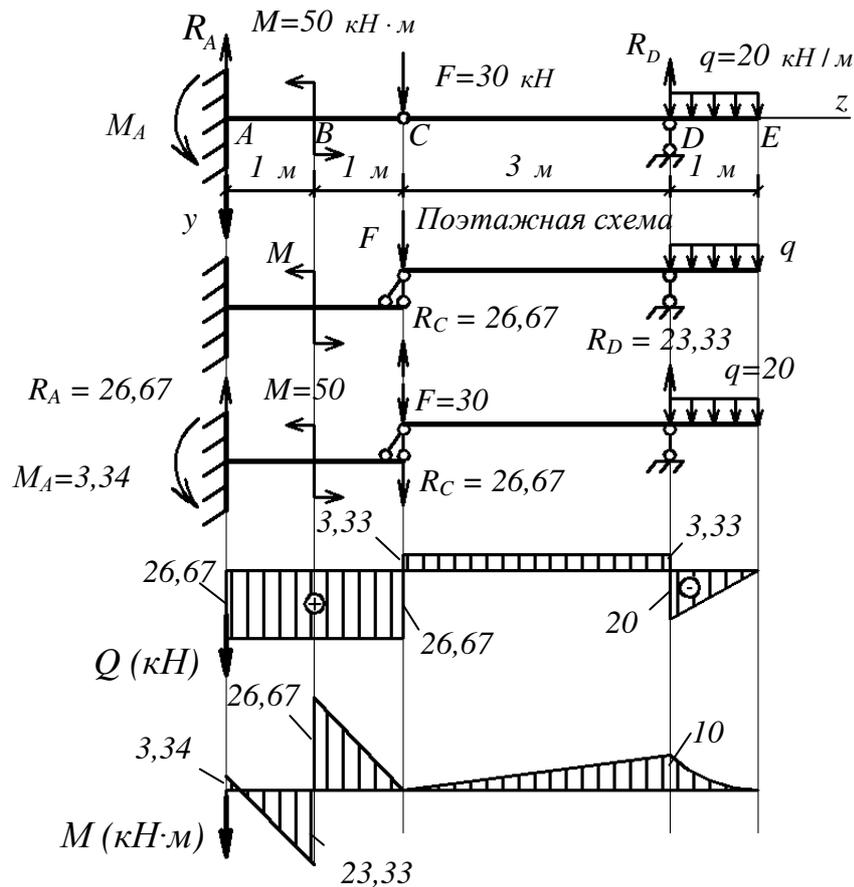


Рис. 2.6.

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; F - R_C - R_D + q \cdot 1 = 0; \\ 30 - 26,67 - 23,33 + 20 \cdot 1 = 0; \\ 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Вычисляем  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях несомой балки  $CD$ .

Участок  $CD$  (слева):

сечение  $C$ :  $Q_C = -F + R_C = -30 + 26,67 = -3,33$  кН;  $M_C = 0$ ;

сечение  $D$ :  $Q_D = -F + R_C = -30 + 26,67 = -3,33$  кН;

$M_D = -F \cdot 3 + R_C \cdot 3 = -30 \cdot 3 + 26,67 \cdot 3 = -9,99$  кН·м.

Участок  $ED$  (справа):

сечение  $E$ :  $Q_E = 0$ ;  $M_E = 0$ .

сечение  $D$ :  $Q_D = q \cdot 1 = 20 \cdot 1 = 20$  кН;

$M_D = -q \cdot 1 \cdot 1 / 2 = -20 \cdot 1 / 2 = -10$  кН·м.

Вычисляем  $Q_y$  и  $M_x$  в характерных сечениях несущей балки  $BC$ .

Участок  $BC$  (справа):

сечение  $C$ :  $Q_C = R_C = 26,67$  кН;  $M_C = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = R_C = 26,67$  кН;  $M_B = -R_C \cdot 1 = -26,67 \cdot 1 = -26,67$  кН·м.

Участок  $AB$  (справа):

сечение  $B$ :  $Q_B = R_C = 26,67$  кН;

$$M_B = -R_C \cdot 1 + M = -26,67 \cdot 1 + 50 = 23,33 \text{ кН·м};$$

сечение  $A$ :  $Q_A = R_C = 26,67$  кН;

$$M_A = -R_C \cdot 2 + M = -26,67 \cdot 2 + 50 = -3,34 \text{ кН·м}.$$

В опасном сечении  $B$  балки  $M_x = 26,67$  кН·м;  $Q_y = 26,67$  кН.

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 2.6.

**Пример 2.7.** Построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  для балки с наклонным элементом, показанной на рис. 2.7.

Условимся продольную силу  $N$  считать положительной, если она вызывает растяжение, т.е. направлена от сечения, и отрицательной, если она вызывает сжатие, т.е. направлена к сечению.

Необходимо заметить, что для ломаных и криволинейных брусьев рам и арок ординаты эпюры  $M_x$ , как и в балках откладываются со стороны растянутых волокон, но без указания знака.

Будем считать, что равномерно распределенная нагрузка  $q = 15$  кН/м отнесена к единице длины её горизонтальной проекции, а равнодействующая сила равна:

$$R = q \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60 \text{ кН}.$$

*Решение.* Из уравнений статики определим опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; & -R_A \cdot 6 + F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0; \\ -R_A \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 15 \cdot 4 \cdot 2 = 0; & R_A = 240 / 6 = 40 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & R_C \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot (2 + 2) - F \cdot 2 = 0; \\ R_C \cdot 6 - 15 \cdot 4 \cdot 4 - 30 \cdot 2 = 0; & R_C = 300 / 6 = 50 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; & -R_A - R_C + F + q \cdot 4 = 0; \\ -40 - 50 + 30 + 15 \cdot 4 = 0; & \\ 0 = 0; & \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Найдем значение поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил в характерных сечениях балки.

Участок  $AB$  (слева):

сечение  $A$ :  $Q_A = R_A = 40$  кН;  $M_A = 0$ ;  $N_A = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = R_A = 40$  кН;  $M_B = R_A \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$  кН·м;  $N_B = 0$ .

Участок  $BC$  (справа):

сечение  $C$ :  $Q_C = -R_C \cdot \cos 30^\circ = -50 \cdot 0,866 = -43,3$  кН;

$N_C = R_C \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25$  кН;  $M_C = 0$ .

сечение  $B$ :  $Q_B = -R_C \cdot \cos 30^\circ + q \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = -50 \cdot 0,866 + 15 \cdot 4 \cdot 0,866$ ;

$Q_B = 8,66$  кН.

$N_B = R_C \cdot \sin 30^\circ - q \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot 0,5 - 15 \cdot 4 \cdot 0,5 = -5$  кН;

$M_B = R_C \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 43,3 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 80$  кН·м.

Определим положение сечения, где  $Q_y = 0$ .

$$Q_y = -R_C \cdot \cos 30^\circ + q \cdot z_0 \cos 30^\circ = 0;$$

$$-50 + 15 \cdot z_0 = 0;$$

$$z_0 = 50 / 15 = 3,33 \text{ м.}$$

Изгибающий момент в этом сечении принимает экстремальное значение:

$$M_x = R_C \cdot z_0 - q \cdot z_0 \cdot z_0 / 2 = 50 \cdot 3,33 - 15 \cdot 3,33 \cdot 3,33 / 2 = 83,33 \text{ кН·м.}$$

Эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  показаны на рис. 2.7.

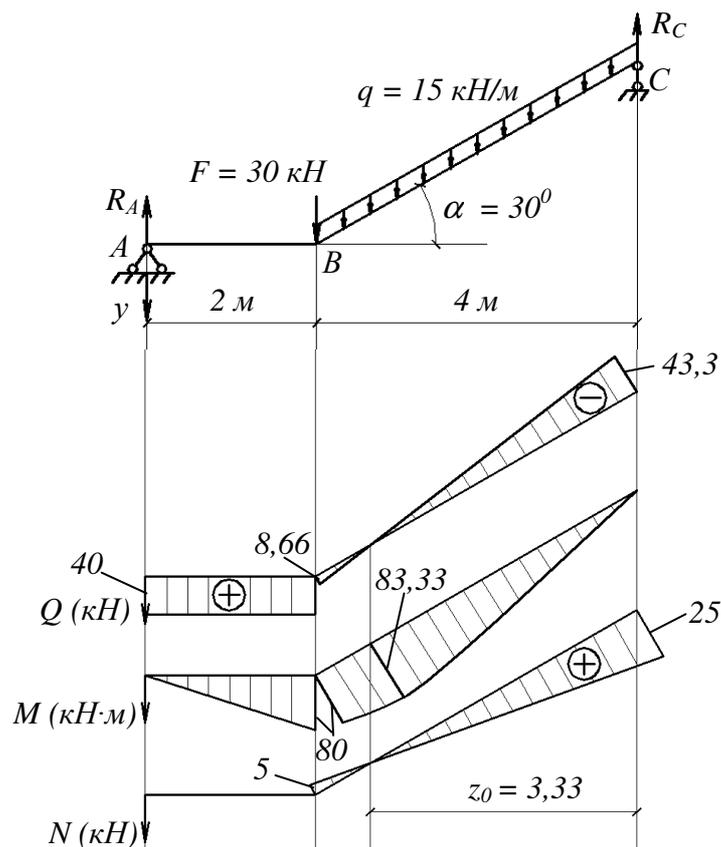


Рис. 2.7.

**Пример 2.8.** Построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  для жёстко заделанного одним концом ломаного стержня, показанного на рис. 2.8.

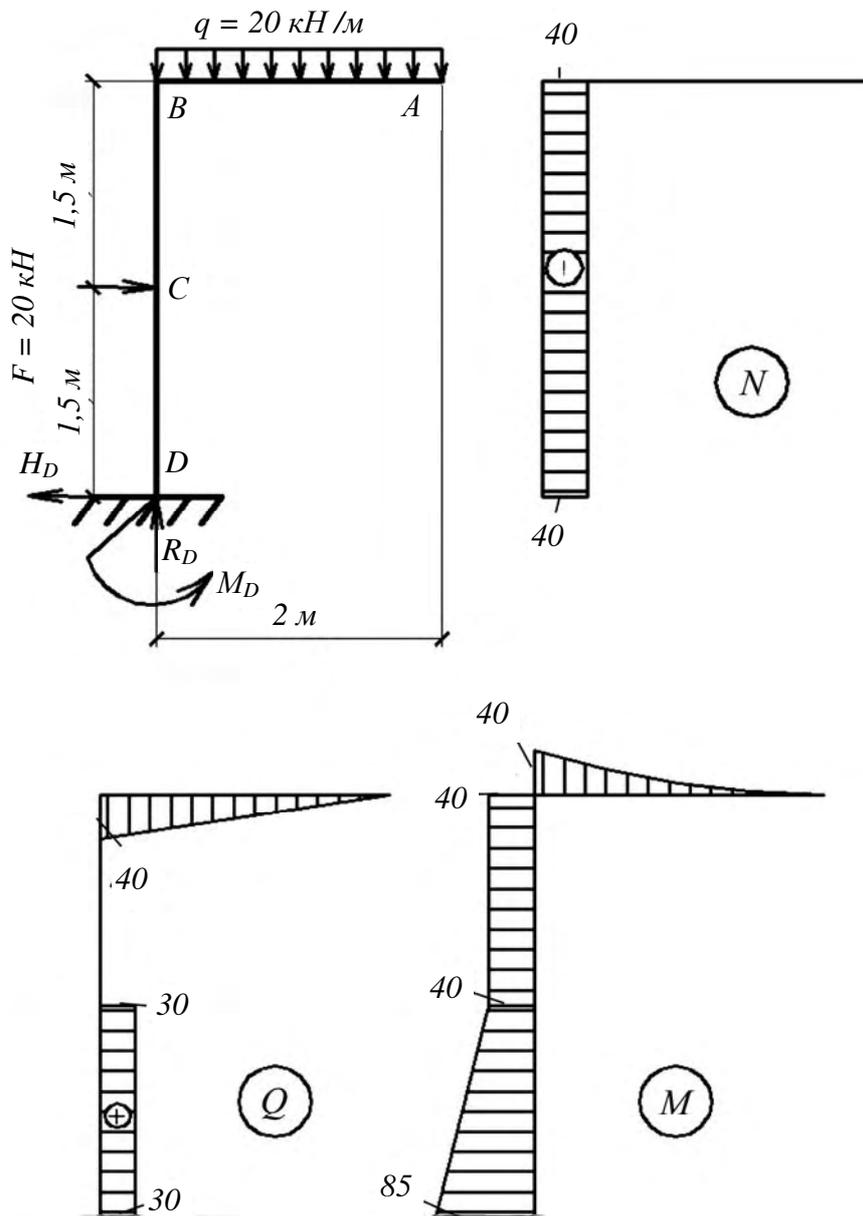


Рис. 2.8.

*Решение.* Вычисление усилий для консольных стержней удобно начинать со свободного конца. При этом не требуется предварительное определение опорных реакций.

Участок  $AB$  (справа):

сечение  $A$ :  $N_A = 0$ ;  $Q_A = 0$ ;  $M_A = 0$ ;

сечение  $B$ :  $Q_B = q \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$  кН;  $N_B = 0$ ;

$$M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \cdot 1 \cdot 2 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок  $BC$  (сверху):

сечение  $B$ :  $Q_B = 0$ ;  $N_B = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40$  кН;

$$M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \cdot 2 \cdot 1 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение  $C$ :  $Q_C = 0$ ;  $N_C = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40$  кН;

$M_C = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \cdot 2 \cdot 1 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , (растянуты наружные волокна).

Участок  $CD$  (сверху):

сечение  $C$ :  $N_C = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН}$ ;  $Q_C = F = 30 \text{ кН}$ ;

$M_C = -20 \cdot 2 \cdot 1 = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

сечение  $D$ :  $N_D = -q \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН}$ ;  $Q_D = F = 30 \text{ кН}$ ;

$M_D = -q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1,5 = -40 - 30 \cdot 1,5 = -85 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  показаны на рис. 2.8.

**Пример 2.9.** Построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  для рамы, показанной на рис. 2.9, а.

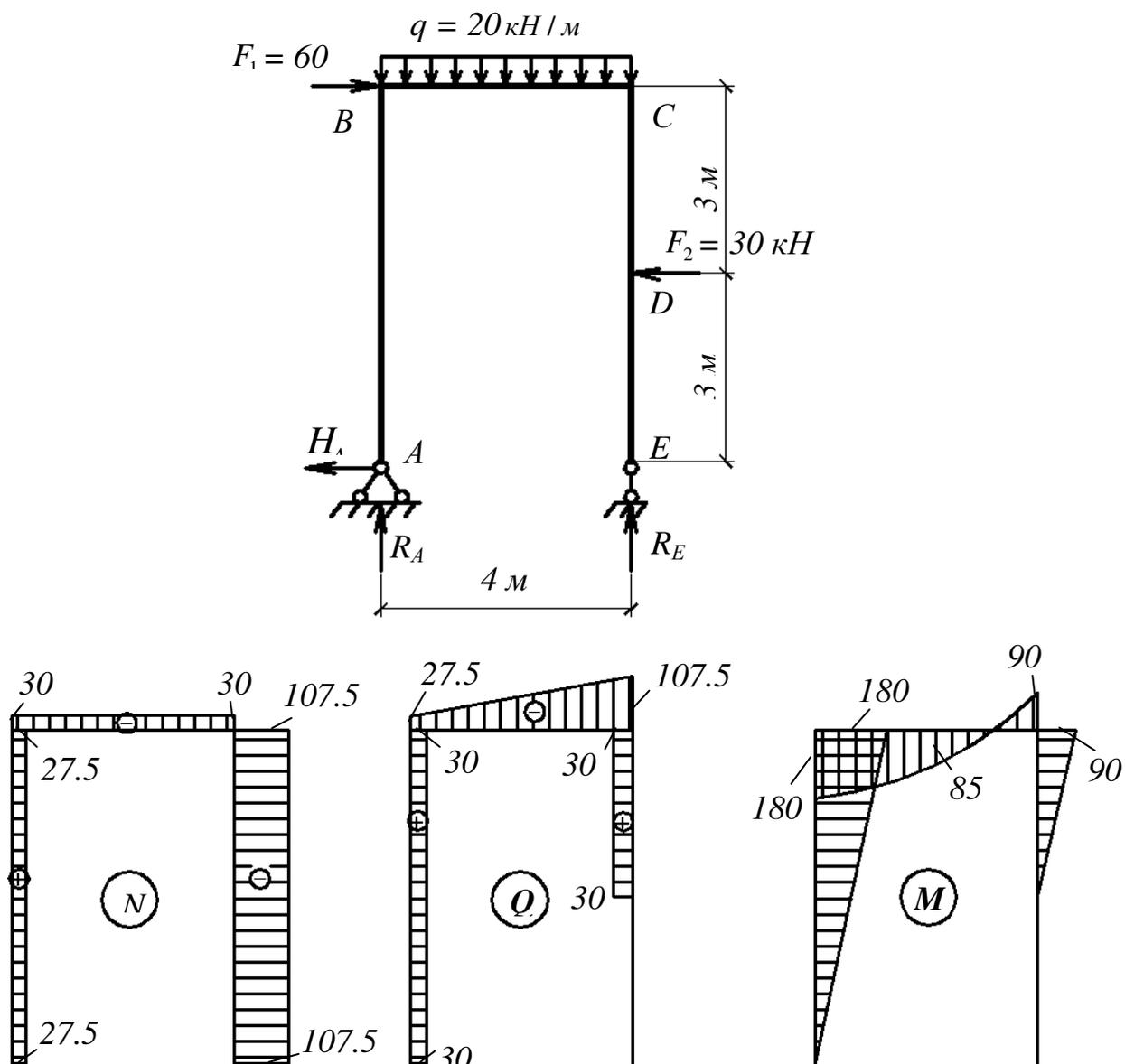


Рис. 2.9. а

*Решение.* Из уравнений статики найдем опорные реакции  $H_A$ ,  $R_A$  и  $R_E$ :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; -H_A + F_1 - F_2 = 0; \\ H_A &= 60 - 30 = 30 \text{ кН.} \\ \sum M_E &= 0; -R_A \cdot 4 - F_1 \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 2 + F_2 \cdot 3 = 0; \\ -R_A \cdot 4 - 360 + 160 + 90 &= 0; \\ R_A &= -110 / 4 = -27.5 \text{ кН.} \\ \sum M_A &= 0; R_E \cdot 4 + F_2 \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 - F_1 \cdot 6 = 0; \\ R_E \cdot 4 + 90 - 160 - 360 &= 0; R_E = 107,5 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= -R_A - R_E + q \cdot 4 = 0; \\ -(-27,5) - 107,5 + 20 \cdot 4 &= 0; \\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Вычислим внутренние усилия  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  в характерных сечениях рамы.

Участок  $AB$ :

сечение  $A$ :  $N_A = -R_A = -(-27,5) = 27,5$  кН, (растяжение);

$$Q_A = H_A = 30 \text{ кН}; M_A = 0;$$

сечение  $B$ :  $N_B = -R_A = 27,5$  кН, (растяжение);

$$Q_B = H_A = 30 \text{ кН}; M_B = H_A \cdot 3 = 30 \cdot 3 = 90 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок  $BC$ :

сечение  $B$ :  $N_B = -F_1 + H_A = -60 + 30 = -30$  кН, (сжатие);

$$Q_B = R_B = 27,5 \text{ кН};$$

$$M_B = H_A \cdot 6 = 30 \cdot 6 = 180 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

сечение  $C$ :  $N_C = -F_1 + H_A = -30$  кН;

$$Q_C = R_A - q \cdot 4 = 27,5 - 80 = -107,5 \text{ кН};$$

$$M_C = R_A \cdot 4 + H_A \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 2 = -27,5 \cdot 4 + 180 - 160 = -90 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в середине участка  $BC$ :

$$M_x = R_A \cdot 2 + H_A \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 1 = 27,5 \cdot 2 + 180 - 20 \cdot 2 = 85 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок  $DE$ :

сечение  $E$ :  $N_E = -R_E = -107,5$  кН;  $Q_E = 0$ ;  $M_E = 0$ .

сечение  $D$ :  $N_D = -R_E = -107,5$  кН;  $Q_D = F_2 = 30$  кН;  $M_D = 0$ .

Участок  $DC$ :

сечение  $D$ :  $N_D = -R_E = -107,5$  кН;  $Q_D = 0$ ;  $M_D = 0$ ;

сечение  $C$ :  $N_C = -R_E = -107,5$  кН;  $Q_C = F_2 = 30$  кН;

$$M_C = -F_2 \cdot 3 = -30 \cdot 3 = -90 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На рис. 2.9, *a* показаны эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$ .

Проверим равновесие узла  $C$ . На рис. 2.9, б показаны внутренние усилия, действующие в узле.

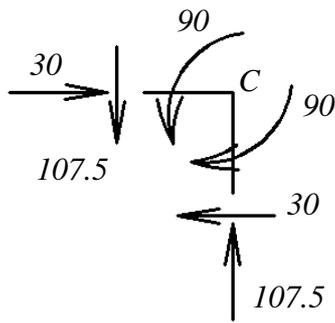


Рис. 2.9, б

Уравнения статики  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M_C = 0$  выполняются, следовательно, узел находится в равновесии.

**Пример 2.10.** Построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  для кривого бруса, показанного на рис. 2.10, а. Для консольного кривого бруса можно построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  без определения опорных реакций  $H_A$ ,  $R_A$  и  $M_A$ , начиная со свободного конца.

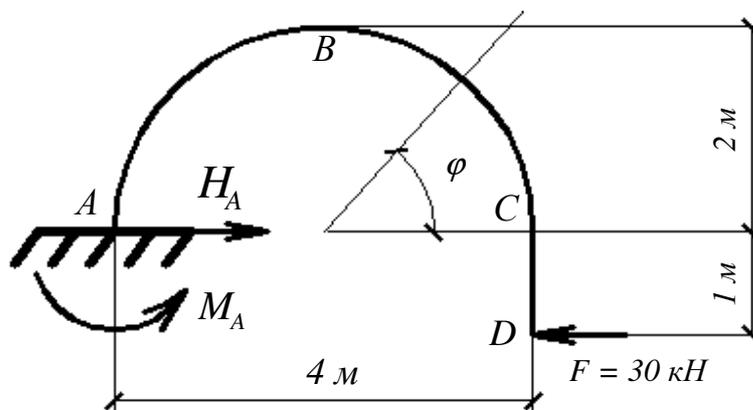


Рис. 2.9. а

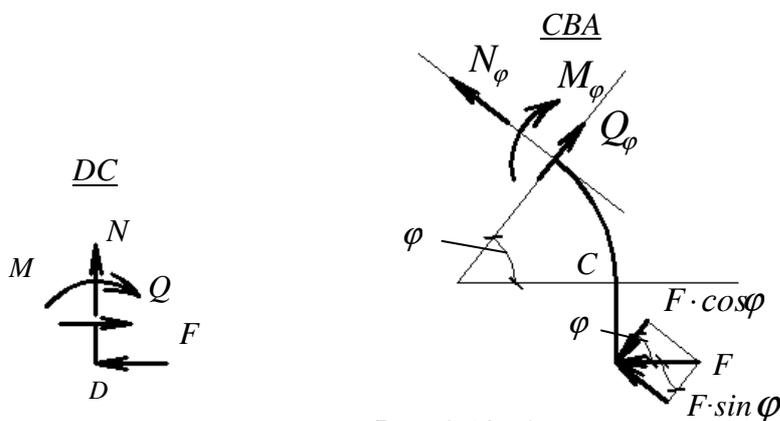


Рис. 2.10, б

Решение. Участок  $DC$  (прямолинейный):

сечение  $D$ :  $N_D = 0$ ;  $Q_D = F = 30$  кН;  $M_D = 0$ ;

сечение  $C$ :  $N_C = 0$ ;  $Q_C = F = 30$  кН;  $M_C = -F \cdot 1 = -30$  кН·м.

Участок  $CBA$  (криволинейный):

$$N = -F \cdot \sin\varphi = -30 \cdot \sin\varphi;$$

$$Q_y = F \cdot \cos\varphi = 30 \cdot \cos\varphi;$$

$$M_x = -F \cdot (1 + 2 \cdot \sin\varphi) = -30 \cdot (1 + 2 \cdot \sin\varphi).$$

Задавая угол  $\varphi$  от  $0$  до  $180^\circ$  через интервал  $30^\circ$ , определим значения  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  в сечениях:

$\varphi=0^\circ$ ;  $N_C = 0$ ;  $Q_C = 30$  кН;  $M_C = -30$  кН·м;

$\varphi=30^\circ$ ;  $N = -15$  кН;  $Q = 25,98$  кН;  $M = -60$  кН·м;

$\varphi=60^\circ$ ;  $N = -25,98$  кН;  $Q = 15$  кН;  $M = -81,96$  кН·м.

$\varphi=90^\circ$ ;  $N_B = -30$  кН;  $Q_B = 0$ ;  $M_B = -90$  кН·м;

$\varphi=120^\circ$ ;  $N = -25,98$  кН;  $Q = -15$  кН;  $M = -81,96$  кН·м.

$\varphi=150^\circ$ ;  $N = -15$  кН;  $Q = -25,98$  кН;  $M = -60$  кН·м.

$\varphi=180^\circ$ ;  $N_A = 0$ ;  $Q_A = -30$  кН;  $M_A = -30$  кН·м.

Эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  показаны на рис. 2.10, в.

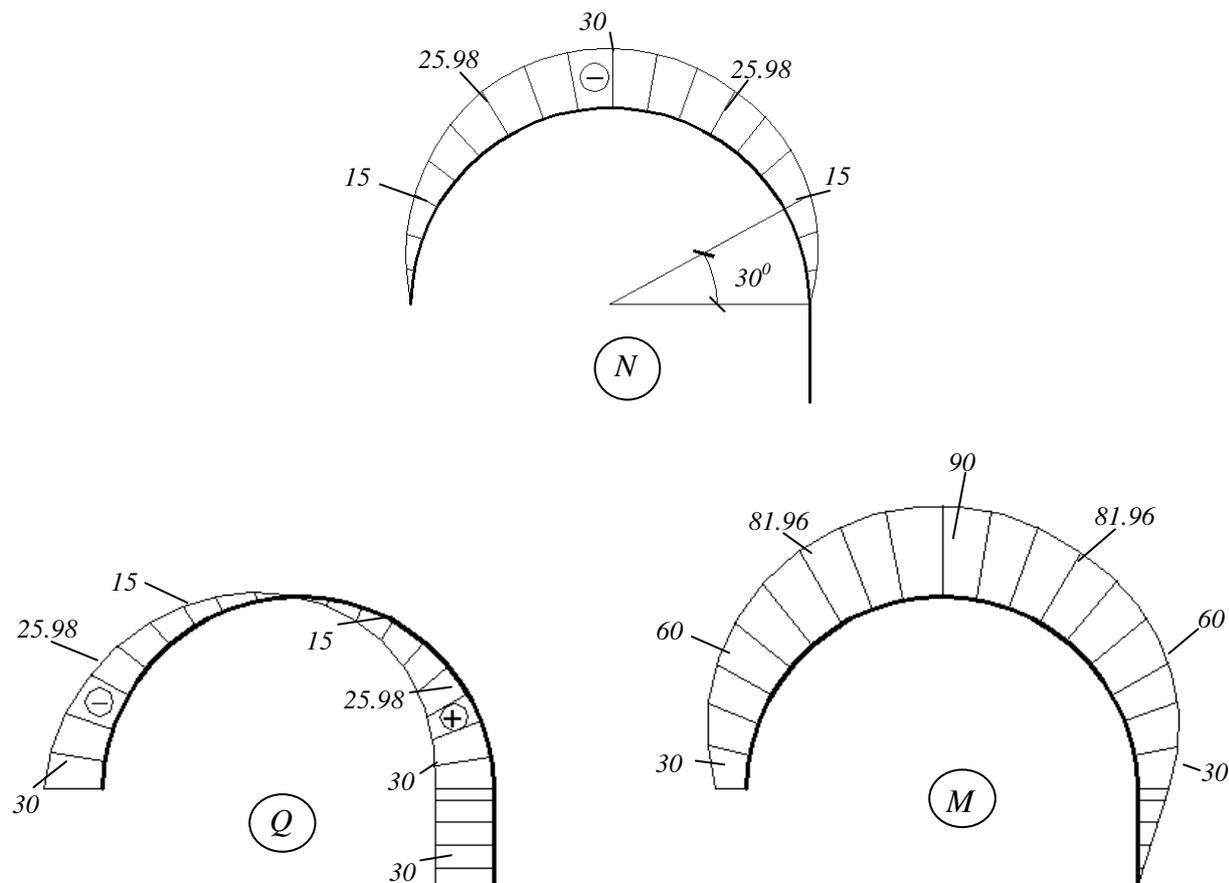


Рис. 2.10, в

**Пример 2.11.** Построить  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$  для шарнирно опертого кривого бруса, изображенного на рис. 2.11, а.

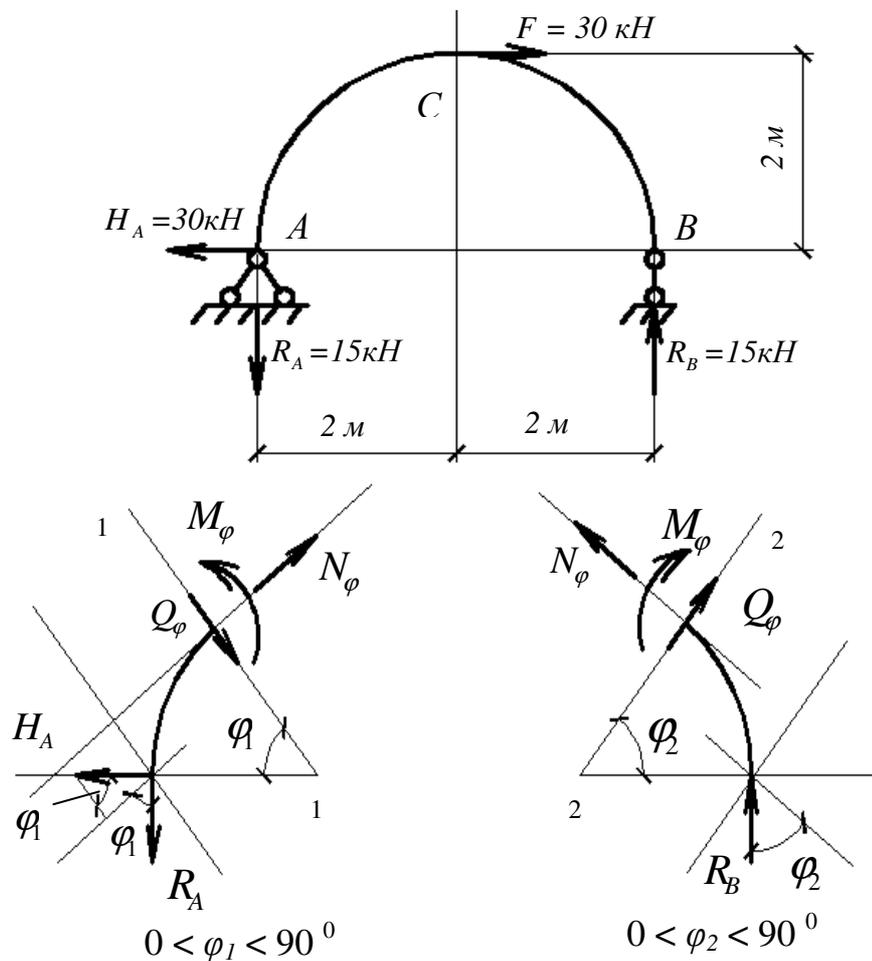


Рис. 2.11, а

*Решение.* Опорные реакции определяем из уравнений статики.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & -H_A + F = 0; H_A = F = 30 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; & R_A \cdot 4 - F \cdot 2 = 0; R_A = 15 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; & R_B \cdot 4 - F \cdot 2 = 0; R_B = 15 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось  $y$ :

$$\begin{aligned} \sum F_y = -R_A + R_B &= 0; \\ -15 + 15 &= 0; \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, опорные реакции определены правильно.

Разобьем брус на два участка  $AC$  (1-й участок) и  $CB$  (2-й участок).

Рассечем брус плоскостью 1–1, нормально к геометрической оси и рассмотрим равновесие левой части. Внутренние силовые фак-

торы: продольная сила, поперечная сила и изгибающий момент определяются из уравнений равновесия

$$\begin{aligned} N_\varphi &= H_A \cdot \sin\varphi_1 + R_A \cdot \cos\varphi_1; \\ Q_\varphi &= H_A \cdot \cos\varphi_1 - R_A \cdot \sin\varphi_1; \\ M_\varphi &= H_A \cdot 2 \cdot \sin\varphi_1 - R_A \cdot 2 \cdot (1 - \cos\varphi_1); \\ 0 &\leq \varphi_1 \leq 90^\circ. \end{aligned}$$

Определим экстремальные значения  $M_\varphi$  и  $N_\varphi$  на участке  $AC$  в сечении 2-2

$$Q_\varphi = 30 \cdot \cos\varphi_0 - 15 \cdot \sin\varphi_0; \varphi_0 = 63^\circ 27'$$

$$\begin{aligned} M_{\text{экс}} &= 60 \cdot \sin\varphi_0 - 30 \cdot (1 - \cos\varphi_0) = \\ &= 60 \cdot 0,894 - 30 \cdot (1 - 0,447) = 37,05 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

$$N_{\text{экс}} = 30 \cdot \sin\varphi_0 + 15 \cos\varphi_0 = 30 + 15 \cdot 0,447 = 33,54 \text{ кН}.$$

Выражение силовых факторов для сечения  $BC$  имеют вид:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -R_B \cdot \cos\varphi_2; \\ Q_\varphi &= -R_B \cdot \sin\varphi_2; \\ M_\varphi &= R_B \cdot 2 \cdot (1 - \cos\varphi_2); \\ 0 &\leq \varphi_2 \leq 90^\circ. \end{aligned}$$

На основании полученных выражений и вычисленных значений  $N_\varphi$ ,  $Q_\varphi$  и  $M_\varphi$  в сечениях при  $\varphi = 0; 45^\circ; 63^\circ 26'; 90^\circ$  построены эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рис. 2.11.б).

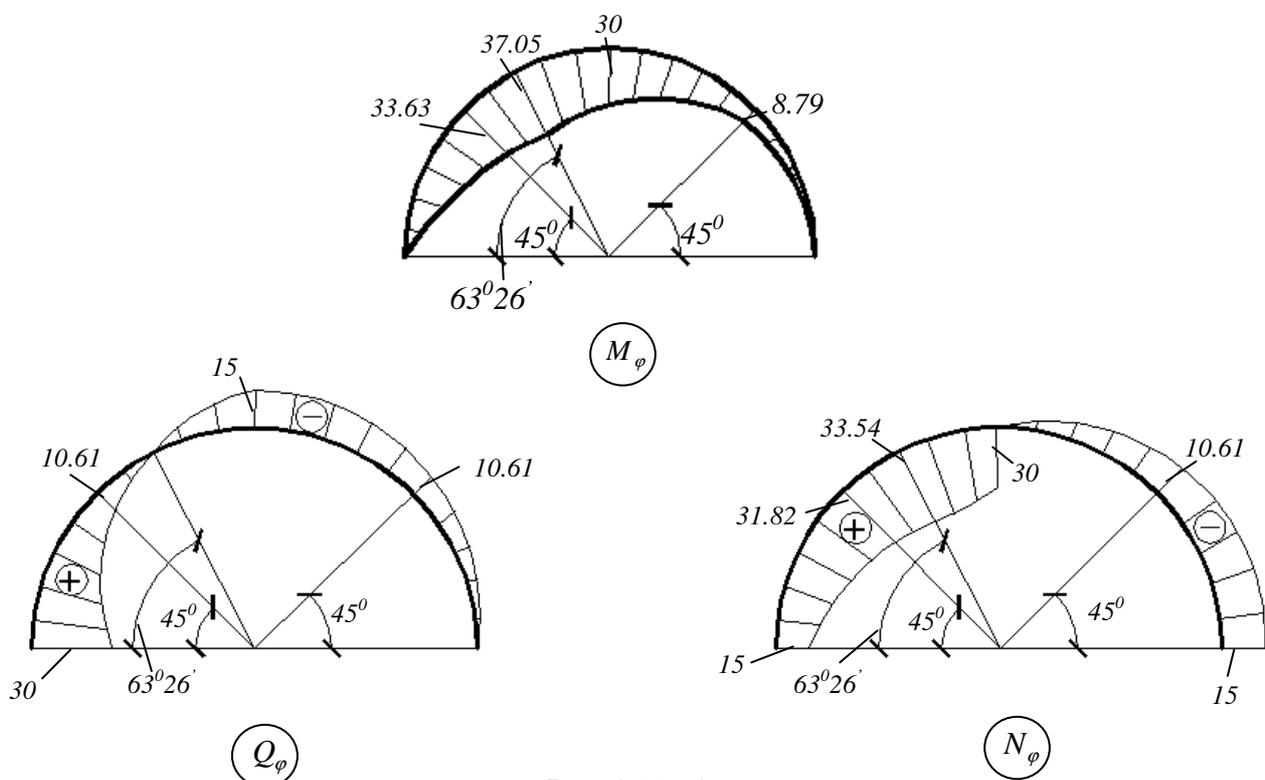


Рис. 2.11, б

### 3. НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе в сечении балки действуют нормальные и касательные напряжения. Касательные напряжения  $\tau$ , как и нормальные  $\sigma$ , распределены по сечению неравномерно. Следовательно, неравномерно будут распределены и угловые деформации, что приводит к искривлению поперечных сечений.

Исследованиями установлено, что влияние искажений поперечных сечений на величину нормальных напряжений зависит от отношения высоты сечения  $h$  к длине  $l$  балки и при  $h/l \leq 1/5$  это влияние незначительно.

Поэтому, для определения нормальных напряжений используется формула для случая чистого изгиба.

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y,$$

где  $J_x$  – осевой момент инерции сечения относительно главной центральной оси  $x$ ;  $M_x$  – значение изгибающего момента в сечении балки;  $y$  – координата точки, в которой определяется нормальное напряжение.

Из формулы следует, что нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону.

При плоском изгибе нейтральная ось совпадает с главной центральной осью  $x$ . В точках нейтральной оси при  $y=0$  нормальное напряжение  $\sigma=0$ , а наибольшие и наименьшие значения принимает в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси  $x$ , в верхних ( $y = -y_e$ ) и нижних ( $y = y_n$ ) волокнах.

Пусть  $M_x > 0$ , тогда получим

$$\sigma_{нб} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_n, \quad \sigma_{нм} = -\frac{M_x}{J_x} \cdot y_e,$$

Знак напряжений в формуле определяется знаком изгибающего момента и знаком ординаты  $y$ , при этом ось  $y$  направляем вниз. Координата точки отчитывается от нейтральной оси  $x$ .

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси ( $y_n = y_e = h/2$ ), напряжения в крайних волокнах равны и отличаются знаками

$$\sigma_{нб} = \frac{M_x}{W_x}, \quad \sigma_{нм} = -\frac{M_x}{W_x},$$

где  $W_x = \frac{J_x}{0,5 \cdot h}$  – осевой момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси  $x$ .

Осевой момент инерции и осевой момент сопротивления сечений относительно главных центральных осей находятся по следующим формулам:

для прямоугольного сечения:  $J_x = \frac{bh^3}{12}; W_x = \frac{bh^2}{6},$

для сплошного круглого сечения:  $J_x = \frac{\pi d^4}{64}; W_x = \frac{\pi d^3}{32},$

для прокатных профилей (двутавр, швеллер и других) величины  $J_x$  и  $W_x$  приведены в сортаменте.

Касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях балки, определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau_{xe} = \tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}(y)}{J_x \cdot b(y)},$$

где  $J_x$  – осевой момент инерции относительно нейтральной оси  $x$ ;

$S_x^{omc}(y) = A_{omc} \cdot y_c^{omc}$  – статический момент отсечённой площади сечения  $A_{omc}$  относительно нейтральной оси;  $y_c^{omc}$  – координата центра тяжести отсечённой площади;  $b(y)$  – ширина сечения.

Согласно закону парности в продольных сечениях балки возникают такие же касательные напряжения.

Для прямоугольного сечения касательные напряжения находятся по следующим формулам:

$$\tau = \frac{Q_y}{2J_x} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad 0 \leq y \leq \pm h/2.$$

Из формулы следует, что касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки по закону квадратной параболы.

При  $y = \pm h/2$  касательные напряжения в точках крайних верхних и нижних волокон равны нулю, а при  $y = 0$  в точках на уровне нейтральной оси касательные напряжения наибольшие:

$$\tau_{нб} = \frac{3Q_y}{2A}, \quad A = b \cdot h,$$

для круглого сплошного сечения, применив формулу Д.И. Журавского, можно найти наибольшие касательные напряжения на уровне нейтральной оси:

$$\tau_{нб} = \frac{4Q_y}{3A}, \quad A = \pi d^2 / 4.$$

Рассмотрим распределение касательных напряжений в стенке двутавра.

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения равны:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^n}{J_x \cdot d}, \quad b(y) = d, \quad S_x^n = \frac{b \cdot t \cdot (h - t)}{2}.$$

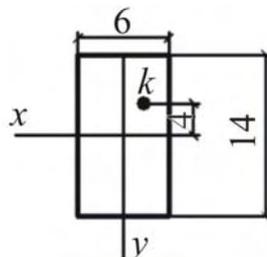
Наибольшие касательные напряжения возникают в стенке двутавра на уровне нейтральной оси:

$$\tau_{нб} = \frac{Q_n^{нб} \cdot S_x}{J_x \cdot d}.$$

Для прокатных двутавров и швеллеров величина статического момента инерции для половины сечения  $S_x$  приведена в сортаменте.

#### 4. ПРИМЕРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

**Пример 4.1.** Определить нормальное и касательное напряжения в точке  $K$  прямоугольного сечения балки (6х14 см), если изгибающий момент в этом сечении  $M_x = -40 \text{ кН}\cdot\text{м} = -40 \cdot 10^2 \text{ кН}\cdot\text{см}$ ., а поперечная сила  $Q_y = 20 \text{ кН}$ .



*Решение.* Осевой момент инерции прямоугольного поперечного сечения относительно главной центральной оси  $x$  равен:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 14^3}{12} = 1372 \text{ см}^4.$$

Координата точки  $K$  равна  $y_K = -4$  см.

Нормальное напряжение в точке  $K$  будет равно:

$$\sigma_K = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_K = -\frac{40 \cdot 10^2}{1372} \cdot (-4) = 11,66 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 116,6 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение в точке  $K$  вычисляем по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{omc}(y)}{J_x \cdot b(y)}.$$

Статический момент инерции отсечённой части площади сечения равен:

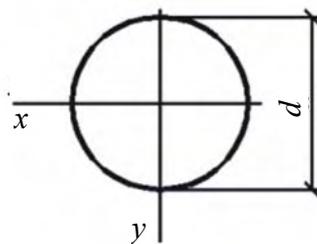
$$S_x^K = A_{omc} \cdot y_c^{omc} = 6 \cdot (7 - 4) \cdot (7 - 3/2) = 99 \text{ см}^3.$$

Ширина сечения на уровне точки  $K$  равна  $b(y) = 6$  см.

Определим касательное напряжение в точке  $K$ .

$$\tau_K = \frac{20 \cdot 99}{1372 \cdot 6} = 0,24 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 2,4 \text{ МПа}.$$

**Пример 4.2.** Определить наибольшее растягивающее нормальное и наибольшее касательное напряжения в балке круглого сечения, если в сечении  $M_x = 40 \text{ кН} \cdot \text{м} = 40 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}$ ,  $Q_y = 60 \text{ кН}$ . Диаметр сечения  $d = 14 \text{ см}$ .



*Решение.* Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в нижнем волокне растянутой зоны сечения, в волокне наиболее удалённом от нейтральной оси  $x$ , и определяется по формуле

$$\sigma_{нб} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках сечения на уровне нейтральной оси  $x$ . Их можно определить по формуле Журавского.

$$\tau_{нб} = \frac{4Q_y}{3A}$$

Площадь сечения равна:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14^2}{4} = 153,56 \text{ см}^2.$$

Осевой момент сопротивления сечения равен:

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 14^3}{32} = 269,26 \text{ см}^3.$$

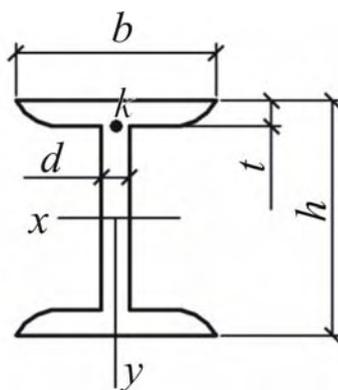
Определим значение наибольшего растягивающего нормального напряжения:

$$\sigma_{нб} = \frac{40 \cdot 10^2}{269,26} = 14,86 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 148,6 \text{ МПа}.$$

Определим значение наибольшего касательного напряжения:

$$\tau_{нб} = \frac{4 \cdot 60}{3 \cdot 153,56} = 0,52 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 5,2 \text{ МПа}.$$

**Пример 4.3.** Определить нормальное и касательное напряжения в точке  $K$  на уровне примыкания стенки стального двутавра к полкам (I №30), а также наибольшие нормальные и касательные напряжения, если  $M_x = 50 \text{ кН} \cdot \text{м} = 50 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}$ ,  $Q_y = 30 \text{ кН}$ .



*Решение.* Для балки двутаврового сечения из сортамента выпишем необходимые данные для двутавра №30.

Высота  $h = 300 \text{ мм} = 30 \text{ см}$ , ширина  $b = 135 \text{ мм} = 13,5 \text{ см}$ , толщина стенки  $d = 6,5 \text{ мм} = 0,65 \text{ см}$ , толщина полки  $t = 10,2 \text{ мм} = 1,02$

см, площадь сечения  $A = 46,5 \text{ см}^2$ , осевой момент инерции  $J_x = 7080 \text{ см}^4$ , осевой момент сопротивления  $W_x = 472 \text{ см}^3$ .

Определим значение статического момента инерции площади сечения полки относительно нейтральной оси  $x$ :

$$S_x^n = \frac{b \cdot t}{2} \cdot (h - t) = \frac{13,5 \cdot 1,02}{2} (30 - 1,02) = 199,53 \text{ см}^3.$$

На уровне примыкания стенки двутавра к полкам касательные напряжения равны:

$$\tau_k = \frac{Q_y \cdot S_x^n}{J_x \cdot d} = \frac{30 \cdot 199,53}{7080 \cdot 0,65} = 1,3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 13 \text{ МПа}.$$

Определим значение нормального напряжения на этом же уровне:

$$y_k = -(h / 2 - t) = 15 - 1,02 = -13,98 \text{ см}.$$
$$\sigma_k = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_k = \frac{50 \cdot 10^2}{7080} (-13,98) = -9,87 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -98,7 \text{ МПа}.$$

Наибольшее нормальное напряжения возникает в волокнах, наиболее удалённых от нейтральной оси  $x$ :

$$\sigma_{нб} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^2}{472} = 10,59 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 105,9 \text{ МПа}.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают в точках на уровне нейтральной оси  $x$ :

$$\tau_{нб} = \frac{Q_y \cdot S_x^n}{J_x \cdot d} = \frac{30 \cdot 268}{7080 \cdot 0,65} = 1,75 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 17,5 \text{ МПа}.$$

После определения нормальных и касательных напряжений, можно показать характер распределения напряжений по высоте сечения, построив эпюры напряжений.

В крайних верхних и нижних волокнах возникают наибольшие нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. В точках на нейтральной оси  $x$  нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения максимальны.

## 5. РАСЧЁТ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

При расчёте строительных конструкций применяется метод расчёта по первой группе предельных состояний, в машиностроении - метод расчета по допускаемым напряжениям.

В большинстве случаев при расчете на прочность при изгибе решающее значение имеют наибольшие нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок, и лишь в некоторых случаях наибольшие касательные напряжения, действующие на нейтральной оси  $x$ .

Для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, выгодно применять сечения, симметричные относительно нейтральной оси.

В этом случае условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{нб}}{W_x} \leq \gamma_c \cdot R,$$

где  $\sigma_{нб}$  – наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке;  $M_{нб}$  – наибольший по абсолютной величине изгибающий момент;  $W_x$  – осевой момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси  $x$ ;  $\gamma_c \leq 1$  – коэффициент условия работы;  $R$  – расчётное сопротивление материала.

Наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних верхних и нижних волокнах, в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси  $x$ .

Сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент  $M_{нб}$ , называется опасным сечением.

При расчёте элементов конструкций, работающих на изгиб, с использованием условия прочности решаются следующие задачи: проверка прочности; подбор сечения; определение грузоподъёмности балки.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условия прочности:

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{нб}}{W_x} \leq \gamma_c R.$$

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения при заданной форме поперечного сечения.

Сначала определяется величина требуемого осевого момента сопротивления сечения, а затем устанавливаются размеры сечения.

$$W_x \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c R}$$

Для прямоугольного сечения с заданным соотношением сторон  $h/b = n$  находим:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{6n}; \text{ где } b = \frac{h}{n},$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot n \cdot M_{нб}}{\gamma_c \cdot R}}.$$

Для круглого сечения можно найти диаметр  $D$ :

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}; D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{нб}}{\pi \cdot \gamma_c \cdot R}}.$$

Для прокатных профилей (двутавр, швеллер) по величине требуемого осевого момента сопротивления  $W$  выбор сечения производится по сортаменту.

Решение третьей задачи по определению грузоподъёмности сводится к определению в опасном сечении величины наибольшего изгибающего момента

$$M_{нб} = \gamma_c \cdot R \cdot W_{нб}.$$

Затем этот момент выражается через приложенные к балке нагрузки и определяются соответствующие величины нагрузок.

Следует отметить, что в коротких балках ( $l/h \leq 5$ ), а также в балках обычной длины нагруженных большими по величине сосредоточенными силами, расположенными близко к опорам, изгибающий момент может оказаться небольшим, а поперечная сила по абсолютной величине значительной. В этом случае необходимо производить проверку прочности по наибольшим касательным напряжениям.

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{нб} \leq \gamma_c \cdot R_s$$

где  $\tau_{нб}$  – наибольшие касательные напряжения, возникающие в балке;  $\gamma_c \leq 1$  – коэффициент условия работы;  $R_s$  – расчётное сопротивление материала балки при сдвиге.

Для металлов, например для стали марки ВСт3, при растяжении, сжатию и изгибе  $R = 210$  МПа, а при сдвиге  $R_s = 130$  МПа.

Для деревянных балок расчётное сопротивление растяжению и сжатию при изгибе  $R = 13$  МПа, а при скалывании  $R_s = 2,4$  МПа.

Расчёт на прочность по наибольшим касательным напряжениям  $\tau_{нб}$  производится для сечений, в которых действует наибольшая по абсолютной величине поперечная сила  $Q_{нб}$ . Наибольшее значение касательные напряжения принимают на уровне нейтральной оси  $x$ .

Расчёт на прочность по наибольшим касательным напряжениям  $\tau_{нб}$  имеет решающее значение для деревянных балок, так как дерево плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон.

Для деревянной балки прямоугольного сечения условие прочности имеет вид:

$$\tau_{нб} = \frac{3Q_{нб}}{2A} \leq \gamma_c \cdot R_s,$$

где  $A = b \cdot h$  – площадь поперечного сечения балки.

Для деревянной балки круглого сечения условие прочности имеет вид:

$$\tau_{нб} = \frac{4Q_{нб}}{3A} \leq \gamma_c \cdot R_s,$$

где  $A = \pi \cdot d^2 / 4$  – площадь поперечного сечения балки.

Для стальной двутавровой балки условие прочности имеет вид:

$$\tau_{нб} = \frac{Q_{нб} \cdot S_x}{J_x \cdot d} \leq \gamma_c \cdot R_s,$$

где  $S_x$  – статический момент инерции площади половины сечения относительно нейтральной оси  $x$ ;  $J_x$  – осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси  $x$ ;  $d$  – ширина стенки двутавра на уровне нейтральной оси при  $y = 0$ .

## 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТИПЫ СЕЧЕНИЙ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ

Несущая способность балки прямо пропорциональна осевому моменту сопротивления  $W$ , а расход материала — площади поперечного сечения  $A$  балки. Рациональными с точки зрения расхода материала являются типы сечений, у которых отношение  $W/A$  имеет наи-

большее возможное значение. Из трех типов сечений (прямоугольник, круг, двутавр) наиболее выгодным с этой точки зрения является двутавровое сечение.

Произведем подбор трех типов поперечных сечений балок при заданных нагрузках и свойствах материала.

Наибольшее значение изгибающего момента примем из примера 2.4. -  $M_{нб} = 30 \text{ кН}\cdot\text{м} = 30 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Материал — сталь.  $R = 210 \text{ МПа} = 210 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$ , коэффициент условия работы  $\gamma_c = 1$ .

### 6.1. Примеры определения размеров сечений заданной формы при заданных нагрузках

**Пример 6.1.1. Прямоугольное сечение.** Для прямоугольного сечения с соотношением сторон  $n = h / b = 2$  имеем:

$$\text{осевой момент сопротивления } W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{6n} = \frac{M_{нб}}{\gamma_c \cdot R},$$

$$\text{отсюда } h = \sqrt[3]{\frac{6n \cdot M_{нб}}{\gamma_c \cdot R}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 30 \cdot 10^3}{1 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 11,968 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 12 \text{ см.}$$

$$b = h / n = 12 / 2 = 6 \text{ см};$$

$$\text{площадь сечения } A = 12 \cdot 6 = 72 \text{ см}^2.$$

**Пример 6.1.2. Круглое сплошное сечение.** Для круглого сечения имеем:

$$\text{осевой момент сопротивления } W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{M_{нб}}{\gamma_c \cdot R},$$

$$\text{отсюда } d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{нб}}{\pi \cdot \gamma_c \cdot R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 30 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 11,333 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 11,33 \text{ см};$$

$$\text{площадь сечения } A = \pi \cdot d^2 / 4 = 3,14 \cdot 11,33^2 / 4 = 100,8 \text{ см}^2.$$

**Пример 6.1.3. Двутавровое сечение.** Требуемый осевой момент сопротивления равен:

$$W_x \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c \cdot R} = \frac{30 \cdot 10^3}{1 \cdot 210 \cdot 10^6} \text{ м}^3 = \frac{30 \cdot 10^3}{1 \cdot 210 \cdot 10^6} \cdot 10^6 \text{ см}^3 = 142,86 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента прокатных двутавров принимаем сечение из I №18:

осевой момент сопротивления  $W_x = 143 \text{ см}^3 > 142,86 \text{ см}^3$ ;

площадь сечения  $A = 23,4 \text{ см}^2$ .

Расход материала определяется площадью сечения. Сравним расход материала рассмотренных сечений балок, для этого поделим площади прямоугольного и круглого сечений на площадь сечения двутавра:

$$\frac{72}{23,4} = 3,08, \quad \frac{100,8}{23,4} = 4,30, \quad \frac{23,4}{23,4} = 1$$

Расход материала в случае двутаврового сечения в 3,08 раза меньше чем в случае прямоугольного сечения, и в 4,3 раза меньше чем в случае круглого сечения.

В балках из хрупкого материала рационально применять несимметричные сечения.

Рассмотрим решение задач по проверке выполнения условия прочности при заданных нагрузках.

## 6.2. Примеры проверки выполнения условий прочности при заданных нагрузках

**Пример 6.2.1.** Проверить выполнение условий прочности для деревянной балки прямоугольного сечения ( $12 \times 24 \text{ см}^2$ ), если в опасном сечении  $M_{нб} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$  и  $Q_{нб} = 20 \text{ кН}$ . Расчетное сопротивление сосны растяжению и сжатию при изгибе  $R = 13 \text{ МПа}$ , а при скалывании вдоль волокон  $R_s = 2,4 \text{ МПа}$ . Коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

*Решение.* Условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям запишем в виде:

$$\sigma_{нб} = \frac{M_{нб}}{W_x} \leq \gamma_c \cdot R.$$

Осевой момент сопротивления для прямоугольного сечения равен:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 24^2}{6} = 3456 \text{ см}^3.$$

Проверяем выполнения условия прочности:

$$\sigma_{н\bar{b}} = \frac{20 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}}{3456 \text{ см}^3} = 0,579 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 5,79 \text{ МПа} < 1 \cdot 13 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям выполняется.

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям запишем в виде:

$$\tau_{н\bar{b}} = \frac{3Q_{н\bar{b}}}{2A} \leq \gamma_c \cdot R_s.$$

Площадь прямоугольного поперечного сечения равна:

$$A = b \cdot h = 12 \cdot 24 = 288 \text{ см}^2.$$

Проверяем выполнения условия прочности:

$$\tau_{н\bar{b}} = \frac{3 \times 20 \text{ кН}}{2 \times 288 \text{ см}^2} = 0,104 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 1,04 \text{ МПа} < 1 \cdot 2,4 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по наибольшим касательным напряжениям выполняется.

**Пример 6.2.2.** Проверить выполнение условий прочности для стальной двутавровой балки (I №27), если в опасном сечении  $M_{н\bar{b}} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м} = 60 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}$  и  $Q_{н\bar{b}} = 30 \text{ кН}$ . Расчетное сопротивление стали растяжению и сжатию при изгибе  $R = 210 \text{ МПа}$ , а сдвигу -  $R_s = 130 \text{ МПа}$ . Коэффициент условий работы  $\gamma_c = 1$ .

*Решение.* Из сортамента прокатной стали выписываем данные для двутавра №27:  $h = 270 \text{ мм} = 27 \text{ см}$ ,  $b = 125 \text{ мм} = 12,5 \text{ см}$ ,  $d = 6,0 \text{ мм} = 0,60 \text{ см}$ ,  $t = 9,8 \text{ мм} = 0,98 \text{ см}$ .

Площадь сечения  $A = 40,2 \text{ см}^2$ , осевой момент инерции  $J_x = 5010 \text{ см}^4$ , момент сопротивления  $W_x = 371 \text{ см}^3$ , статический момент инерции половины сечения  $S_x = 371 \text{ см}^3$ .

Условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям запишем в виде:

$$\sigma_{н\bar{b}} = \frac{M_{н\bar{b}}}{W_x} \leq \gamma_c \cdot R.$$

Проверяем выполнение условия прочности:

$$\sigma_{н\bar{b}} = \frac{60 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{см}}{371 \text{ см}^3} = 16,17 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 161,7 \text{ МПа} < 1 \cdot 210 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по наибольшим нормальным напряжениям выполняется

Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям запишем в виде

$$\tau_{нб} = \frac{Q_{нб} \cdot S_x}{J_x \cdot d} \leq \gamma_c \cdot R_s.$$

Проверяем выполнение условия прочности:

$$\tau_{нб} = \frac{30 \cdot 210}{5010 \cdot 0,60} = 2,1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 21 \text{ МПа} \leq 1 \cdot 130 \text{ МПа}.$$

Следовательно, условие прочности по наибольшим касательным напряжениям выполняется.

### 6.3. Пример определения грузоподъемности балки

**Пример 6.3.1.** Определить грузоподъемность стальной двутавровой балки из I №27, изображенной на рис. 6.1.  $R = 210 \text{ МПа}$ ,  $\gamma_c = 0,9$ ,  $W_x = 371 \text{ см}^3 = 371 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ ,  $l = 3 \text{ м}$ .

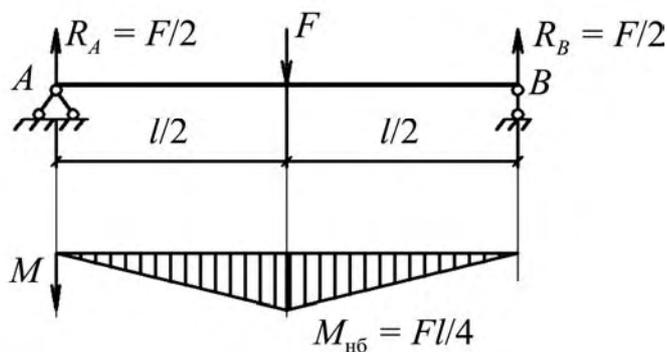


Рис. 6.1.

*Решение.* Величина наибольшего изгибающего момента находится из условия:

$$M_{нб} = \gamma_c \cdot R \cdot W_x = 0,9 \cdot 210 \cdot 371 \cdot 10^{-6} = 70,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре изгибающих моментов находим:

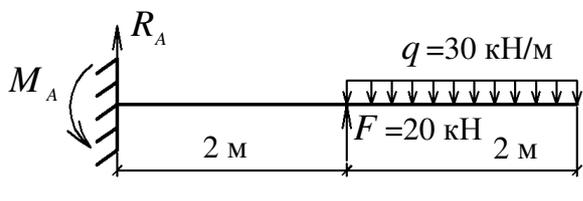
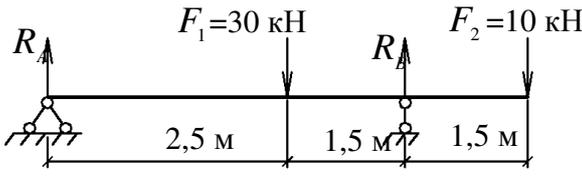
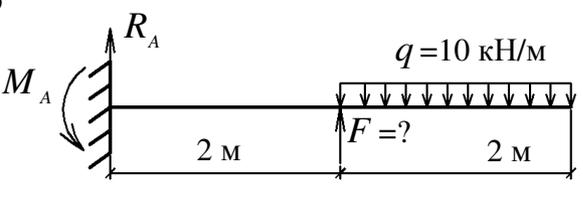
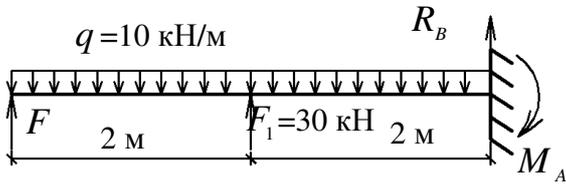
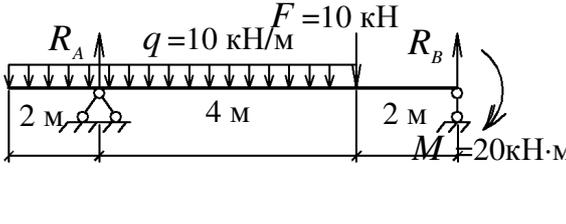
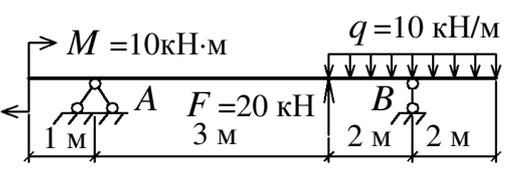
$$M_{нб} = F \cdot l / 4 = 70,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

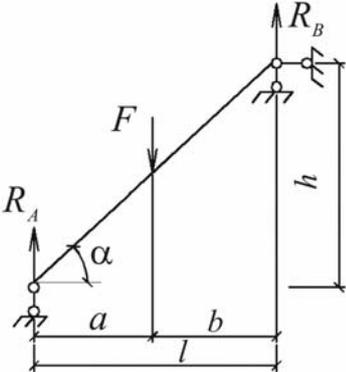
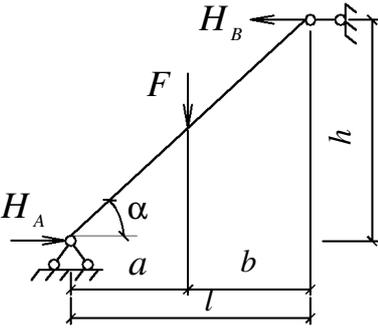
Тогда величина нагрузки (грузоподъемность балки) равна:

$$F = 4 \cdot M_{нб} / l = 4 \cdot 70,12 / 3 = 93,5 \text{ кН}.$$

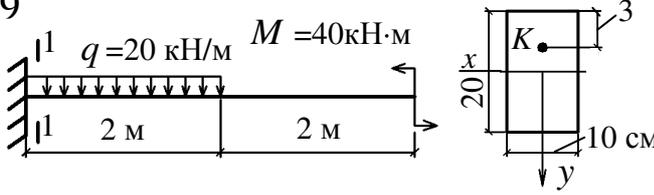
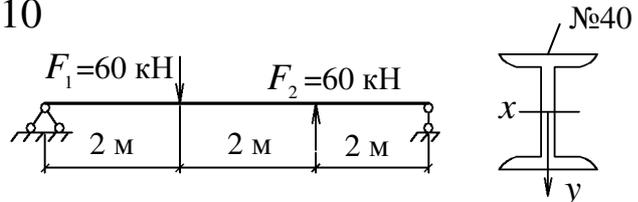
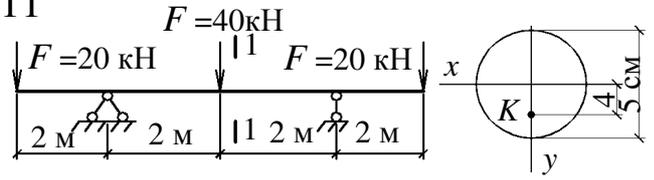
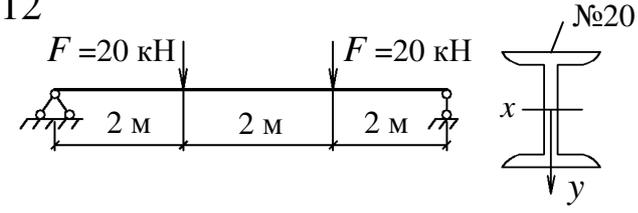
## 7. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ

### 7.1. Определение опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе

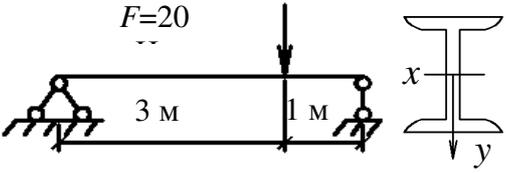
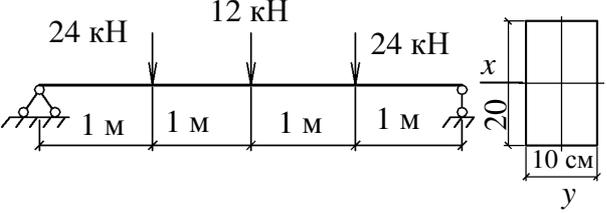
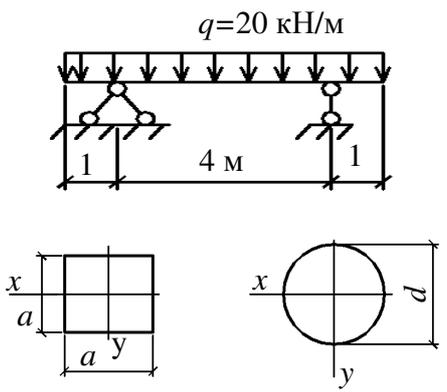
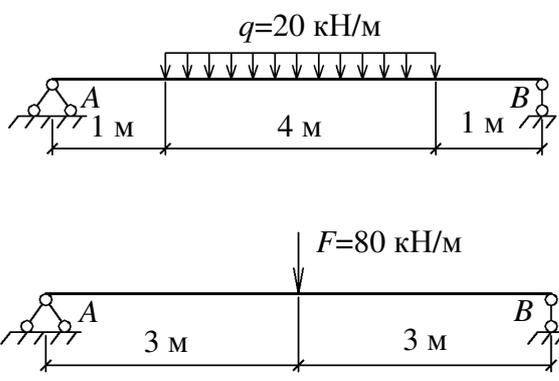
<p>1</p> 	<p>Определите опорную реакцию <math>R_A</math>:</p> <p>1) 40 кН; 2) 5 кН; 3) 10 кН.</p>
<p>2</p> 	<p>Определите опорную реакцию <math>R_A</math>:</p> <p>1) 20 кН; 2) 15 кН; 3) 7,5 кН.</p>
<p>3</p> 	<p>При каком значении силы <math>F</math> изгибающий момент в сечении жесткой заделки <math>M_A</math> равен нулю?</p> <p>1) 30 кН; 2) 10 кН; 3) 20 кН.</p>
<p>4</p> 	<p>При каком значении силы <math>F</math> опорная реакция <math>R_B</math> в сечении жесткой заделки равна нулю?</p> <p>1) 5 кН; 2) 10 кН; 3) -10 кН.</p>
<p>5</p> 	<p>Определите значение поперечной силы <math>Q</math> в сечении 1—1:</p> <p>1) - 10 кН; 2) - 6,67 кН; 3) 10 кН.</p>
<p>6</p> 	<p>Определите значение изгибающего момента <math>M_x</math> в сечении <math>B</math>:</p> <p>1) -5 кН·м; 2) -20 кН·м; 3) 20 кН·м.</p>

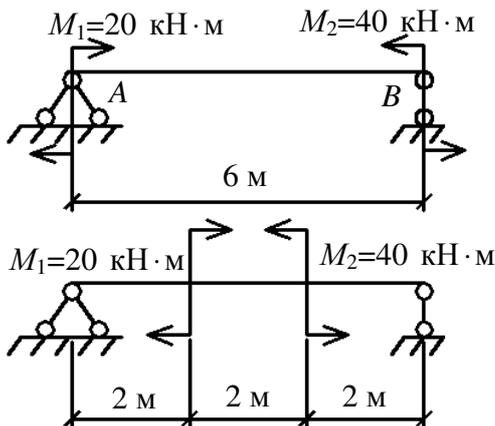
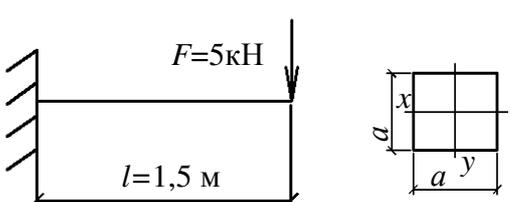
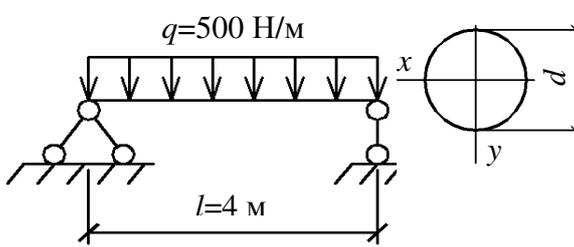
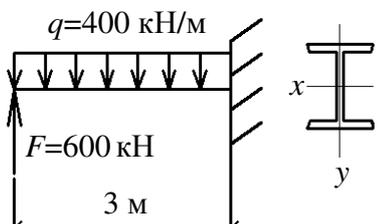
<p>7</p> 	<p>Определите опорную реакцию <math>R_A</math>:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\frac{F \cdot a}{l}</math>;</li> <li>2) <math>\frac{F \cdot b}{l}</math>;</li> <li>3) <math>-\frac{F \cdot b}{l}</math></li> </ol>
<p>8</p> 	<p>Определите опорную реакцию <math>H_B</math>:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\frac{F \cdot b}{h}</math>;</li> <li>2) <math>-\frac{F \cdot a}{l}</math>;</li> <li>3) <math>\frac{F \cdot a}{h}</math></li> </ol>

## 7.2. Определение напряжений при изгибе

<p>9</p> 	<p>Определите значение нормального напряжения в точке K сечения 1—1:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) - 9 МПа;</li> <li>2) 10 МПа;</li> <li>3) 9 МПа.</li> </ol>
<p>10</p> 	<p>Определите значение наибольших растягивающих нормальных напряжений:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) 43 МПа;</li> <li>2) 50 МПа;</li> <li>3) 41,97 МПа.</li> </ol>
<p>11</p> 	<p>Определите значение нормального напряжения в точке K сечения 1—1:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) 2,2 МПа;</li> <li>2) -16,1 МПа;</li> <li>3) 16,4 МПа.</li> </ol>
<p>12</p> 	<p>Определите значение наибольшего касательного напряжения в балке двутаврового сечения:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) 13,46 МПа;</li> <li>2) 14 МПа;</li> <li>3) 13 МПа.</li> </ol>

### 7.3. Прочность балки при изгибе

<p>13</p> 	<p>Подобрать поперечное сечение балки в виде стального двутавра, если расчетное сопротивление материала <math>R = 210</math> МПа:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) I60;</li> <li>2) I12;</li> <li>3) I14.</li> </ol>
<p>14</p> 	<p>Проверить прочность деревянной балки по нормальным напряжениям. Расчетное сопротивление дуба растяжению и сжатию при изгибе <math>R = 17</math> МПа:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) обеспечена;</li> <li>2) не обеспечена.</li> </ol>
<p>15</p> 	<p>В какой из балок квадратного или круглого поперечного сечения, площади которых одинаковы, нормальные напряжения будут наибольшими и на сколько процентов?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) в балке круглого сечения на 18 %;</li> <li>2) в балке квадратного сечения на 20 %;</li> <li>3) в балке круглого сечения на 20 %.</li> </ol>
<p>16</p> 	<p>Определите на сколько процентов уменьшится или увеличится величина наибольшего изгибающего момента <math>M^{и6}</math>, если распределённую нагрузку интенсивностью <math>q</math> заменить одной равнодействующей <math>F = q \cdot 4 = 80</math> кН?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) увеличиться на 50 %;</li> <li>2) уменьшится на 20 %;</li> <li>3) увеличиться на 33 %.</li> </ol>

<p>17</p> 	<p>Определите на сколько процентов уменьшится величина наибольшего момента <math>M^{нб}</math>, если сблизить точки приложить моментов?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>\approx 22\%</math>;</li> <li>2) <math>\approx 17\%</math>;</li> <li>3) <math>\approx 12\%</math>.</li> </ol>
<p>18</p> 	<p>Подобрать сторону квадратного сечения деревянной балки при расчетном сопротивлении материала <math>R = 12</math> МПа. Как изменятся размеры сечения, если силу <math>F</math> увеличить в три раза?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) увеличится в 3 раза;</li> <li>2) увеличится в 1,44 раза;</li> <li>3) увеличится в 1,74 раза.</li> </ol>
<p>19</p> 	<p>Определите диаметр деревянной балки, если расчетное сопротивление материала <math>R = 12</math> МПа. Во сколько раз надо увеличить площадь сечения, если интенсивность нагрузки увеличить в 10 раз?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) 4,3 раза; 2) 4,5 раза;</li> <li>3) 3,5 раза.</li> </ol>
<p>20</p> 	<p>Подобрать двутавровое сечение из условия прочности по нормальным и касательным напряжениям:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) I №60;</li> <li>2) I №40;</li> <li>3) I №50.</li> </ol>

## Вопросы для самоконтроля.

1. Какой случай изгиба называется плоским поперечным изгибом?
2. Как находится изгибающий момент в каком либо сечении балки?
3. В каком случае изгибающий момент считается положительным?
4. Как находится поперечная сила в каком либо сечении балки?
5. Когда поперечная сила считается положительной?
6. Какая зависимость имеется между величинами  $M$ ,  $Q$  и  $q$ ?
7. Как находят максимальный изгибающий момент?
8. Сформулируйте ряд основных положений, оказывающих помощь при построении эпюр  $M$  и  $Q$  и позволяющих их контролировать.
9. По каким формулам определяются нормальные и касательные напряжения в сечении балки?
10. Как записывается условие прочности по нормальным и касательным напряжениям по первой группе предельного состояния?
11. Какие типы задач можно решить на основании условий прочности?

## Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов : Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1995.–560с. с ил.
2. Варданян Г.С., Атаров Н.М., Горшков А.А.Сопротивление материалов с основами строительной механики: Учебник / Под ред. Г.С. Варданяна. –М.: Изд. исп. –М.,;ИНФРА-М. 2011..
3. Андреев В.И., Паушкин А.Г., Леонтьев А.Н. Техническая механика (для студентов строительных вузов и факультетов): Учебник.–М., Издательство АСВ, 2012.–256 с. с ил.
- 4.Копнов В.А. Сопротивление материалов: Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ/ В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко. 2-изд., стер.–М: Высш шк., 2005.–351с.: ил.

**Варианты заданий к расчетно-проектировочной работе  
«Построение эпюр внутренних усилий при изгибе»**

Для заданных расчетных схем по строке или столбцу № табл. 1 и табл. 2 и при исходных данных по строке № табл. 3 требуется:

определить внутренние усилия в характерных сечениях;

построить эпюры внутренних усилий;

для балки на двух опорах осуществить подбор стального двутаврового сечения при расчётном сопротивлении материала на растяжение-сжатие  $R = 210$  МПа.

*Примечание.* Будем считать, что равномерно распределенная нагрузка  $q$ , действующая на наклонных стержнях, отнесена к единице длины горизонтальной проекции.

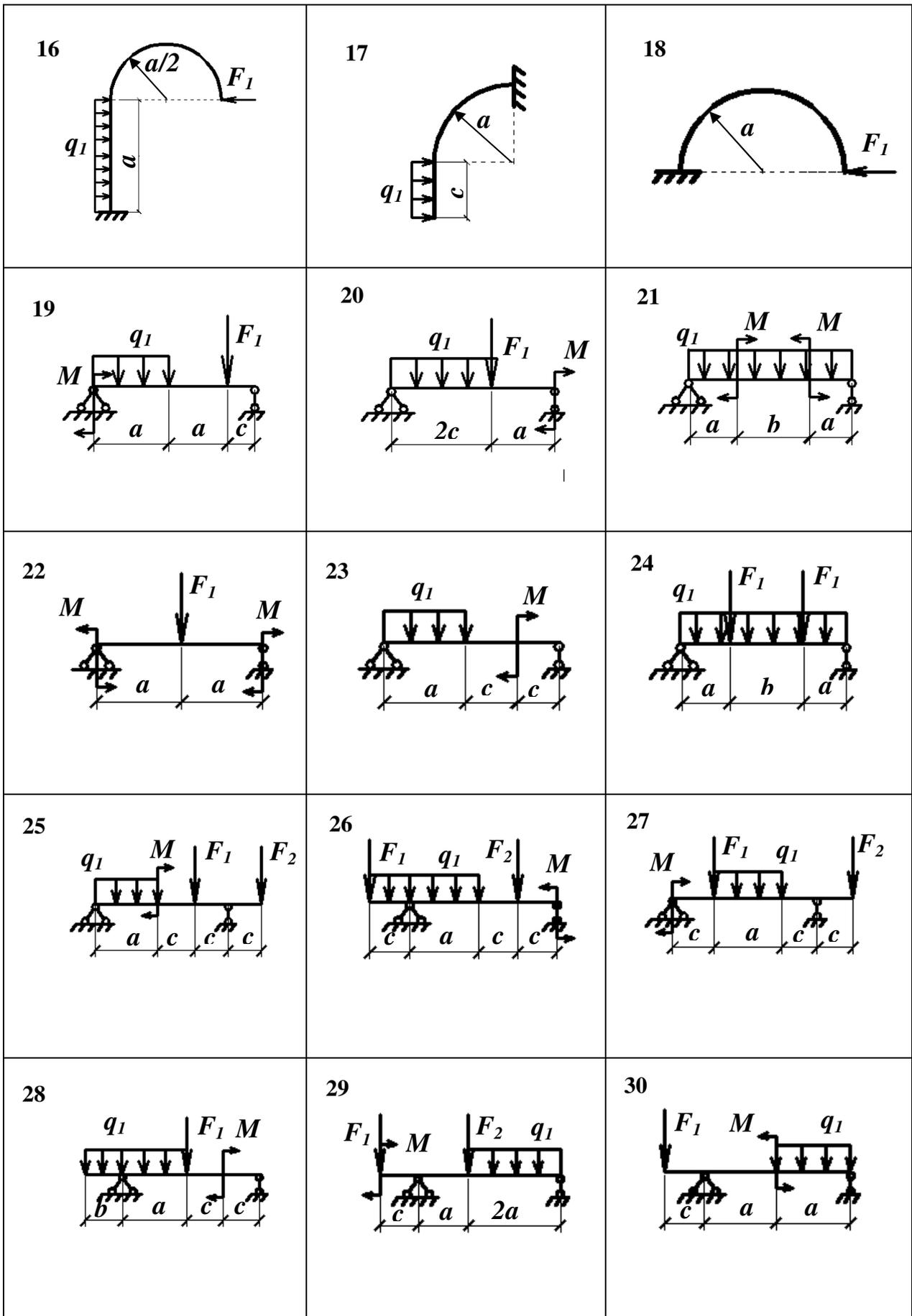
Т а б л и ц а 1

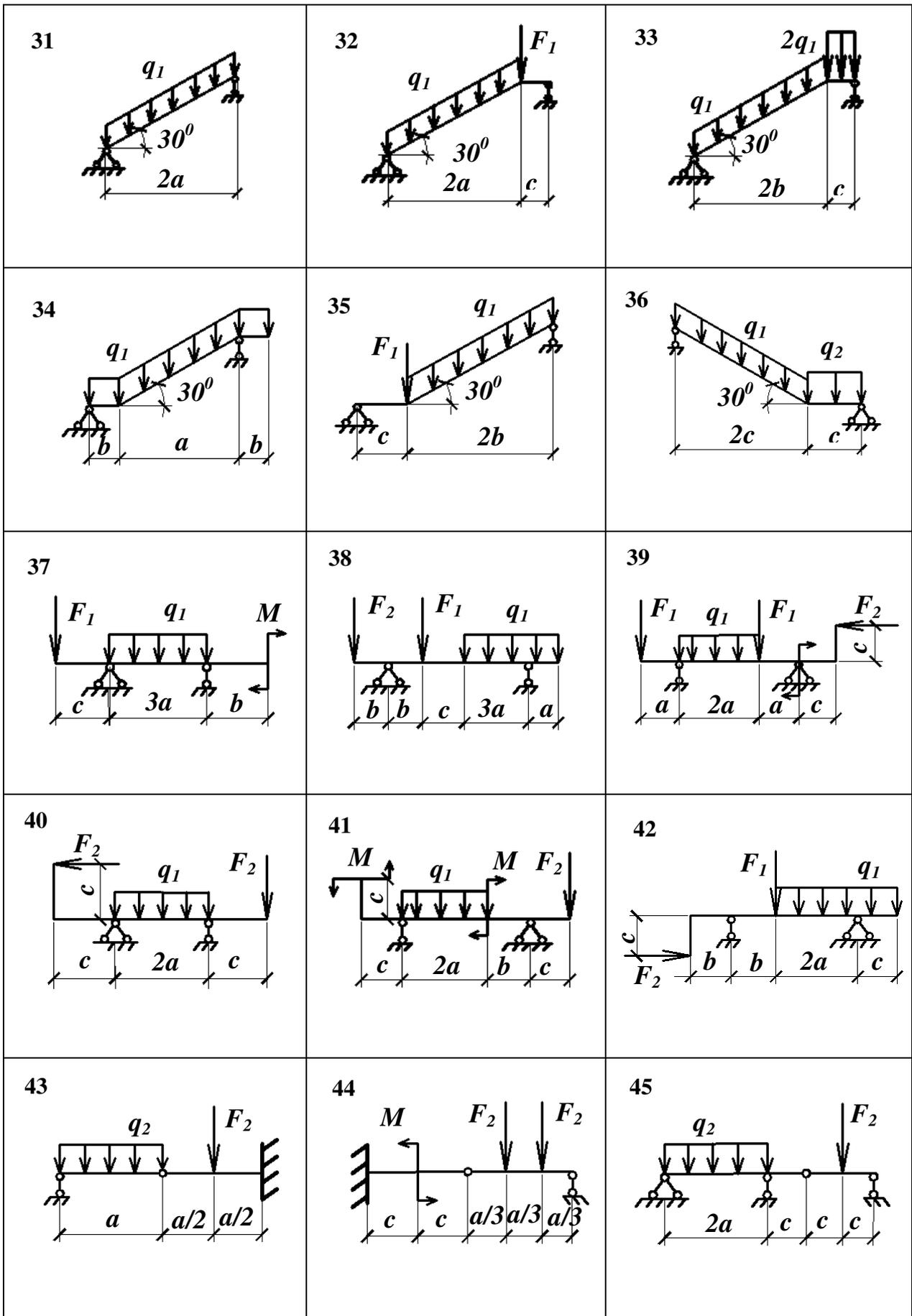
*Расчетные схемы*

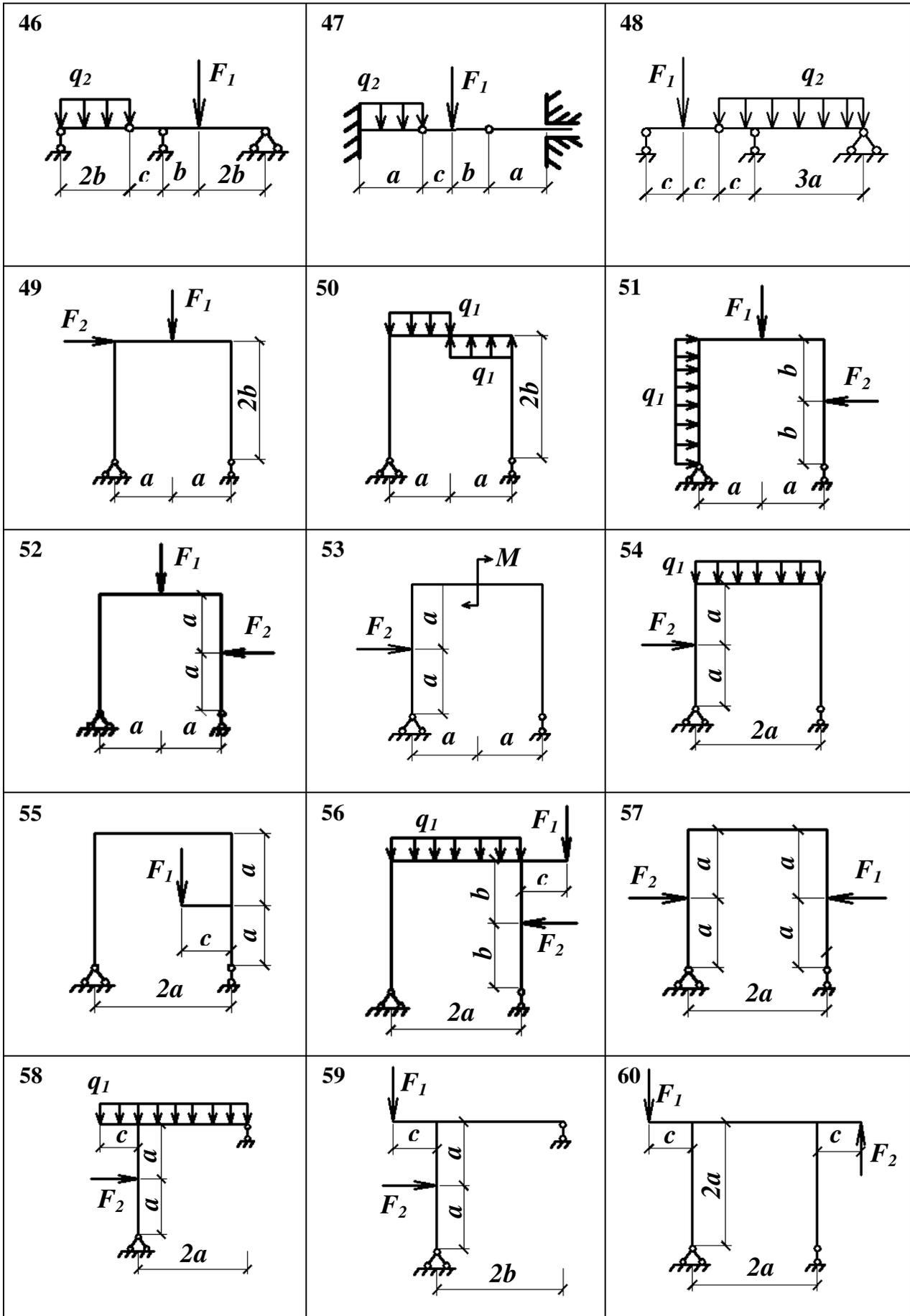
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	6						57	48	44	38	32	30	23	16	9
17	7	5						56	50	43	37	31	29	21	15
18	18	8	4						55	54	48	42	36	28	22
19	19	17	9	3						60	53	47	4	35	27
20	30	20	16	10	2						55	49	46	40	34
21	36	29	21	15	11	5						56	50	45	39
22	42	35	28	22	14	12	1						57	51	44
23	43	41	34	27	23	13	7	2						58	52
24	49	44	40	33	26	24	18	8	3						59
25	55	50	45	39	32	25	24	17	9	4					
26		56	51	46	36	31	25	23	16	10	5				
27			57	52	47	37	36	28	22	15	11	6			
28				58	53	48	38	35	27	21	14	12	6		
29					59	54	47	39	31	28	20	13	7	5	
30						60	54	46	40	33	29	19	14	8	4

Расчетные схемы

<p>1</p>	<p>2</p>	<p>3</p>
<p>4</p>	<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>	<p>9</p>
<p>10</p>	<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>	<p>15</p>







Т а б л и ц а 3

*Исходные данные*

№ п.п.	a, м	b, м	c, м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$M$ , кН·м
1	3,0	2	1,0	2,6	2,0	2,0	1,2	30
2	2,0	2	1,0	3,0	2,0	2,0	1,0	40
3	3,0	2	2,0	4,0	3,0	3,0	2,0	40
4	2,5	1,5	1,0	3,0	2,0	2,0	1,0	20
5	2,0	2,5	1,5	3,2	2,5	1,5	2,0	30
6	2,5	3,0	1,2	3,5	3,2	1,8	2,5	25
7	2,5	2,5	1,0	2,5	3,0	2,0	1,8	40
8	3,0	2,5	1,3	8,0	2,4	1,8	2,0	30
9	3,0	3,0	1,5	3,5	3,5	2,5	2,5	40
10	3,5	2,8	1,6	4,0	3,0	3,0	2,5	40

Учебное издание

**Беликов** Георгий Иванович, **Клименко** Владимир Иванович

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ИЗГИБЕ:  
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ, РАСЧЕТНЫЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ**

Учебно-практическое пособие  
2- издание, исправленное

Публикуется в авторской редакции

Подписано в свет 27.02.2014 г. Гарнитура Times New Roman. Уч.-изд. 1,6 л. Объем данных 681 Кбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
<http://www.vgasu.ru>; [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)