

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет**

## **РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА**

*Методические указания к практическим занятиям*

**Составил Ю. А. Аликов**

© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2014

**Волгоград  
ВолгГАСУ  
2014**

УДК 624.074.5 (075.8)  
ББК 38.112.5я73  
Р24

- Р24 **Расчет** пространственного бруса [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т; сост. Ю. А. Аликов. — Электронные текстовые и графические данные (188 Кбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

Содержание относится к разделу «Сложное сопротивление бруса» в курсе «Сопротивление материалов». При расчете вводится понятие о «скользящей» прямоугольной системе координат на каждом участке пространственного бруса. Показан способ определения шести внутренних усилий на участках бруса и построены их эпюры. Анализ внутренних усилий устанавливает вид сопротивления бруса на участках.

В опасных сечениях определены нормальные и касательные напряжения и вычислены эквивалентные (приведенные) напряжения с использованием третьей теории прочности.

Для студентов направления «Строительство» всех форм обучения.

**УДК 624.074.5(075.8)**  
**ББК 38.112.5я73**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
<b>1. Пример расчета пространственного бруса.....</b>	<b>5</b>
1.1. Построение эпюр внутренних усилий.....	5
1.2. Определение вида сопротивления на участках бруса.....	9
1.3. Определение наибольших напряжений в опасном сечении на каждом участке бруса.....	9
1.4. Определение эквивалентных напряжений по третьей теории прочности.....	11
<b>Вопросы для самопроверки.....</b>	<b>12</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>13</b>

## ВВЕДЕНИЕ

При проектировании некоторых видов конструкций или узлов машин и механизмов расчётная схема может иметь вид пространственного бруса с ломаным очертанием его оси. Расчёт пространственного бруса от действующей на него нагрузки начинается с определения внутренних усилий на участках бруса. Как известно внутренние усилия определяют методом сечений. На каждом участке бруса следует провести сечение перпендикулярно к оси бруса и рассмотреть равновесие одной из отсечённых частей. В поперечном сечении надо показать шесть внутренних силовых факторов: продольную силу  $N$ , поперечные силы  $Q_x, Q_y$ , изгибающие моменты  $M_x, M_y$  и крутящий момент  $M_z$ . Чтобы установить характер напряжённого состояния на каждом участке бруса следует построить эпюры внутренних усилий.

На каждом участке пространственного бруса выбирается «скользящая» (подвижная) прямоугольная система координат  $X, Y, Z$  (Рис.1). Ось  $Z$  должна совпадать с геометрической осью участка, а вся система координат должна быть правой. Правой считается такая система осей координат  $X, Y, Z$ , если при взгляде с положительного направления оси  $Z$ , поворот оси  $X$  к оси  $Y$  происходит против хода часовой стрелки.

Для внутренних усилий приняты следующие правила знаков: продольная сила  $N$  считается положительной, если вызывает растяжение бруса. Поперечная сила  $Q_x$  (или  $Q_y$ ) считается положительной, если при взгляде с положительного направления оси  $Y$  (или оси  $X$ ) вектор  $Q_x$  (или  $Q_y$ ) стремится вращать отсечённую часть бруса по ходу часовой стрелки. Крутящий момент  $M_z$  считается положительным, если при взгляде на отсечённую часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, момент направлен по ходу часовой стрелки. Для изгибающих моментов  $M_x, M_y$  правило знаков не устанавливаем, но их эпюры должны быть построены со стороны растянутых волокон соответствующего участка бруса.

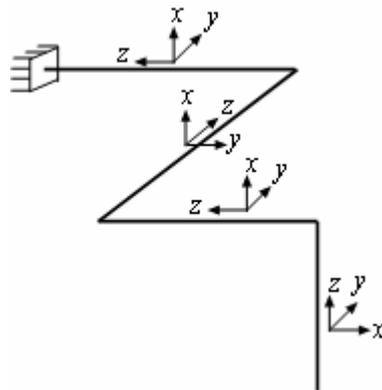


Рис. 1

## 1. Пример расчёта пространственного бруса.

Дан пространственный брус (Рис.2), нагруженный сосредоточенными силами  $F_1=2$  кН,  $F_2=1,6$  кН и равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q=1$  кН/м. Все элементы бруса имеют прямоугольное поперечное сечение. ширина сечения  $b=10$  см, высота сечения  $h=5$  см.

Необходимо:

1.1 Построить в аксонометрии эпюры внутренних усилий

$N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ .

1.2 Определить вид сопротивления на каждом участке бруса.

1.3 Вычислить на каждом участке в опасном сечении наибольшее нормальное напряжение от усилий  $N_z, M_x, M_y$  и наибольшее касательное напряжение от крутящего момента  $M_z$ . (Напряжениями от  $Q_x$  и  $Q_y$  пренебрегаем).

1.4 Найти расчётное напряжение по III-ей теории прочности на участке, на котором возникают нормальные и касательные напряжения.

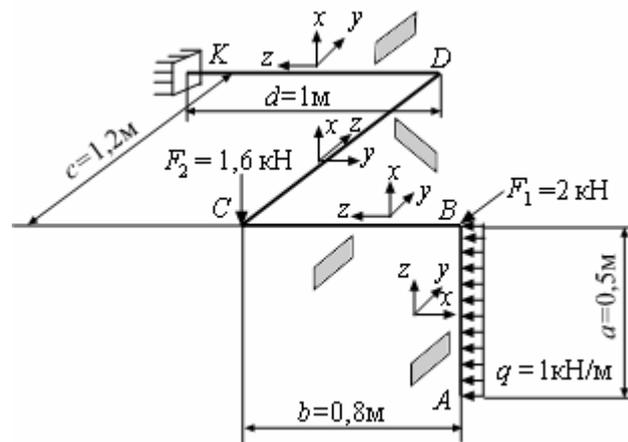


Рис.2

### 1.1 Построение эпюр внутренних усилий

Брус состоит из четырёх прямолинейных элементов, перпендикулярных друг к другу. Последовательно разрезаем брус на каждом участке и, отбросив часть бруса, содержащего закреплённый конец, в поперечном сечении оставшейся части показываем координатные оси  $X, Y, Z$ . Начало координат помещаем в центре тяжести сечения, ось  $Z$  направляем наружу от оставшейся части вдоль оси бруса, а оси  $X, Y$  совместим с главными осями инерции поперечного сечения.

Составляем шесть уравнений равновесия отсечённой части, из которых найдём аналитические выражения внутренних усилий, а также численные значения усилий на концах каждого участка.

**Участок АВ**  $0 \leq z_1 \leq 0,5$  м

На рис.3 показана отсечённая часть бруса на участке АВ.

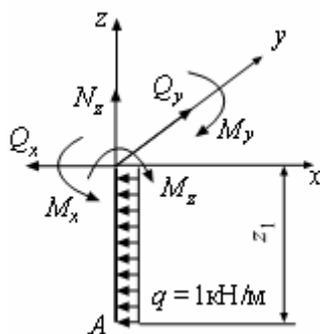


Рис.3

$$\sum F_x = -Q_x - q \cdot z_1 = 0, \quad Q_x = -q \cdot z_1, \text{ уравнение прямой линии,}$$

при  $z_1 = 0, \quad Q_x = 0;$   
 при  $z_1 = 0,5 \text{ м} \quad Q_x = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН.}$

$$\sum F_y = Q_y = 0.$$

$$\sum F_z = N_z = 0.$$

$$\sum m_x = M_x = 0.$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot z_1^2}{2} = 0. \quad M_y = -\frac{q \cdot z_1^2}{2}, \text{ уравнение параболы,}$$

при  $z_1 = 0, \quad M_y = 0,$

при  $z_1 = 0,5 \text{ м}, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм}$

$$\sum m_z = M_z = 0.$$

#### Участок ВС $0 \leq z_2 \leq 0,8 \text{ м}$

На рис.4 приведена отсечённая часть бруса на участке ВС.

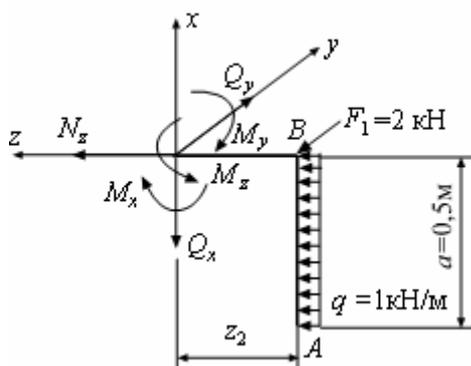


Рис.4

Составляем шесть уравнений равновесия.

$$\sum F_x = -Q_x = 0.$$

$$\sum F_y = Q_y - F_1 = 0, \quad Q_y = F_1 = 2 \text{ кН, постоянная величина на участке.}$$

$$\sum F_z = N_z + q \cdot a = 0, \quad N_z = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum m_x = M_x + F_1 \cdot z_2 = 0, \quad M_x = -F_1 \cdot z_2; \quad \text{при } z_2 = 0, \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_2 = 0,8, \quad M_x = -2 \cdot 0,8 = -1,6 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot a^2}{2} = 0, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм} = \text{const.}$$

$$\sum m_z = M_z = 0.$$

### Участок CD $0 \leq z_3 \leq 1,8 \text{ м}$

На рис.5 изображена отсечённая часть бруса на участке CD.

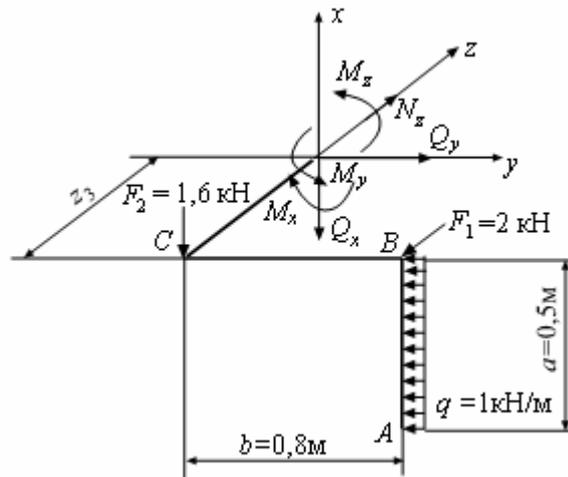


Рис.5

Составляем шесть уравнений равновесия.

$$\sum F_x = -Q_x - F_2 = 0, \quad Q_x = -F_2 = -1,6 \text{ кН, постоянная величина.}$$

$$\sum F_y = Q_y - q \cdot a = 0, \quad Q_y = q \cdot a = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum F_z = N_z - F_1 = 0, \quad N_z = F_1 = 2 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum m_x = M_x + q \cdot a \cdot z_3 + F_1 \cdot b = 0, \quad M_x = -q \cdot a \cdot z_3 - F_1 \cdot b;$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad M_x = -2 \cdot 0,8 = -1,6 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_3 = 1,2 \text{ м, } M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot 0,8 = -2,2 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + F_2 \cdot z_3 = 0, \quad M_y = -F_2 \cdot z_3;$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad M_y = 0;$$

$$\text{при } z_3 = 1,2 \text{ м, } M_y = -1,6 \cdot 1,2 = -1,92 \text{ кНм};$$

$$\sum m_z = M_z - \frac{q \cdot a^2}{2} = 0, \quad M_z = \frac{q \cdot a^2}{2} = \frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = 0,125 \text{ кНм} = \text{const.}$$

### Участок DK $0 \leq z_4 \leq 1,0 \text{ м}$

На рис.6 показана отсечённая часть бруса на участке DK.

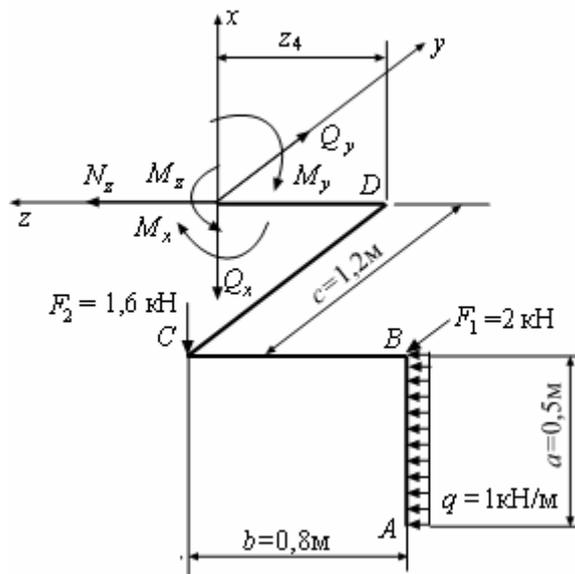


Рис.6

Составляем шесть уравнений равновесия

$$\sum F_x = -Q_x - F_2 = 0, \quad Q_x = -F_2 = -1,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = Q_y - F_1 = 0, \quad Q_y = F_1 = 2,0 \text{ кН.}$$

$$\sum F_z = N_z + q \cdot a = 0, \quad N_z = -q \cdot a = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = M_x + q \cdot a \cdot c + F_1 \cdot (b + z_4) = 0, \quad M_x = -q \cdot a \cdot c - F_1 \cdot (b + z_4);$$

$$\text{при } z_4 = 0, \quad M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot 0,8 = -2,2 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_4 = 1 \text{ м}, \quad M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot (0,8 + 1) = -4,2 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot a^2}{2} + F_2 \cdot z_4 = 0, \quad M_y = -\frac{q \cdot a^2}{2} - F_2 \cdot z_4;$$

$$\text{при } z_4 = 0, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_4 = 1 \text{ м}, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} - 1,6 \cdot 1 = -1,725 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_z = M_z + F_2 \cdot c = 0, \quad M_z = -F_2 \cdot c = -1,6 \cdot 1,2 = -1,92 \text{ кНм} = \text{const.}$$

Эпюры внутренних усилий, построенные по полученным результатам, представлены на рис.7.

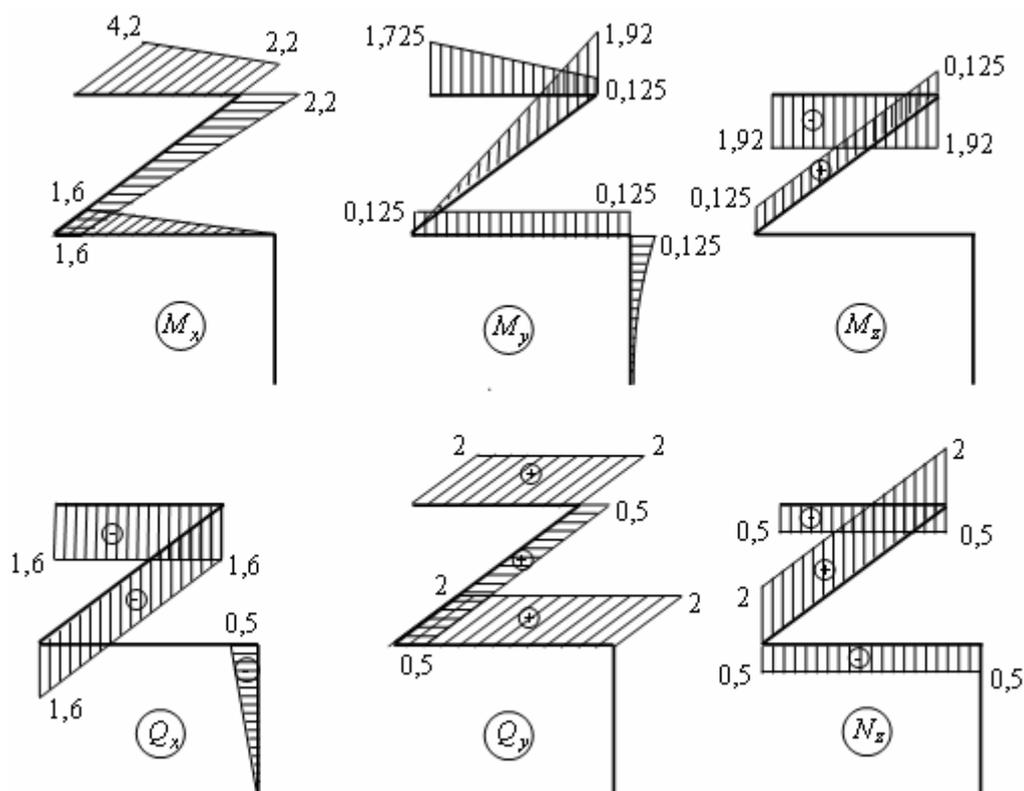


Рис.7

## 1.2 Определение вида сопротивления на участках бруса

Анализируя эпюры внутренних усилий, устанавливаем на каждом участке вид сопротивления бруса.

На участке АВ действуют изгибающий момент  $M_y$  и поперечная сила  $Q_x$ , следовательно, имеет место плоский поперечный изгиб.

На участке ВС действуют изгибающие моменты  $M_x, M_y$ , поперечная сила  $Q_y$  и продольная сила  $N_z$ , следовательно, возникает сочетание двух плоских изгибов и сжатия бруса.

На участке CD действуют шесть внутренних усилий: изгибающие моменты  $M_x, M_y$ , крутящий момент  $M_z$ , поперечные силы  $Q_x, Q_y$  и продольная сила  $N_z$ . Следовательно, брус испытывает сочетание косоугольного изгиба, кручения и растяжения.

На участке DK также присутствуют шесть внутренних усилий:

$M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, N_z$  и возникают косоугольный изгиб, кручение и сжатие бруса.

## 1.3 Определение наибольших напряжений в опасном сечении на каждом участке бруса.

### Участок АВ

(Касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегаем ввиду их малости).

На участке АВ действует изгибающий момент  $M_y$ , наибольшая величина которого находится в точке В. Поперечное сечение бруса на этом участке прямоугольное, осевой момент сопротивления

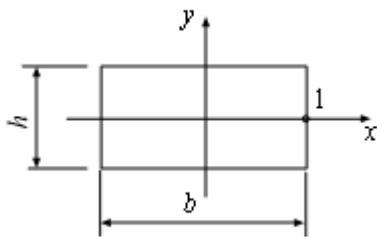


Рис.8

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,1 \cdot 0,05^2}{6} = 41,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальное нормальное напряжение возникает в точке 1 поперечного сечения (Рис.8)

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,125 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} = 3,0 \text{ МПа}$$

### Участок ВС

На участке ВС возникают нормальные напряжения от изгибающих моментов  $M_x, M_y$  и продольной силы  $N_z$ . Поперечное сечение бруса прямоугольное, моменты сопротивления:

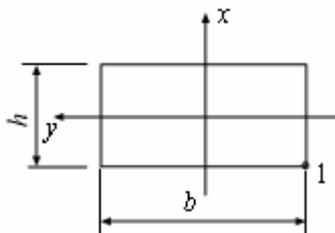


Рис.9

моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{0,05 \cdot 0,1^2}{6} = 83,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,1 \cdot 0,05^2}{6} = 41,7 \text{ м}^3.$$

Площадь поперечного сечения  $A = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,05 = 50,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$

Опасным является сечение бруса, бесконечно близкое к точке С. Наибольшее сжимающее напряжение будет в точке 1 сечения.

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = -\frac{1,6 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,125 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = -22,31 \text{ МПа}.$$

### Участок CD

На участке CD возникают нормальные напряжения от моментов  $M_x, M_y$ , продольной силы  $N_z$  и касательные напряжения от крутящего момента  $M_k$ .

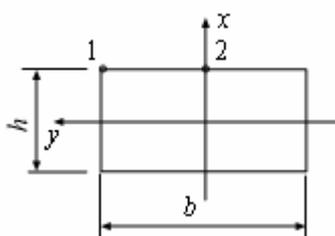


Рис.10

Опасным является сечение бруса бесконечно близкое к точке Д. Поперечное сечение прямоугольное, осевые моменты сопротивления  $W_x, W_y$  и площадь  $A$

подсчитаны ранее, момент сопротивления  $W_k$  при кручении стержня прямоугольного сечения вычислим:

$$W_k = \beta \cdot h^3 = 0,493 \cdot 0,05^3 = 61,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$\beta$  – коэффициент, зависящий от отношения большей стороны прямоугольника к меньшей, (при  $b/h = 2$ ,  $\beta = 0,493$ ).

Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в точке 1

поперечного сечения:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = \frac{2,2 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1,92 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,0 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = 72,85 \text{ МПа.}$$

Касательное напряжение в точке 1 равно нулю,  $\tau_1 = 0$ .

Наибольшее касательное напряжение возникает в середине длинной стороны, в точке 2:

$$\tau_2 = \frac{M_k}{W_k} = \frac{0,125 \cdot 10^3}{61,6 \cdot 10^{-6}} = 2,03 \text{ МПа.}$$

Нормальное напряжение в точке 2:

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = 0 + \frac{1,92 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,0 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = 46,44 \text{ МПа.}$$

### Участок ДК

На этом участке нормальные напряжения возникают от изгибающих моментов  $M_x, M_y$  и от продольной силы  $N_z$ . Касательные напряжения – от кру-

тящего момента  $M_z$ .

Опасным является сечение, бесконечно близкое к заделке. Наибольшее нормальное напряжение сжатия будет в точке 1 поперечного сечения, наибольшее касательное – в середине длинной стороны, в точке 2.

Геометрические характеристики сечения бруса подсчитаны ранее.

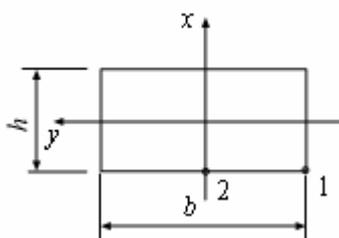


Рис.11

Вычисляем напряжения в точках 1,2

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = -\frac{4,2 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} - \frac{1,725 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = -91,89 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = 0 - \frac{1,725 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = 41,47 \text{ МПа.}$$

$$\tau_1 = 0.$$

$$\tau_2 = \frac{M_k}{W_k} = -\frac{1,92 \cdot 10^3}{61,6 \cdot 10^{-6}} = -31,17 \text{ МПа.}$$

## 1.4 Определение эквивалентных напряжений по третьей теории прочности

Если в некоторой точке поперечного сечения бруса имеются нормальные и касательные напряжения, то для расчёта на прочность следует вычислять эквивалентное напряжение по одной из теорий прочности.

На участке CD бруса возникают нормальные и касательные напряжения.

В точке 1 поперечного сечения (Рис.10) действует наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_1 = 72,85$  МПа, касательное  $\tau_1 = 0$ .

В точке 2 поперечного сечения имеем наибольшее касательное напряжение  $\tau_2 = 2,03$  МПа, а нормальное  $\sigma_2 = 46,44$  МПа.

Вычислим эквивалентные напряжения в точках 1,2 по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}(1)} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{72,85^2 + 4 \cdot 0} = 72,8 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}(2)} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{46,44^2 + 4 \cdot 2,03^2} = 46,62 \text{ МПа.}$$

Так как  $\sigma_{\text{экв}(1)} > \sigma_{\text{экв}(2)}$ , то наиболее опасное состояние материала будет в точке 1.

На участке DK также возникают нормальные и касательные напряжения. Эквивалентное напряжение следует вычислять в опасных точках 1 и 2, (Рис.11).

$$\sigma_{\text{экв}(1)} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{91,89^2 + 4 \cdot 0} = 91,89 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}(2)} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{71,47^2 + 4 \cdot 31,17^2} = 74,87 \text{ МПа.}$$

Опасное состояние материала будет в точке 1, так как  $\sigma_{\text{экв}(1)} > \sigma_{\text{экв}(2)}$ .

Вычисленные эквивалентные напряжения позволяют оценить прочность материала в наиболее напряжённой точке опасного поперечного сечения бруса, или подобрать размеры поперечного сечения на данном участке, если они неизвестны.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой метод применяется для определения внутренних усилий в поперечном сечении бруса?
2. В общем случае действия нагрузки, в поперечном сечении пространственного бруса могут возникнуть шесть внутренних силовых факторов. Перечислите их.
3. Какие уравнения статики используют для определения внутренних усилий, в поперечных сечениях пространственного бруса?
4. Какие правила знаков приняты для внутренних усилий N,Q,M?
5. Какой вид имеют эпюры нормальных и касательных напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения при плоском поперечном изгибе?
6. Какая прямоугольная система координат называется правой?
7. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при косом изгибе и внецентренном сжатии или растяжении?
8. Перечислите классические теории прочности.
9. Как определяется эквивалентное напряжение в поперечном сечении бруса по третьей и четвёртой теориям прочности при действии изгибающего и крутящего моментов?

## **Библиографический список**

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов : учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 1995.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учеб. / под ред. Г.С. Варданяна. М.: Издательство АСВ, 1995.
3. Дарков А.В., Широ Г.С. Сопротивление материалов : учеб. для вузов. М : Высшая школа, 1989.
4. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах. М.: Инфра-М, 2010.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2014 г., поз. 12

Публикуется в авторской редакции.

Подписано в свет 21.01.2014.

Гарнитура «Таймс».

Уч.-изд. л. 0,3. Объем данных 188 Кбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>; [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)