

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет**

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БРУСА

Методические указания к практическим занятиям

Составил Ю. А. Аликов

© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2014

**Волгоград
ВолгГАСУ
2014**

УДК 624.074.5 (075.8)
ББК 38.112.5я73
Р24

- Р24 **Расчет** пространственного бруса [Электронный ресурс] : методические указания к практическим занятиям / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т; сост. Ю. А. Аликов. — Электронные текстовые и графические данные (188 Кбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

Содержание относится к разделу «Сложное сопротивление бруса» в курсе «Сопротивление материалов». При расчете вводится понятие о «скользящей» прямоугольной системе координат на каждом участке пространственного бруса. Показан способ определения шести внутренних усилий на участках бруса и построены их эпюры. Анализ внутренних усилий устанавливает вид сопротивления бруса на участках.

В опасных сечениях определены нормальные и касательные напряжения и вычислены эквивалентные (приведенные) напряжения с использованием третьей теории прочности.

Для студентов направления «Строительство» всех форм обучения.

УДК 624.074.5(075.8)
ББК 38.112.5я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Пример расчета пространственного бруса.....	5
1.1. Построение эпюр внутренних усилий.....	5
1.2. Определение вида сопротивления на участках бруса.....	9
1.3. Определение наибольших напряжений в опасном сечении на каждом участке бруса.....	9
1.4. Определение эквивалентных напряжений по третьей теории прочности.....	11
Вопросы для самопроверки.....	12
Библиографический список.....	13

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании некоторых видов конструкций или узлов машин и механизмов расчётная схема может иметь вид пространственного бруса с ломаным очертанием его оси. Расчёт пространственного бруса от действующей на него нагрузки начинается с определения внутренних усилий на участках бруса. Как известно внутренние усилия определяют методом сечений. На каждом участке бруса следует провести сечение перпендикулярно к оси бруса и рассмотреть равновесие одной из отсечённых частей. В поперечном сечении надо показать шесть внутренних силовых факторов: продольную силу N , поперечные силы Q_x, Q_y , изгибающие моменты M_x, M_y и крутящий момент M_z . Чтобы установить характер напряжённого состояния на каждом участке бруса следует построить эпюры внутренних усилий.

На каждом участке пространственного бруса выбирается «скользящая» (подвижная) прямоугольная система координат X, Y, Z (Рис.1). Ось Z должна совпадать с геометрической осью участка, а вся система координат должна быть правой. Правой считается такая система осей координат X, Y, Z , если при взгляде с положительного направления оси Z , поворот оси X к оси Y происходит против хода часовой стрелки.

Для внутренних усилий приняты следующие правила знаков: продольная сила N считается положительной, если вызывает растяжение бруса. Поперечная сила Q_x (или Q_y) считается положительной, если при взгляде с положительного направления оси Y (или оси X) вектор Q_x (или Q_y) стремится вращать отсечённую часть бруса по ходу часовой стрелки. Крутящий момент M_z считается положительным, если при взгляде на отсечённую часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, момент направлен по ходу часовой стрелки. Для изгибающих моментов M_x, M_y правило знаков не устанавливаем, но их эпюры должны быть построены со стороны растянутых волокон соответствующего участка бруса.

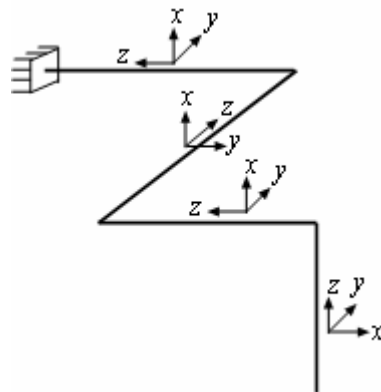


Рис. 1

1. Пример расчёта пространственного бруса.

Дан пространственный брус (Рис.2), нагруженный сосредоточенными силами $F_1=2$ кН, $F_2=1,6$ кН и равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q=1$ кН/м. Все элементы бруса имеют прямоугольное поперечное сечение. ширина сечения $b=10$ см, высота сечения $h=5$ см.

Необходимо:

1.1 Построить в аксонометрии эпюры внутренних усилий

$N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$.

1.2 Определить вид сопротивления на каждом участке бруса.

1.3 Вычислить на каждом участке в опасном сечении наибольшее нормальное напряжение от усилий N_z, M_x, M_y и наибольшее касательное напряжение от крутящего момента M_z . (Напряжениями от Q_x и Q_y пренебрегаем).

1.4 Найти расчётное напряжение по III-ей теории прочности на участке, на котором возникают нормальные и касательные напряжения.

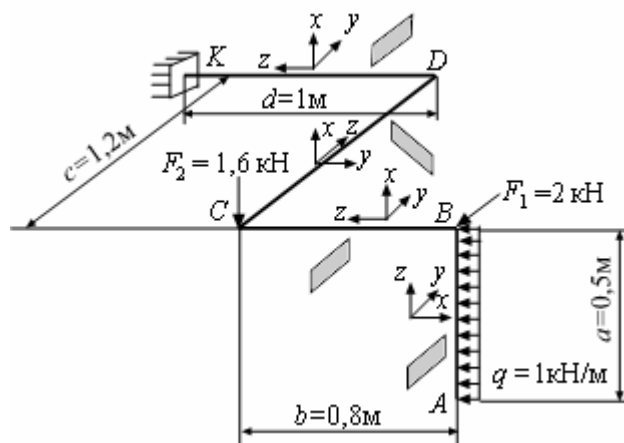


Рис.2

1.1 Построение эпюр внутренних усилий

Брус состоит из четырёх прямолинейных элементов, перпендикулярных друг к другу. Последовательно разрезаем брус на каждом участке и, отбросив часть бруса, содержащего закреплённый конец, в поперечном сечении оставшейся части показываем координатные оси X, Y, Z . Начало координат помещаем в центре тяжести сечения, ось Z направляем наружу от оставшейся части вдоль оси бруса, а оси X, Y совместим с главными осями инерции поперечного сечения.

Составляем шесть уравнений равновесия отсечённой части, из которых найдём аналитические выражения внутренних усилий, а также численные значения усилий на концах каждого участка.

Участок АВ $0 \leq z_1 \leq 0,5$ м

На рис.3 показана отсечённая часть бруса на участке АВ.

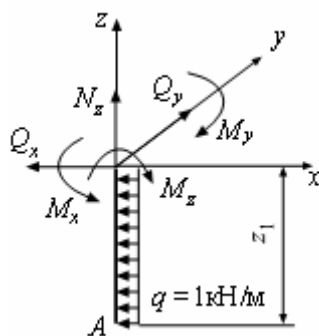


Рис.3

$$\sum F_x = -Q_x - q \cdot z_1 = 0, \quad Q_x = -q \cdot z_1, \text{ уравнение прямой линии,}$$

при $z_1 = 0, \quad Q_x = 0;$
 при $z_1 = 0,5 \text{ м} \quad Q_x = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН.}$

$$\sum F_y = Q_y = 0.$$

$$\sum F_z = N_z = 0.$$

$$\sum m_x = M_x = 0.$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot z_1^2}{2} = 0. \quad M_y = -\frac{q \cdot z_1^2}{2}, \text{ уравнение параболы,}$$

при $z_1 = 0, \quad M_y = 0,$

при $z_1 = 0,5 \text{ м}, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм}$

$$\sum m_z = M_z = 0.$$

Участок ВС $0 \leq z_2 \leq 0,8 \text{ м}$

На рис.4 приведена отсечённая часть бруса на участке ВС.

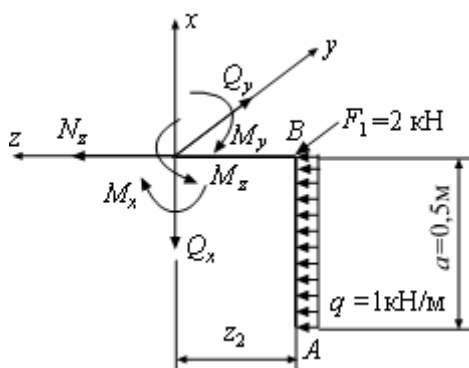


Рис.4

Составляем шесть уравнений равновесия.

$$\sum F_x = -Q_x = 0.$$

$$\sum F_y = Q_y - F_1 = 0, \quad Q_y = F_1 = 2 \text{ кН, постоянная величина на участке.}$$

$$\sum F_z = N_z + q \cdot a = 0, \quad N_z = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum m_x = M_x + F_1 \cdot z_2 = 0, \quad M_x = -F_1 \cdot z_2; \quad \text{при } z_2 = 0, \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_2 = 0,8, \quad M_x = -2 \cdot 0,8 = -1,6 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot a^2}{2} = 0, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм} = \text{const.}$$

$$\sum m_z = M_z = 0.$$

Участок CD $0 \leq z_3 \leq 1,8 \text{ м}$

На рис.5 изображена отсечённая часть бруса на участке CD.

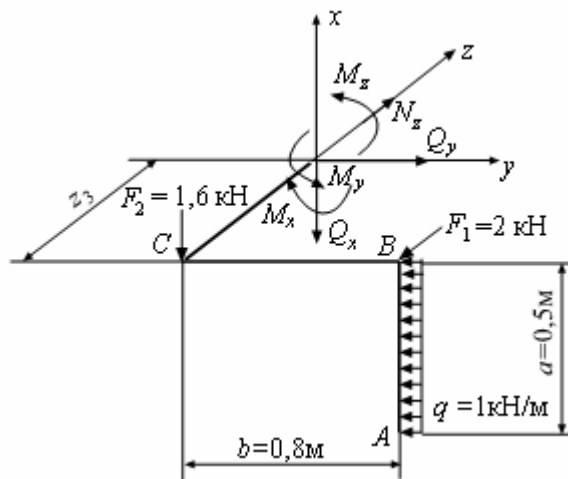


Рис.5

Составляем шесть уравнений равновесия.

$$\sum F_x = -Q_x - F_2 = 0, \quad Q_x = -F_2 = -1,6 \text{ кН, постоянная величина.}$$

$$\sum F_y = Q_y - q \cdot a = 0, \quad Q_y = q \cdot a = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum F_z = N_z - F_1 = 0, \quad N_z = F_1 = 2 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$\sum m_x = M_x + q \cdot a \cdot z_3 + F_1 \cdot b = 0, \quad M_x = -q \cdot a \cdot z_3 - F_1 \cdot b;$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad M_x = -2 \cdot 0,8 = -1,6 \text{ кНм;}$$

$$\text{при } z_3 = 1,2 \text{ м, } M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot 0,8 = -2,2 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + F_2 \cdot z_3 = 0, \quad M_y = -F_2 \cdot z_3;$$

$$\text{при } z_3 = 0, \quad M_y = 0;$$

$$\text{при } z_3 = 1,2 \text{ м, } M_y = -1,6 \cdot 1,2 = -1,92 \text{ кНм;}$$

$$\sum m_z = M_z - \frac{q \cdot a^2}{2} = 0, \quad M_z = \frac{q \cdot a^2}{2} = \frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = 0,125 \text{ кНм} = \text{const.}$$

Участок DK $0 \leq z_4 \leq 1,0 \text{ м}$

На рис.6 показана отсечённая часть бруса на участке DK.

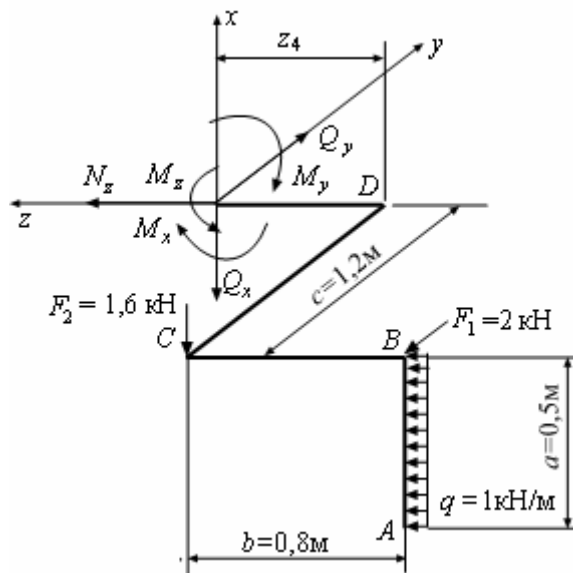


Рис.6

Составляем шесть уравнений равновесия

$$\sum F_x = -Q_x - F_2 = 0, \quad Q_x = -F_2 = -1,6 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = Q_y - F_1 = 0, \quad Q_y = F_1 = 2,0 \text{ кН.}$$

$$\sum F_z = N_z + q \cdot a = 0, \quad N_z = -q \cdot a = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ кН.}$$

$$\sum m_x = M_x + q \cdot a \cdot c + F_1 \cdot (b + z_4) = 0, \quad M_x = -q \cdot a \cdot c - F_1 \cdot (b + z_4);$$

$$\text{при } z_4 = 0, \quad M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot 0,8 = -2,2 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_4 = 1 \text{ м, } M_x = -1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 2 \cdot (0,8 + 1) = -4,2 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_y = M_y + \frac{q \cdot a^2}{2} + F_2 \cdot z_4 = 0, \quad M_y = -\frac{q \cdot a^2}{2} - F_2 \cdot z_4;$$

$$\text{при } z_4 = 0, \quad M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} = -0,125 \text{ кНм};$$

$$\text{при } z_4 = 1 \text{ м, } M_y = -\frac{1 \cdot 0,5^2}{2} - 1,6 \cdot 1 = -1,725 \text{ кНм.}$$

$$\sum m_z = M_z + F_2 \cdot c = 0, \quad M_z = -F_2 \cdot c = -1,6 \cdot 1,2 = -1,92 \text{ кНм} = \text{const.}$$

Эпюры внутренних усилий, построенные по полученным результатам, представлены на рис.7.

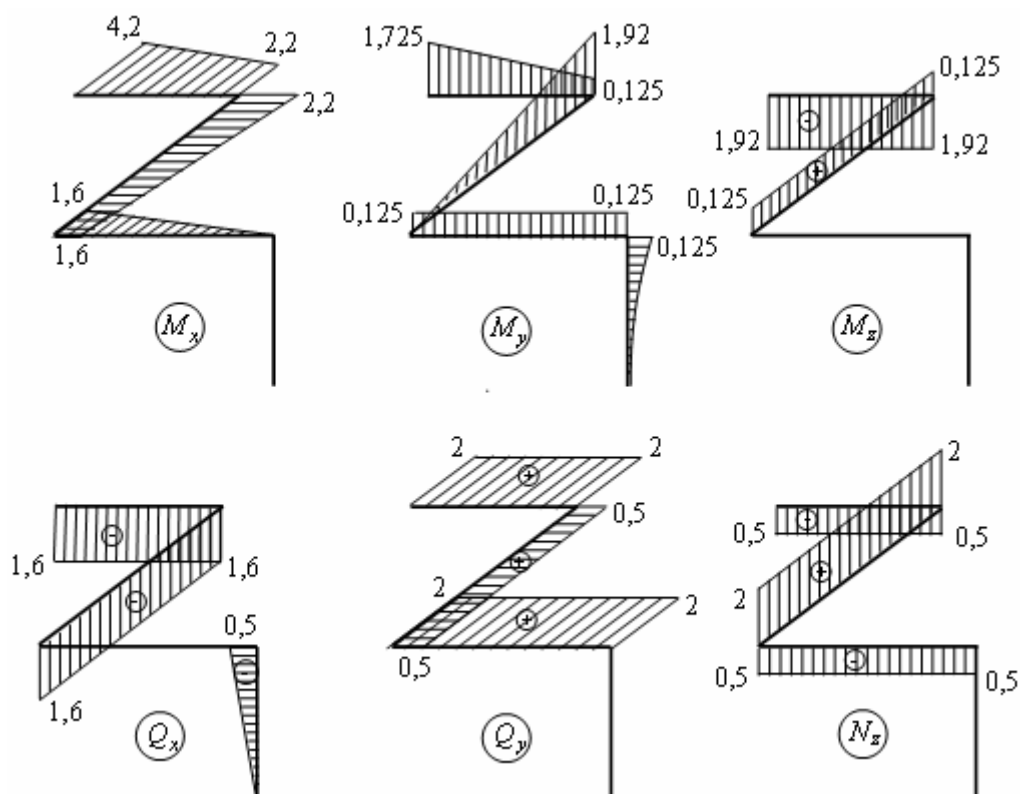


Рис.7

1.2 Определение вида сопротивления на участках бруса

Анализируя эпюры внутренних усилий, устанавливаем на каждом участке вид сопротивления бруса.

На участке АВ действуют изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_x , следовательно, имеет место плоский поперечный изгиб.

На участке ВС действуют изгибающие моменты M_x, M_y , поперечная сила Q_y и продольная сила N_z , следовательно, возникает сочетание двух плоских изгибов и сжатия бруса.

На участке CD действуют шесть внутренних усилий: изгибающие моменты M_x, M_y , крутящий момент M_z , поперечные силы Q_x, Q_y и продольная сила N_z . Следовательно, брус испытывает сочетание косоугольного изгиба, кручения и растяжения.

На участке DK также присутствуют шесть внутренних усилий:

$M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, N_z$ и возникают косоугольный изгиб, кручение и сжатие бруса.

1.3 Определение наибольших напряжений в опасном сечении на каждом участке бруса.

Участок АВ

(Касательными напряжениями от поперечных сил пренебрегаем ввиду их малости).

На участке АВ действует изгибающий момент M_y , наибольшая величина которого находится в точке В. Поперечное сечение бруса на этом участке прямоугольное, осевой момент сопротивления

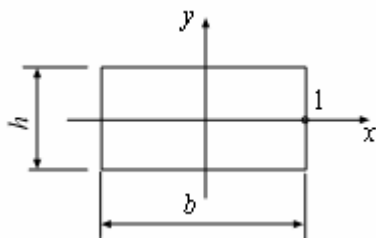


Рис.8

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,1 \cdot 0,05^2}{6} = 41,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Максимальное нормальное напряжение возникает в точке 1 поперечного сечения (Рис.8)

$$\sigma_1 = \frac{M_y}{W_y} = \frac{0,125 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} = 3,0 \text{ МПа}$$

Участок ВС

На участке ВС возникают нормальные напряжения от изгибающих моментов M_x, M_y и продольной силы N_z . Поперечное сечение бруса прямоугольное, моменты сопротивления:

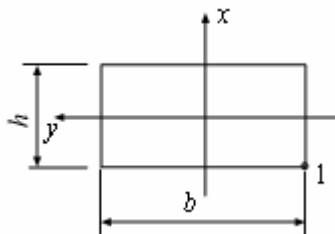


Рис.9

моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{0,05 \cdot 0,1^2}{6} = 83,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,1 \cdot 0,05^2}{6} = 41,7 \text{ м}^3.$$

Площадь поперечного сечения $A = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,05 = 50,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$

Опасным является сечение бруса, бесконечно близкое к точке С. Наибольшее сжимающее напряжение будет в точке 1 сечения.

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = -\frac{1,6 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,125 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = -22,31 \text{ МПа}.$$

Участок CD

На участке CD возникают нормальные напряжения от моментов M_x, M_y , продольной силы N_z и касательные напряжения от крутящего момента M_k .

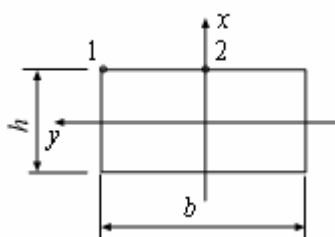


Рис.10

Опасным является сечение бруса бесконечно близкое к точке Д. Поперечное сечение прямоугольное, осевые моменты сопротивления W_x, W_y и площадь A

подсчитаны ранее, момент сопротивления W_k при кручении стержня прямоугольного сечения вычислим:

$$W_k = \beta \cdot h^3 = 0,493 \cdot 0,05^3 = 61,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

β – коэффициент, зависящий от отношения большей стороны прямоугольника к меньшей, (при $b/h = 2$, $\beta = 0,493$).

Наибольшее растягивающее нормальное напряжение возникает в точке 1

поперечного сечения:

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = \frac{2,2 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} + \frac{1,92 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,0 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = 72,85 \text{ МПа.}$$

Касательное напряжение в точке 1 равно нулю, $\tau_1 = 0$.

Наибольшее касательное напряжение возникает в середине длинной стороны, в точке 2:

$$\tau_2 = \frac{M_k}{W_k} = \frac{0,125 \cdot 10^3}{61,6 \cdot 10^{-6}} = 2,03 \text{ МПа.}$$

Нормальное напряжение в точке 2:

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = 0 + \frac{1,92 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,0 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = 46,44 \text{ МПа.}$$

Участок ДК

На этом участке нормальные напряжения возникают от изгибающих моментов M_x, M_y и от продольной силы N_z . Касательные напряжения – от кру-

тящего момента M_z .

Опасным является сечение, бесконечно близкое к заделке. Наибольшее нормальное напряжение сжатия будет в точке 1 поперечного сечения, наибольшее касательное – в середине длинной стороны, в точке 2.

Геометрические характеристики сечения бруса подсчитаны ранее.

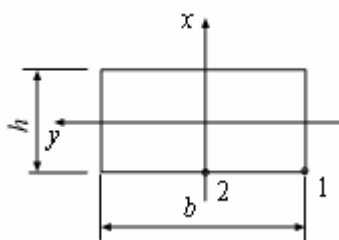


Рис.11

Вычисляем напряжения в точках 1,2

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = -\frac{4,2 \cdot 10^3}{83,3 \cdot 10^{-6}} - \frac{1,725 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50,0 \cdot 10^{-4}} = -91,89 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{A} = 0 - \frac{1,725 \cdot 10^3}{41,7 \cdot 10^{-6}} - \frac{0,5 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^{-4}} = 41,47 \text{ МПа.}$$

$$\tau_1 = 0.$$

$$\tau_2 = \frac{M_k}{W_k} = -\frac{1,92 \cdot 10^3}{61,6 \cdot 10^{-6}} = -31,17 \text{ МПа.}$$

1.4 Определение эквивалентных напряжений по третьей теории прочности

Если в некоторой точке поперечного сечения бруса имеются нормальные и касательные напряжения, то для расчёта на прочность следует вычислять эквивалентное напряжение по одной из теорий прочности.

На участке CD бруса возникают нормальные и касательные напряжения.

В точке 1 поперечного сечения (Рис.10) действует наибольшее нормальное напряжение $\sigma_1 = 72,85$ МПа, касательное $\tau_1 = 0$.

В точке 2 поперечного сечения имеем наибольшее касательное напряжение $\tau_2 = 2,03$ МПа, а нормальное $\sigma_2 = 46,44$ МПа.

Вычислим эквивалентные напряжения в точках 1,2 по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}(1)} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{72,85^2 + 4 \cdot 0} = 72,8 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}(2)} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{46,44^2 + 4 \cdot 2,03^2} = 46,62 \text{ МПа.}$$

Так как $\sigma_{\text{экв}(1)} > \sigma_{\text{экв}(2)}$, то наиболее опасное состояние материала будет в точке 1.

На участке DK также возникают нормальные и касательные напряжения. Эквивалентное напряжение следует вычислять в опасных точках 1 и 2, (Рис.11).

$$\sigma_{\text{экв}(1)} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{91,89^2 + 4 \cdot 0} = 91,89 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\text{экв}(2)} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} = \sqrt{71,47^2 + 4 \cdot 31,17^2} = 74,87 \text{ МПа.}$$

Опасное состояние материала будет в точке 1, так как $\sigma_{\text{экв}(1)} > \sigma_{\text{экв}(2)}$.

Вычисленные эквивалентные напряжения позволяют оценить прочность материала в наиболее напряжённой точке опасного поперечного сечения бруса, или подобрать размеры поперечного сечения на данном участке, если они неизвестны.

Вопросы для самопроверки

1. Какой метод применяется для определения внутренних усилий в поперечном сечении бруса?
2. В общем случае действия нагрузки, в поперечном сечении пространственного бруса могут возникнуть шесть внутренних силовых факторов. Перечислите их.
3. Какие уравнения статики используют для определения внутренних усилий, в поперечных сечениях пространственного бруса?
4. Какие правила знаков приняты для внутренних усилий N,Q,M?
5. Какой вид имеют эпюры нормальных и касательных напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения при плоском поперечном изгибе?
6. Какая прямоугольная система координат называется правой?
7. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при косом изгибе и внецентренном сжатии или растяжении?
8. Перечислите классические теории прочности.
9. Как определяется эквивалентное напряжение в поперечном сечении бруса по третьей и четвёртой теориям прочности при действии изгибающего и крутящего моментов?

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов : учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 1995.
2. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности : учеб. / под ред. Г.С. Варданяна. М.: Издательство АСВ, 1995.
3. Дарков А.В., Широ Г.С. Сопротивление материалов : учеб. для вузов. М : Высшая школа, 1989.
4. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах. М.: Инфра-М, 2010.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2014 г., поз. 12

Публикуется в авторской редакции.

Подписано в свет 21.01.2014.

Гарнитура «Таймс».

Уч.-изд. л. 0,3. Объем данных 188 Кбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
<http://www.vgasu.ru>; info@vgasu.ru