МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Лабораторный практикум

Составители О.М. Забродина, Н.А. Михайлова, А.Д. Скороходова

Волгоград 2011

Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Лабораторный практикум

Составители О.М. Забродина, Н.А. Михайлова, А.Д. Скороходова

2-е издание, переработанное и дополненное

Волгоград 2011

УДК 004:69(075.8)
ББК 32.97я73+38я73
М 545

Рецензенты:
кандидат технических наук *А.В. Игнатьев*, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета (ВолгГАСУ);
кандидат технических наук *Н.Н. Потапова*, доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники ВолгГАСУ

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-практического пособия

М 545 **Методы** оптимизации в решении инженерных задач : лабораторный практикум [Электронный ресурс]. Элетронные текстовые и графические данные (1,24 МБ) / сост. О.М. Забродина, Н.А. Михайлова, А.Д. Скороходова ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. 2-е изд., перераб. и доп. Волгоград : ВолгГАСУ, 2011.
ISBN 978-5-98276-433-1

Учебное электронное издание комбинированного распространения:
1 CD-R диск. Системные требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0.
№ гос. регистрации
Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/

Содержит краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ. Сформулированы контрольные вопросы по темам, приведены варианты индивидуальных заданий.
1-е издание вышло в печатном тираже в 2001 г. под заглавием «Методические указания к лабораторным работам по курсу „Методы оптимизации в инженерных задачах“». Из авт. коллектива 1-го изд. выбыл А.А. Чураков, в авт. коллектив настоящего изд. вошла О.М. Забродина.
Для студентов технических специальностей очной формы обучения, изучающих дисциплину «Методы оптимизации в инженерных задачах».

УДК 004:69(075.8)
ББК 32.97я73+38я73

ISBN 978-5-98276-433-1

Оглавление

Предисловие авторов

В настоящее время теория оптимизации, успешному применению которой способствует современная компьютерная техника, вносит заметный вклад в ускорение научно-технического прогресса. Трудно назвать такую область инженерной деятельности, где ни возникали бы задачи оптимизационного характера. Это, например, задачи определения наиболее эффективного режима работы различных технических систем, задачи на составление смесей при наименьших затратах сырья, задачи организации производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах и др.

Курс «Методы оптимизации в решении инженерных задач» рассчитан на аудиторию, подготовленную по математике в пределах программы технического вуза. Постановка каждой задачи оптимизации включает два объекта: множество допустимых решений и целевую функцию (функционал), которую следует минимизировать или максимизировать на указанном множестве. С этой точки зрения и рассматриваются различные классы экстремальных задач, составляющие предмет изучения линейного, динамического, нелинейного, геометрического программирования, вариационного исчисления и теории оптимального управления.

Остановимся на двух направлениях: линейном и нелинейном программировании. Здесь решаются задачи оптимизации, в которых целевая функция — эта функция многих переменных, а допустимым множеством решений является подмножество евклидова пространства.

Данное пособие составлено в соответствии с программой курса и содержит описания четырех лабораторных работ по следующей схеме:

цель работы;
программное обеспечение;
теоретическое введение;
порядок выполнения работы;
пример выполнения лабораторной работы;
требования к отчету;
варианты индивидуальных заданий;
контрольные вопросы.

Лабораторная работа 1

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы — знакомство с теорией по данной теме и применение ее в решении прикладных задач.

Теоретическое введение

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (ЗЛП) и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства. Задачу пространства размерности больше трех измерений изобразить графически вообще невозможно.

Пусть ЗЛП задана в двумерном пространстве, т.е. ограничения содержат две переменные.

Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.3}$$

Допустим, что система (1.2) при условии (1.3) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (1.2) и (1.3) определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, где $i = \overline{1,m}$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Линейная функция (1.1) при фиксированном значении Z является уравнением прямой: $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$.

Построим многоугольник решений системы (1.2), (1.3) и график линейной функции (1.1) при Z = 0 (рис. 1.1). Тогда поставленной ЗЛП можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ опорная и функция Z при этом достигает минимума.

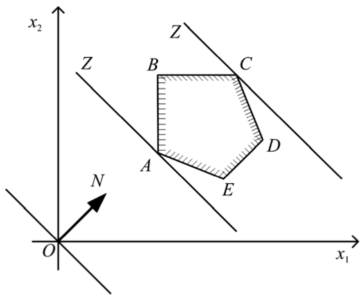


Рис. 1.1

Значения Z возрастают в направлении вектора $N = (C_1,C_2)$, поэтому прямую $Z = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора N.

Из рис. 1.1 видно, что прямая $Z = \text{const}$ дважды становится опорной в точке A и C, что соответствует минимуму в точке A и максимуму в точке C. Координаты точки A (x_1; x_2) находим, решая систему уравнений для прямых AB и AE. Если многоугольник решений представляет неограниченную многоугольную область, то возможны два случая:

1) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь в направлении N или противоположном ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной; значит линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис. 1.2, *а*);

2) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь все же становится опорной. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограничена только сверху (рис. 1.2, *б*), только снизу (рис. 1.2, *в*) или сверху и снизу (рис. 1.2, *г*).

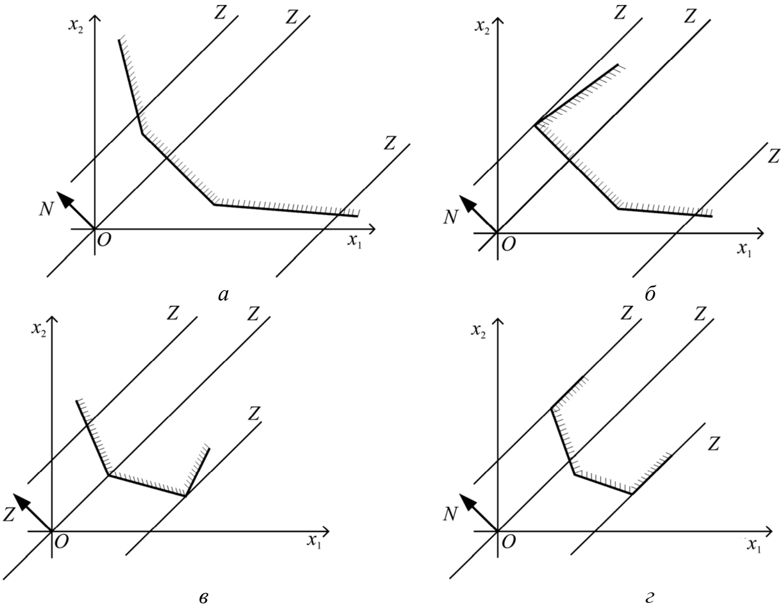


Рис. 1.2

Вообще, с помощью графического метода может быть решена ЗЛП, система ограничений которой содержит n неизвестных и m независимых уравнений, если n и m связаны соотношением $n - m = 2$.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составить математическую модель задачи.

2. Построить многоугольник решений в системе координат x_1Ox_2.

3. Построить радиус-вектор и прямую $Z = 0$, проходящую через точку $O(0; 0)$ перпендикулярно.

4. Провести прямые, параллельные прямой $Z = 0$, опорные по отношению к многоугольнику решений.

5. Найти оптимальные планы и значения $Z_{\min}$ и $Z_{\max}$.

Примеры выполнения лабораторной работы

Пример 1. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья: S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, записаны в постановке ЗЛП.

x_1 — количество единиц продукции P_1; x_2 — количество единиц продукции P_2; Z — функции цели (максимальная прибыль).

1. Математическая модель задачи. Найти максимум функции $Z = 50x_1 + 40x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20; \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40; \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2, решая неравенство на плоскости, изобразим граничные прямые (рис. 1.3):

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20\,(L_1) \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40\,(L_2) \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30\,(L_3) \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

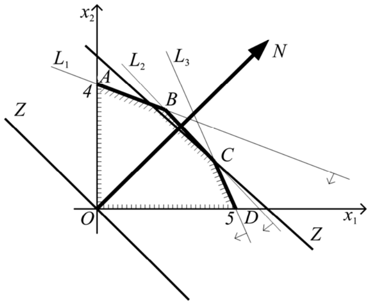


Рис. 1.3

Взяв какую-нибудь точку, например O (0; 0), установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство.

Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник $OABCD$.

3. Для построения прямой $50x_1 + 40x_2 = 0$ строим радиус-вектор $N(50; 40) = 10(5; 4)$ и через точку O проводим прямую, перпендикулярную N.

4. Построенную $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рис. 1.3 видно, что опорной прямая $Z = \text{const}$ становится в точке C, где Z принимает максимальное значение.

5. Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40; \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 \approx 3{,}9$; $x_2 \approx 1{,}7$.

Подставляя x_1 и x_2 в Z, получаем $Z_{\max} \approx 260{,}3$.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль необходимо запланировать производство 3,9 единиц продукции P_1 и 1,7 продукции P_2.

Пример 2. Графическим методом найти оптимальный план ЗЛП, при которой линейная функция $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ достигает максимального значения при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22; \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38; \end{cases} \tag{1.4}$$
$$x_j \ge 0, \text{ где } j = 1, 2, \dots, 5.$$

Решение

Используя метод Жордана — Гаусса, произведем три полных исключения неизвестных x_1, x_2, x_3. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 - 3x_5 = 6; \\ \qquad x_2 \qquad + 7x_4 + 10x_5 = 70; \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20; \end{cases} \tag{1.5}$$

откуда $x_1 = 6 - x_4 + 3x_5$; $x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5$; $x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5$. (1.6)

Подставляя эти значения в линейную функцию и отбрасывая в системе (1.5) базисные переменные, получаем задачу, выраженную только через свободные неизвестные x_4 и x_5; найти максимальное значение функции $Z = 6x_4 + 15x_5 - 38$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \le 6; \\ 7x_4 + 10x_5 \le 70; \\ -4x_4 + 5x_5 \le 20; \end{cases}$$
$$x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Построим многогранник решений и линейную функцию в системе координат x_4Ox_5 (рис. 1.4).

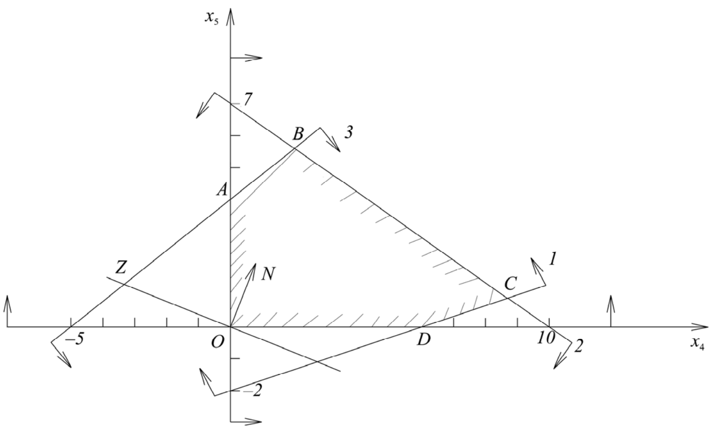


Рис. 1.4

Из рис. 1.4 заключаем, что линейная функция принимает максимальное значение в угловой точке *B*, которая лежит на пересечении прямых 2 и 3. В результате решения системы

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70; \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

находим $x_4 = 2$, $x_5 = 28/5$.

Максимальное значение функции $Z_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58$.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в формулу (1.6) найденные значения x_4 и x_5. Окончательно получаем $x_1 = 104/5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$; $x_5 = 28/5$.

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) условие задачи;

3) чертеж с графической иллюстрацией решения задачи, пояснения к чертежу;

4) все промежуточные окончательные вычисления;

5) вывод и анализ полученных результатов.

Варианты индивидуальных заданий

Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях.

Вариант 1. $$Z = x_1 + 5x_2$$ $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 2. $$Z = 5x_1 + 3x_2$$ $$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17; \\ x_1 + 2x_2 \le 34; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 3. $$Z = 3x_1 + 2x_2$$ $$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29; \\ 3x_1 - x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 4. $$Z = 4x_1 + 3x_2$$ $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4; \\ x_1 + 3x_2 \le 37; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 5. $$Z = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$$ $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12; \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6; \end{cases}$$ $$x_j \ge 0, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Вариант 6. $$Z = 5x_1 + x_2$$ $$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53; \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 7. $$Z = 6x_1 + x_2$$ $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 8. $$Z = x_1 + 7x_2$$ $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 9. $$Z = x_1 + 8x_2$$ $$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78; \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26; \\ x_1 + 4x_2 \ge 26; \end{cases}$$ $$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 10. $$Z = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5$$ $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8; \end{cases}$$ $$x_j \ge 0, \text{ где } j = 1, 2, \ldots, 5.$$

Вариант 11.
$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 \le 22; \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 6; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \le 1; \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, где $j = 1, 2, 3.$

Вариант 12.
$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29; \\ 3x_1 - x_2 \le 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 13.
$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 17x_1 + x_2 \ge 53; \\ 2x_1 + x_2 \le 23; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

Вариант 14.
$$Z = x_1 + 2x_3 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5; \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2; \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1; \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, где $j = 1, 2, ..., 5.$

Вариант 15.
$$Z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4; \\ x_1 + 3x_2 \le 37; \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 16.
$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53; \\ 6x_1 - 7x_2 \le 15; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 17.
$$Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 \le 16; \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48; \\ 2x_1 + x_2 \le 28; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 18.
$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -10x_1 + 9x_2 \le 17; \\ 2x_1 + 13x_2 \ge 41; \\ 3x_1 + x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 19.
$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 17x_2 \ge 53; \\ x_1 + 2x_2 \le 23; \\ 2x_1 - x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 20.
$$Z = -5x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7; \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, где $j = 1, 2, ..., 5.$

Вариант 21.
$$Z = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8; \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, где $j = 1, 2, ..., 5.$

Вариант 22.
$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 5; \\ -x_1 + 3x_2 \ge 10; \\ x_1 + 2x_2 \le 40; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 23.
$$Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20; \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19; \end{cases}$$
$x_j \ge 0$, где $j = 1, 2, ..., 5.$

Вариант 24.
$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 - 10x_2 \le 17; \\ 13x_1 + 2x_2 \ge 41; \\ x_1 + 3x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Вариант 25.
$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 5; \\ 3x_1 - x_2 \ge 10; \\ 2x_1 + x_2 \ge 40; \end{cases}$$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Контрольные вопросы

1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
3. Каким может быть многоугольник решений?
4. Что геометрически означает каждое неравенство в системе ограничений?

Лабораторная работа 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Цель работы — усвоение симплекс-метода и приобретение практических навыков его применения.

Программное обеспечение: табличный процессор Microsoft Excel.

Теоретическое введение

Решение любой ЗЛП можно найти либо симплексным методом, либо методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из методов, нужно ЗЛП записать в канонической форме.

Идея симплексного метода. Симплексный метод основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает или убывает (при условии, что заданная ЗЛП имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Переход возможен, если известен какой-нибудь опорный план.

Количество опорных планов определяется числом C_n^m. При больших n и m найти оптимальный план, перебирая все опорные планы, трудно. Поэтому необходимо иметь схему, по которой осуществляется упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплексный метод решения ЗЛП.

Пусть дана ЗЛП.

Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } j = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

Здесь a_{ij}, b_j и C_j $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ — заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид.

Найти максимум функции

$$Z=\sum_{j=1}^{n}C_j x_i \tag{2.4}$$

при условиях

$$x_1A_1+x_2A_2+\ldots+x_mA_m+\ldots+x_nA_n=A_0; \tag{2.5}$$

$$x_j\ge 0,\ \text{где}\ j=\overline{1,n}. \tag{2.6}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ A_m=\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix};\ A_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\\ldots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\ldots\\a_{nn}\end{pmatrix};\ A_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_m\end{pmatrix}.$$

Так как $b_1A_1+b_2A_2+\ldots+b_mA_m=A_0$, то по определению опорного плана $X=(b_1;b_2;\ldots;0;\ldots;0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n-m$ компонент вектора X равны 0). Этот план определяется системой единичных векторов A_1, A_2, …, A_m, а также вектор A_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса.

Пусть $A_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}A_i$, где $j=\overline{1,n}.$

Положим $Z=\sum_{i=1}^{m}C_i x_{ij}$; $\Delta_j=Z_j-C_j$, где $j=\overline{1,n}.$

Так как векторы A_1, A_2, …, A_m единичные, то $x_{ij}=a_{ij}$ и $Z_j=\sum_{i=1}^{m}C_{ij}a_{ij}$, а также $\Delta_j=\sum_{i=1}^{m}C_{ij}a_{ij}-C.$

Т е о р е м а 2.1. Опорный план $X^*=(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_m^*;0;\ldots;0)$ задач (2.4)—(2.6) является оптимальным, если $\Delta_j\ge 0$ для любого $j=\overline{1,n}$.

Т е о р е м а 2.2. Если $\Delta_k<0$ для некоторого $j=k$ и среди чисел $a_{ik}\le 0(i=\overline{1,m})$ нет положительных $a_{ik}\le 0$, то целевая функция (2.4) задачи (2.4)—(2.6) не ограничена на множестве ее планов.

Т е о р е м а 2.3. Если опорный план X задачи (2.4)—(2.6) не вырожден и $\Delta_k<0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik}\le 0$), то существует опорный план X' такой, что $Z(X')>Z(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать в симплексную таблицу.

Порядок выполнения работы

1. Составить математическую модель задачи.

2. Решить ЗЛП симплекс-методом, используя для расчетов ТП Excel. Алгоритм метода включает следующие этапы:

1) найти первоначальный опорный план;

2) составить симплекс-таблицу, используя для расчетов ТП Excel;

3) выяснить, имеется ли хотя бы одно положительное (при минимуме) или отрицательное (при максимуме) число Δj; если нет, то найденный опорный план оптимален; если же среди чисел Δj имеются положительные (отрицательные), то либо установить неразрешимость задачи, либо перейти к новому опорному плану;

4) найти направляющие столбец и строку; направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине числом Δj, а направляющая строка — минимальным из отношений компонентов столбца A_0 к положительным компонентам направляющего столбца;

5) используя метод Жордана — Гаусса исключения неизвестных, сделать новый базисный вектор A_j единичным; при этом определить компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов A_j по векторам нового базиса и числа Z' и Δ'_j; все эти числа записать в новой симплекс-таблице;

6) проверить найденный опорный план на оптимальность; если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то снова нужно искать разрешающий элемент и далее по алгоритму, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения закончить.

3. Проверить полученный результат с помощью инструментального средства Solver (Решатель) ТП Excel (**Сервис/Поиск решения**).

Пример выполнения работы

Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида цена одного изделия *A*, *B* и *C*, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия, р.	9	10	16	—

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение

Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий A обозначим через x_1, изделий B — через x_2, изделий C — через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \tag{2.7}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \tag{2.8}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2 и x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2.7) требуется найти такое, при котором функция (2.8) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360; \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 — это неиспользуемое количество сырья 1-го вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где $P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$.

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0, 0, 0, 360, 192, 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для 1-й итерации (табл. 2.2), подсчитываем значения F_0, $Z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C, P_0) = 0;\ z_1 = (C, P_1) = 0;\ z_2 = (C, P_2);\ z_3 = (C, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;\ z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\ z_3 - c_3 = -16.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 2.2

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4	—	—	0	–9	–10	–16	0	0	0

Этот план не оптимален, так как в 4-й строке имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9$; $z_2 - c_2 = -10$; $z_3 - c_3 = -16$. На основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца P_3, то в базис введем вектор P_3.

Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим $\theta_0 = \min(b_i / a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, т.е. θ_0 = min(360/12; 192/8; 180/3) = 192 /8 = 24. Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими.

Составляем табл. 2.3 для 2-й итерации, используя вычислительные возможности ТП Excel (ввод формульных данных с абсолютными и относительными адресами, копирование формул, форматирование числовых данных).

Таблица 2.3

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–1,50	0
2	P_3	16	24	0,75	0,5	1	0	0,125	0
3	P_6	0	108	2,75	1,50	0,00	0,00	–0,38	1
4	—	—	384	3	–2	0	0	2	0

Найденный на 2-й итерации план задачи не является оптимальным и необходимо повторить все действия.

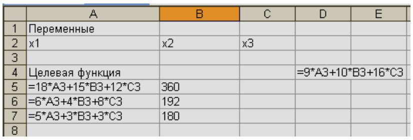
В табл. 2.4 в 4-й оценочной строке все числа неотрицательные. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max}$ = 400.

Таблица 2.4

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	0,111111	–0,16667	0
2	P_3	16	20	0,25	0	1	–0,05556	0,208333	0
3	P_6	0	96	1,25	0	0	–0,16667	–0,125	1
4	—	—	400	5	0	0	0,222222	1,666667	0

Проверим шаги вычисления пользуясь командой ТП Excel **Сервис/Поиск решения**.

Введем необходимые данные и ограничения следующим образом (рис. 2.1).



	A	B	C	D	E
1	Переменные				
2	x1	x2	x3		
3					
4	Целевая функция			=9*A3+10*B3+16*C3	
5	=18*A3+15*B3+12*C3	360			
6	=6*A3+4*B3+8*C3	192			
7	=5*A3+3*B3+3*C3	180			
8					

Рис. 2.1

Выберем команды **Сервис/Поиск Решения**. Заполним окно диалога **Поиск решения** (рис. 2.2).

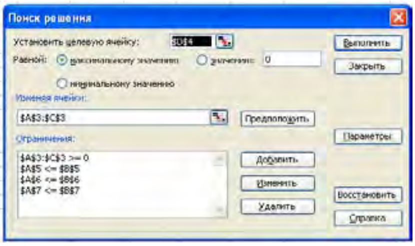


Рис. 2.2

Установим параметры в окне **Параметры поиска решения** (рис. 2.3).

После команды **Выполнить** откроется окно диалога **Результаты поиска решения**, которое сообщит, что решение найдено (рис. 2.4).

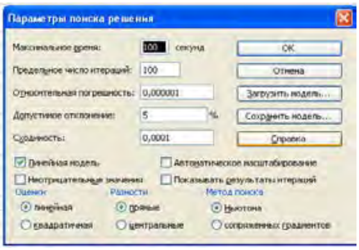


Рис. 2.3

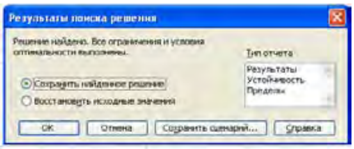


Рис. 2.4

Оптимальный план и максимальное значение целевой функции появятся в соответствующих ячейках таблицы (рис. 2.5).

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2	x3	
3	0	8	20	
4	Целевая функция			400
5	360	360		
6	192	192		
7	84	180		

Рис. 2.5

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

3) анализ полученных результатов и вывод.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1—10. Задача об использовании ресурсов. Для изготовления n видов продукции $P_1, \ldots, P_n$ предприятие использует m видов ресурсов $S_1, \ldots, S_m$ (сырье, топливо, материалы и т.д.). Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны $b_1, \ldots, b_m$. На изготовление единицы продукции j-го вида ($j = 1, \ldots, n$) расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса ($i = 1, \ldots, n$). При реализации единицы j-ой продукции предприятие получает C_j единиц прибыли. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Вариант	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции			Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции		
		P_1	P_2	P_3		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}
1	S_1	2	1	1	25	6	5	5
	S_2	1	1	1	14			
	S_3	0	4	2	19			
	S_4	3	0	1	24			
2	S_1	2	5	—	300	5	8	—
	S_2	4	5	—	400			
	S_3	3	0	—	100			
	S_4	0	4		200			
3	S_1	2	5	—	20	50	40	—
	S_2	8	5	—	40			
	S_3	5	6	—	30			
4	S_1	2	3	—	19	7	5	—
	S_2	2	1	—	13			
	S_3	0	3	—	15			
	S_4	3	0	—	18			
5	S_1	4	2	1	150 000	100	150	200
	S_2	6	0	2	170 000			
	S_3	0	2	4	100 000			
	S_4	8	7	0	200 000			

Окончание табл. 2.5

Вариант	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции			Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции		
		P_1	P_2	P_3		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}
6	S_1	2	5	7	60	32	13	61
	S_2	22	14	18	500			
	S_3	10	14	8	328			
7	S_1	0,6	0,4	0,6	800	20	15	25
	S_2	0,2	0,4	0,3	600			
	S_3	0,2	0,6	0,4	120			
8	S_1	0,6	0,5	0,4	700	20	15	25
	S_2	0,7	0,4	0,8	800			
	S_3	0,3	0,2	0,5	520			
9	S_1	4	5	2	300	800	400	300
	S_2	5	6	3	800			
	S_3	6	7	4	520			
10	S_1	12	9	10	3456	16	14	12
	S_2	0,3	0,2	0,3	432			
	S_3	6	4	5	2400			

Вариант 11—15. Задача о смесях. Имеется n продуктов $P_1, \ldots, P_n$, содержащих m видов питательных веществ $S_1, \ldots, S_m$ (сырье, топливо, материалы и т.д.). Пусть a_{ij}, где $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$, — количество единиц j-го питательного вещества в единице i-го продукта; b_j — суточная потребность (минимальная норма) организма в j-м питательном веществе; C_i — стоимость единицы i-го продукта. Требуется выбрать такой суточный рацион питания (т.е. назначить количества продуктов $P_1, \ldots, P_n$, входящих в него), чтобы условия по питательным веществам были выполнены, а стоимость рациона была минимальной (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Вариант	Виды питательных веществ	Количество единиц питательных веществ в единице продукции				Минимальная норма питательных веществ	Стоимость единицы продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}
11	S_1	3	1	—	—	9	4	6	—	—
	S_2	1	2	—	—	8				
	S_3	1	6	—	—	12				
12	S_1	1,2	1,4	0,8	—	1,6	3	4	5	—
	S_2	80	280	240	—	200				
	S_3	5	5	100	—	10				
13	S_1	26,5	7,8	0	0	21	14,4	16	12,8	10,5
	S_2	51	26	45,7	0	30				
	S_3	0	0	5	72,5	500				
14	S_1	1	5	—	—	10	2	3	—	—
	S_2	3	2	—	—	12				
	S_3	2	4	—	—	16				
	S_4	2	2	—	—	10				
	S_5	1	0	—	—	1				
15	S_1	0,18	0,24	1,2	—	12	1	1,1	7,5	—
	S_2	10	8	200	—	100				
	S_3	15	1	1,5	—	450				

Вариант 16—20. Задача о загрузке оборудования (1-го типа). Предприятие выпускает n видов изделий P_1, …, P_n каждое из которых проходит последовательную обработку на станках типов T_1, …, T_m. Запас мощности станков, т.е. рабочее время станка, составляет соответственно b_1, …, b_m единиц времени. Изделие P_i обрабатывается первым станком (типа T_1) a_{i1} единиц времени, вторым станком — a_{i2} единиц времени и т.д. При реализации одно изделие P_i приносит прибыли C_i единиц прибыли, где i = 1, …, n. Составить такой план загрузки станков, при котором предприятие получит максимальную прибыль (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Вариант	Типы станков	Продолжительность обработки изделия на станке			Доход от реализации изделия			Запас мощности станков
		P_1	P_2	P_3	C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	
16	T_1	12	10	9	30	32	29	13 200
	T_2	15	18	20				24 000
	T_3	6	4	4				6000
17	T_1	2	5	—	1	1	—	50
	T_2	2	1	—				2
	T_3	5	6	—				60
	T_4	1	10	—				90
18	T_1	3	8	4	16	25	20	6048
	T_2	2	3	2				6048
	T_3	7	9	5				3932
19	T_1	2	3	—	11	9	—	20
	T_2	3	1	—				37
	T_3	0	1	—				30
20	T_1	2	0	—	6	6	—	20
	T_2	1	2	—				37
	T_3	1	4	—				30

Вариант 21—25. Задача о загрузке оборудования (2-го типа). Предприятию необходимо выпустить n видов изделий P_1, …, P_n в количестве соответственно N_1, …, N_n единиц. Для этой цели используется m типов станков T_1, …, T_m, каждый из которых может обрабатывать все изделия P_i, где i = 1, …, n. Производительность каждого станка имеет величину a_{ij}, i = 1, …, n; j = 1, …, m, себестоимость каждого изделия при обработке его на том или ином станке составляет величину C_{ij}, i = 1, …, n; j = 1, …, m. Запас мощности станков (рабочее время станка) составляет соответственно b_1, …, b_m единиц времени. Составить такой план загрузки станков, при котором себестоимость выпуска продукции будет минимальной (табл. 2.8).

Контрольные вопросы

1. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования и проверить его на оптимальность?

2. Каковы условия оптимальности опорного плана задачи линейного программирования на отыскание минимального и максимального значений линейной функции?

3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?

4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?

5. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?

6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?

7. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?

8. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

Таблица 2.8

Вариант	Типы станков	Производительность станков				Себестоимость продукции				План выпуска продукции				Запас мощности
		P_1	P_2	P_3	P_4	C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}	N_{P_1}	N_{P_2}	N_{P_3}	N_{P_4}	
21	T_1	30	20	—	—	6	12	—	—	4000	3000	—	—	120
	T_2	20	14	—	—	8	10	—	—					100
	T_3	15	25	—	—	11	7	—	—					160
22	T_1	6	24	—	—	4	47	—	—	30	96	—	—	6
	T_2	13	13	—	—	13	26	—	—					6
23	T_1	30	50	30	20	2	1	0,5	1,2	3	15	4,5	1,5	240
	T_2	60	100	60	40	0,8	1,2	0,9	0,8					150
	T_3	18	30	18	12	0,5	1	0,6	0,9					150
24	T_1	8	4	2	—	4	6	3	—	160	100	100	—	60
	T_2	4	2	1	—	5	4	2	—					70
25	T_1	5	10	20	—	6	3	1,5	—	300	100	100	—	40
	T_2	1,7	3,3	3,3	—	6	3	2	—					60
	T_3	5	10	10	—	4	2	8	—					30

Лабораторная работа 3
НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы — знакомство с простейшей задачей нелинейного программирования (нахождение оптимального значения функции одной переменной) и одним из методов ее решения — методом золотого сечения. Приобретение навыков решения оптимальных задач встроенными средствами системы MathCAD.

Программное обеспечение: интегрированная математическая система MathCAD.

Теоретическое введение

Разработаны численные методы решения задач минимизации нелинейной функции как при ограничениях, так и без ограничений. Задачи и методы целесообразно изучать по схеме от простого к сложному. Сначала излагаются методы минимизации функции одной переменной. Далее рассматриваются методы для решения задач без ограничений с целевой функцией нескольких переменных. Наиболее сложными являются задачи оптимизации с ограничениями.

Универсального метода, с помощью которого можно было бы успешно решать разнообразные задачи оптимизации с ограничениями, не существует. Поэтому для решения каждого конкретного класса задач используют «свои» численные методы.

Классический метод минимизации функций одной переменной. Рассмотрим задачу нахождения минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Классический метод подробно излагается в курсе математического анализа. Основным недостатком классического метода является узкая область его применения.

Если значения целевой функции определены из наблюдений или в результате проведения экспериментов, то получить аналитическое выражение для производной трудно. Но даже если $f'(x)$ найдена, то отыскание корней уравнения $f'(x) = 0$ может составить сложную вычислительную задачу. Поэтому разработаны методы минимизации, которые не требуют числового значения производных и в которых объем вычисления значений целевой функции является наименьшим.

Унимодальные функции. Выделим класс функций, обладающих важным свойством.

Функция $f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a; b]$, если она имеет на этом отрезке единственную точку глобального минимума $x_{\min}$ и слева от этой точки является строго убывающей, а справа — строго возрастающей.

Другими словами, функция $f(x)$ унимодальная, если точка $x_{\min}$ существует и является единственной. На рис. 3.1 представлен пример графика унимодальной функции.

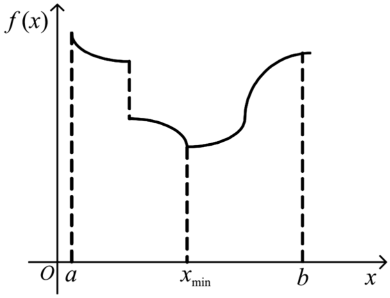


Рис. 3.1

Имеет место следующее свойство унимодальной функции. Рассмотрим две произвольные точки $x_1, x_2 \in [a; b]$ и $a < x_1 < x_2 < b$.

Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_{\min} < x_2$ (рис. 3.2, *а*), если же $f(x_1) \ge f(x_2)$, то тогда $x_{\min} > x_1$ (рис. 3.2, *б*).

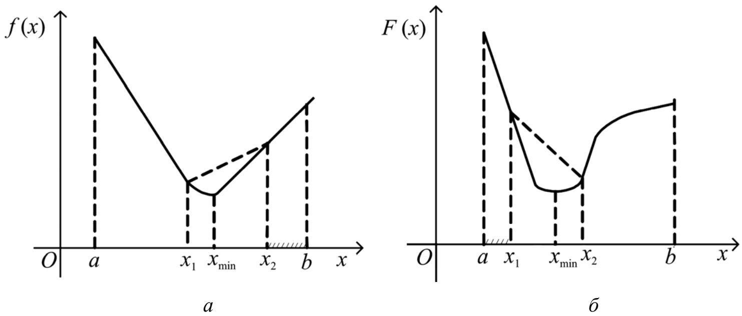


Рис. 3.2

Метод золотого сечения. Будем искать точку глобального минимума унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ так, чтобы количество вычислений значений $f(x)$ для заданной точности было наименьшим.

Рассмотрим на исходном отрезке точку x_1 и вычислим $f(x)$. Зная значение $f(x)$ только в одной точке, невозможно сузить область поиска точки $x_{\min}$. Поэтому выбираем вторую точку x_2 так, чтобы $a < x_1 < x_2 < b$ и вычисляем $f(x_2)$.

Возможен один из двух случаев:

1) $f(x_1) \le f(x_2)$, согласно свойству унимодальной функции область поиска сужается до $[a; x_2]$;

2) $f(x_1) \ge f(x_2)$, тогда область поиска сужается до $[x_1; b]$.

Где же лучше всего на исходном отрезке брать точки x_1 и x_2?

Так как первоначально ничего неизвестно о положении точки $x_{\min}$, то оба указанных выше случая равновозможны. Отсюда ясно, что точки x_1 и x_2 должны быть расположены симметрично относительно середины отрезка $[a; b]$.

Чтобы найти «золотую середину», рассмотрим для простоты отрезок [1; 2] (рис. 3.3).

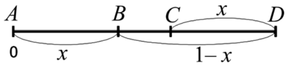


Рис. 3.3

Чтобы точка B была «выгодной» как на первом этапе, так и на следующем, она должна делить отрезок AD в таком же отношении, как и AC, т.е. $AB/AD = BC/AC$. При этом в силу симметрии аналогичным свойствам будет обладать и точка C.

В терминах координаты x пропорция примет вид $\frac{x}{1} = \frac{1-2x}{1-x}$.

Это уравнение имеет корень меньше 1 и равный $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$.

О точке, которая расположена на расстоянии $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ % длины от одного из концов отрезка, говорят, что она выполняет «золотое сечение» данного отрезка. Очевидно, каждый отрезок имеет две такие точки, расположенные симметрично относительно середины.

Итак, точки x_1 и x_2 должны осуществлять «золотое сечение» исходного отрезка $[a; b]$.

Вычисляем координаты точек, осуществляющих «золотое сечение» исходного отрезка, $y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0), z_0 = a_0 + b_0 - y_0$ и определяем значения $f(y_0)$ и $f(z_0)$.

Сравниваем значения $f(y_{k-1})$ и $f(z_{k-1})$, $(k \geq 1)$.

1. Если $f(y_{k-1}) \leq f(z_{k-1})$, то полагаем $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$ и вычисляем координату точки (слева от имеющейся) $y_k = a_k + b_k - z_k$ и значение $f(y_k)$.

2. Если $f(y_{k-1}) > f(z_{k-1})$, то полагаем $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$ и вычисляем координату точки (справа от имеющейся) $z_k = a_k + b_k - y_k$ и значение $f(z_k)$.

В любом из двух случаев вычисляется длина (k +1)-го отрезка: $\Delta_{k-1} = b_k - y_k$ или $\Delta_{k-1} = z_k - a_k$.

Работа выполняется до тех пор, пока $\Delta_{k-1} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность вычислений.

3. Выбираем наименьшее из чисел $f(y_k)$ и $f(z_k)$ — приближенный минимум. А точка, которая ему соответствует, дает приближение к $x_{\min}$.

Порядок выполнения работы

1. Решить задачу оптимизации в системе MathCAD по алгоритму:

1) задать начальные условия задачи оптимизации;

2) построить график функции $f(x)$;

3) оформить вычислительный блок Given с привлечением функции maximize или minimize;

4) получить значения $f(x)_{опт}$ и $x_{опт}$.

2. Проанализировать полученный результат.

Обрати внимание! Для поиска значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет максимальное или минимальное значение используются функции maximize $(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и minimize $(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обе эти функции реализованы достаточно универсальным алгоритмами оптимизации. Эти функции должны использоваться в составе вычислительного блока, открываемого директивой Given, и возвращают вектор неизвестных, при котором заданная функция имеет максимальное или минимальное значение. Внутри блока могут быть различные ограничительные условия в виде равенств или неравенств. Число условий ограничено только памятью ПК. Перед блоком решения нужно задать начальные значения искомых переменных.

Объективности ради надо заметить, что результаты решения сильно зависят от выбора начальных значений и далеко не всегда имеют погрешность, устраивающую пользователя.

Пример выполнения лабораторной работы

Из круглой заготовки изготавливается пожарное ведро по простой технологии: вырезается сектор, затем полученная таким образом выкройка сворачивается в конус, а шов сваривается.

Длина дуги выкройки становится длиной окружности в основании конуса

$$2\pi R - \frac{2\pi R\alpha}{360} = 2\pi r,$$

где R — радиус заготовки; α — значение угла вырезки; r — радиус основания конуса.

Высота конуса h, радиус его основания r и радиус заготовки R связаны теоремой Пифагора.

Пусть радиус заготовки равен одному метру: R = 1. Длина окружности основания конуса $r(\alpha) = R\left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)$, высота конуса $h(\alpha) = R\sqrt{1 - r(\alpha)^2}$, объем конуса $V(\alpha) = \dfrac{\pi}{3} r(\alpha)^2 h(\alpha)$.

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид (рис. 3.4).

Требуется рассчитать значение угла вырезки α, при котором объем $V(\alpha)$ будет максимальным, угол α задается в радианной мере.

При решении задачи воспользуемся встроенной функцией интегрированной математической системы MathCAD maximize (f, $var1$, $var2$, …), возвращающей значения переменных $var1$, $var2$, …, которые доставляют функции f максимальное значение.

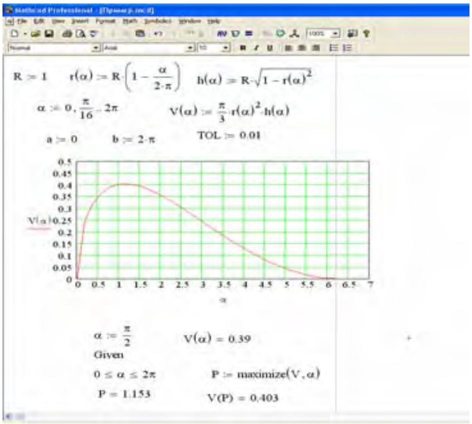


Рис. 3.4

Решение задачи с использованием панели программирования приведено на рис. 3.5.

$$
\text{мах\_зол\_сеч}(V,a,b) := \left|
\begin{array}{l}
\beta \leftarrow 1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\
\lambda 1 \leftarrow a + (1-\beta)\cdot(b-a) \\
\mu 1 \leftarrow a + \beta\cdot(b-a) \\
V1 \leftarrow V(\lambda 1) \\
V2 \leftarrow V(\mu 1) \\
\text{while } |a-b| > TOL \\
\quad \left| \begin{array}{l}
\text{if } V1 > V2 \\
\quad \left| \begin{array}{l}
b \leftarrow \mu 1 \\
\mu 1 \leftarrow \lambda 1 \\
V2 \leftarrow V1 \\
\lambda 1 \leftarrow a + (1-\beta)\cdot(b-a) \\
V1 \leftarrow V(\lambda 1)
\end{array} \right. \\
\text{otherwise} \\
\quad \left| \begin{array}{l}
a \leftarrow \lambda 1 \\
\lambda 1 \leftarrow \mu 1 \\
V1 \leftarrow V2 \\
\mu 1 \leftarrow a + \beta\cdot(b-a) \\
V2 \leftarrow V(\mu 1)
\end{array} \right.
\end{array} \right. \\
\begin{pmatrix} \dfrac{a+b}{2} \\ V\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \end{pmatrix}
\end{array} \right.
$$

$$
\text{мах\_зол\_сеч}(V,a,b) = \begin{pmatrix} 1.154 \\ 0.403 \end{pmatrix}
$$

Рис. 3.5

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) копию документа, созданного в MathCAD;

2) поясняющие записи из теории по теме лабораторной работы.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1. Вычислить максимальное значение функции $f(x) = 72x + 6x^2 - 8x^3 - x^4$ на отрезке [1,5; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.

Вариант 2. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=2x-x^2-e^x$ на отрезке [1; 1,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.

Вариант 3. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=2\sin x-\mathrm{tg}\,x$ на отрезке [0; $\pi/4$]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.

Вариант 4. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=1-32x+4x^2+x^4$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 5. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=1+4x+2x^2+x^4$ на отрезке [–1; 0]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 6. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=2+5x-10x^2+5x^3-x^5$ на отрезке [–3; –2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 7. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=3+120x-4x^2-x^4$ на отрезке [2,5; 3]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 8. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+2x^3-\frac{1}{7}x^7$ на отрезке [1,2; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 9. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=5x+x^2-\frac{1}{4}x^4$ на отрезке [1; 3]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 10. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=1+x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$ на отрезке [0; 1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 11. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4$ на отрезке [–1; 0,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 12. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+(x+1)^4$ на отрезке [–3; –1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 13. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+x^2-\frac{1}{5}x^5$ на отрезке [–1; –0,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 14. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=x-2x^2+\frac{1}{5}x^5$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 15. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=1-6x-3x^2-x^6$ на отрезке [–1; 0]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 16. Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x^2+3(5-x)^{4/3}$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 17. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=20x-5x^2+8x^{5/4}$ на отрезке [3; 3,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 18. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=80x-30x^2-\frac{1}{4}x^4$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 19. Вычислить максимальное значение функции $f(x)=1+2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6$ на отрезке [1; 1,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 20. Вычислить минимальное значение функции $f(x) = 10x\lg\left(\frac{x}{e}\right) - \frac{x^2}{2}$ на отрезке [0,5; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 21. Вычислить минимальное значение функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x\left(\lg\frac{x}{e} - 2\right)$ на отрезке [1,5; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 22. Вычислить минимальное значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(\ln x - 1)$ на отрезке [0,5; 1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 23. Вычислить максимальное значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (1+x)\times$ $\times\left(\ln(1+x) - 1\right)$ на отрезке [–0,5; 0,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 24. Вычислить минимальное значение функции $f(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x - 2x^2$ на отрезке [1,2; 2]. Точку x^*определить с точностью до 0,01.

Вариант 25. Вычислить максимальное значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - e^x - 2x$ на отрезке [–2; 1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит классический метод оптимизации функции одной переменной?
2. Какие функции называются унимодальными?
3. В чем состоит суть метода золотого сечения?
4. Какая точка выполняет золотое сечение отрезка [0;1]?

Лабораторная работа 4
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы — приобретение навыков решения транспортной задачи с составлением первоначального плана распределения поставок различными методами.

Программное обеспечение: табличный процессор MS Excel.

Теоретическое введение

Транспортная задача в общем виде формулируется следующим образом.

Пусть имеется m пунктов отправления грузов (или пунктов производства) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ и n пунктов назначения (или пунктов потребления) $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$. Обозначим запасы груза (или ресурсы производства) в i-м пункте отправления через a_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$, а потребность каждого j-го пункта потребления через b_j, где $j = 1, 2, \ldots, n$.

Заданы стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого i-го пункта до каждого j-го пункта потребления. Требуется определить, какое количество груза x_{ij} необходимо перевезти из i-го пункта отправления до каждого j-го пункта потребления, чтобы:

1) вывезти грузы всех поставщиков;
2) удовлетворить всех потребителей;
3) достичь минимального значения общей стоимости перевозок.

Условие задачи можно записать в виде таблицы, называемой матрицей планирования перевозок (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Поставщики	Потребители						Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{21} x_{21}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…

Окончание табл. 4.1

Поставщики	Потребители						Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{nj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_j	…	b_m	$\sum a_i = \sum b_j$

Строки таблицы соответствуют поставщикам, а столбцы — потребителям. В последней строке записаны заявки каждого потребителя, а в последнем столбце — запасы каждого поставщика.

В верхних правых углах внутренних клеток таблицы записываются истинные тарифы c_{ij}, а в нижних левых углах — планируемые перевозки x_{ij}.

Целью решения задачи является составление плана перевозок грузов, обеспечивающих минимальные транспортные расходы.

Модель транспортной задачи, для которой количество груза у всех поставщиков равно потребностям всех потребителей в данном грузе, называется закрытой, а сама транспортная задача сбалансированной. Модели, для которых суммарные запасы не равны суммарным потребностям, называются открытыми, а задачи — несбалансированными. Разрешимыми являются только закрытая модель или сбалансированная транспортная задача. Чтобы решить любую транспортную задачу, надо свести ее к закрытой модели, а затем найти решение сбалансированной задачи. Отметим, что любую открытую модель можно свести к закрытой введением фиктивного потребителя либо фиктивного поставщика.

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение функции цели

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ где } i = 1, 2, ..., m; \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ где } j = 1, 2, ..., n; \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \text{ где } i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n. \tag{4.4}$$

В рассматриваемой модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4.5}$$

О п р е д е л е н и е 4.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (4.2) и (4.3), определяемой матрицей $X = \left(x_{i,j}\right)$, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, называется планом транспортной задачи.

О п р е д е л е н и е 4.2. План $X^* = \left(x^*_{i,j}\right)$, где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, при котором функция (4.1) принимает минимальное значение, называется оптимальным планом.

Любое решение транспортной задачи называется распределением поставок.

При распределительном методе решения транспортной задачи последовательно используются расчетные таблицы, соответствующие тому или иному шагу решения. Каждая такая таблица включает определенное распределение поставок. Так как распределение поставок должно соответствовать базисному решению, то и клетки таблицы должны соответствовать основным (положительным) и неосновным (равным нулю) переменным. На практике в клетки, соответствующие основным переменным, записываются поставки, а клетки, которые соответствуют неосновным переменным, оставляют незаполненными (свободными). Решение транспортной задачи состоит в переходе от одного распределения поставок к другому: от одной таблицы к другой. Новое распределение поставок не должно увеличивать общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено их оптимальное распределение. Чтобы осуществлять переход от одного распределения поставок к другому, надо иметь исходное (первоначальное) распределение поставок.

Решение транспортной задачи обычно проводится в два этапа. На первом этапе находят какое-нибудь решение, удовлетворяющее системе линейных ограничений, или убеждаются, что такое решение не существует. Этот этап называется отысканием исходного опорного плана. На втором этапе проводится последовательное улучшение этого плана по определенным правилам до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение и дальнейшее улучшение станет возможным.

От того, каким будет исходный план, зависит время решения задачи на втором этапе.

Метод наименьшей стоимости

Метод наименьшей стоимости учитывает при построении исходного плана стоимость перевозок, т.е. истинные тарифы c_{ij}.

Определение значений x_{ij} начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки. Если таких клеток несколько, то выбирают любую из них. В выбранную клетку помещается поставка

$$x_{ij} = \min\left\{a_i, b_j\right\}.$$

Строка или столбец, соответствующие наименьшему числу, исключаются из дальнейшего рассмотрения (вычеркивается), а заявка потребителя или наличие запаса у поставщика уменьшается на соответствующую величину.

Если для выбранной клетки $a_i = b_j$, то из дальнейшего рассмотрения исключается i-я строка и j-й столбец.

Из оставшейся таблицы вновь выбирают клетку с наименьшей стоимостью и повторяют аналогичные действия до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности полностью удовлетворены.

Этот план позволяет получить опорный план транспортной задачи ближе к оптимальному по сравнению с методом северо-западного угла.

Полученный план необходимо проверить на вырожденность. Если количество заполненных клеток равно $m + n - 1$, то план является невырожденным, если же меньше, то он вырожденный.

Если план вырожденный, то среди незаполненных клеток ищут те, у которых минимальные тарифы перевозок. Их заполняют нулевыми поставками так, чтобы общее количество заполненных клеток стало $m + n - 1$.

При этом необходимо помнить, что в таблице не должно быть ни одного цикла, все вершины которого являются заполненными клетками.

Циклом в транспортной задаче называется замкнутый многоугольник, одна вершина которой совпадает с той клеткой, для которой он строится, а все остальные вершины совпадают с заполненными клетками. Вершины соединяются замкнутой ломанной линией, отрезки которой в каждой заполненной клетке образуют угол $90°$.

Нахождение оптимального плана транспортной задачи

Построенный одним из методов исходный опорный план можно довести до оптимального путем последовательного улучшения.

Существуют несколько таких методов: распределительный, метод потенциалов, венгерский метод и др. Рассмотрим метод потенциалов.

Метод потенциалов

Основой вычислительного процесса при улучшении опорного плана является определение критерия δ_{ij} оптимальности:

$$\delta_{ij} = c_{ij}^{*} - c_{ij},$$

где c_{ij}^{*} — расчетные затраты или косвенные тарифы, связанные с доставкой одной единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, определяемые для тех клеток опорного плана, ресурсы в которые не распределены (для незаполненных клеток); c_{ij} — затраты (истинные тарифы), связанные с доставкой одной единицей груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Т е о р е м а 4.1. Если для всех свободных клеток таблицы перевозок значение критерия оптимальности $\delta_{ij} \le 0$, то этот план перевозок является оптимальным.

Если для всех свободных клеток таблицы перевозок значение критерия оптимальности $\delta_{ij} < 0$, то этот оптимальный план перевозок является единственным.

Если для некоторых свободных клеток значение критерия оптимальности $\delta_{ij} = 0$, то этот оптимальный план перевозок не является единственным.

Если имеются свободные клетки, для которых критерий оптимальности $\delta_{ij} > 0$, то полученный план перевозок не является оптимальным.

Алгоритм метода потенциалов

1. Каждому поставщику A_i, где i = 1, 2, …, m, ставится в соответствие некоторое число U_i, где i = 1, 2, …, m, которое называется потенциалом A_i-го поставщика или i-й строки.

2. Каждому потребителю B_j, где j = 1, 2, …, n, ставится в соответствие некоторое число V_j, которое называется потенциалом B_j-го потребителя или j-го столбца.

3. Для каждой заполненной клетки, т.е. для каждой базисной переменной, строится соотношение

$$U_i + V_j = c_{ij}.$$

Получают систему с числом уравнений, равным количеству базисных переменных (количеству заполненных клеток).

Из этой системы определяют неизвестные потенциалы строк U_i и столбцов V_j.

Поскольку число неизвестных $n + m$ превышает на единицу число уравнений $m + n - 1$, одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например, $U_1 = 0$ и найти значения остальных неизвестных. Значения потенциалов записываются в ту же матрицу планирования перевозок.

4. Для каждой незаполненной клетки, т.е. для каждой небазисной переменной, рассчитываются косвенные тарифы c_{ij}^* по формуле

$$c_{ij}^* = U_i + V_j.$$

5. Проверяют полученный план на оптимальность по критерию δ_{ij} оптимальности опорного плана транспортной задачи. Если для каждой незаполненной клетки выполняется условие

$$\delta_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij} \le 0,$$

то исходный план является оптимальным.

Если некоторое $\delta_{ij} > 0$, то необходимо перейти к новому базисному плану путем перемещения перевозки в клетку, отвечающую условию $\max \delta_{ij}$. Если таких клеток несколько, то выбирают любую из них.

Построение цикла пересчета и перераспределение поставок

1. Для перераспределения поставок строят цикл, соединяющий выбранную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки.

Цикл строится следующим образом. Вычеркиваются все строки и столбцы, содержащие ровно одну заполненную клетку. При этом считается, что выбранная клетка без поставки является заполненной. Все оставшиеся после вычеркивания клетки составляют цикл и лежат в его углах. Они соединяются ломаной линией.

Можно доказать, что для любой незаполненной клетки матрицы перевозок существует цикл и он является единственным.

2. В каждую клетку цикла, начиная с незаполненной, поочередно вписываем знаки «+» и «–». Так как у цикла четное количество вершин, то знаки будут чередоваться по кругу.

3. В клетках с отрицательными знаками выбирается минимальная величина поставки и обозначается Δ.

4. В те вершины, которые имеют знак «+» прибавляется еще поставка Δ, а в вершинах со знаком «–» поставки уменьшают на величину Δ. При этом суммы поставок по строкам a_i и по столбцам b_j не изменятся.

5. В результате этого действия, называемого пересчетом поставок по циклу, клетка, для которой строился цикл, станет занятой, а в одной из бывших занятых окажется нулевая поставка и ее надо объявить свободной. Общее количество заполненных клеток не изменится, следовательно, новый полученный план перевозок является невырожденным.

6. Если в результате пересчета одновременно в нескольких ранее занятых клетках поставки примут нулевые значения, то свободной объявляется лишь одна из них. Остальные считаются условно занятыми с нулевыми поставками.

7. Значения переменных, включенных в цикл, после пересчета переносятся в новую таблицу. Все остальные переменные записываются в новую таблицу без изменений.

8. Полученный новый базисный план проверяется на оптимальность.

9. Такое улучшение плана можно проводить до тех пор, пока все критерии для незаполненных клеток окажутся $\delta_{ij} \leq 0$. Затем вычисляется оптимальная стоимость перевозок.

Последовательное применение метода потенциалов обеспечивает монотонное убывание значений целевой функции Z транспортной задачи (общей стоимости перевозок всего груза). Он позволяет за конечное число шагов найти минимум Z.

Алгоритм нахождения оптимального плана перевозок в транспортной задаче

Оптимальный план перевозок находится по следующей схеме.

1. Строится исходный опорный план. Если он оказывается вырожденным, то вводятся условно занятые клетки с нулевыми поставками, дополняя число занятых клеток до $m + n - 1$.

2. Вычисляется значение целевой функции Z.

3. Строится система потенциалов, с помощью которой план проверяется на оптимальность. Если условие оптимальности выполнено, решение заканчивается, в противном случае — осуществляется переход к следующему шагу.

4. Выполняется пересчет поставок по циклу, загружается клетка, для которой не выполняется критерий оптимальности. Строится новый опорный план с числом занятых клеток, равным $m + n - 1$.

5. Выполняется переход к пункту 3.

Следует иметь в виду, что при решении транспортной задачи возможны случаи вырождения, которые встречаются, если при построении плана перевозок число заполненных клеток окажется меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае следует в свободные клетки ввести недостающее количество поставок, считая их нулевыми, но заполненными. Желательно вводить эти поставки в клетки с наименьшими тарифами. Однако если при выполнении дальнейших расчетов встречаются затруднения, например происходит зацикливание, надо поменять заполненную нулем клетку.

Порядок выполнения лабораторной работы

1) решить транспортную задачу в соответствии с предложенным вариантом с использованием ТП Excel;

2) найти исходный опорный план методом северо-западного угла для вариантов с нечетным номером и методом наименьшей стоимости для вариантов с четным номером;

3) найти оптимальный план транспортной задачи методом потенциалов.

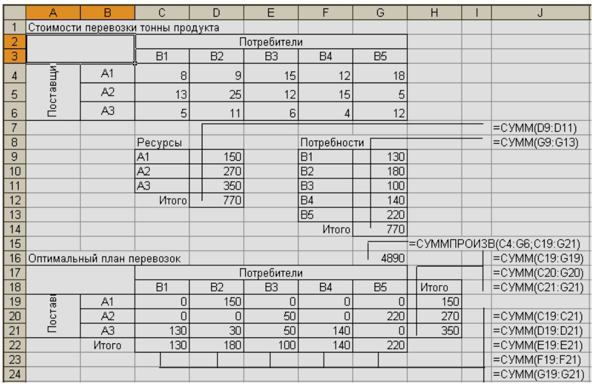
Пример выполнения лабораторной работы

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков $A1$, $A2$, $A3$ в количестве $a1$, $a2$, $a3$ тонн соответственно, необходимо доставить потребителям $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$ в количестве $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$ тонн. Стоимость C_{ij} перевозки тонны груза от i-го поставщика j-му потребителю задана матрицей D. Составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребности. Исходные данные приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

a_i	b_i				
	130	180	100	140	220
150	8	9	15	12	18
270	13	25	12	15	5
350	5	11	6	4	12

На рис. 4.1 приведено решение данной задачи в табличном процессоре MS Excel с помощью инструментального средства **Поиск решения**.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Стоимости перевозки тонны продукта									
2			Потребители							
3			B1	B2	B3	B4	B5			
4	Поставщи	A1	8	9	15	12	18			
5		A2	13	25	12	15	5			
6		A3	5	11	6	4	12			
7										=СУММ(D9:D11)
8			Ресурсы			Потребности				=СУММ(G9:G13)
9			A1	150		B1	130			
10			A2	270		B2	180			
11			A3	350		B3	100			
12			Итого	770		B4	140			
13						B5	220			
14						Итого	770			
15								=СУММПРОИЗВ(C4:G6;C19:G21)		
16	Оптимальный план перевозок						4890			=СУММ(C19:G19)
17			Потребители							=СУММ(C20:G20)
18			B1	B2	B3	B4	B5	Итого		=СУММ(C21:G21)
19	Постав	A1	0	150	0	0	0	150		
20		A2	0	0	50	0	220	270		=СУММ(C19:C21)
21		A3	130	30	50	140	0	350		=СУММ(D19:D21)
22		Итого	130	180	100	140	220			=СУММ(E19:E21)
23										=СУММ(F19:F21)
24										=СУММ(G19:G21)

Рис. 4.1

Последовательность решения:

1) подготовить таблицы и заполнить их исходными данными: **Стоимости перевозки тонны продукта** (D), **Ресурсы** (a) и **Потребности** (b);

2) с помощью функции **СУММ** найти суммы ресурсов (ячейка **D12**) и потребностей (**G14**);

3) подготовить таблицу оптимальных перевозок. Диапазон **C19:G21** заполнить начальными значениями — нулями;

4) с помощью функции **СУММ** найти суммы перевозок по потребителям (**C22:G22**) и поставщиками (**H19:H21**);

5) в ячейку **G16** ввести выражение стоимости оптимального плана перевозок;

6) запустить инструментальное средство **Поиск решения** (меню **Сервис/Поиск Решения**) и ввести необходимые параметры: адрес целевой ячейки, изменяемые ячейки и ограничения (рис. 4.2).

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) название лабораторной работы;

2) цель лабораторной работы;

3) задание;

4) результат решения в ТП Excel;

5) исходный опорный план, найденный методом северо-западного угла или методом наименьшей стоимости;

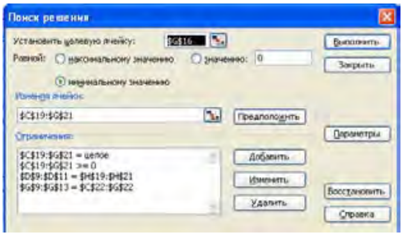


Рис. 4.2

6) последовательность шагов нахождения оптимального плана методом потенциала.

Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1—8. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков $A1$, $A2$, $A3$ в количестве $a1$, $a2$, $a3$ тонн соответственно, необходимо доставить потребителям $B1$, $B2$, $B3$, $B4$, $B5$ в количестве $b1$, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$ тонн. Стоимость C_{ij} перевозки тонны груза от i-го поставщика j-му потребителю задана матрицей D. Составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребности.

Транспортная задача применяется при решении экономических задач, которые по своему характеру не имеют ничего общего с транспортировкой груза, поэтому величины C_{ij} могут иметь различный смысл: означать стоимость, расстояние, время, производительность и т.д.

Варианты 9—16. Пусть на предприятии имеется m видов станков, максимальное время работы которых соответственно равно a_i, где i = 1,2, …, m часов. Каждый из станков может выполнять n видов операций. Суммарное время выполнения каждой операции соответственно b_j, j = 1, 2, …, n. Известна производительность (C_{ij}) i-го станка при выполнении j-й операции. Определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждый из станков, чтобы разработать максимальное количество деталей.

Для решения этой задачи линейную функцию умножить на –1, т.е. считать в таблице все значения C_{ij} отрицателными.

Варианты 17—25. Пусть имеется m лиц A_i, где i = 1, 2, …, m, которые могут выполнять B_j, где j = 1, 2, …, m различных работ. Известна производительность (C_{ij}) i-го лица на *j*-й работе. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждое лицо может быть назначено только на одну работу.

Умножая линейную функцию на –1, приводим задачу к транспортной, в которой объем запасов каждого поставщика и каждого потребителя равны единице.

Приведем сходные данные для вариантов.

Вариант 1

a_i	b_j				
	150	50	200	150	150
100	2	10	8	8	5
250	9	17	15	14	11
350	10	20	15	20	13

Вариант 2

a_i	b_j				
	300	200	50	150	100
250	5	3	15	1	10
250	10	10	20	6	15
300	13	10	22	8	7

Вариант 3

a_i	b_j				
	150	50	250	50	200
150	5	10	13	23	13
200	2	2	4	15	3
350	4	11	11	22	10

Вариант 4

a_i	b_j				
	100	250	100	150	200
250	13	17	2	14	5
250	15	16	2	15	7
300	4	7	1	4	2

Вариант 5

a_i	b_j				
	250	50	150	50	200
150	3	9	4	8	4
200	9	13	10	13	12
350	5	10	6	10	6

Вариант 6

a_i	b_j				
	200	100	50	400	100
400	7	11	4	4	3
200	11	13	7	6	5
250	13	18	10	10	9

Вариант 7

a_i	b_j				
	100	200	200	50	300
350	3	3	2	4	5
300	7	7	6	8	10
200	4	4	3	5	6

Вариант 8

a_i	b_j				
	50	250	100	150	50
150	4	2	2	3	2
200	6	3	3	4	4
250	6	4	4	6	4

Вариант 9

a_i	b_j				
	200	50	200	50	100
50	3	1	1	1	2
200	5	3	3	3	6
350	17	16	15	16	16

Вариант 10

a_i	b_j				
	350	200	100	50	50
100	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
300	6	6	8	6	8

Вариант 11

a_i	b_j				
	350	200	100	50	50
200	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
200	6	6	8	6	8

Вариант 12

a_i	b_j				
	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	6	26	12	20

Вариант 13

a_i	b_j				
	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	6	26	17	20

Вариант 14

a_i	b_j				
	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

Вариант 15

a_i	b_j				
	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

Вариант 16

a_i	b_j				
	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

Вариант 17

a_i	b_j				
	180	120	90	105	105
150	14	6	4	9	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	13	8

Вариант 18

a_i	b_j				
	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

Вариант 19

a_i	b_j				
	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

Вариант 20

a_i	b_j				
	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	48

Вариант 21

a_i	b_j				
	300	160	220	180	140
250	9	2	9	8	3
400	13	35	12	11	6
350	16	19	40	15	15

Вариант 22 (26)

a_i	b_j				
	150	170	190	210	180
250	7	9	16	10	16
350	13	12	18	12	20
300	19	15	10	13	13

Вариант 23

a_i	b_j				
	160	120	100	150	170
250	14	11	9	13	18
180	6	15	14	4	14
270	7	19	11	6	13

Вариант 24

a_i	b_j				
	120	110	85	195	190
250	13	7	16	4	11
250	20	9	6	10	9
200	2	4	7	3	6

Вариант 25

a_i	b_j				
	160	160	180	220	280
350	6	11	10	14	18
300	17	6	4	11	9
350	12	8	19	10	13

Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Каков общий вид матрицы планирования перевозок?
3. Какой вид имеет математическая модель транспортной задачи?
4. Какие модели транспортной задачи называются открытыми и закрытыми?
5. Когда транспортная задача является разрешимой?
6. Что называется планом транспортной задачи?
7. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?
8. Какие существуют способы отыскания исходного опорного плана?
9. Охарактеризуйте метод северо-западного угла.
10. Какой опорный план является вырожденным?
11. Как следует поступать, если план оказался вырожденным?
12. Что называется циклом в транспортной задаче? Какие конфигурации циклов могут быть?
13. Охарактеризуйте метод наименьшей стоимости.
14. Дайте характеристику метода двойного предпочтения.
15. Какие существуют способы улучшения исходного опорного плана для транспортной задачи?
16. Что в транспортной задаче является критерием оптимальности?
17. Как с помощью критерия оптимальности узнать, является ли опорный план для транспортной задачи оптимальным?
18. Опишите алгоритм метода потенциалов.
19. Как строится цикл пересчета и перераспределения поставки в методе потенциалов?
20. Опишите алгоритм нахождения оптимального плана перевозок в транспортной задаче.

Список рекомендуемой литературы

1. *Акулич, И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. М. : Высш. шк., 1986. 319 с.

2. *Кузнецов, Ю.Н.* Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. М. : Высш. шк., 1980. 300 с.

3. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Методы оптимизации в инженерных задачах» / сост. А.Д. Скроходова, Н.А. Михайлова, А.А. Чураков ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Волгоград : ВолгГАСУ, 2001. 36 с.

4. *Ногин, В.Д.* Основы теории оптимизации / В.Д. Ногин, И.О. Протодьяконов, И.И. Евлампиев. М. : Высш. шк., 1986. 383 с.

5. *Фурунжиев, Р.И.* Применение математических методов и ЭВМ : практикум : учеб. пособие для вузов / Р.И. Фурунжиев, Ф.М. Бабушкин, В.В. Варавко. Мн. : Выш. шк., 1998. 191 с.

6. Решение транспортной задачи : методические указания к лабораторной работе по дисциплинам «Методы оптимизации при решении инженерных задач», «Математическое обеспечение технологических процессов» / сост. Н.Н. Потапова, Т.В. Ерещенко, А.В. Жиделев ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. 27 с.

Учебное издание

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ**

Лабораторный практикум
2-е изд., перераб. и доп.

Составители
Забродина Ольга Михайловна,
Михайлова Наталия Анатольевна,
Скороходова Алевтина Дмитриевна

Начальник РИО *О.Е. Горячева*
Зав. редакцией *М.Л. Песчаная*
Редактор *О.А. Шипунова*
Компьютерная правка и верстка *О.В. Горячева*
Дизайн обложки *В.В. Гуркин*

Подписано в свет 06.05.11. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1,7. Объем данных 1,24 МБ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, г. Волгоград, ул. Академическая, 1