Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет
Кафедра высшей математики

Линейная алгебра и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе 1

Волгоград 2011

УДК 512.64+514.12(076.5)

Линейная алгебра и аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе 1 [Электронный ресурс]. Электронные текстовые и графические данные (635 кБ) / сост. Н.А. Болотина, К.В. Катеринин, Р.К. Катеринина, И.П. Руденок // Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет : официальный сайт. Волгоград : ВолгГАСУ, 2011. 22 с. Системные требования: программное обеспечение Adobe Reader 6.0. Режим доступа: http:www.vgasu.ru/publishing/on-line/

№ гос. регистрации

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов сокращенной формы обучения института дистанционного обучения всех специальностей техники и технологии по дисциплине «Математика».

План выпуска учеб.-метод. документ. 2011 г., поз. 25

Начальник РИО *О.Е. Горячева*
Зав. редакцией *М.Л. Песчаная*
Редактор *О.А. Шипунова*
Компьютерная правка и верстка *О.В. Горячева*

Подписано в свет 10.03.11. Гарнитура Таймс. Уч.-изд. л. 0,9. Объем данных 635 кБ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1.1. Основные определения

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1}$$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ или Δ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Определители второго порядка, входящие в правую часть равенства (2), получаются из данного определителя третьего порядка вычеркиванием одной строки и одного столбца, на пересечении которых стоят элементы a_1, b_1, c_1. Формула (2) называется формулой разложения определителя по элементам первой строки.

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. По формулам (2) и (1) получим

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-2) - 3(15-1) + 4(10+2) = -10.$$

1.1.2. Решение невырожденных систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Определителем системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y и z

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3 \end{cases} \tag{3}$$

называется определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Определители $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$

называются *дополнительными определителями*.

Если определитель системы Δ отличен от нуля, то система называется *невырожденной* и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (4)$$

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y - z = 3, \\ 3x + 5y = 3. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение данной системы можно найти по формулам Крамера. Для этого вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам (4) получим

$$x = \frac{18}{18} = 1,\ y = \frac{0}{18} = 0,\ z = \frac{-36}{18} = -2.$$

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.2.1. Основные определения

Вектором называется отрезок, имеющий определенную длину и направление. Вектор обозначается или указанием его начала и конца $\overrightarrow{AB}$ (точка A — начало, B — конец вектора), или одной буквой, например, $\vec{a}$.

Длина вектора, называемая также *модулем*, обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Коллинеарные векторы лежат на одной или параллельных прямых, *компланарные* — на одной или параллельных плоскостях.

Взаимно противоположные векторы равны по длине и противоположны по направлению. Векторы, противоположные векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$, обозначают $\overrightarrow{BA}$ и $-\vec{a}$.

Вектор, модуль которого равен 1, называется *единичным*.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* этого направления и обозначается $\vec{a}_0$.

Вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$.

Орты, имеющие направление прямоугольных координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* обозначаются соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Каждый вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен на сумму векторов, параллельных ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,

$$\vec{a}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}. \qquad (5)$$

Числа *X*, *Y*, *Z* называются *прямоугольными декартовыми координатами* вектора $\vec{a}$ и являются его *проекциями* на соответствующие координатные оси.

Равенство (5) может быть записано в виде $\vec{a}=\{X;Y;Z\}$ или $\vec{a}(X;Y;Z)$.

Если заданы точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}=\{X;Y;Z\}$ находятся по формулам

$$X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1, \qquad (6)$$

а его длина равна

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (7)$$

Используя формулу (7) можно найти расстояние между точками $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (8)$$

1.2.2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (9)$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1).

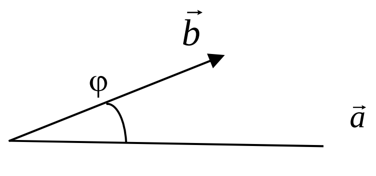


Рис. 1

Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2, \qquad (10)$$

а угол между ними — по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \qquad (11)$$

1.2.3. Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет трем требованиям:

1) перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) имеет длину, равную $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами;

3) направлен так, чтобы кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, если смотреть из конца вектора $\vec{a}\times\vec{b}$, совершался против часовой стрелки (рис. 2).

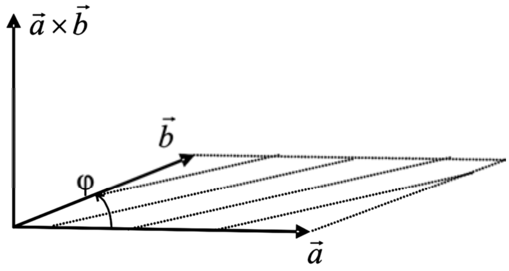


Рис. 2

Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равны одному и тому же числу $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, то для вычисления $S_{\text{пар}}$ используем формулу

$$S_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \qquad (12)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то векторное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

1.2.4. Смешанное произведение

Смешанным или *векторно-скалярным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое получится, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перемножить векторно, а полученный вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ умножить скалярно на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Геометрически смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ есть число, абсолютная величина которого равна объему V параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах, т.е.

$$V = \left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|.$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, вычисляется по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|. \tag{14}$$

Если векторы $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$ и $\vec{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\}$ заданы координатами, то их смешанное произведение равно

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Пример 3. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (1; 2; 3), A_2 (–2; 4; 1), A_3 (7; 6; 3), A_4 (4; –3; –1). Требуется найти:

1) координаты и модули векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$;

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объем пирамиды.

Решение. 1. Координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ найдем по формуле (6)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-2-1;\ 4-2;\ 1-3) = (-3;\ 2;\ -2);\ \overrightarrow{A_1A_4} = (4-1;\ -3-2;\ -1-3) = $$
$$= (3;\ -5;\ -4).$$

Модули векторов вычислим по формуле (7)

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-3)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{17};\ \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{3^2+(-5)^2+(-4)^2} = 5\sqrt{2}.$$

2. Угол между ребрами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$ найдем как угол между соответствующими векторами по формуле (11)

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

В числителе стоит скалярное произведение векторов, по формуле (10) оно равно

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = (-3)3 + 2(-5) + (-2)(-4) = -9 - 10 + 8 = -11.$$

Теперь находим

$$\cos\varphi = \frac{-11}{\sqrt{17}\cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{11}{5\sqrt{34}};\ \varphi = \arccos\left(-\frac{11}{5\sqrt{34}}\right) = 112^\circ 10'.$$

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, по формуле (12)

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Для этого сначала определим координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(7-1;\,6-2;\,3-3)=(6;\,4;\,0).$$

Векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$ найдем по формуле (13):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 6 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=8\vec{i}-12\vec{j}-24\vec{k}.$$

Длина этого вектора равна

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{8^2+(-12)^2+(-24)^2}=\sqrt{784}=28.$$

Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна

$$S=\frac{1}{2}28=14.$$

4. Данная пирамида построена на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$, поэтому ее объем найдем по формуле (14)

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|.$$

Сначала вычислим смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -2\\ 6 & 4 & 0\\ 3 & -5 & -4\end{vmatrix}=180.$$

Потом найдем

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}180=30.$$

1.3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.3.1. Прямая на плоскости. Различные уравнения

В прямоугольной системе координат Oxy уравнение первой степени относительно переменных x и y

$$Ax+By+C=0 \qquad (16)$$

определяет некоторую прямую (коэффициенты A и B не равны нулю одновременно). Здесь x и y — координаты любой точки, лежащей на этой прямой. Уравнение (16) называется *общим уравнением прямой*.

Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy, может быть представлено в виде

$$y = kx + b, \tag{17}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой, α — угол наклона прямой к оси Ox; b — отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy (с учетом знака).

Если угол α острый, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и прямая возрастает (рис. 3, *а*), а если угол α тупой, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и прямая убывает (рис. 3, *б*).

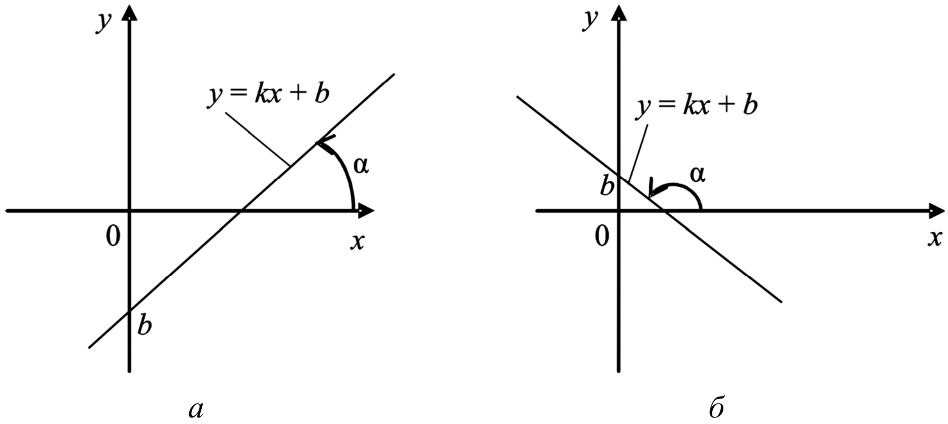


Рис. 3

Уравнение (17) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0\,(x_0; y_0)$ в заданном направлении (известен угловой коэффициент), имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{18}$$

Если известны две точки $M_1\,(x_1; y_1)$ и $M_2\,(x_2; y_2)$, то прямая, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{19}$$

Расстояние d от точки $M_0\,(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{20}$$

1.3.2. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то угол φ между этими прямыми определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{21}$$

Формула (21) определяет один из углов между прямыми. Второй угол равен $\pi - \varphi$ (рис. 4).

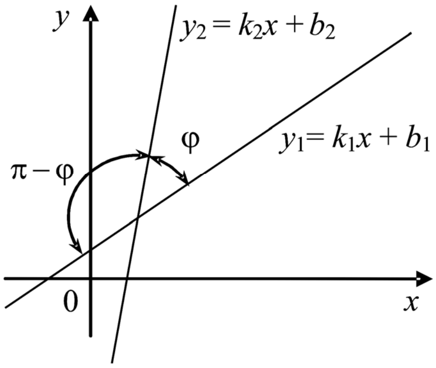


Рис. 4

Если прямые параллельны, то угол между ними равен нулю и $k_1 = k_2$.

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = 90°$ и

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (22)$$

Пример 4. Даны координаты вершин треугольника: *A* (6; –1), *B* (0; 7), *C* (2; 1). Требуется найти:

1) уравнение и длину стороны *BC*;

2) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины *A*;

3) уравнение медианы, проведенной из вершины *A*;

4) площадь треугольника.

Сделать чертеж.

Решение. 1. Сторону *BC* можно рассматривать как прямую, проходящую через две заданные точки *B* (0; 7) и *C* (2; 1), поэтому для составления ее уравнения воспользуемся формулой (19)

$$\frac{y-7}{1-7} = \frac{x-0}{2-0};\ \frac{y-7}{-6} = \frac{x}{2};\ 2\left(y-7\right) = -6x.$$

После преобразований получим

$$3x + y - 7 = 0.$$

Это общее уравнение прямой *BC*. Решим его относительно *y* и получим уравнение с угловым коэффициентом

$$y = -3x + 7.$$

Из него найдем угловой коэффициент прямой *BC*

$$k_{BC} = -3.$$

Длину стороны *BC* найдем как расстояние между двумя точками *B* и *C* по формуле (8)

$$|BC| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

2. Высоту, проведенную из вершины A (прямая AK на рис. 5), будем рассматривать как прямую, проходящую через данную точку A (6; –1) перпендикулярно прямой BC. Тогда по условию перпендикулярности двух прямых по формуле (22) найдем

$$k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Уравнение высоты AK составим по формуле (18)

$$y-(-1) = \frac{1}{3}(x-6) \text{ или } x-3y-9=0.$$

Длину высоты AK найдем как расстояние от точки A до прямой BC по формуле (20)

$$|AK| = \frac{|3\cdot 6-1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

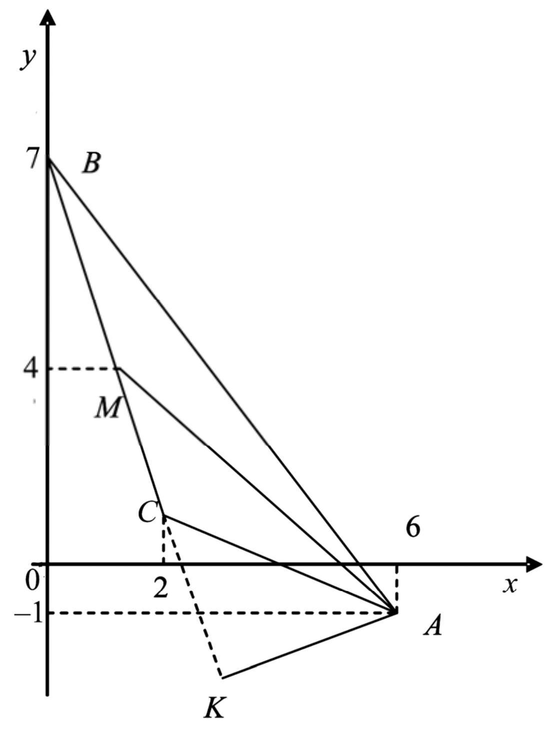


Рис. 5

3. Медиана из вершины A делит противоположную сторону BC пополам. Известно, что координаты середины отрезка (обозначим эту точку M) равны полусуммам одноименных координат концов, т.е.

$$x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1;\ y_M = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Теперь составим уравнение медианы AM, так как известны две точки A (6; –1) и M (1; 4), лежащие на ней,

$$\frac{y-(-1)}{4-(-1)} = \frac{x-6}{1-6};\ \frac{y+1}{4+1} = \frac{x-6}{-5}.$$

После преобразований получим уравнение медианы AM

$$X + y - 5 = 0.$$

4. Площадь треугольника найдем по известной формуле

$$S = \frac{1}{2}|AK||BC| = \frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10} = 10.$$

В системе координат Oxy строим треугольник, высоту AK и медиану AM (см. рис. 5).

1.3.3. Кривые второго порядка

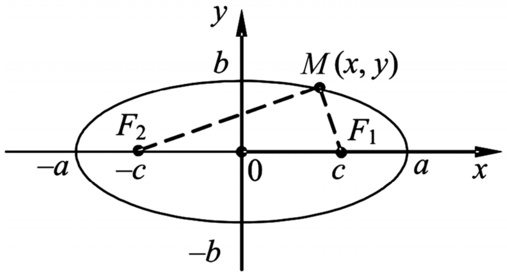
Кривыми второго порядка называются линии, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второй степени. К ним относятся эллипс, гипербола и парабола.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

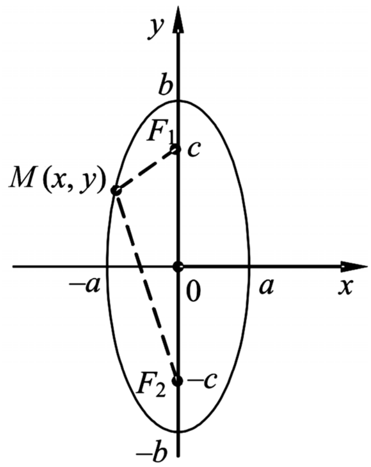
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{23}$$

где a, b — полуоси эллипса.

График эллипса представлен на рис. 6. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, расстояние между ними равно $2c$. При $a > b$ фокусы лежат на оси Ox и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (рис. 6, *а*). При $a < b$ фокусы лежат на оси Oy и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ (рис. 6, *б*).



а



б

Рис. 6

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{24}$$

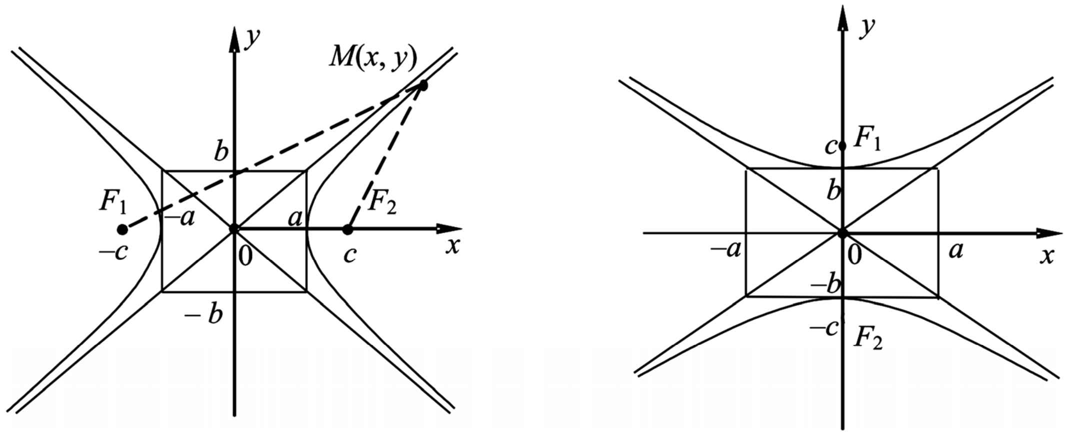
где a — действительная, b — мнимая полуоси гиперболы.

График этой гиперболы представлен на рис. 7, *а*.

График на рис. 7, *б* соответствует уравнению гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{25}$$

где a — мнимая, b — действительная полуоси гиперболы.



а *б*

Рис. 7

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы, половина расстояния между ними определяется соотношением

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{26}$$

где $p > 0$ — параметр параболы.

Уравнению (26) соответствует график параболы на рис. 8.

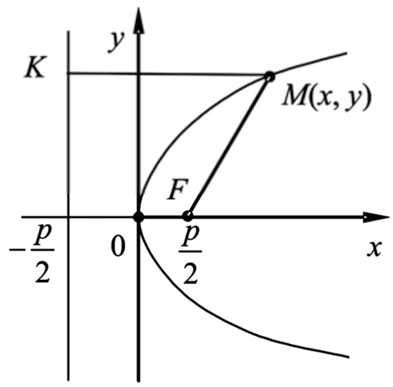


Рис. 8

Параболы, заданные уравнениями

$$y^2 = –2px; \tag{27}$$

$$x^2 = 2py; \tag{28}$$

$$x^2 = –2py, \tag{29}$$

представлены на рис. 9, *а*, *б*, *в* соответственно.

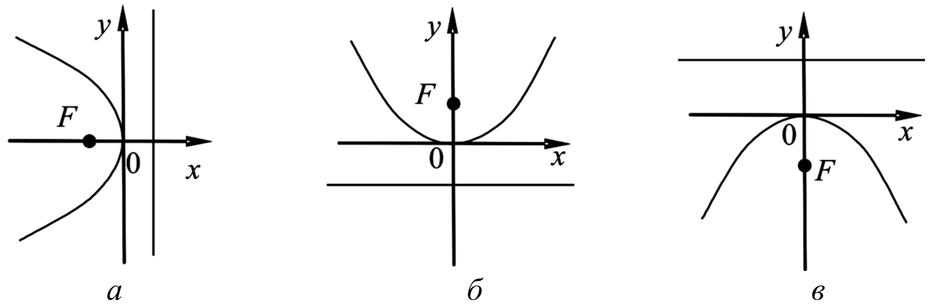


Рис. 9

Пример 5. Определить и построить кривые:

1) $3x^2 + 4y^2 = 12$; 2) $9x^2 - 4y^2 = 36$; 3) $x^2 = -\dfrac{4}{3}y$.

Решение. 1. Приведем уравнение $3x^2 + 4y^2 = 12$ к каноническому виду. Для этого обе части уравнения разделим на свободный член, т.е. на 12,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

По уравнению (23) устанавливаем, что это эллипс (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них одинаковые положительные). Из полученного уравнения определяем полуоси $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Строим эллипс (рис. 10).

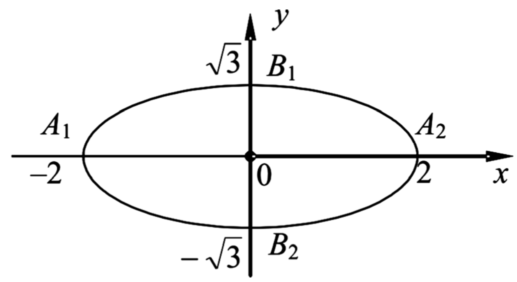


Рис. 10

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами эллипса.

2. Приведем уравнение $9x^2 - 4y^2 = 36$ к каноническому виду, разделив обе части уравнения на 36,

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

По уравнению (24) устанавливаем, что дана гипербола (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них разные). Положительному знаку при x^2 геометрически соответствует пересечение кривой с осью Ox.

Построение гиперболы начинаем с характеристического прямоугольника со сторонами $2a = 4$ и $2b = 6$; проводим его диагонали. Они служат асимптотами гиперболы. Затем строим кривую, обращая внимание на то, что при удалении в бесконечность точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам. Точки A_1 и A_2 называются вершинами гиперболы и лежат на оси Ox, которая в этом случае называется действительной осью симметрии гиперболы (рис. 11).

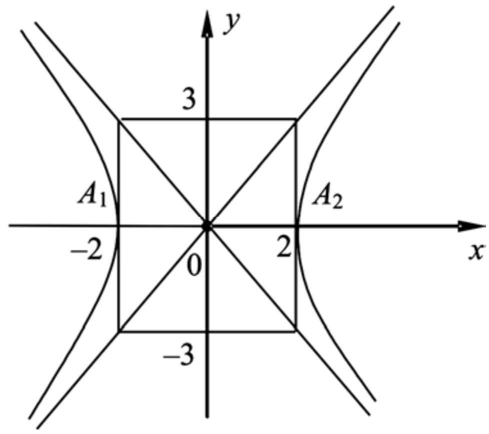


Рис. 11

3. По уравнению (29) устанавливаем, что при наличии в уравнении $x^2 = -\frac{4}{3}y$ квадрата только одной переменной (x) и первой степени другой (y) задано каноническое уравнение параболы, ветви которой симметричны оси Oy и направлены вниз (рис. 12).

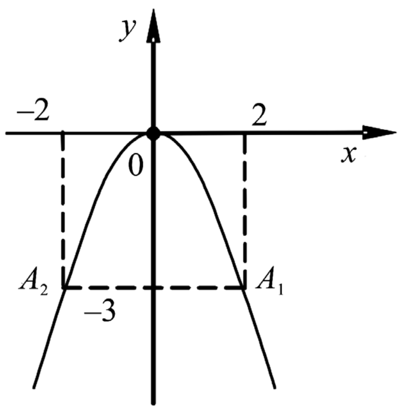


Рис. 12

Для уточнения графика найдем на параболе дополнительные точки. Например, при $y = -3$ из данного уравнения параболы получим $x^2 = -4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Точки A_1 (2; –3) и A_2 (–2; –3) расположены на кривой симметрично относительно оси Oy.

1.4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.4.1. Плоскость

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{30}$$

определяет некоторую плоскость.

Здесь x, y, z — координаты любой точки, лежащей на этой плоскости, они называются *текущими координатами*. Уравнение (30) называется общим уравнением плоскости. Числа A, B, C в уравнении (30) являются координатами вектора $\vec{N}=\{A;B;C\}$, перпендикулярного к этой плоскости и называемого *нормальным вектором плоскости*.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{A;B;C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{31}$$

Если заданы три точки M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, M_3 $(x_3;\ y_3;\ z_3)$, то плоскость, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{32}$$

Расстояние d от точки M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|. \tag{33}$$

1.4.2. Прямая в пространстве

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, поэтому в прямоугольной системе координат прямая задается двумя уравнениями первой степени.

Пусть прямая проходит через данную точку M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{a}=(l,m,n)$, тогда ее уравнения имеют вид

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{34}$$

Уравнения (34) называются каноническими уравнениями прямой, а вектор $\vec{a}$ — направляющим вектором прямой.

Если на прямой заданы две точки M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и M_2 $(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно использовать вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$ и уравнения прямой записать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{35}$$

Пример 6. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (1; 2; 3), A_2 (–2; 4; 1), A_3 (7; 6; 3), A_4 (4; –3; –1). Требуется найти:

1) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

2) уравнения прямой A_1A_2;

3) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ и ее длину.

Решение. 1. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ составим по формуле (32), так как известны три точки, лежащие на ней,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & 4-2 & 1-3 \\ 7-1 & 6-2 & 3-3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим последнее выражение и после преобразований получим общее уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$2x - 3y - 6z + 22 = 0.$$

2. Прямая A_1A_2 проходит через заданные точки. Поэтому ее уравнения составим по формуле (35)

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-3}{1-3} \text{ или } \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}.$$

3. Из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ $2x - 3y - 6z + 22=0$ найдем координаты нормального вектора этой плоскости $\vec{N} = \{2;-3;-6\}$.

Для высоты пирамиды, опущенной из вершины A_4 (4; –3; –1), вектор $\vec{N}$ можно принять за направляющий, поэтому по формуле (34) получим уравнения высоты:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-6}.$$

Длину высоты найдем как расстояние от точки A_4 до плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (33):

$$d = \frac{|2\cdot 4 + 3\cdot 3 + 6\cdot 1 + 22|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2}} = 6\frac{3}{7}.$$

2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4.

Требуется найти:

1) координаты и модули векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$;

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объем пирамиды;

5) уравнения плоскости $A_1A_2A_3$;

6) уравнения прямой A_1A_2;

7) уравнение высоты и ее длину, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

Вариант 1. $A_1(–1; 2; 1)$, $A_2(–2; 2; 5)$, $A_3(–3; 3; 1)$, $A_4(–1; 4; 3)$.
Вариант 2. $A_1(–2; 1; –1)$, $A_2(–3; 1; 3)$, $A_3(–4; 2; –1)$, $A_4(–2; 3; 1)$.
Вариант 3. $A_1(1; 1; 2)$, $A_2(0; 1; 6)$, $A_3(–1; 2; 2)$, $A_4(1; 3; 4)$.
Вариант 4. $A_1(–1; –2; 1)$, $A_2(–2; –2; 5)$, $A_3(–3; –1; 1)$, $A_4(–1; 0; 3)$.
Вариант 5. $A_1(2; –1; 1)$, $A_2(1; –1; 5)$, $A_3(0; 0; 1)$, $A_4(2; 1; 3)$.
Вариант 6. $A_1(–1; 1; –2)$, $A_2(–2; 1; 2)$, $A_3(–3; 2; –2)$, $A_4(–1; 3; 0)$.
Вариант 7. $A_1(1; 2; 1)$, $A_2(0; 2; 5)$, $A_3(–1; 3; 1)$, $A_4(1; 4; 3)$.
Вариант 8. $A_1(–2; –1; 1)$, $A_2(–3; –1; 5)$, $A_3(–4; 0; 1)$, $A_4(–2; 1; 3)$.
Вариант 9. $A_1(1; –1; 2)$, $A_2(0; –1; 6)$, $A_3(–1; 0; 2)$, $A_4(1; 1; 4)$.
Вариант 10. $A_1(1; –2; 1)$, $A_2(0; –2; 5)$, $A_3(–1; –1; 1)$, $A_4(1; 0; 3)$.
Вариант 11. $A_1(0; 3; 2)$, $A_2(–1; 3; 6)$, $A_3(–2; 4; 2)$, $A_4(0; 5; 4)$.
Вариант 12. $A_1(–1; 2; 0)$, $A_2(–2; 2; 4)$, $A_3(–3; 3; 0)$, $A_4(–1; 4; 2)$.
Вариант 13. $A_1(2; 2; 3)$, $A_2(1; 2; 7)$, $A_3(0; 3; 3)$, $A_4(2; 4; 5)$.
Вариант 14. $A_1(0; –1; 2)$, $A_2(–1; –1; 6)$, $A_3(–2; 0; 2)$, $A_4(0; 1; 4)$.
Вариант 15. $A_1(3; 0; 2)$, $A_2(2; 0; 6)$, $A_3(1; 1; 2)$, $A_4(3; 2; 4)$.
Вариант 16. $A_1(0; 2; –1)$, $A_2(–1; 2; 3)$, $A_3(–2; 3; 7)$, $A_4(0; 4; 1)$.
Вариант 17. $A_1(2; 3; 2)$, $A_2(1; 3; 6)$, $A_3(0; 4; 2)$, $A_4(2; 5; 4)$.
Вариант 18. $A_1(–1; 0; 2)$, $A_2(–2; 0; 6)$, $A_3(–3; 1; 2)$, $A_4(–1; 2; 4)$.
Вариант 19. $A_1(2; 0; 3)$, $A_2(1; 0; 7)$, $A_3(0; 1; 3)$, $A_4(2; 2; 5)$.
Вариант 20. $A_1(2; –1; 2)$, $A_2(1; –1; 6)$, $A_3(0; 0; 2)$, $A_4(2; 1; 4)$.
Вариант 21. $A_1(2; 1; –4)$, $A_2(1; –2; 3)$, $A_3(1; –2; –3)$, $A_4(5; –2; 1)$.
Вариант 22. $A_1(2; –1; 3)$, $A_2(–5; 1; 1)$, $A_3(0; 3; –4)$, $A_4(–1; –3; 4)$.
Вариант 23. $A_1(5; 3; 2)$, $A_2(1; –8; 8)$, $A_3(4; –1; 2)$, $A_4(1; 4; –1)$.
Вариант 24. $A_1(–2; 3; 4)$, $A_2(4; 2; –1)$, $A_3(2; –1; 4)$, $A_4(–1; –1; 1)$.
Вариант 25. $A_1(4; –4; 0)$, $A_2(–5; 3; 2)$, $A_3(8; 0; 1)$, $A_4(2; 2; 3)$.
Вариант 26. $A_1(–3; –4; 0)$, $A_2(0; –1; 3)$, $A_3(–6; 4; 2)$, $A_4(–3; 0; 3)$.
Вариант 27. $A_1(0; 4; –4)$, $A_2(5; 1; –1)$, $A_3(–1; –1; 3)$, $A_4(0; –3; 7)$.
Вариант 28. $A_1(0; –6; 3)$, $A_2(3; 3; –3)$, $A_3(–3; –5; 2)$, $A_4(–1; –4; 0)$.
Вариант 29. $A_1(2; –1; –3)$, $A_2(0; 0; 0)$, $A_3(5; –1; –1)$, $A_4(–1; –1; 1)$.
Вариант 30. $A_1(1; 5; 8)$, $A_2(–2; 1; 4)$, $A_3(3; –2; –3)$, $A_4(1; –1; 0)$.

Задание 2. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера.

Вариант 1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3=2. \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4, \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17, \\ x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8, \\ 2x_2+7x_3=17. \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ x_1-2x_2-x_3=4, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=9. \end{cases}$

Вариант 5. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ -x_1+2x_2+x_3=5, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-9. \end{cases}$

Вариант 6. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=0, \\ 4x_1-7x_2-6x_3=-8, \\ 7x_1-10x_2-5x_3=-2. \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=17, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=5. \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=26, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=24\,, \\ 2x_1-x_2-3x_3=2. \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=-3, \\ 7x_1-5x_2+x_3=0, \\ 4x_1+x_2-x_3=7. \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} x_1-3x_2-5x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=8, \\ 3x_1+x_2-7x_3=-4. \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=1, \\ 3x_1+x_2+x_3=-9, \\ 3x_1-5x_2-6x_3=-11. \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} x_1+5x_2-3x_3=12, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-7, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=16. \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2-3x_3=7, \\ 3x_1-x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8, \\ 2x_1-x_2+2x_3=6, \\ 4x_1+x_2+4x_3=18. \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3=7, \\ 4x_1+3x_2-9x_3=9, \\ x_1+8x_2-7x_3=12. \end{cases}$

Вариант 16. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1-5x_2+x_3=-2, \\ x_1-4x_2+x_3=-3. \end{cases}$

Вариант 17. $\begin{cases} x_1-2x_2-4x_3=-9, \\ -3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 4x_1+6x_2+3x_3=16. \end{cases}$

Вариант 18. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2+2x_3=5. \end{cases}$

Вариант 19. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=9, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=-5. \end{cases}$

Вариант 20. $\begin{cases} 3x_1-x_2=3, \\ 2x_1-x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+4x_3=15. \end{cases}$

Вариант 21. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=5, \\ 4x_1+3x_2+x_3=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3=7. \end{cases}$

Вариант 22. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3=9, \\ 3x_1+7x_2+6x_3=2, \\ 4x_1+2x_2+x_3=-4. \end{cases}$

Вариант 23. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=6, \\ 3x_1-x_2+x_3=1, \\ 5x_1+x_2+2x_3=12. \end{cases}$

Вариант 24. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=7, \\ x_1+x_2+x_3=2, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=-4. \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=-2, \\ 4x_1+x_2-3x_3=3. \end{cases}$

Вариант 26. $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=9, \\ x_1-x_2-3x_3=10, \\ x_1-3x_2-2x_3=5. \end{cases}$

Вариант 27. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=10, \\ x_1-3x_2-3x_3=2, \\ -x_1+3x_2-x_3=6. \end{cases}$

Вариант 28. $\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=2, \\ x_1-5x_2+5x_3=-27, \\ 4x_1+x_2-x_3=18. \end{cases}$

Вариант 29. $\begin{cases} 5x_1-x_2+2x_3=-6, \\ x_1+5x_2-x_3=13, \\ -3x_1-x_2+6x_3=6. \end{cases}$

Вариант 30. $\begin{cases} 7x_1-2x_2-x_3=5, \\ x_1+3x_2+2x_3=3, \\ -3x_1+x_2-4x_3=7. \end{cases}$

Задание 3. Даны координаты вершин треугольника *A*, *B*, *C*.
Требуется найти:
1) уравнение и длину стороны *BC*;
2) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины *A*;
3) уравнение медианы, проведенной из вершины *A*;
4) площадь треугольника.
Сделать чертеж.

Вариант 1. *A*(3; 1), *B*(–13; –11), *C*(–6; 13).
Вариант 2. *A*(26; –5), *B*(2; 2), *C*(–2; –1).

Вариант 3. $A(-2; 3)$, $B(-18; -9)$, $C(-11; 15)$.
Вариант 4. $A(28; 2)$, $B(4; -5)$, $C(0; -2)$.
Вариант 5. $A(8; -1)$, $B(-8; 11)$, $C(-1; -13)$.
Вариант 6. $A(17; -4)$, $B(-7; -11)$, $C(-11; -8)$.
Вариант 7. $A(9; -3)$, $B(-7; -15)$, $C(0; 9)$.
Вариант 8. $A(18; 3)$, $B(-6; 10)$, $C(-10; 7)$.
Вариант 9. $A(7; 4)$, $B(-9; -8)$, $C(-2; 16)$.
Вариант 10. $A(19; 3)$, $B(-5; -4)$, $C(-9; -1)$.
Вариант 11. $A(5; 1)$, $B(1; -2)$, $C(-4; 10)$.
Вариант 12. $A(14; 10)$, $B(-2; -2)$, $C(5; 22)$.
Вариант 13. $A(-13; 3)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 2)$.
Вариант 14. $A(22; -6)$, $B(-2; 1)$, $C(-6; -2)$.
Вариант 15. $A(22; 4)$, $B(-2; -3)$, $C(-6; 0)$.
Вариант 16. $A(6; 0)$, $B(2; -3)$, $C(-3; 9)$.
Вариант 17. $A(15; 9)$, $B(-1; -3)$, $C(6; 21)$.
Вариант 18. $A(-8; 3)$, $B(4; -2)$, $C(7; 2)$.
Вариант 19. $A(20; -2)$, $B(-4; 5)$, $C(-8; 2)$.
Вариант 20. $A(23; 5)$, $B(-1; -2)$, $C(-5; 1)$.
Вариант 21. $A(4; 7)$, $B(0; -2)$, $C(-1; 6)$.
Вариант 22. $A(7; 13)$, $B(1; 5)$, $C(-5; 4)$.
Вариант 23. $A(-6; -3)$, $B(1; 2)$, $C(-2; 0)$.
Вариант 24. $A(-9; 11)$, $B(4; 7)$, $C(-2; -1)$.
Вариант 25. $A(2; -8)$, $B(-3; 4)$, $C(-3; -1)$.
Вариант 26. $A(1; -12)$, $B(2; -2)$, $C(-8; 1)$.
Вариант 27. $A(4; -3)$, $B(-2; -1)$, $C(3; -2)$.
Вариант 28. $A(7; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 0)$.
Вариант 29. $A(-5; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-2; 3)$.
Вариант 30. $A(2; 6)$, $B(-6; 2)$, $C(-6; 4)$.

Задание 4. Определить и построить кривые.
Вариант 1. а) $16x^2 + 3y^2 = 48$; б) $x^2 - y^2 = 4$; в) $x^2 = -4y$.
Вариант 2. а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $x^2 - 18y^2 = 36$; в) $y^2 = -x$.
Вариант 3. а) $25x^2 + 6y^2 = 150$; б) $-x^2 + y^2 = 9$; в) $y^2 = 3x$.
Вариант 4. а) $4x^2 + 5y^2 = 20$; б) $x^2 - 25y^2 = 25$; в) $x^2 = -8y$.
Вариант 5. а) $9x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 - y^2 = 16$; в) $x^2 = 9$.
Вариант 6. а) $3x^2 + y^2 = 3$; б) $-10x^2 + y^2 = 10$; в) $y^2 = 5x$.
Вариант 7. а) $16x^2 + 5y^2 = 80$; б) $-4x^2 + 9y^2 = 36$; в) $y^2 = -8x$.
Вариант 8. а) $9x^2 + 3y^2 = 27$; б) $-x^2 + y^2 = 16$; в) $x^2 = 14y$.
Вариант 9. а) $25x^2 + 7y^2 = 175$; б) $4x^2 - 16y^2 = 64$; в) $x^2 = -15y$.
Вариант 10. а) $x^2 + y^2 = 5$; б) $-4x^2 + y^2 = 4$; в) $y^2 = 8x$.
Вариант 11. а) $9x^2 + 21y^2 = 189$; б) $x^2 - 3y^2 = 3$; в) $y^2 = -2x$.
Вариант 12. а) $x^2 + 5y^2 = 5$; б) $-4x^2 + y^2 = 4$; в) $2x^2 = 3y$.
Вариант 13. а) $3x^2 + 8y^2 = 24$; б) $x^2 - y^2 = 1$; в) $7x^2 = -2y$.
Вариант 14. а) $x^2 + 9y^2 = 1$; б) $16x^2 - 9y^2 = 144$; в) $y^2 = 7x$.
Вариант 15. а) $25x^2 + y^2 = 1$; б) $-x^2 + y^2 = 4$; в) $y^2 = -9x$.

Вариант 16. а) $16x^2 + 2y^2 = 32$; б) $9x^2 - 5y^2 = 45$; в) $x^2 = -7y$.
Вариант 17. а) $9x^2 + 4y^2 = 36$; б) $5x^2 - 4y^2 = 20$; в) $x^2 = y$.
Вариант 18. а) $16x^2 + 9y^2 = 144$; б) $-5x^2 + y^2 = 5$; в) $y^2 = 5x$.
Вариант 19. а) $9x^2 + 5y^2 = 45$; б) $x^2 - y^2 = 16$; в) $y^2 = -4x$.
Вариант 20. а) $4x^2 + y^2 = 4$; б) $-15x^2 + 4y^2 = 60$; в) $x^2 = 6y$.
Вариант 21. а) $x^2 + 3y^2 = 3$; б) $-9x^2 + 7y^2 = 63$; в) $x^2 = -y$.
Вариант 22. а) $16x^2 + y^2 = 160$; б) $3x^2 - 16y^2 = 48$; в) $y^2 = 4x$.
Вариант 23. а) $5x^2 + 9y^2 = 45$; б) $7x^2 - 16y^2 = 112$; в) $y^2 = -7x$.
Вариант 24. а) $4x^2 + 12y^2 = 1$; б) $16x^2 - y^2 = 64$; в) $2x^2 = 5y$.
Вариант 25. а) $81x^2 + 25y^2 = 1$; б) $-x^2 + 9y^2 = 81$; в) $3x^2 = -4y$.
Вариант 26. а) $7x^2 + y^2 = 7$; б) $4x^2 - 13y^2 = 52$; в) $3y^2 = -x$.
Вариант 27. а) $x^2 + 10y^2 = 10$; б) $9x^2 - 25y^2 = 225$; в) $2y^2 = x$.
Вариант 28. а) $10x^2 + 16y^2 = 1$; б) $-8x^2 + 9y^2 = 72$; в) $x^2 = -2y$.
Вариант 29. а) $25x^2 + y^2 = 25$; б) $4x^2 - 9y^2 = 1$; в) $x^2 = 3y$.
Вариант 30. а) $x^2 + 8y^2 = 16$; б) $-121x^2 + y^2 = 121$; в) $y^2 = -2x$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» ; Мир и образование, 2003. 304 с.

2. *Кадомцев, С.Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С.Б. Кадомцев. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 2001. 160 с.

3. *Шипачев, В.С.* Высшая математика / В.С. Шипачев. М. : Высш. шк., 2005. 479 с.