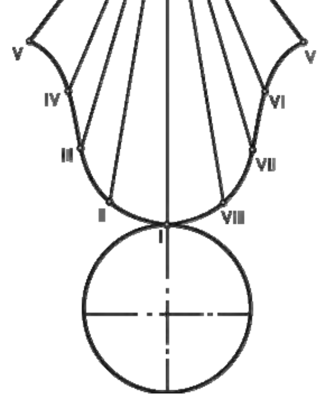
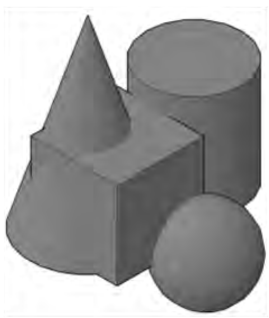
Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный
университет

Н. Ю. Ермилова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ОСНОВЫ КУРСА И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие





Волгоград
ВолгГАСУ
2012

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
Е 732

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат технических наук *Е. Н. Асеева*, доцент кафедры начертательной геометрии и компьютерной графики Волгоградского государственного технического университета;
кандидат технических наук *М. В. Цыганов,* доцент кафедры инженерной графики, стандартизации и метрологии Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Ермилова, Н. Ю.
Е 732 Начертательная геометрия: основы курса и примеры решения задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Ю. Ермилова ; М-во образования и науки Росс. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электрон. текстовые и графич. дан. (8,3 Мб). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 DVD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод DVD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана. — Имеется печатный аналог.
ISBN 978-5-98276-486-7

Представлен учебный материал по основным разделам курса начертательной геометрии, содержащий чертежи и примеры решения графических задач и предназначенный для глубокого самостоятельного освоения дисциплины.

Для студентов строительных специальностей, обучающихся по направлению 270800 «Строительство» (бакалавриат). Может быть также полезно студентам других специальностей, изучающих дисциплину «Начертательная геометрия».

Для удобства пользования книгой рекомендуем обращаться к электронному оглавлению, которое открывается с помощью пункта «Закладки» («Bookmarks») бокового вертикального меню.

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

ISBN 978-5-98276-486-7

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие адресовано студентам строительных специальностей при изучении теоретических основ и решении графических задач по начертательной геометрии в соответствии с ФГОС ВПО и программой учебной дисциплины для данных специальностей.

При разработке пособия автор стремилась к тому, чтобы изложение учебного материала отличалось достаточной простотой, последовательностью, полнотой и ясностью освещения рассматриваемых вопросов, грамотно и правильно подобранными и выполненными чертежами, четкостью и доступностью понимания решаемых задач и приведенных примеров.

Издание содержит учебный материал по основным разделам курса начертательной геометрии и примеры решения задач по следующим темам: «Метод проекций», «Проекции точки», «Проекции прямой», «Проекции плоскости», «Способы преобразования проекций», «Поверхности», «Пересечение поверхности плоскостью», «Пересечение поверхности прямой линией», «Взаимное пересечение поверхностей», «Проекции с числовыми отметками», «Аксонометрические проекции».

Предлагаемый курс начертательной геометрии предоставляет студентам ряд преимуществ. Прежде всего, освобождает их от необходимости написания подробного конспекта по дисциплине, что дает дополнительную возможность для визуального наблюдения и анализа за ходом графических построений и решения задач преподавателем и выработки в связи с этим умения не только слушать и запоминать, но и логически мыслить. Кроме этого, данный курс способствует более глубокому самостоятельному изучению учебного материала и облегчает работу с учебно-методической литературой, а содержащиеся в пособии примеры задач помогут студентам в получении навыков их практического решения и выполнения графических работ по начертательной геометрии.

По адресу http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ *доступно электронное издание, что позволяет использовать его студентам как дневной, так и заочной форм обучения.*

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки в пространстве обозначаются прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D,\dots$ или арабскими цифрами: 1, 2, 3, 4,…

Прямые и кривые линии в пространстве — строчными буквами латинского алфавита: $a, b, c, d,\dots$, а также проекциями точек, определяющих линию. Например, AB — прямая, проходящая через точки A и B.

Плоскости — строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \delta, \gamma,\dots$

Поверхности — прописными буквами греческого алфавита: $\Phi, \Theta, \Lambda,\dots$

2. Способ задания геометрического образа указывается в скобках рядом с обозначением геометрического образа. Например: $a\ (A,B)$ — прямая a задана двумя точками A и B; $\beta\ (a \cap b)$ — плоскость β задана двумя пересекающимися прямыми a и b; $\alpha\ (\Delta ABC)$ — плоскость α задана треугольником ABC.

3. Расстояние между геометрическими образами обозначаются двумя вертикальными отрезками. Например: $|AB|$ — расстояние между точками A и B (длина отрезка AB).

4. Плоскости проекций обозначаются прописной буквой греческого алфавита П. Например, горизонтальная плоскость проекций — Π_1; фронтальная плоскость проекций — Π_2; профильная плоскость проекций — Π_3.

Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций — буквой П с добавлением подстрочного индекса: Π_4, Π_5, $\Pi_6,\dots$

5. Оси проекций — x, y, z, где x — ось абсцисс; y — ось ординат; z — ось аппликат. Начало координат — цифрой 0.

При замене плоскостей проекций оси проекций обозначают: x_1, x_2, а начало координат — цифрами 0_1, 0_2.

6. Проекции точек, прямых и плоскостей обозначаются соответствующей буквой с добавлением подстрочного индекса, указывающего плоскость проекций: на плоскости Π_1 — A_1, a_1, $A_1B_1C_1$; на плоскости Π_2 — A_2, a_2, $A_2B_2C_2$; на плоскости Π_3 — A_3, a_3, $A_3B_3C_3$.

7. Углы наклона прямой или плоскости к плоскостям проекций обозначаются строчной буквой греческого алфавита φ. Например, угол наклона к плоскости Π_1 — φ_1; угол наклона к плоскости Π_2 — φ_2; угол наклона к плоскости Π_3 — φ_3.

Угол с вершиной в точке обозначается $\angle$. Например, $\angle\ ABC$ — угол с вершиной в точке B.

Прямой угол обозначается символом полукруга с точкой внутри сектора.

8. Особые прямые имеют постоянные обозначения:

а) линии уровня: горизонталь — h, фронталь — f;

б) следы плоскости обозначаются той же буквой, что и плоскость, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего плоскости проекций, например α_{Π_1} — горизонтальный след плоскости; α_{Π_2} — фронтальный след плоскости; α_{Π_3} — профильный след плоскости. Точки α_x, α_y, α_z — точки схода следов плоскости;

в) следы прямых обозначаются прописными буквами латинского алфавита M, N и P, где M — горизонтальный след прямой, N — фронтальный след прямой, P — профильный след прямой;

г) оси вращения — i, k, n .

9. Плоскость проекций в проекциях с числовыми отметками — Π_0.

Проекции точек на чертежах с числовыми отметками — той же буквой, что и натура, с добавлением числа, определяющего расстояние от точки до плоскости проекций: A_4, B_{-3}.

10. Аксонометрические оси проекций — x', y', z'. Аксонометрические проекции точек, прямых, плоской фигуры — буквами, соответствующими натуре, с добавлением значка «штрих»: A', $A'B'$, $A'B'C'$. Вторичные проекции — с добавлением подстрочного индекса: A'_1, $A'_1B'_1$, $A'_1B'_1C'_1$.

11. Основные операции:

а) совпадение геометрических образов $\equiv$, например $A_1 \equiv B_1$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

б) подобие геометрических образов $\sim$, например $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ — треугольники ABC и DEF подобны;

в) конгруэнтность геометрических образов $\cong$, например $\angle ABC \cong \angle DEF$ — угол ABC конгруэнтен углу DEF;

г) параллельность геометрических образов $||$, например $a || b$ — прямая a параллельна прямой b;

д) перпендикулярность геометрических образов $\perp$, например $b \perp h$ — прямая b перпендикулярна горизонтали h;

е) взаимная принадлежность геометрических образов $\in$, например $A \in b$ — точка A принадлежит прямой b (точка A лежит на прямой b);

ж) включение (содержание) геометрического образа $\subset$, например $AB \subset \alpha$ — прямая AB принадлежит плоскости α;

з) пересечение двух геометрических образов $\cap$, например $\alpha \cap \beta$ — плоскости α и β пересекаются;

и) результат геометрической операции $=$, например $K = a \cap \beta$ — точка K является точкой пересечения прямой a и плоскости β;

к) импликация — логическое следствие $\Rightarrow$, например $K \in AB \Rightarrow K_1 \in A_1B_1$ — если точка K принадлежит прямой пространства AB, то проекция этой точки K_1 также принадлежит проекции прямой A_1B_1.

Начертательная геометрия является наивысшим средством развития той таинственной способности человеческого духа…, которая зовется воображением и которая является ступенью к другой царственной способности — фантазии, без которой почти не совершаются великие открытия и изобретения.

Н. А. Рынин

ВВЕДЕНИЕ

Одной из фундаментальных дисциплин, изучаемых в техническом вузе и составляющих основу инженерного образования, является начертательная геометрия.

Как математическая наука, представляющая один из разделов геометрии, начертательная геометрия изучает пространственные образы и их геометрические закономерности в виде графических изображений, построенных на плоскости по определенным законам и правилам. Сегодня достаточно сложно назвать такой вид человеческой деятельности, в которой не приходилось бы прибегать к выполнению различных изображений. Умение изображать планы, объекты, модели, графики от руки или при помощи чертежных инструментов помогает людям разных профессий. Оно оказывается полезным для хирурга, делающего сложные операции, рабочего за токарным станком, закройщика одежды, стекольщика. Умение облекать мысли и наблюдения в графическую форму помогает в работе ученому, исследователю. И, конечно, в наибольшей степени графические умения необходимы инженеру, архитектору, дизайнеру и другим специалистам, чья деятельность требует владения приемами графического выражения замысла. Графические изображения являются одним из главных средств познания окружающего нас мира, инструментом творческого и пространственного мышления личности. Их значимость определяется тем, что графика — это общепринятый и общепризнанный язык техники, средство осознания трехмерного пространства, существующих в нем объектов и отражения их на плоскости, это «…язык, необходимый инженеру, создающему какой-либо проект, а также всем тем, кто должен руководить его осуществлением» [12, с. 10]. Отсюда, знание начертательной геометрии является фундаментом, на котором базируется инженерная деятельность и инженерное творчество, и это знание необходимо «… мастерам своего дела не меньше, чем чтение, письмо или арифметика» [там же, с. 132].

Значение и особенность начертательной геометрии в техническом образовании состоит и в том, что эта дисциплина, как ни какая другая, развивает пространственное воображение — уникальную способность человека мысленно «видеть» (воспринимать, представлять) объект объемно, в трехмерном измерении, не только его внешнее устройство, но и внутреннее содержание, т. е. способность оценивать и анализировать соразмерность объемно-пространственного композиционного решения. Не обладая этой способностью, человек не может, например, понять по чертежу принцип действия механизма, читая книгу — представить место описываемых событий, выполняя работу — предвидеть конечный ее итог. Воображение также неразрывно связано с окружающим миром, с практикой, именно эта связь способствует возникновению творческой идеи, замысла, служит побудительной силой в создании нового. Известный ученый, профессор Петербургского Института путей сообщения В. И. Курдюмов, определяя начертательную геометрию как грамматику языка техники, отмечал, что «изучение начертательной геометрии … является лучшим средством развития нашего воображения; а без достаточно развитого воображения немыслимо никакое серьезное техническое творчество» [15, с. 74].

Развитие пространственного воображения и проективного видения, логики и конструктивно-геометрического мышления, готовности к анализу и синтезу пространственных форм и отношений между ними на основе их геометрических моделей и графических изображений — именно эти умения и навыки необходимы современному инженеру в его конструкторской практике и изобретательской деятельности на пути от возникновения технической идеи до ее реализации и создания новых технических объектов и сооружений.

Тема 1. Метод проекций

1.1. Предмет начертательной геометрии. 1.2. История развития начертательной геометрии. 1.3. Методы проецирования

1.1. Предмет начертательной геометрии

Начертательная геометрия по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Наделяя точные науки выразительностью, наглядностью, простотой и доступностью решения задач, начертательная геометрия является важным инструментом для инженера, строителя, архитектора, дизайнера, а также для скульптора, художника, декоратора.

В основе начертательной геометрии лежит чертеж — графическое изображение предметов реального мира, построенное на плоскости по определенным законам и позволяющее судить о форме предметов и их взаимном расположении в пространстве, определять их действительные размеры и изучать геометрические свойства. Отсюда, основной целью начертательной геометрии является умение изображать на плоскости различные сочетания геометрических образов, а также производить их исследования и измерения, допуская преобразования графических изображений.

Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование методов построения графических изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм. Являясь геометрической основой черчения и инженерной графики, начертательная геометрия дает будущему специалисту необходимую геометрическую подготовку для изучения общетехнических и специальных дисциплин вуза, так как графические способы исследований предметов, изучаемые данной дисциплиной, широко используются в ряде технических и других наук. Например, при решении задач специальных инженерных дисциплин: механики, архитектуры и строительства, картографии, инженерной геодезии и геологии, кристаллографии, инструментоведения, химии, физики и др. Особенно большое практическое применение это находит в техническом конструировании и изобретательстве.

Основным методом графического изображения пространственных геометрических фигур на плоскости, изучаемым в начертательной геометрии, является метод *ортогонального* или прямоугольного *проецирования*, позволяющий получать изображения, сохраняющие некоторые метрические характеристики оригинала. Наряду с этим методом в начертательной геометрии изучаются методы *аксонометрических проекций, проекций с числовыми отметками, перспективные проекции.*

Методы начертательной геометрии находят широкое применение при проектировании и изображении различных инженерных конструкций и объектов. Например, *проекции с числовыми отметками* используются при изыскании, проектировании и изображении инженерных сооружений и транспортных систем, расположенных на топографической (земной) поверхности: аэродромов, автомобильных и железных дорог, строительных площадок и карьеров, плотин, дамб, эстакад, путепроводов, мостов и других искусственных сооружений. *Перспективные проекции* применяются при построении изображений архитектурных сооружений и строительных объектов жилого и общественного назначения: зданий домов, помещений, вокзалов, станций метро, пассажирских залов и т. д., а также транспортных систем, например автомобильных дорог, для выяснения условий безопасности дорожного движения. *Аксонометрические проекции* находят применение в машиностроении, строительстве и архитектуре как изображения, отличающиеся достаточно высокой наглядностью и простотой выполнения.

Методы начертательной геометрии используются также при конструировании различных сложных геометрических поверхностей технических форм и сооружений в авиационной, автомобильной, автотранспортной и судостроительной промышленности. Поэтому важнейшей задачей начертательной геометрии как науки является создание оптимальных геометрических форм объектов машиностроения, архитектуры и строительства, дальнейшая разработка теории графического отображения объектов и процессов.

Начертательная геометрия наиболее эффективно и целенаправленно помогает развивать креативное мышление будущего инженера, занимающее значительное место в различных творческих процессах. При освоении этой дисциплины активно формируется пространственное воображение и проективное видение личности, проявляющиеся в создании визуальных (зрительных) образов окружающего мира и построении новых. Часто новое решение совершенно неожиданно появляется перед глазами инженера в виде рисунков, картин, схем, моделей, еще не до конца осознанное, продуманное, но выстраданное и реальное. Ощущение, восприятие, представление, воображение, а порой и инсайт (озарение, внезапная догадка), задействованные в графической деятельности, носят универсальный характер и могут быть использованы в других видах деятельности. Таким образом, освоение дисциплины способствует созданию пространственных представлений различной степени сложности, обобщенности и схематичности, при этом одновременно активно развиваются креативные способности личности. Так инженер в своей практической деятельности не может обойтись без знания этой науки. Она нужна ему при проектировании и создании по выполненному проекту того или иного технического сооружения, здания, объекта и т. д. Художнику и архитектору она нужна для построения перспективы предметов, т. е. для изображения предметов такими, какими они представляются в действительности нашему глазу. Скульптору она нужна для определения очертаний произведений ваяния, которые создаются из бесформенного куска камня, дерева, глины и других материалов.

Методы построения графических изображений, изучаемые в начертательной геометрии, дают возможность представить не только существующие, переставшие существовать, но и воображаемые объекты, их форму, размеры, детали, внешнее и внутреннее устройство, расположение в пространстве, представить впечатления, воспринимаемые от окружающего нас мира и сохранить их в памяти. Из всех видов графических изображений наиболее применимыми в практической деятельности человека являются линейные изображения: рисунки и чертежи. *Рисунок* — это графическое изображение предмета, выполненное от руки на глаз с относительными размерами и положениями отдельных его элементов, которое дает нам представление только о внешнем виде предмета и не дает информации о внутреннем его устройстве и размерах. *Чертеж* — это графическое изображение предмета, выполненное при помощи специальных чертежных инструментов по особым правилам построения изображений в точной зависимости от размеров и положения предмета в пространстве, которое дает нам полное представление о внешнем и внутреннем устройстве предмета и о его размерах. Чертеж как основа начертательной геометрии является более точным выразителем наших представлений о каком-либо предмете, чем рисунок, так как в чертеже отражаются геометрические свойства изображаемого объекта. В технике чертежи являются единственным и незаменимым средством выражения человеческих идей и мыслей. Они необходимы в самых разнообразных проявлениях многосторонней деятельности человека и должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, решать вопросы всестороннего исследования отдельных частей предмета. Эти требования к чертежам и привели к созданию теории изображений, составляющей основу начертательной геометрии.

1.2. История развития начертательной геометрии

Основы графических изображений закладывались на ранних ступенях развития человеческого общества. Еще в глубокой древности человек рисовал на скалах, камнях и предметах домашнего обихода изображения вещей, деревьев, животных и людей. Точное время возникновения этих пещерных росписей до сих пор не выяснено. По мнению ученых многие из них были созданы примерно двадцать — тридцать тысяч лет назад. Рисунками выражались мысли в начале зарождения письменности. Это так называемое рисуночное письмо, или пиктография («пиктус» (лат.) — рисованный, «графо» (греч.) — пишу). Пиктография постепенно вытеснялась идеографией, обширной системой знаков, обозначающих не только название, но и действия предметов. Появившись на заре человеческой культуры в виде первобытного рисунка, картинное письмо развилось в письмо буквенное. В ходе дальнейшей практической деятельности человека оно стало фигурировать в виде изобразительного письма, которое служит нам и сейчас в качестве технических чертежей.

Время и место возникновения геометрии как науки не установлено. Потребность в построении изображений по законам геометрии (проекционных чертежей, «projecere» — бросать вперед) возникла из практических задач строительства жилья, крепостных укреплений, дамб, земляных валов и т. д., а на более позднем этапе — из запросов развития общества, производства и техники.

Огромный вклад в развитие мировой культуры и архитектуры внесло прекрасное искусство Древнего Египта. Шедевры древнеегипетского строительства — пирамиды — и сегодня потрясают воображение своими размерами, геометрической точностью и пропорциональностью. Относительно точные сведения об уровне геометрических знаний в Древнем Египте сообщает папирус Ахмеса об измерении земельных участков и вычислении пирамид. Но самое большое влияние на последующие поколения оказало искусство Древней Греции. Его спокойная и величественная красота, гармония и ясность служили образцом и источником вдохновения для более поздних эпох истории культуры. Греческую древность называют античностью, к античности также относят Древний Рим. Величайшим достижением греческого строительного искусства были храмы. Римский архитектор Витрувий еще в I в. до н.э. применял три проекции — план, фасад и профиль. В своем труде «Десять книг об архитектуре» Витрувий упоминал, что еще в V в. до н.э. Агафарх, Демокрит и Анаксагор пользовались элементами перспективы при создании декораций для театра, когда исполнялись «Прикованный Прометей» и другие трагедии великого древнегреческого драматурга Эсхила (525—456 гг. до н.э.). Основателем геометрии в Греции считают финикиянина Фалеса Милетского (ок. 625—547 гг. до н.э.), получившего образование в Египте. Он основал школу геометров, которая положила начало научной геометрии. Ученику Фалеса Пифагору Самосскому (ок. 580—500 гг. до н.э.) принадлежат первые открытия в геометрии: теория несоизмеримости некоторых отрезков, теория правильных тел, теорема о квадрате гипотенузы прямоугольного треугольника. Преемник Пифагора Платон (427—347 гг. до н.э.) ввел в геометрию аналитический метод, учение о геометрических местах и конические сечения. Систематизировал основы геометрии, восполнил ее пробелы великий александрийский ученый Евклид (III в. до н.э.) в своем замечательном труде. «Начала» Евклида — первый серьезный учебник, по которому в течение двух тысячелетий учились геометрии. Современные учебники элементарной геометрии представляют собой переработку «Начал». «Золотым веком» греческой геометрии называют эпоху, когда жили и творили математики Архимед (287—195 гг. до н.э.), Эрастофен (275—195 гг. до н.э.), Аполлоний Пергский (250—190 гг. до н.э.). Измерение криволинейных образов связано с именем Архимеда. Он указал методы измерения длины окружности, площади круга, сегмента параболы и спирали, объемов и поверхностей шара, других тел вращения. Это были главные дополнения к «Началам» Евклида. Трактатом о конических сечениях обессмертил свое имя Аполлоний. Его трудами, можно сказать, завершается классическая геометрия.

Расцвет классической культуры в средние века сменился застоем. Рисунки, планы, чертежи эпохи Средневековья не указывают на какое-либо заметное развитие существовавших способов изображений. В изобразительном искусстве не используются применявшиеся в древности сведения о перспективе. Однако есть основания утверждать, что в этот период зарождался архитектурный чертеж. И только с возрождением строительства и искусств в эпоху Ренессанса в истории начертательной геометрии начинается новый период развития. В связи с развернувшимся строительством различных сооружений возродилось и расширилось применение употреблявшихся в античном мире элементов проекционных изображений. Наиболее бурно в это время развивались архитектура, скульптура и живопись в Италии, Нидерландах, Германии, что поставило художников и архитекторов этих стран перед необходимостью начать разработку учения о живописной перспективе на геометрической основе. В эпоху Возрождения открывались законы перспективы, закладывались практические основы отображения технической информации графическими способами. Появились новые понятия: центр проецирования, картинная плоскость, линия горизонта, главные точки и т. д. Весомый вклад в развитие методов перспективных изображений внесли: итальянский зодчий Лоренцо Гиберти (1378—1455 гг.), перенесший принципы живописной перспективы на пластическое изображение в виде рельефа в церковных сооружениях; итальянский теоретик искусств Леон Баттиста Альберти (1404—1472 гг.), обогативший художественно-технический опыт теоретической разработкой основ перспективы, а также впервые упоминавший о построении теней; Пиетра-делла-Франческа (1406—1492 гг.), рассматривавший вопросы линейной перспективы; гениальный итальянский художник, ученый и инженер Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), обладавший в совершенстве знаниями линейной перспективы, дополнивший ее построением на цилиндрических сводах и положивший начало панорамной перспективе. В его «Трактате о живописи» (опубликован в 1651 г.) имеются многочисленные указания о практических применениях перспективных изображений, в частности о «наблюдательной» перспективе. Великим Леонардо да Винчи в наследство потомкам были оставлены графические изображения летательного аппарата, метательных машин, выполненные способом линейной перспективы, который в настоящее время широко используется в архитектуре, дизайне, живописи. В развитие перспективы большой вклад внес немецкий ученый и гравер Альбрехт Дюрер (1471—1528 гг.). В своей книге «Наставление» он разработал основы рисования, предложил графические способы построения большого числа плоских и некоторых пространственных кривых, оригинальные способы построения перспективы и тени предмета, а также метод ортогонального изображения конических сечений. Кроме этого, в своем труде «Руководство к измерению...» (1525 г.) А. Дюрер предложил способ построения перспективы по горизонтальной и фронтальной проекциям объекта. Основателем теоретической перспективы по праву может считаться итальянский ученый Гвидо Убальди (1545—1607 гг.). Работа Убальди «Шесть книг по перспективе» содержит решение почти всех основных задач перспективы.

Зарождение аналитической геометрии связано с появлением метода координат. Французские математики Ферма (1601—1665 гг.) и Рене Декарт (1596—1650 гг.) дали общие схемы аналитической функциональной зависимости геометрических соотношений и общие схемы изучения этой зависимости средствами алгебры и анализа. Французский архитектор и математик Дезарг (1593—1662 гг.) в 1636 г. в сочинении «Общий метод изображения предметов в перспективе» впервые применил для построения перспективы метод координат Декарта, что послужило появлению нового аксонометрического метода в начертательной геометрии. Выдающийся труд Исаака Ньютона (1642—1727 гг.) в области бесконечно малых единиц создал новую ветвь геометрии — дифференциальную. Появилась и еще одна ветвь геометрии — проективная, в основу которой положен метод проектирования, где нет понятий о числе и величине. Творцами нового направления следует считать французских математиков Понселе, Шаля, Мебиуса. Основу этой науки заложил Дезарг. Он указал, что изображение предмета в ортогональных проекциях и линейной перспективе родственны с геометрической точки зрения. Развитию «вольной перспективы» посвятил свои работы английский математик Тейлор (1685—1731 гг.), разработавший способы решения основных позиционных задач и определения свойств оригинала по его перспективному изображению. Немецкий геометр Ламберт (1728—1777 гг.) применил метод перспективы к графическому решению задач элементарной геометрии, используя свойства аффинного соответствия (аффинная геометрия). Ламберт решал и обратную задачу — реконструирование объекта по его чертежу, выполненному в центральной проекции. Французский инженер А. Фрезье (1682—1773 гг.) объединил работы предшественников в труде «Теория и практика разрезки камней и деревянных конструкций» (1738—39 гг.), им были решены задачи построения конических сечений по усложненным данным. Однако строгой теории к представленному собранию отдельных приемов решения задач Фрезье не подвел. Кроме этого А. Фрезье внес большой вклад в развитие ортогональных проекций. Он впервые рассмотрел проецирование объекта на две плоскости — горизонтальную и фронтальную.

Творцом ортогональных проекций и основоположником начертательной геометрии является французский геометр Гаспар Монж (1746—1818 гг.). Знания, накопленные по теории и практике о методах изображения пространственных фигур на плоскости, он систематизировал, обобщил и создал единую математическую науку об ортогональном проецировании — начертательную геометрию. Французский математик М. Шаль так оценил новую науку: «После почти вековой остановки чистая геометрия обогатилась новым учением — начертательной геометрией, которая представляет необходимое дополнение аналитической геометрии Декарта и которая, подобно ей, должна была принести неисчислимые результаты и отметить новую эпоху в истории геометрии. Этой наукой обязаны творческому гению Монжа».

«…Нужно приучить пользоваться начертательной геометрией» — говорил Г. Монж. Новая наука имела, по его словам, две главные цели: «Первая — точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. Вторая цель — выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения. В данном смысле — это средство искать истину; она дает бесконечные примеры перехода от известного к неизвестному». Методы Монжа не были противоположны математическому анализу, а были его дополнением, связанным с практическими потребностями инженерного дела. Труд Гаспара Монжа «Начертательная геометрия», опубликованный в 1795 г., лег в основу проекционного черчения, которое широко используется в современной технике и науке. В своей книге Монж разработал метод ортогонального проектирования пространственных фигур на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций («метод Монжа»), при котором получается двойное изображение оригинала — на горизонтальной и на вертикальной плоскостях. Это дает возможность решить и обратную задачу: восстановление пространственной фигуры или изучение ее геометрических свойств по заданным (горизонтальному и вертикальному) изображениям, а также решение различных задач, касающихся пространственных фигур, с помощью их плоских изображений. В работе Г. Монжа «Начертательная геометрия» решались задачи на применение теории геометрических преобразований, рассмотрение некоторых вопросов теории проекций с числовыми отметками, проводилось подробное исследование кривых линий и поверхностей, в частности применение вспомогательных секущих плоскостей и вспомогательных шаровых поверхностей (метод сфер) при построении линии пересечения поверхностей. Недостатком метода Монжа является малая наглядность. Наиболее наглядное изображение пространственных фигур на плоскости дает центральная проекция — перспектива, требующая, однако, дополнительных условий для решения обратной задачи, о которой говорилось выше. Существуют и другие способы изображения пространственных фигур (аксонометрические проекции, проекции с числовыми отметками и т. д.).

Дальнейшее развитие начертательная геометрия получила в трудах многих ученых. Наиболее полное изложение идей Монжа по ортогональным проекциям дал Г. Шрейбер (1799—1871 гг.), написавший «Учебник по начертательной геометрии» (по Монжу). Он обогатил начертательную геометрию изложением ее на проективной основе, применив идеи Шаля, Штаудта, Рейе, Штейнера и других, разработал теорию теней и сечений кривых поверхностей. Заметны также труды ученых немецкой школы. Геометр Вильгельм Фидлер в книге «Начертательная геометрия», изданной в 1871 г., в органической связи с проективной геометрией представил первый обширный курс дисциплины, стоящий на уровне современных требований. Прогрессивными в преподавании были лекции Эмиля Мюллера, продолжившего научное направление Фидлера. В работах А. Манигейма (1880 г.) исследованы вопросы кинематического образования кривых линий и поверхностей в ортогональных проекциях. Обоснование теории аксонометрии дал Вейсбах, технические примеры применения аксонометрии показали братья Мейер. Развивая теорию аксонометрии, профессор Академии изобразительных искусств и Строительной академии в Берлине Карл Польке (1810—1876 гг.) в 1853 г. открыл основную теорему аксонометрии. Доказательство этой теоремы в 1864 г. вывел немецкий геометр Г. А. Шварц. Обобщенная теорема аксонометрии стала называться теоремой Польке — Шварца. Привлекают работы австрийского геометра Эрвина Круппа, получившие развитие в трудах русских ученых Н. А. Глаголева, Н. Ф. Четверухина. В середине XIX в. зарождается и получает развитие начертательная геометрия многих измерений — многомерная геометрия. Итальянский математик Веронезе и голландский ученый Скаутте дают начало этому новому направлению.

В России многомерная начертательная геометрия развивалась в связи с проблемами физико-химического анализа многокомпонентных структур (сплавов, растворов), состоящих из большого числа элементов. Вместо точек за основные элементы принимаются различные геометрические образы, и строится бесчисленное множество плоских геометрических систем (системы параллельных отрезков, векторов, окружностей и т. д.). К началу XX в. относится зарождение векторно-моторного метода в начертательной геометрии, применяющегося в строительной механике, машиностроении. Этот метод разработан Б. Майором, Р. Мизесом, Б. Н. Горбуновым.

Развитие способов графических изображений на Руси происходило по собственному пути. Основным техническим документом, с помощью которого строили различные сооружения, долгое время был рисунок. Так, например, знаменитый своей архитектурой Софийский собор в Киеве (XI в.) был воздвигнут по рисункам. В Древней Руси по рисункам были построены новгородские и московские храмы и многие другие замечательные памятники старины. Со временем перспективные рисунки преобразовались в особый вид графического изображения — технические рисунки. На миниатюрах XV—XVI вв. мы можем увидеть изображения, которые напоминают современные аксонометрические изображения и технические рисунки, используемые в настоящее время в технической графике, например перспективное изображение г. Пскова, выполненное в 1518 г. В России применялись чертежи, содержащие совмещенные в одной плоскости изображения нескольких видов. Дошедшие до нас памятники материальной культуры свидетельствуют о том, что в Древней Руси были известны самобытные приемы изображения сооружений, которые с течением времени совершенствовались. Такие, например, сооружения как Троицкий (1422—1425 гг.) и Успенский (1539—1566 гг.) соборы, являются замечательными памятниками архитектуры того времени и, безусловно, не могли быть построены без заранее составленных проектов. Русские строители, руководившие возведением различных сооружений во Владимире, Суздале, Киеве и других городах, выполняли и использовали сложные строительные чертежи. Так, архитекторы М. Земцов (1688—1743 гг.), Ф. Л. Аргунов (1716—1768 гг.), Н. А. Львов (1751—1804 гг.), В. И. Баженов (1737—1799 гг.), М. Ф. Казаков (1738—1812 гг.) и другие были прекрасными графиками. На их чертежах показаны фасады, планы и общие виды.

В начале XVIII в. в период правления Петра I в России бурно развивается кораблестроение, горнорудная промышленность, строятся машины и заводские силовые установки. Все это требовало умелого выполнения чертежей. В связи с этим по приказу Петра I вводится преподавание черчения в специальных учебных заведениях, что послужило причиной появления в 1708 году первых учебников по черчению: «Приемы циркуля и линейки» и «Практические геометрии». Русские чертежники и сам царь Петр I выполняли чертежи методом, который позже будет назван методом прямоугольных проекций. В XVIII и XIX столетиях появляются строительные чертежи с изображением разрезов и планов сооружений, выполненных в проекционной связи друг с другом и напоминающих современные чертежи. Примером являются проекты паркового павильона архитектора Н. А. Львова, первой в России (1748 г.) химической лаборатории М. В. Ломоносова. Во второй половине XVIII в. встречаются чертежи, выполненные в наглядном изображении. Это уже зарождение будущей аксонометрии. Примером может служить чертеж К. Д. Фролова «Рудоподъемная машина». Талантливым механиком-изобретателем, внесшим вклад в совершенствование чертежа, был И. П. Кулибин. В его проекте однопролетного арочного моста через реку Неву были чертежи поперечного разреза моста, отдельных конструкций, а также вид сверху и сбоку. Вся история развития техники неразрывно связана с графическими изображениями, предшествующими внедрению в практику не только простых, но и самых гениальных замыслов. Подтверждением тому являются чертежи первого в мире самолета, спроектированного в 1881 г. и построенного в 1883 г. А. Ф. Можайским, чертежи ракеты К. Э. Циолковского, опубликованные в 1915 г., а также космических поездов (станций), работающих на околоземной орбите.

Впервые курс начертательной геометрии в России был прочитан в 1810 г. в Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения французским инженером К. И. Потье, а с 1830 г. начертательную геометрию стали преподавать во всех высших учебных заведениях России. Перевел курс К. И. Потье на русский язык его помощник по институту Я. А. Севастьянов (1796—1849 гг.), с именем которого связано появление первого оригинального труда под названием «Основания начертательной геометрии» (1821 г.), в основном посвященного изложению метода Монжа. Дело Я. А. Севастьянова продолжали развивать и совершенствовать такие ученые как П. К. Галактионов, А. Х. Редер, Н. П. Дуров, И. И. Сомов. Неоценимый вклад в развитие начертательной геометрии как науки внес В. И. Курдюмов (1853—1904 гг.) — автор классического русского учебника по начертательной геометрии. Он написал 14 научных работ, в которых дал новое направление начертательной геометрии, показав ее применение в технических чертежах. Очень много сделали для отечественной технической графики такие ученые, как Н. И. Макаров, Е. С. Федоров, Н. А. Рынин, А. К. Власов, Н. А. Глаголев, Д. И. Каргин, А. И. Добряков и многие др. Они заложили основу графической науки и создали учебно-методическую по инженерной графике.

Если начертательная геометрия как предмет возникла из нужд практики и в середине XIX в. расширила свои разделы, то к началу XX в. аналитические методы, применяемые в начертательной геометрии, вышли на первый план, точность графических методов не удовлетворялась и начертательная геометрия пошла на убыль. Последними книгами были книги Н. А. Рынина (1877—1942 гг.) и В. О. Гордона. С появлением трудов Н. Ф. Четверухина (1891—1973 гг.) начертательная геометрия была выведена из застоя. Н. Ф. Четверухин стал рассматривать начертательную геометрию как самостоятельную науку, не связанную с черчением. Он первый увидел, что методами начертательной геометрии можно решать сложные конструктивные задачи. Появилась «Прикладная геометрия» и начался ее расцвет. За период с конца 40-х годов XX в. начертательная геометрия развивалась и расширялась. В науке большая роль принадлежит И. И. Котову (1905—1975 гг.) и его ученикам. После смерти Н. Ф. Четверухина начался процесс сокращения в вузах учебных часов по начертательной геометрии и произошел застой. Но вскоре данный вопрос был решен положительно и предмет восстановлен.

Развитие компьютерной графики и технологий в конце XX — начале XXI вв. совершили настоящий прорыв в области автоматизированного проектирования инженерных объектов и сооружений. В связи с этим значительно уменьшилось количество практических задач, решаемых с использованием традиционных методов начертательной геометрии. Вместе с тем, интерес к науке не ослабевает, и тематика исследовательских работ по начертательной геометрии за последнее время стала разнообразнее и богаче. Появляются научные работы, двигающие вперед разработку теории методов изображений, рассматривающие вопросы применения графики (работы прикладного характера), а также исследования, имеющие оборонное и промышленное значение.

Итак, начертательная геометрия — раздел геометрии, в котором пространственные образы изучаются при помощи построения их графических изображений на плоскости, а также рассматриваются способы и методы решения и исследования на плоскости пространственных геометрических задач. Правила построения графических изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций.

1.3. Методы проецирования

С точки зрения начертательной геометрии геометрическое пространство как точечное множество отображается на плоскость по закону проецирования.

Проецированием называется процесс построения изображения объекта (точки, прямой, плоской фигуры и т. д.) на плоскости с помощью проецирующих лучей. Полученное изображение объекта на плоскости является *проекцией* этого объекта. Плоскость, на которой получают проекцию, называют *плоскостью проекций*.

Проекцией любой точки пространства на плоскость или поверхность называют точку пересечения проецирующего луча, проходящего через точку пространства, с данной плоскостью (поверхностью).

По направлению проецирующих лучей различают проецирование центральное и параллельное.

Метод центрального (конического) проецирования заключается в том, что все проецирующие лучи, проходящие через точки пространства, исходят из одной точки S — центра проецирования (рис. 1).

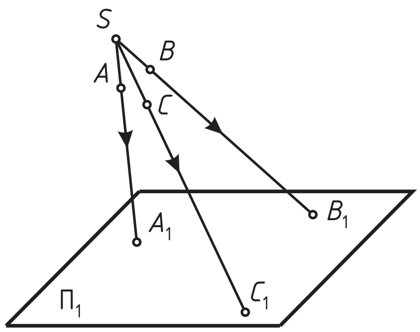


Рис. 1. Метод центрального проецирования

Метод параллельного проецирования основан на том, что центр проецирования S удален на бесконечно большое расстояние от плоскости проекций, и проецирующие лучи становятся параллельны между собой и некоторому заданному направлению проецирования N.

При параллельном проецировании различают:

ортогональное (прямоугольное) проецирование, когда проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций (рис. 2, *а*);

косоугольное проецирование, когда проецирующие лучи не перпендикулярны плоскости проекций (рис. 2, *б*).

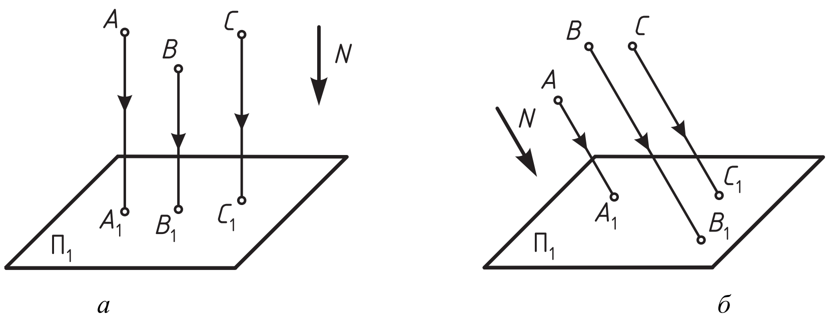


Рис. 2. Метод параллельного проецирования

Рассмотрим некоторые свойства параллельных проекций.

1. *Проекция точки есть точка*. Это очевидно из самого определения проекции точки как точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

2. *Проекция прямой в общем случае прямая*. Действительно, для построения проекции прямой *AB* необходимо через каждую принадлежащую этой прямой точку провести проецирующий луч. Все проецирующие лучи, проходящие через точки прямой *AB*, параллельны заданному направлению проецирования *N*. Совокупность этих лучей образует проецирующую или лучевую плоскость α, которая при пересечении с плоскостью проекций Π_1 определяет проекцию прямой A_1B_1:

$$|A_1B_1| = \alpha \cap \Pi_1,\ |AB| \subset \alpha.$$

В частном случае проекция прямой *CD* есть точка $C_1 \equiv D_1$ (рис. 3).

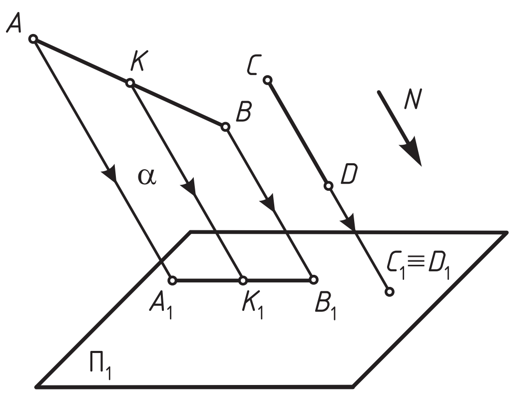


Рис. 3. Проекции прямых

3. *Если точка пространства принадлежит прямой, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой* (рис. 3). Это свойство следует непосредственно из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех принадлежащих ей точек. Если точка K принадлежит прямой AB и плоскости α, то и проецирующий луч, исходящий из точки K, принадлежит плоскости α. Следовательно, этот луч пересечет плоскость проекций Π_1 в линии пересечения плоскостей α и Π_1, т. е. в точке K_1, принадлежащей проекции прямой A_1B_1:

$$K \in |AB| \Rightarrow K_1 \in |A_1B_1|.$$

4. *Отношение отрезков прямой пространства равно отношению их проекций* (рис. 3). Если точка K делит отрезок прямой пространства AB в отношении $m : n$, то и проекция этой точки K_1 делит в таком же отношении проекцию этого отрезка прямой A_1B_1:

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|A_1K_1|}{|K_1B_1|} = \frac{m}{n}.$$

В начертательной геометрии рассматривают следующие основные *виды проекций*:

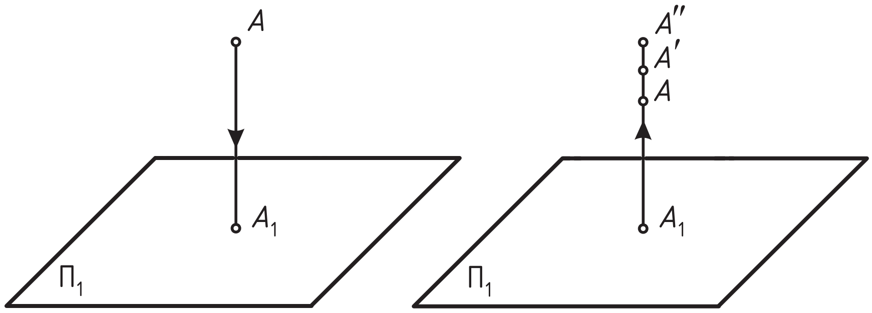
ортогональные;

перспективные;

аксонометрические;

проекции с числовыми отметками.

При *ортогональном проецировании* каждой точке пространства соответствует *одна и только одна* проекция точки (рис. 4, *а*). Вместе с тем, каждой проекции точки соответствует *множество* точек пространства, расположенных на одном проецирующем луче (рис. 4, *б*). Следовательно, *одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве*. Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две ее проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.



а *б*

Рис. 4. Проецирование точки

В 1799 г. французский ученый Гаспар Монж предложил метод проецирования объекта (точки, прямой, плоской фигуры и т. д.) на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Тема 2. Проекции точки

2.1. Проекции точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже. 2.2. Метод конкурирующих точек

2.1. Проекции точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже

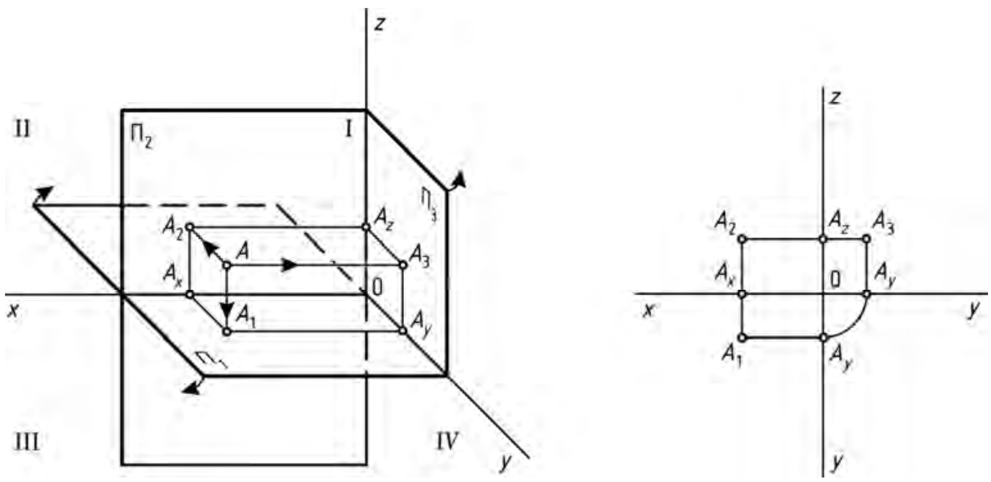
Все пространственные геометрические фигуры в начертательной геометрии ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координат — системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 5):

Π_1 — горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 — фронтальная плоскость проекций;

Π_3 — профильная плоскость проекций.

Линии пересечения этих плоскостей проекций образуют координатные оси *x*, *y*, *z*. Точка пересечения координатных осей 0 называется началом координат.



а *б*

Рис. 5. Проекции точки на три плоскости проекций

На рис. 5, *а* представлена часть пространства — четыре пространственных угла или четверти I, II, III, IV. Рассмотрим проецирование точки пространства *A* на три плоскости проекций. Точка *A* расположена в I четверти. Для того чтобы построить проекции точки A, необходимо через данную точку пространства провести проецирующие лучи перпендикулярно каждой плоскости проекций. При пересечении проецирующего луча с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 получают горизонтальную проекцию точки A_1: $A_1 = |AA_1| \cap \Pi_1$. При пересечении проецирующего луча с фронтальной плоскостью проекций Π_2 получают фронтальную проекцию точки A_2: $A_2 = |AA_2| \cap \Pi_2$. При пересечении проецирующего луча с профильной плоскостью проекций Π_3 получают профильную проекцию точки A_3: $A_3 = |AA_3| \cap \Pi_3$. При этом A_x — проекция точки A на ось x; A_y — проекция точки A на ось y; A_z — проекция точки A на ось z.

Положение любой точки в пространстве определяется расстояниями от точки пространства до плоскостей проекций. Расстояние от точки пространства до плоскости проекций называется *координатой*. Следовательно, положение точки в пространстве определяется тремя координатами: $A\ (x, y, z)$.

Координату x называют *абсциссой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости Π_3: $|AA_3| = |A_x 0| = x$.

Координату y называют *ординатой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости Π_2: $|AA_2| = |A_y 0| = y$.

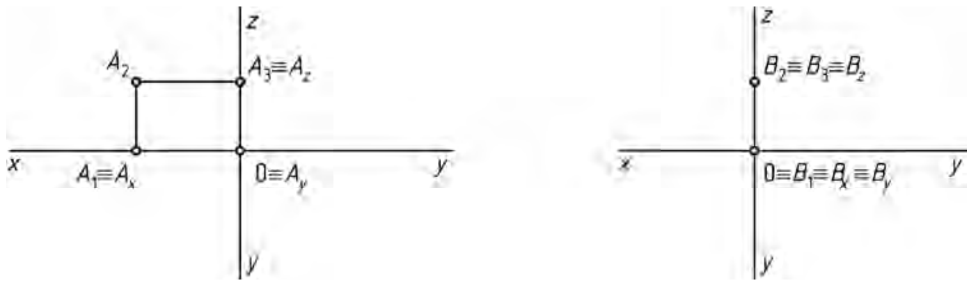
Координату z называют *аппликатой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости Π_1: $|AA_1| = |A_z 0| = z$.

Каждую проекцию точки пространства A характеризуют две координаты: $A_1\ (x, y)$; $A_2\ (x, z)$; $A_3\ (y, z)$.

Чтобы получить плоскую (двухмерную) модель пространственных координатных плоскостей проекций, горизонтальную плоскость проекций Π_1 и профильную плоскость проекций Π_3 совмещают с фронтальной Π_2 как показано на рис. 5, *а*. Плоская модель любой пространственной геометрической фигуры называется эпюром Монжа. В результате построений на плоском чертеже (эпюре) получают три проекции точки A: горизонтальную проекцию A_1, фронтальную проекцию A_2 и профильную проекцию A_3 (рис. 5, *б*).

Две проекции точки соответствуют только одному положению точки в пространстве. По двум заданным проекциям точки всегда можно определить третью ее проекцию, так как все проекции точки связаны между собой проекционными связями, перпендикулярными плоскостям проекций (на эпюре — координатным осям).

При решении графических задач координаты точек задают числами в каком-либо масштабе, например, A (20, 10, 15) (см. рис. 5, *б*). Координаты точки могут равняться нулю. Если нулю равна одна координата, то точка принадлежит одной из плоскостей проекций. Например, A (20, 0, 15), $A_y = 0 \Rightarrow A \in \Pi_2$ (рис. 6, *а*). Если две координаты равны нулю, то точка принадлежит одной из координатных осей. Например, B (0, 0, 15), $B_x = B_y = 0 \Rightarrow B \in 0z$ (рис. 6, *б*).



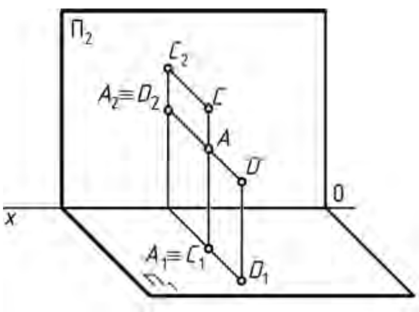
а *б*

Рис. 6. Проекции точек

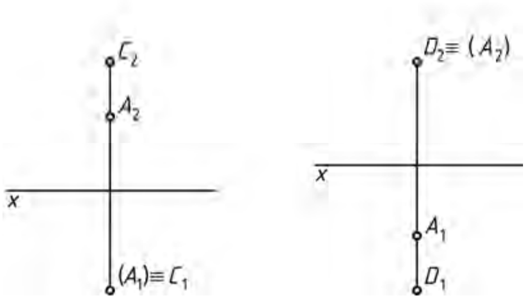
2.2. Метод конкурирующих точек

Точки, расположенные на одном проецирующем луче по отношению к плоскости проекций, называются *конкурирующими* (рис. 7, *а*).

Из двух конкурирующих точек пространства A и C на горизонтальной плоскости проекций видимой будет та точка, фронтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_1 (на эпюре — от оси x) (рис. 7, *б*). Из двух конкурирующих точек пространства A и D на фронтальной плоскости проекций видимой будет та точка, горизонтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_2 (на эпюре — от оси x) (рис. 7, *в*).



а



б *в*

Рис. 7. Конкурирующие точки

Тема 3. Проекции прямой

3.1. Линии. Кривые линии. Комплексный чертеж прямой. 3.2. Прямые общего и частного положения. 3.3. Следы прямой. 3.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций. 3.5. Относительное расположение прямых линий

3.1. Линии. Кривые линии. Комплексный чертеж прямой

Линии занимают особое положение в начертательной геометрии, так как дают возможность создавать наглядные модели многих процессов, устанавливать и исследовать зависимость между ними. Линия в начертательной геометрии рассматривается как траектория перемещения точки на плоскости или в пространстве, и это позволяет определить линию как *непрерывное множество принадлежащих ей точек*.

Различают:

плоские линии, все точки которых принадлежат одной плоскости;

пространственные линии (линии двоякой кривизны), все точки которых не принадлежат одной плоскости.

Кривая линия в начертательной геометрии рассматривается как траектория, описанная движущейся точкой; как совокупность точек, удовлетворяющих определенному уравнению; а также как линия пересечения двух поверхностей или поверхности с плоскостью. Кривая определяется положением составляющих ее точек. Точки кривой определяются их координатами. Кривые линии подразделяются на *алгебраические*, если в прямоугольной системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и *трансцендентные*, если они описываются трансцендентными уравнениями. Примерами плоских кривых линий являются: окружность, эллипс, парабола, гипербола, циклоид и др. К пространственным кривым линиям относятся: винтовая линия, линия пересечения боковых поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса, оси которых не пересекаются и др.

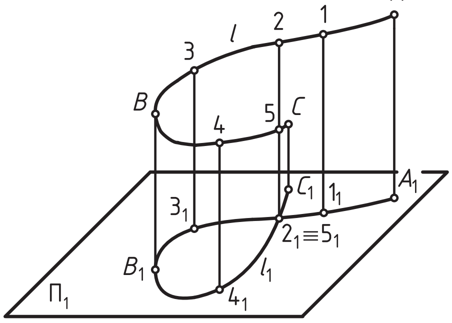
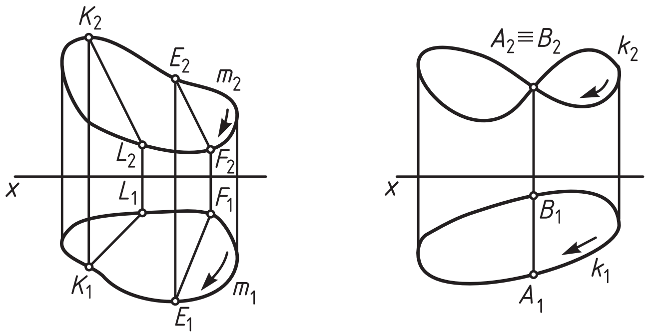


Рис. 8. Построение проекции кривой линии

Для построения проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда принадлежащих ей точек и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале (рис. 8). Пространственная кривая проецируется в виде плоской линии, плоская кривая — в виде плоской или в виде прямой линии, если кривая находится в проецирующей плоскости.

По чертежу кривой линии в общем случае можно без дополнительных построений определить плоская она или пространственная. Так на рис. 9, *а* показана пространственная кривая m, так как фронтальные проекции отрезков прямых KL и EF параллельны ($|K_2L_2| \parallel |E_2F_2|$), а горизонтальные проекции K_1L_1 и E_1F_1 не параллельны. На рис. 9, *б* также дана пространственная кривая k, имеющая конкурирующие точки A и B.



а *б*

Рис. 9. Проекции пространственных кривых линий

Простейшей линией является прямая линия. Она определяется в пространстве двумя точками, принадлежащими ей (рис. 10). На комплексном чертеже проекции прямой задаются проекциями этих точек.

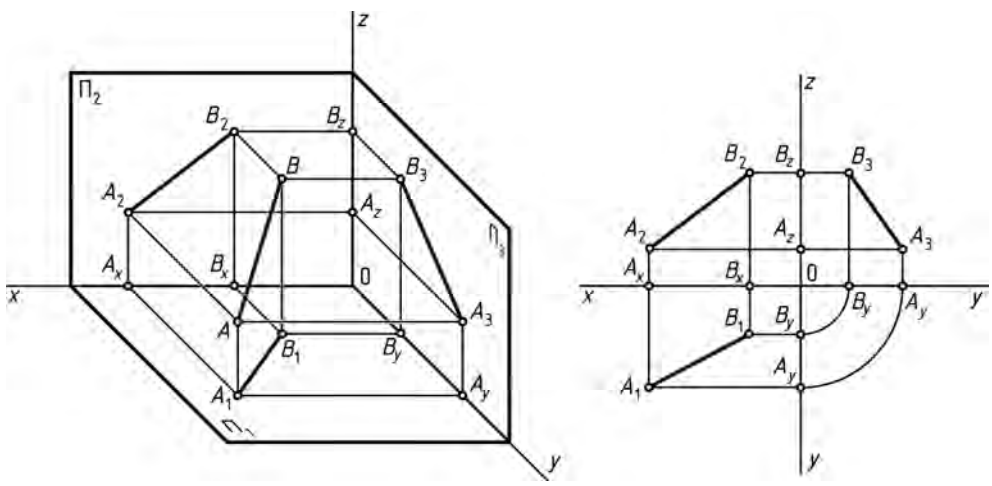


Рис. 10. Проекции прямой линии

Пусть заданы проекции точек пространства A и B: A_1 — горизонтальная проекция точки A; A_2 — фронтальная проекция точки A; B_1 — горизонтальная проекция точки B; B_2 — фронтальная проекция точки B. Соединив одноименные проекции точек A и B, получают проекции отрезка прямой AB: A_1B_1 — горизонтальная проекция отрезка прямой AB и A_2B_2 — фронтальная проекция отрезка прямой AB. Для определения положения прямой в пространстве достаточно двух ее проекций. Третью проекцию, например, профильную A_3B_3, всегда можно определить по двум заданным (см. рис. 10).

3.2. Прямые общего и частного положения

Прямая линия может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций.

Прямая, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *прямой общего положения* (см. рис. 10). Проекции прямой общего положения произвольно наклонены к осям проекций и на эпюре Монжа составляют с координатными осями произвольные углы наклона.

Прямые, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*.

Различают:

прямые уровня — прямые, параллельные одной какой-либо плоскости проекций;

проецирующие прямые (дважды параллельные) — прямые, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций и параллельные двум другим плоскостям проекций одновременно.

Прямые уровня.

1. *Горизонтальная прямая уровня* — прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 11, *а*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_2 к фронтальной плоскости проекций Π_2 и φ_3 к профильной плоскости проекций Π_3.

2. *Фронтальная прямая уровня* — прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 11, *б*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_1 к горизонтальной плоскости проекций Π_1 и φ_3 к профильной плоскости проекций Π_3.

3. *Профильная прямая уровня* — прямая, параллельная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 11, *в*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_1 к горизонтальной плоскости проекций Π_1 и φ_2 к фронтальной плоскости проекций Π_2.

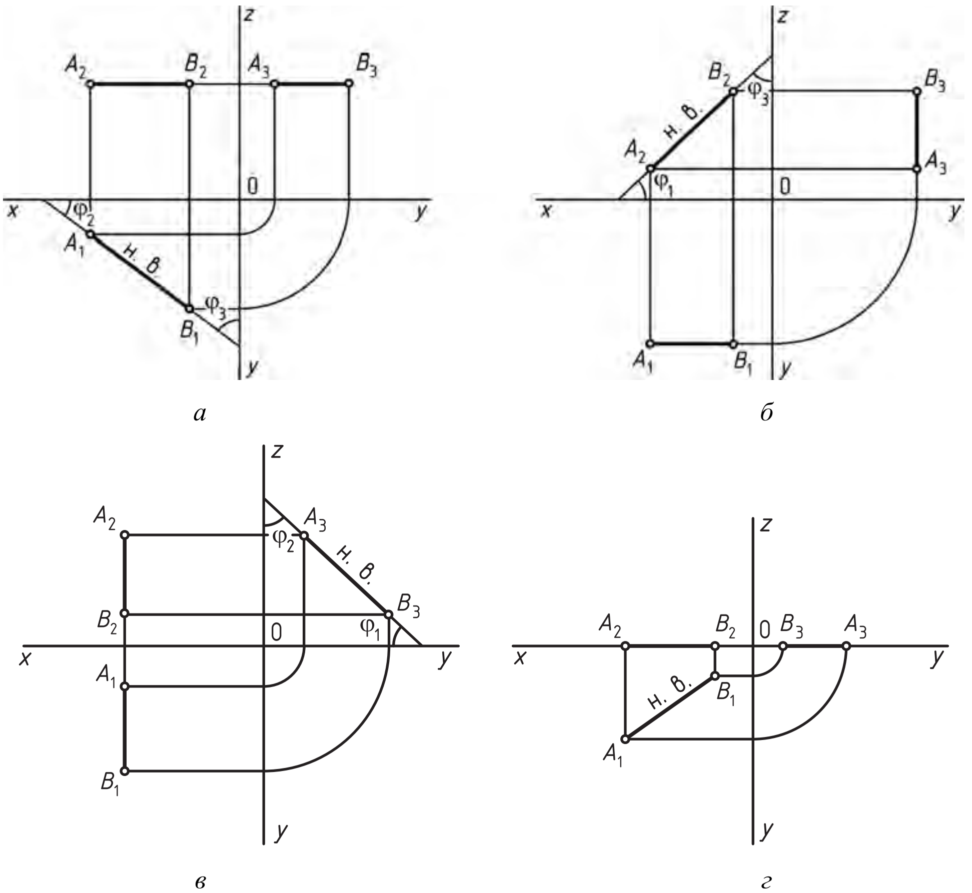


Рис. 11. Проекции прямых уровня

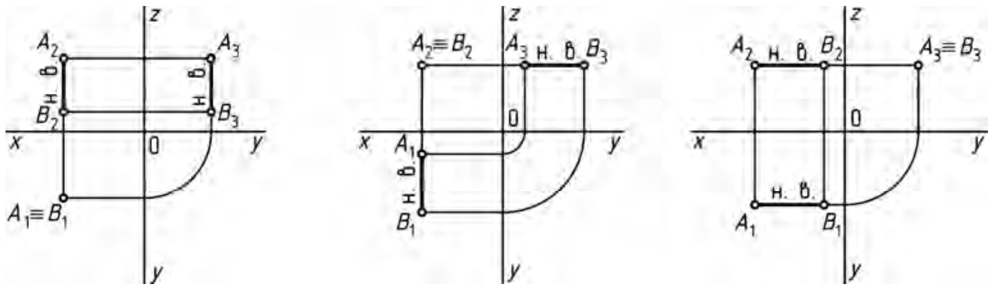
Следует также отметить, что прямая может принадлежать плоскости проекций. В этом случае две ее проекции будут проецироваться на оси проекций, например, $|AB| \in \Pi_1$, то A_1B_1 — н.в. (рис. 11, *г*).

Проецирующие прямые (дважды параллельные).

1. *Горизонтально-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 12, *а*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_2 и Π_3 прямая проецируется в натуральную величину.

2. *Фронтально-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 12, *б*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_1 и Π_3 прямая проецируется в натуральную величину.

3. *Профильно-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 12, *в*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_1 и Π_2 прямая проецируется в натуральную величину.



а *б* *в*

Рис. 12. Проекции проецирующих прямых

3.3. Следы прямой

Следом прямой называют точку пересечения прямой с плоскостью проекций.

Различают:

1. *Горизонтальный след прямой* — точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 (рис. 13).

Обозначается M: $M = |AB| \cap \Pi_1$.

Проекции следа: M_1 — горизонтальная проекция горизонтального следа M; M_2 — фронтальная проекция горизонтального следа M.

2. *Фронтальный след прямой* — точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций Π_2 (см. рис. 13).

Обозначается N: $N = |AB| \cap \Pi_2$.

Проекции следа: N_1 — горизонтальная проекция фронтального следа N; N_2 — фронтальная проекция фронтального следа N.

3. *Профильный след прямой* — точка пересечения прямой с профильной плоскостью проекций Π_3. Обозначается P: $P = |AB| \cap \Pi_3$.

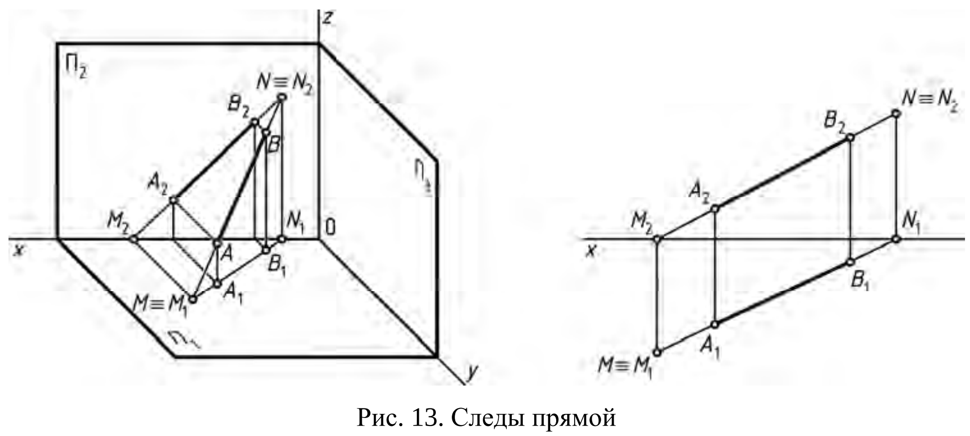


Рис. 13. Следы прямой

Для того чтобы найти горизонтальный след прямой M, необходимо фронтальную проекцию прямой продолжить до пересечения с осью x (определяют положение фронтальной проекции следа M_2). Из этой точки проводят перпендикуляр к оси x до пересечения его с горизонтальной проекцией прямой (определяют положение горизонтальной проекции следа $M \equiv M_1$) (см. рис. 13).

Для того чтобы найти фронтальный след прямой N, необходимо горизонтальную проекцию прямой продолжить до пересечения с осью x (определяют положение горизонтальной проекции следа N_1). Из этой точки проводят перпендикуляр к оси x до пересечения его с фронтальной проекцией прямой (определяют положение фронтальной проекции следа $N \equiv N_2$) (см. рис. 13).

3.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций

Дан отрезок прямой AB общего положения и горизонтальная плоскость проекций Π_1 (рис. 14). Продолжим отрезок прямой AB до пересечения его с плоскостью Π_1 и определим положение горизонтального следа прямой AB и его горизонтальной проекции $M \equiv M_1$. Затем построим горизонтальную проекцию отрезка прямой A_1B_1 и из точки A проведем прямую AB', параллельную горизонтальной проекции прямой A_1B_1. В результате построений имеем прямоугольный треугольник ABB', где $\angle\ AB'B = 90°$. Из этого треугольника видно, что *натуральная величина отрезка прямой AB* есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость ($|AB'| = |A_1B_1|$), а другой катет — разности расстояний концов отрезка до этой плоскости ($\Delta z = z_B - z_A$) (см. рис. 14).

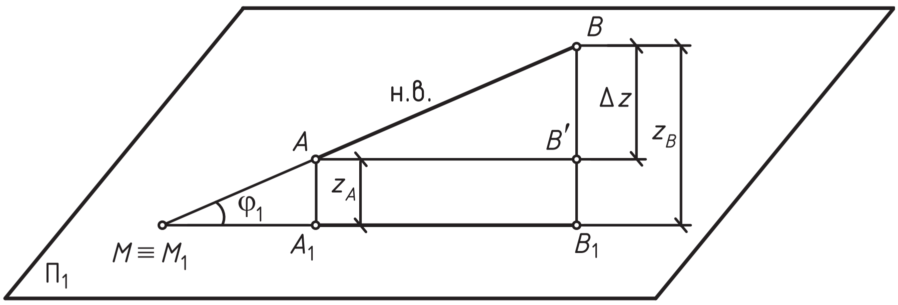


Рис. 14. Метод прямоугольного треугольника

Рассмотрим определение натуральной величины отрезка прямой *методом прямоугольного треугольника* на комплексном чертеже.

Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на горизонтальной плоскости проекций Π_1, необходимо из любого конца горизонтальной проекции этого отрезка, например из B_1, восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δz, взятую с фронтальной плоскости проекций Π_2: $\Delta z = z_B - z_A$. Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на фронтальной плоскости проекций $П_2$, необходимо из любого конца фронтальной проекции этого отрезка, например из A_2, восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δy, взятую с горизонтальной плоскости проекций $П_1$: $\Delta y = y_A - y_B$ (рис. 15).

Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на профильной плоскости проекций $П_3$, необходимо также из любого конца профильной проекции этого отрезка восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δx, взятую с фронтальной или горизонтальной плоскостей проекций ($П_1$ или $П_2$): $\Delta x = x_A - x_B$.

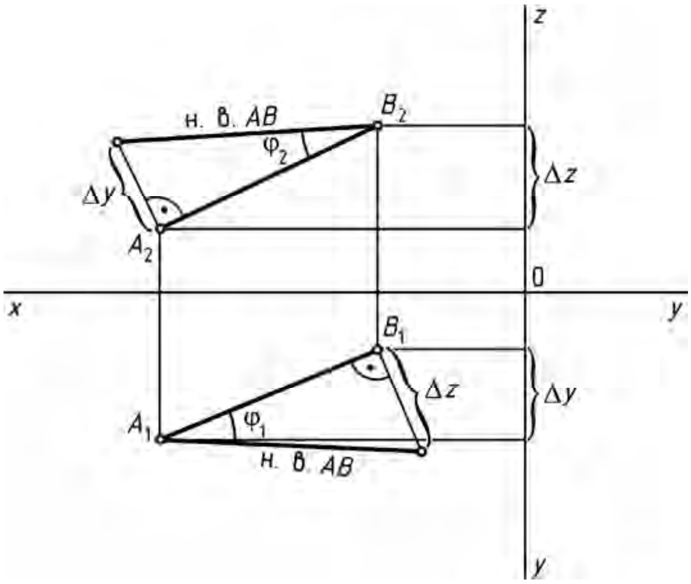


Рис. 15. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций

Угол, заключенный между натуральной величиной отрезка прямой и его проекцией на эту плоскость, есть *угол наклона отрезка прямой к данной плоскости проекций*. Например, угол φ_1 есть угол наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций $П_1$, а угол φ_2 — угол наклона прямой AB к фронтальной плоскости проекций $П_2$ (см. рис. 15).

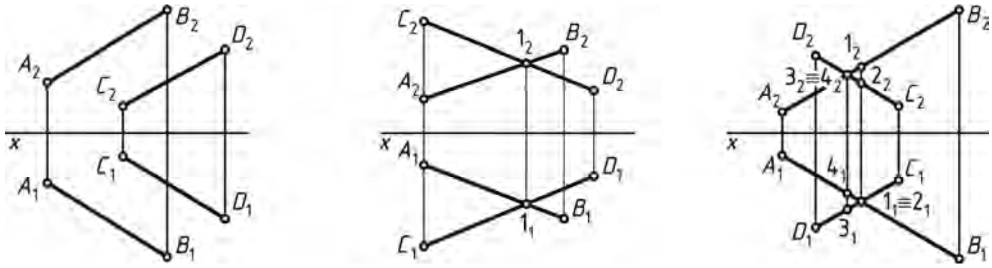
3.5. Относительное расположение прямых линий

Прямые пространства относительно друг друга могут занимать различные положения: быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися.

Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общую точку, называются *параллельными*. Если прямые пространства параллельны, то их одноименные проекции будут также параллельны (рис. 16, *а*).

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, называются *пересекающимися*. Если прямые в пространстве пересекаются, то их одноименные проекции также пересекаются, и проекции их точек пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси проекций (рис. 16, *б*).

Прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие одну общую точку, называются *скрещивающимися*. Если прямые в пространстве скрещиваются, то их одноименные проекции пересекаются, и проекции их точек пересечения не лежат на одном перпендикуляре к оси проекций (рис. 16, *в*). В этом случае, пользуясь методом конкурирующих точек, можно определить, какая из прямых пространства расположена ближе к какой-либо плоскости проекций.



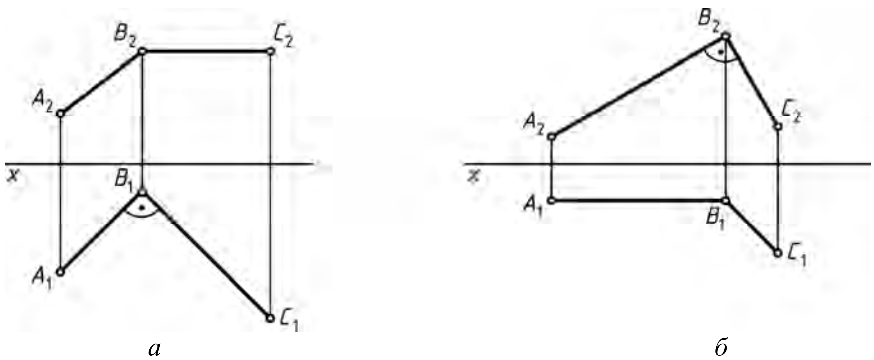
а *б* *в*

Рис. 16. Относительное расположение прямых

Частным случаем пересечения прямых в пространстве может быть их *перпендикулярность*, т. е. когда прямые перпендикулярны друг другу и образуют прямой угол.

Т е о р е м а *о проецировании прямого плоского угла*: если две прямые в пространстве образуют прямой угол и одна из прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения, т. е. в натуральную величину.

Если $|AB| \perp |BC|$, а $|BC| \parallel \Pi_1 \Rightarrow |A_1B_1| \perp |B_1C_1|$ (рис. 17, *а*).
Если $|AB| \perp |BC|$, а $|AB| \parallel \Pi_2 \Rightarrow |A_2B_2| \perp |B_2C_2|$ (рис. 17, *б*).



а *б*

Рис. 17. Проецирование прямого плоского угла

Тема 4. Проекции плоскости

4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже. 4.2. Следы плоскости. 4.3. Плоскости общего и частного положения. 4.4. Принадлежность точки и прямой плоскости. 4.5. Главные линии плоскости. 4.6. Относительное расположение плоскостей. 4.7. Относительное расположение прямой и плоскости

4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже

Плоскость в начертательной геометрии может быть задана:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 18, *а*);
2) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой (рис. 18, *б*);
3) двумя параллельными прямыми (рис. 18, *в*);
4) двумя пересекающимися прямыми (рис. 18, *г*);
5) плоской фигурой (рис. 18, *д*);
6) масштабом уклонов (рис. 18, *е*).

Каждый из перечисленных способов задания плоскости допускает переход к любому другому. В некоторых случаях плоскость на комплексном чертеже целесообразно задать следами.

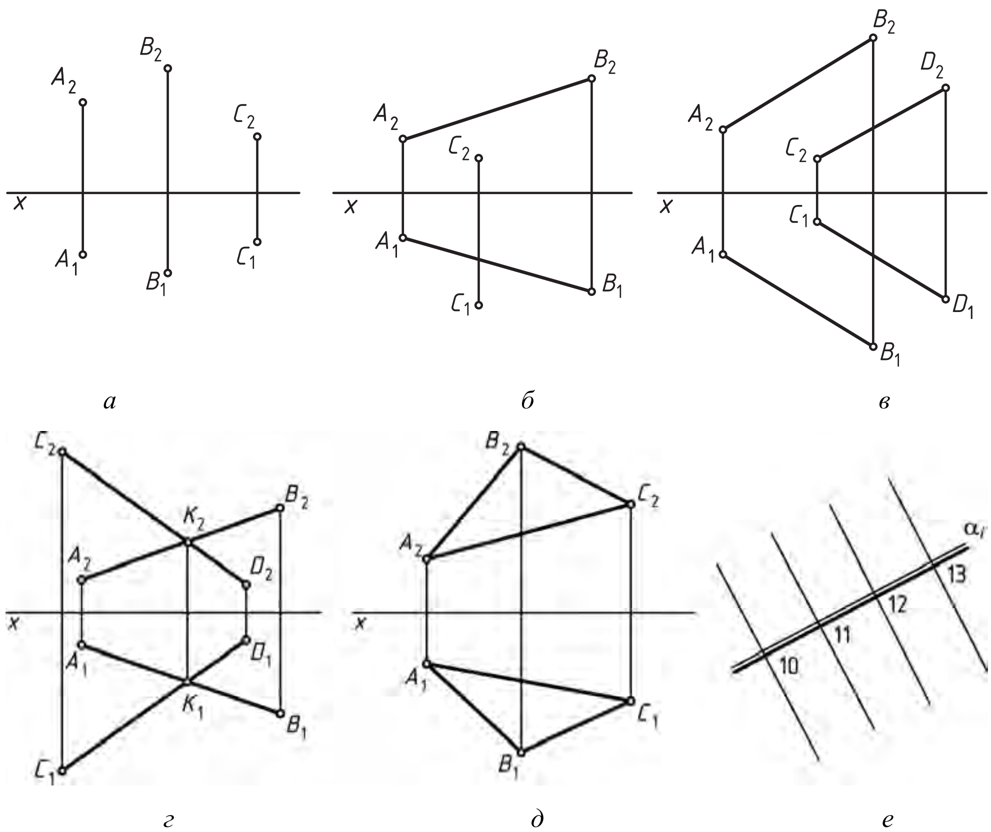


Рис. 18. Способы задания плоскости на чертеже

4.2. Следы плоскости

Следом плоскости называют линию пересечения данной плоскости с какой-либо плоскостью проекций (рис. 19).

Различают:

горизонтальный след плоскости: $\alpha_{\Pi_1} = \alpha \cap \Pi_1$;

фронтальный след плоскости: $\alpha_{\Pi_2} = \alpha \cap \Pi_2$;

профильный след плоскости: $\alpha_{\Pi_3} = \alpha \cap \Pi_3$.

Точки α_x, α_y, α_z называются точками схода следов.

Задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими способами задания плоскостей. Прежде всего, сохраняется наглядность изображения, что позволяет легче представить себе положение плоскости в пространстве. При задании плоскости следами достаточно указать два следа — горизонтальный α_{Π_1} и фронтальный α_{Π_2}. Третий след плоскости, профильный α_{Π_3}, при необходимости всегда можно построить по двум заданным.

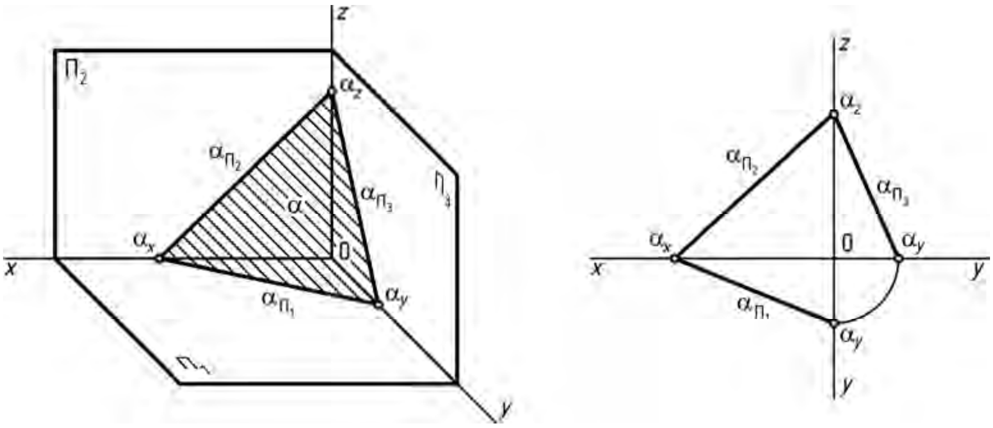


Рис. 19. Плоскость, заданная следами

4.3. Плоскости общего и частного положения

Плоскость может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций.

Плоскость, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения*. Эта плоскость произвольно наклонена к осям проекций и на эпюре Монжа ее следы составляют с координатными осями произвольные углы наклона (см. рис. 19). На рис. 20 даны проекции плоскости общего положения, заданной плоской фигурой $\Delta\, ABC$.

Плоскости, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называют *плоскостями частного положения*.

Различают:

плоскости уровня (дважды проецирующие) — плоскости, параллельные одной какой-либо плоскости проекций и перпендикулярные к двум другим плоскостям проекций одновременно;

проецирующие плоскости — плоскости, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций.

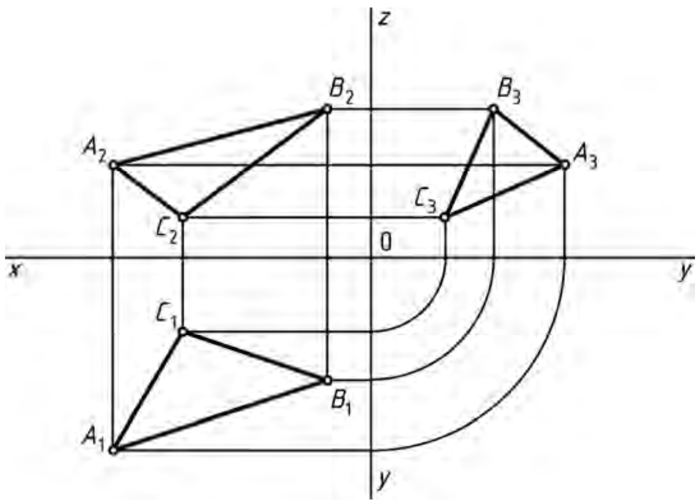


Рис. 20. Плоскость, заданная плоской фигурой Δ *ABC*

Плоскости уровня (дважды проецирующие).

1. *Горизонтальная плоскость уровня* — плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1: α (Δ *ABC*) || Π_1 (рис. 21).

Любая геометрическая фигура, принадлежащая горизонтальной плоскости уровня, на плоскость проекций Π_1 проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

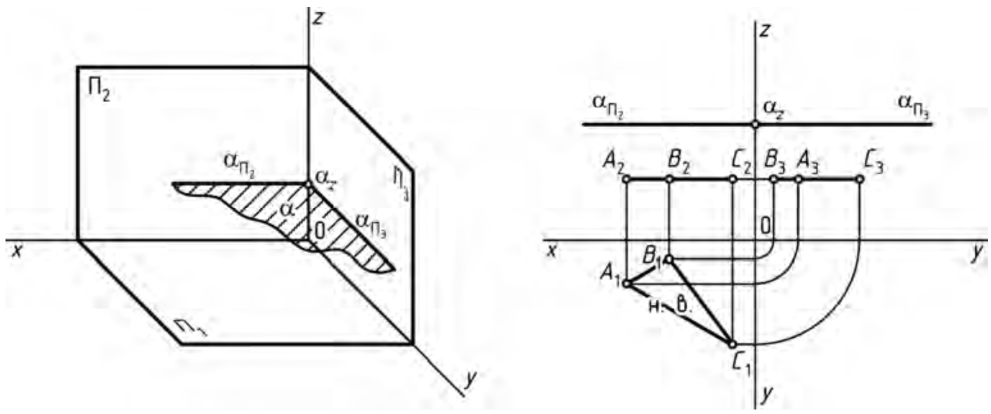


Рис. 21. Горизонтальная плоскость уровня

2. *Фронтальная плоскость уровня* — плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$: α (Δ *ABC*)$||$$П_2$ (рис. 22).

Любая геометрическая фигура, принадлежащая фронтальной плоскости уровня, на плоскость проекций $П_2$ проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

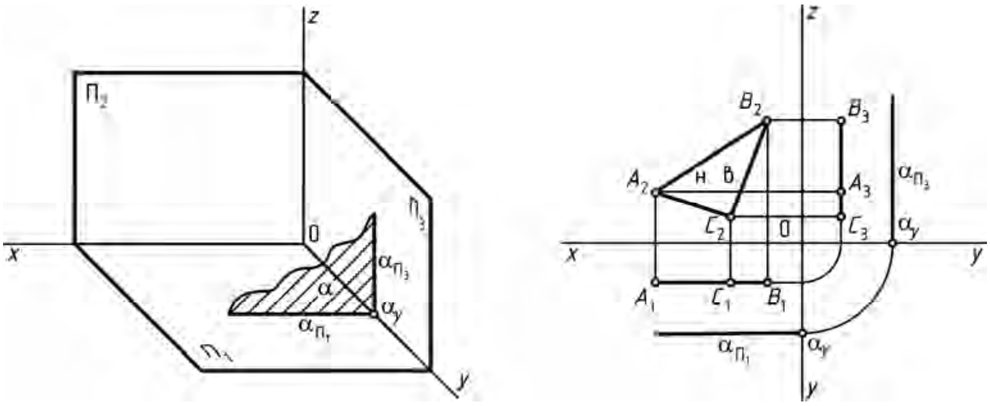


Рис. 22. Фронтальная плоскость уровня

3. *Профильная плоскость уровня* — плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$: α (Δ *ABC*)$||$$П_3$ (рис. 23).

Любая геометрическая фигура, принадлежащая профильной плоскости уровня, на плоскость проекций $П_3$ проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

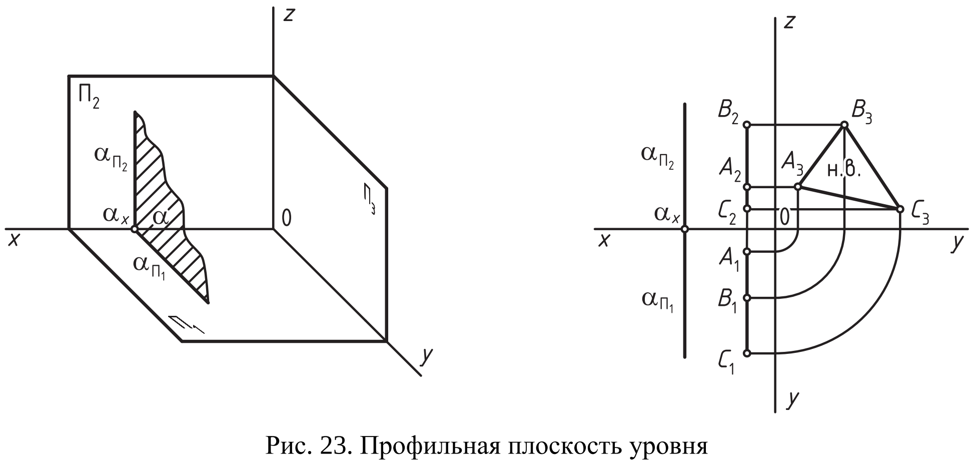


Рис. 23. Профильная плоскость уровня

Проецирующие плоскости.

1. *Горизонтально-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$: α (ΔABC) $\perp$ $П_1$ (рис. 24). Горизонтальная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает с горизонтальным следом плоскости $\alpha_{П_1}$.

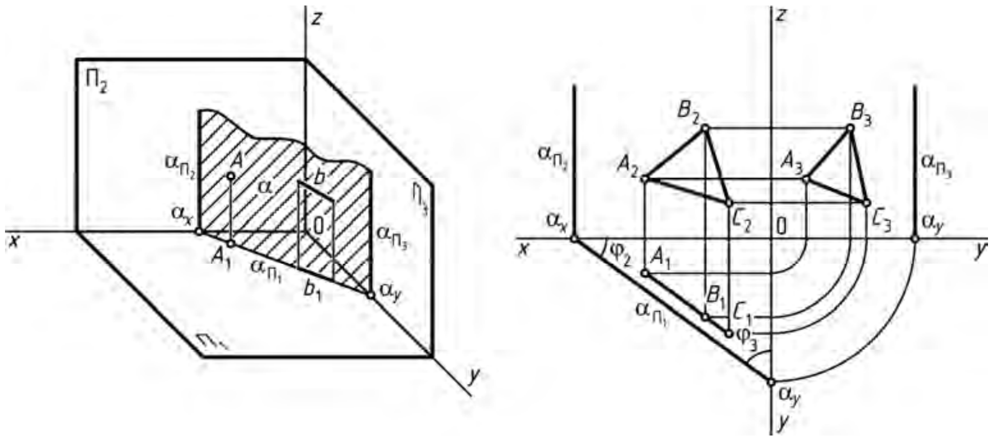


Рис. 24. Горизонтально-проецирующая плоскость

Горизонтальный след α_{Π_1} горизонтально-проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий горизонтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее горизонтальный след. Горизонтально-проецирующая плоскость с фронтальной плоскостью проекций Π_2 составляет угол φ_2, который измеряется между горизонтальным следом плоскости α_{Π_1} и осью *x*. С профильной плоскостью проекций Π_3 горизонтально-проецирующая плоскость составляет угол φ_3, который измеряется между горизонтальным следом плоскости α_{Π_1} и осью *y*.

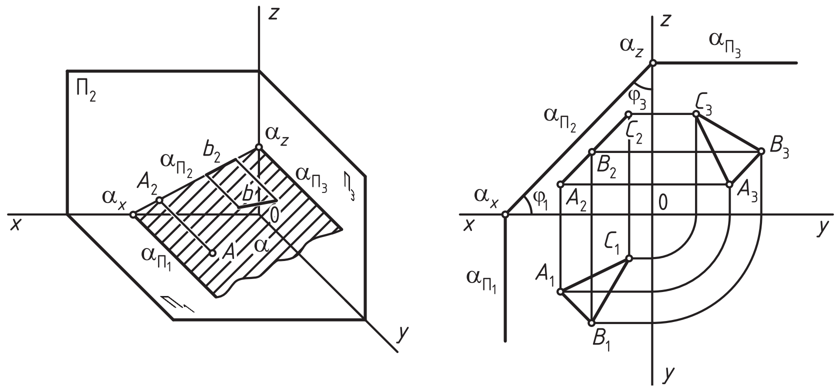


Рис. 25. Фронтально-проецирующая плоскость

2. *Фронтально-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2: α (ΔABC) $\perp$ Π_2 (рис. 25). Фронтальная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает с фронтальным следом плоскости α_{Π_2}. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости обладает *собира-*

тельным свойством: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее фронтальный след. Фронтально-проецирующая плоскость с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 составляет угол φ_1, который измеряется между фронтальным следом плоскости α_{Π_2} и осью x. С профильной плоскостью проекций Π_3 фронтально-проецирующая плоскость составляет угол φ_3, который измеряется между фронтальным следом плоскости α_{Π_2} и осью z.

3. *Профильно-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3: α (ΔABC) $\perp$ Π_3 (рис. 26). Профильная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает с профильным следом плоскости α_{Π_3}. Профильный след α_{Π_3} профильно-проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий профильно-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее профильный след.

Профильно-проецирующая плоскость с горизонтальной плоскостью Π_1 составляет угол φ_1, который измеряется между профильным следом плоскости α_{Π_3} и осью y. С фронтальной плоскостью проекций Π_2 профильно-проецирующая плоскость составляет угол φ_2, который измеряется между профильным следом плоскости α_{Π_3} и осью z.

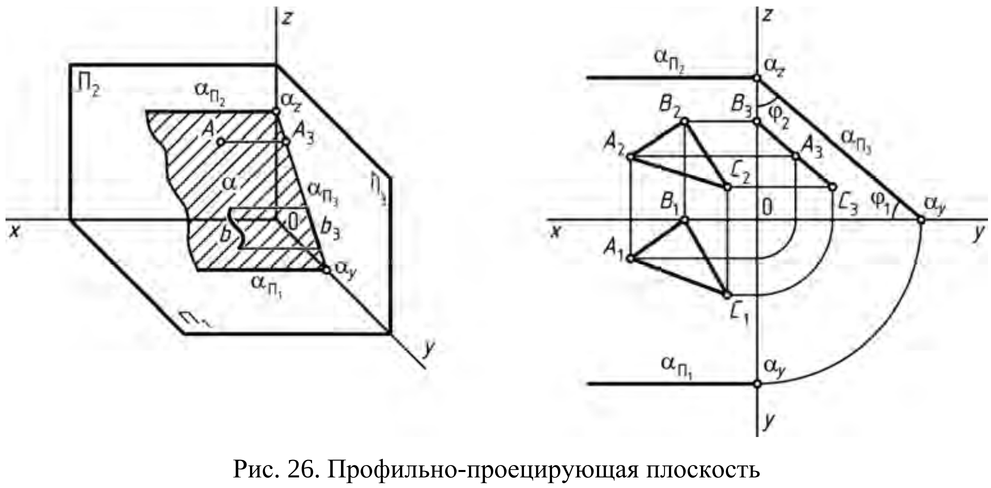


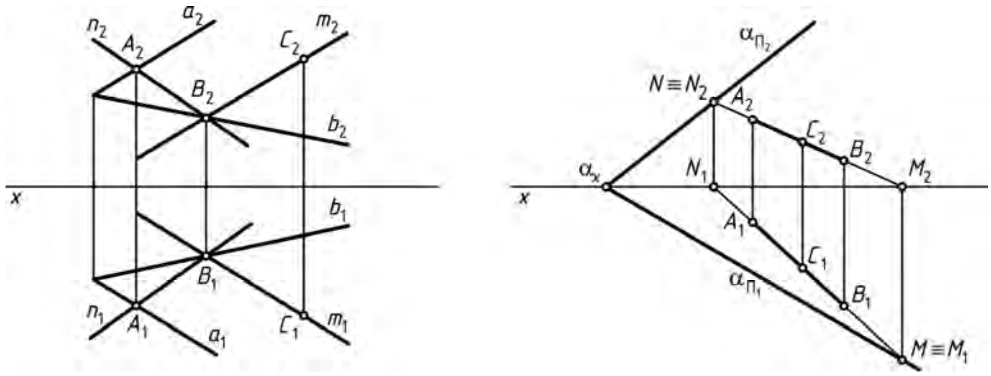
Рис. 26. Профильно-проецирующая плоскость

4.4. Принадлежность точки и прямой плоскости

1. *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.* На рис. 27, *а* плоскость α задана двумя пересекающимися прямыми a и b. Прямая n принадлежит данной плоскости, так как имеет с ней две общие точки A и B: $n \subset \alpha$ ($a \cap b$).

2. *Прямая принадлежит плоскости, заданной следами, если она проходит через две точки, расположенные на следах этой плоскости.* Эти две точки являются следами этой прямой.

Если прямая лежит в плоскости, то ее следы должны лежать на одноименных следах плоскости, так как горизонтальный след прямой M одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости проекций Π_1 ($M \equiv M_1 \in \alpha_{\Pi_1}$), а фронтальный след прямой N одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости проекций Π_2 ($N \equiv N_2 \in \alpha_{\Pi_2}$) (рис. 27, *б*).



а *б*

Рис. 27. Принадлежность точки и прямой плоскости

Используя свойство п. 2, можно перейти от любого способа задания плоскости к заданию ее следами. Для этого необходимо определить следы прямых, например AB и BC, принадлежащих заданной плоскости ΔABC, и через них построить следы плоскости α (рис. 28).

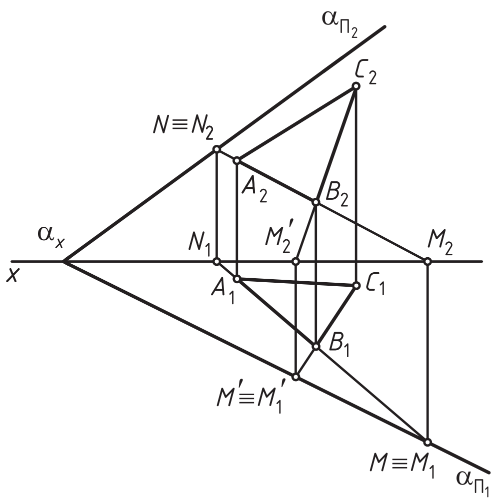


Рис. 28. Задание плоскости Δ *ABC* следами

3. *Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней одну общую точку и параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Прямая m на рис. 27, *а* принадлежит плоскости α, так как имеет с ней одну общую точку B и параллельна прямой a, принадлежащей плоскости α: $m \subset \alpha$ $(a \cap b)$.

4. *Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.* Точка C на рис. 27, *а* принадлежит плоскости α, так как она принадлежит прямой m, лежащей в этой плоскости: $C \in m$. Если точка принадлежит плоскости, то через нее можно провести бесчисленное множество прямых, принадлежащих этой плоскости.

4.5. Главные линии плоскости

Главные линии плоскости — это особые прямые, принадлежащие плоскости и позволяющие более точно выявить ориентацию плоскости в пространстве и упростить решение многих графических задач. К главным линиям плоскости относят линии уровня плоскости и линии наклона плоскости к плоскостям проекций (линии наибольшего ската).

Линии уровня плоскости. *Горизонталь* — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 29, *а*). Обозначается h.

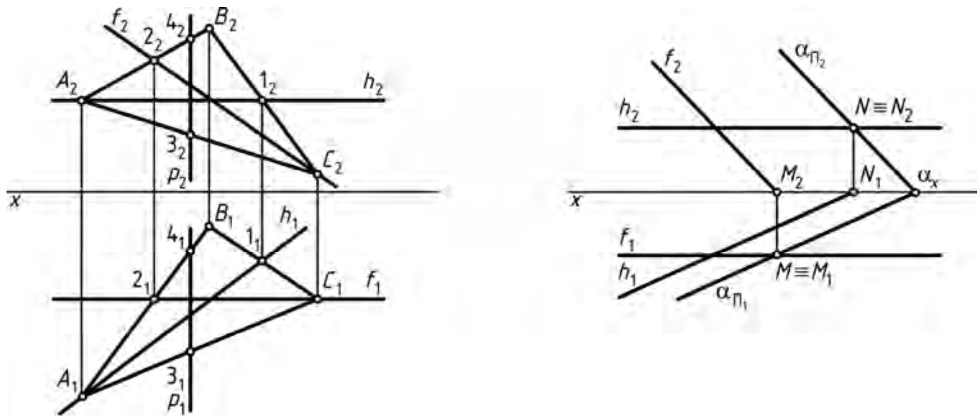
Проекции горизонтали: h_1 — горизонтальная; h_2 — фронтальная.

Построение горизонтали плоскости h надо начинать с ее фронтальной проекции h_2, так как $h \,||\, \Pi_1 \Rightarrow h_2 \,||\, x$, h_1 — н. в.

Фронталь — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 29, *а*). Обозначается f.

Проекции фронтали: f_1 — горизонтальная; f_2 — фронтальная.

Построение фронтали плоскости f надо начинать с ее горизонтальной проекции f_1, так как $f \,||\, \Pi_2 \Rightarrow f_1 \,||\, x$, f_2 — н. в.



а *б*

Рис. 29. Главные линии плоскости

Профильная прямая — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 29, *а*). Обозначается p.

Проекции профильной прямой: p_1 — горизонтальная; p_2 — фронтальная.

Построение профильной прямой плоскости p надо начинать или с ее горизонтальной проекции p_1, или с ее фронтальной проекции p_2, так как $p || \Pi_3 \Rightarrow p_1 || x$ и $p_2 || z$, p_3 — н. в.

Рассмотрим плоскость α, заданную следами. Построим в этой плоскости горизонталь и фронталь. Следует отметить, что следы плоскости можно отнести к главным линиям плоскости. Так, расстояние от горизонтали до плоскости проекций Π_1 равно значению z, а от фронтали до плоскости проекций Π_2 равно значению y. Отсюда, горизонтальный след плоскости — это нулевая горизонталь плоскости ($\alpha_{\Pi_1} \equiv h_0$), а фронтальный след плоскости — это нулевая фронталь плоскости ($\alpha_{\Pi_2} \equiv f_0$). Итак, если $h \subset \alpha$, $h || \Pi_1$ и $h_2 || 0x$, то фронтальный след горизонтали $N \equiv N_2 \in \alpha_{\Pi_2}$, а проекция горизонтали $h_1 || \alpha_{\Pi_1}$ (рис. 29, *б*). Аналогично, если $f \subset \alpha$, $f || \Pi_2$ и $f_1 || 0x$, то горизонтальный след фронтали $M \equiv M_1 \in \alpha_{\Pi_1}$, а проекция фронтали $f_2 || \alpha_{\Pi_2}$ (рис. 29, б).

Отметим также, что если одна из проекций точки принадлежит следу плоскости, то другая ее проекция будет лежать на оси x. Верно и обратное утверждение.

Линии наклона плоскости к плоскостям проекций (линии наибольшего ската). *Линией наклона плоскости к плоскостям проекций* называют прямую, принадлежащую заданной плоскости α (ΔABC) и перпендикулярную или горизонтали, или фронтали плоскости.

Главным свойством линий наибольшего ската является то, что они образуют с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 и с фронтальной плоскостью проекций Π_2 углы φ_1 и φ_2, равные углам наклона заданной плоскости к плоскостям проекций (рис. 30). Докажем это.

Пусть n — линия наибольшего ската, перпендикулярная горизонтали плоскости α (ΔABC): $n \perp h$, а m — линия наибольшего ската, перпендикулярная фронтали плоскости α (ΔABC): $m \perp f$. Тогда, применяя теорему о проецировании прямого плоского угла, получаем: если $n \perp h$, а $h || \Pi_1 \Rightarrow n_1 \perp h_1$; если $m \perp f$, а $f || \Pi_2 \Rightarrow m_2 \perp f_2$. Выстраиваем оставшиеся проекции n_2 и m_1. Методом прямоугольного треугольника определяем натуральные величины прямых n и m. Угол, заключенный между натуральной величиной линии наибольшего ската n и ее проекцией n_1, есть угол наклона φ_1 плоскости α (ΔABC) к горизонтальной плоскости проекций Π_1. Угол, заключенный между натуральной величиной линии наибольшего ската m и ее проекцией m_2, есть угол наклона φ_2 плоскости α (ΔABC) к фронтальной плоскости проекций Π_2.

На любой плоскости можно провести бесконечное множество главных линий. Главные линии всех направлений образуют плоские пучки параллельных прямых, т. е. все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости параллельны между собой и т. д.

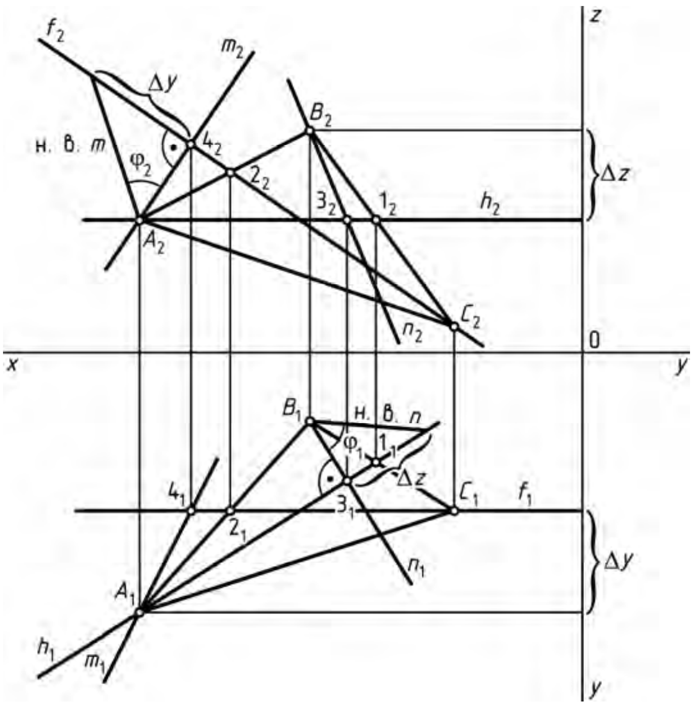


Рис. 30. Определение углов наклона плоскости к плоскостям проекций

4.6. Относительное расположение плоскостей

Плоскости относительно друг друга могут быть параллельны и пересекаться.

Плоскости параллельны. *Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости* (рис. 31).

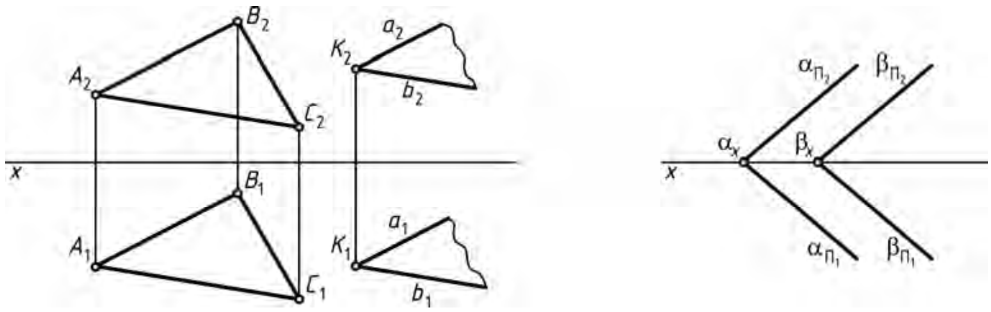


Рис. 31. Параллельные плоскости

У параллельных плоскостей главные линии (горизонтали, фронтали, профильные прямые и линии наибольшего ската) также параллельны. Одноименные следы параллельных плоскостей будут также параллельны.

Плоскости пересекаются. Линией пересечения двух плоскостей является прямая. Для построения этой прямой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям.

Рассмотрим примеры.

1. Плоскость общего положения пересекается с плоскостью частного положения (рис. 32). Плоскость α ($\square DEFK$) — горизонтально-проецирующая плоскость, горизонтальная проекция которой обладает собирательным свойством. Плоскость β (ΔABC) — плоскость общего положения. Горизонтальная проекция a_1 линии пересечения плоскостей α ($\square DEFK$) и β (ΔABC) определяется без дополнительных построений. Фронтальная проекция a_2 линии пересечения плоскостей определяется исходя из принадлежности прямой a плоскости β (ΔABC). Видимость плоскостей определяется методом конкурирующих точек.

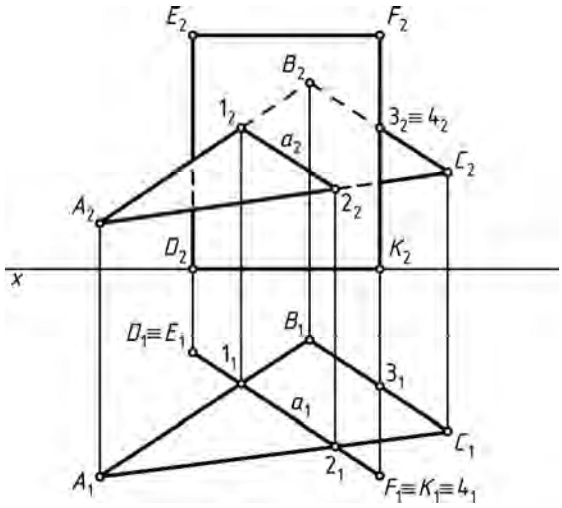


Рис. 32. Пересечение плоскостей общего и частного положения

2. Плоскость общего положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 33). Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения применяют *метод посредника*:

1) последовательно вводят плоскости-посредники частного положения, например горизонтальные уровня, γ и ε;

2) выстраивают линии пересечения α ($a || b$) и γ, а также β ($c \cap d$) и γ, и затем линии пересечения α ($a || b$) и ε, а также β ($c \cap d$) и ε;

3) при пересечении одноименных проекций линий пересечения плоскостей определяют точки пересечения K и L, общие для плоскостей α ($a \| b$) и β ($c \cap d$);

4) соединив одноименные проекции точек K и L, получают проекции линии пересечения плоскостей α ($a \| b$) и β ($c \cap d$).

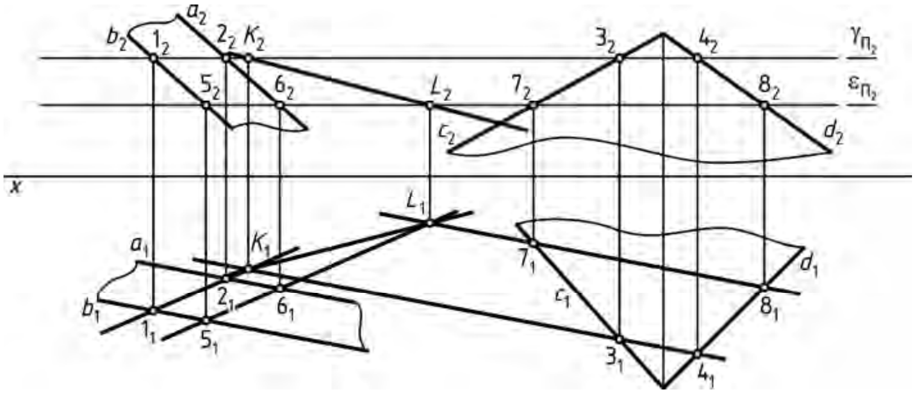


Рис. 33. Пересечение плоскостей общего положения

Для построения линии пересечения плоскостей α и β, заданных следами, отмечают точки пересечения одноименных следов плоскостей, через которые пройдет искомая прямая линия (рис. 34).

Точки M и N — горизонтальный и фронтальный следы линии пересечения l плоскостей α и β.

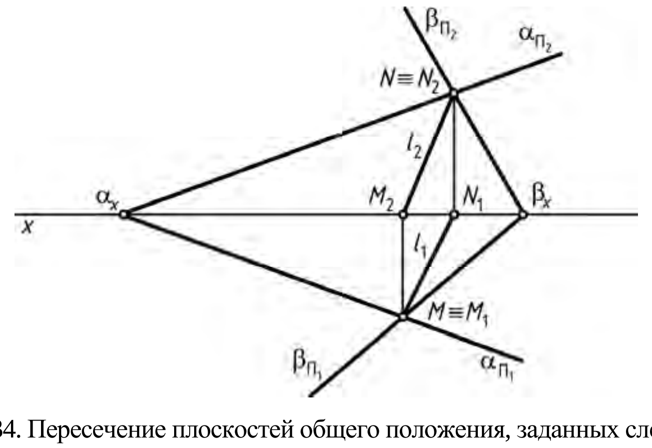


Рис. 34. Пересечение плоскостей общего положения, заданных следами

Перпендикулярность плоскостей. Частным случаем пересечения плоскостей является их перпендикулярность.

Плоскости *взаимно перпендикулярны*, если одна из них, например, плоскость β ($a \cap b$), проходит через перпендикуляр к другой плоскости (см. рис. 37, *а*). Любая плоскость, проходящая через прямую c, будет перпендикулярна плоскости α, так как прямая c является перпендикуляром к плоскости α (см. рис. 37, *б*).

4.7. Относительное расположение прямой и плоскости

Прямая относительно плоскости может занимать различные положения:

1) *прямая принадлежит плоскости* (рассмотрено выше);

2) *прямая параллельна плоскости*, если она параллельна любой прямой, принадлежащей этой плоскости: $a \,||\, |AC| \subset \alpha\,(\Delta ABC) \Rightarrow a \,||\, \alpha\,(\Delta ABC)$ (рис. 35). Совокупность таких прямых образует в пространстве плоскость, параллельную заданной плоскости;

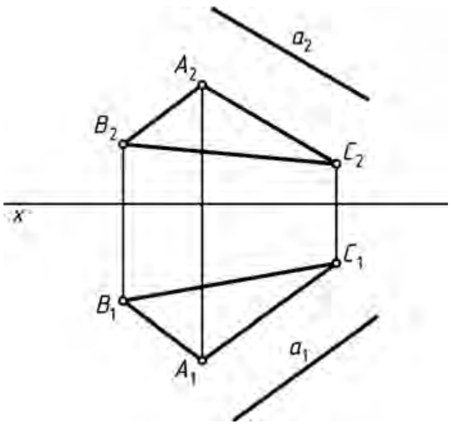


Рис. 35. Прямая, параллельная плоскости

3) *прямая пересекается с плоскостью*. Прямая пересекается с плоскостью в точке. Построить точку пересечения прямой с плоскостью — значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости.

Рассмотрим примеры.

1. Прямая общего положения пересекается с плоскостью частного положения (рис. 36, *а*).

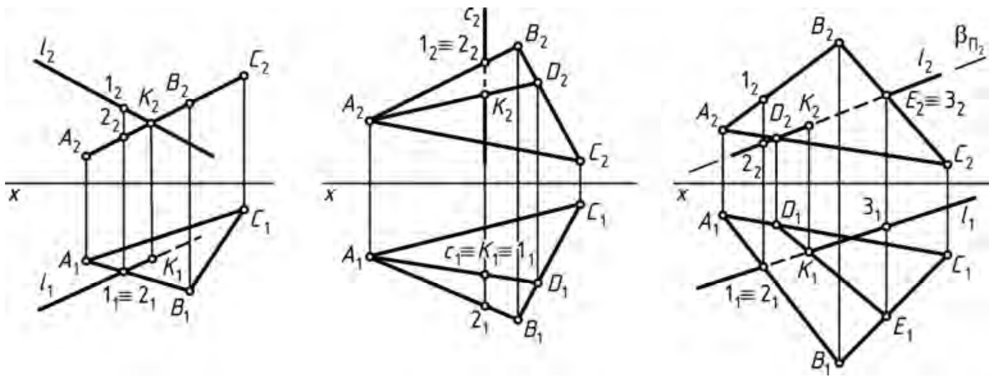
Плоскость α (ΔABC) — фронтально-проецирующая плоскость, фронтальная проекция которой обладает собирательным свойством. Следовательно, $K \in \alpha\,(\Delta ABC) \perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 \in \alpha_{\Pi_2}\,(\Delta A_2B_2C_2)$. Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.

2. Прямая частного положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 36, *б*).

Прямая c — горизонтально-проецирующая прямая. Следовательно, $K \in c \perp \Pi_1 \Rightarrow K_1 \equiv c_1$. Для определения фронтальной проекции точки K_2 необходимо через горизонтальную проекцию точки K_1 провести проекцию любой прямой, принадлежащей плоскости α (ΔABC), например, A_1D_1. Тогда $|A_2D_2| \cap c_2 = K_2$. Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.

3. Прямая общего положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 36, *в*).

Для определения точки пересечения прямой l с плоскостью α (ΔABC) применяют метод посредника, т. е. вводят вспомогательную секущую (проецирующую) плоскость. Например, прямую l заключают в плоскость частного положения β — фронтально-проецирующую. Определяют проекции линии пересечения двух плоскостей α (ΔABC) и β: фронтальную — D_2E_2, и горизонтальную — D_1E_1. Там, где горизонтальная проекция D_1E_1 пересечет горизонтальную проекцию прямой l_1, и будет точка K — точка пересечения прямой l и плоскости α (ΔABC). Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.



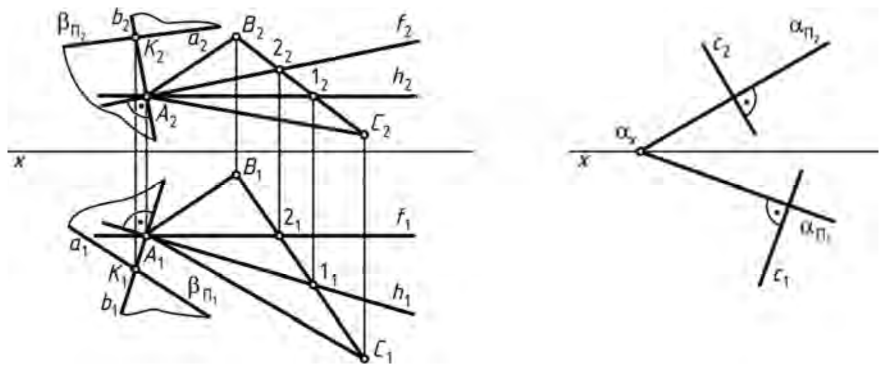
а *б* *в*

Рис. 36. Пересечение прямой с плоскостью

Частным случаем пересечения прямой и плоскости является перпендикулярность этой прямой заданной плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости (рис. 37, *а*). В качестве пересекающихся прямых, принадлежащих плоскости, используют горизонталь и фронталь данной плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, заданной следами, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам этой плоскости (рис. 37, *б*).



а *б*

Рис. 37. Прямая, перпендикулярная плоскости

Опираясь на теорему о проецировании прямого плоского угла, сформулируем т е о р е м у *о перпендикулярности прямой плоскости*: если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция прямой будет перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой будет перпендикулярна фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

Итак, если $b \perp h \Rightarrow b_1 \perp h_1$ и $b \perp f \Rightarrow b_2 \perp f_2$.

Если $b \perp \alpha$ (ΔABC), то $b_1 \perp h_1^{\alpha}$ и $b_2 \perp f_2^{\alpha}$ (см. рис. 37, *а*).

Тема 5. Способы преобразования проекций

5.1. Общие сведения. 5.2. Способ замены плоскостей проекций. 5.3. Способ вращения

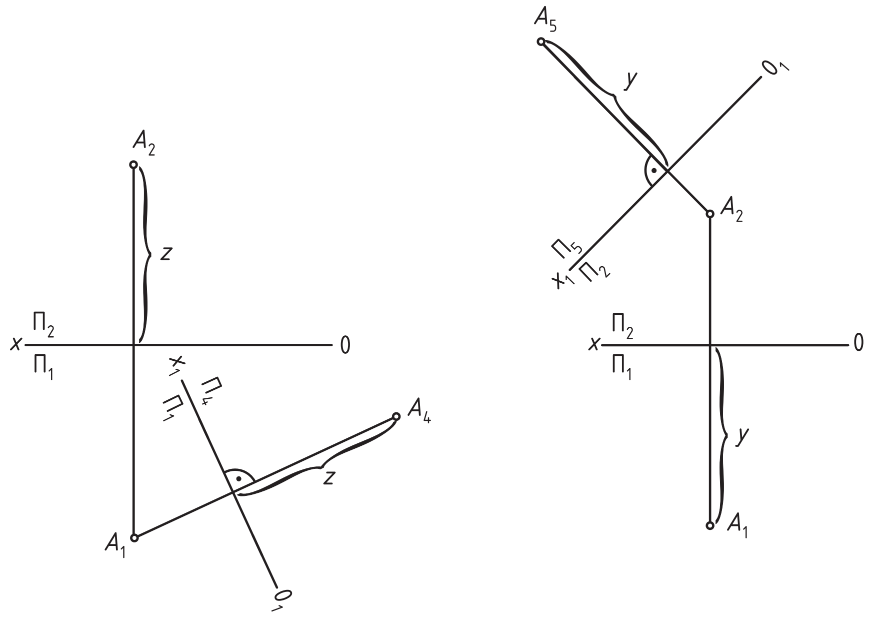
5.1. Общие сведения

Определение натуральных величин геометрических фигур (длины отрезка, величины угла, размеров плоских фигур и т. д.), построение их проекций и разверток поверхностей осуществляется в метрических задачах начертательной геометрии. Решение таких задач зависит как от их условия и способа задания, так и от положения заданных геометрических образов относительно плоскостей проекций. Известно, что в тех случаях, когда заданные геометрические образы являются, например, проецирующими, решение многих задач значительно упрощается. В связи с этим возникает необходимость преобразовать чертеж (т. е. построить новые дополнительные проекции) так, чтобы заданные геометрические фигуры оказались в более выгодном положении относительно плоскостей проекций, а именно в частном — проецирующем или параллельном.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному при ортогональном проецировании можно осуществить различными способами. При решении метрических задач преимущественно пользуются двумя способами преобразования проекций — способом замены плоскостей проекций и способом вращения.

5.2. Способ замены плоскостей проекций

В этом способе положение проецируемой геометрической фигуры остается неизменным относительно плоскостей проекций, изменяется только положение одной из плоскостей проекций. Ее выбирают таким образом, чтобы она занимала частное положение относительно заданной геометрической фигуры, оставаясь при этом перпендикулярной к другой незаменяемой плоскости проекций. Координата на новой плоскости проекций остается неизмененной. Таким образом, при замене фронтальной плоскости проекций $П_2$ на $П_4$ новая плоскость должна быть перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций $П_1$. Координата z при этом не изменяется, т. е. точка A не изменит своего расстояния от горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 38, *а*). При замене горизонтальной плоскости проекций $П_1$ на новую плоскость $П_5$ последняя должна быть перпендикулярна фронтальной плоскости проекций $П_2$. Координата y при этом остается прежней, т. е. точка A не изменит своего расстояния от фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 38, *б*).



а *б*

Рис. 38. Проекции точки в способе замены плоскостей проекций

В приведенных примерах в новой системе плоскостей рассматриваются проекция точки, оставшаяся без изменения, и новая проекция точки на новой плоскости проекций. Чтобы выполнить построения, на любом расстоянии от проекции точки, по отношению к которой производится замена, проводится ось 0_1x_1 новой заменяемой плоскости (рис. 38, *а*, *б*), и из этой проекции восстанавливается перпендикуляр к новой оси. При замене плоскости $П_2$ на $П_4$ от новой оси откладывается расстояние z, равное расстоянию от точки A до горизонтальной плоскости проекций $П_1$. При замене плоскости $П_1$ на $П_5$ от новой оси откладывается расстояние y, равное расстоянию от точки A до фронтальной плоскости проекций $П_2$.

Расстояние от новой оси проекции до новой проекции точки равно расстоянию от заменяемой оси проекции до заменяемой проекции точки.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.

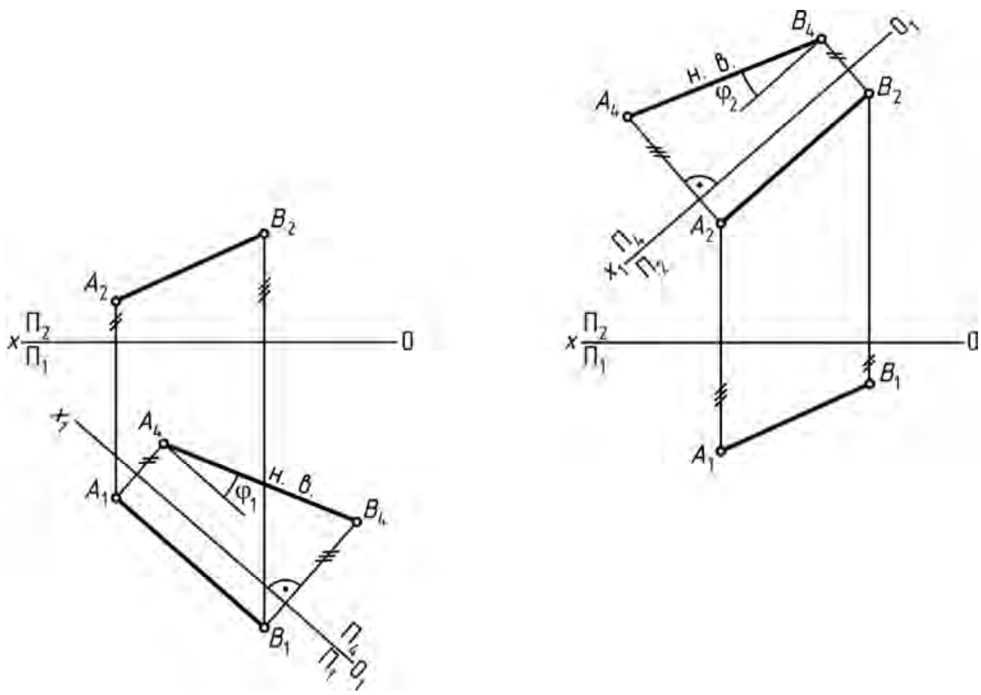
З а д а ч а 1

Дано: прямая *AB* общего положения (рис. 39, *а*, *б*).

Выполнить: определить натуральную длину прямой *AB*.

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *прямая проецируется на какую-либо плоскость проекций в натуральную величину, если она параллельная этой плоскости проекций. Такая прямая называется прямой уровня*. Следовательно, для решения данной задачи прямую общего положения необходимо преобразовать в прямую частного положения — прямую уровня, параллельную одной из плоскостей проекций. Тогда новую плоскость ставят в положение, параллельное прямой *AB*, т. е. заменяют, например, плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$(рис. 39, *а*).



а *б*

Рис. 39. Определение натуральной длины прямой

В этом случае: 1) параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1; 2) от горизонтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций точек A_2 и B_2 (координаты *z*). Новая проекция A_4B_4 будет являться натуральной длиной прямой *AB*, а угол φ_1, заключенный между натуральной величиной прямой и ее проекцией на плоскость Π_1, есть угол наклона прямой к данной плоскости проекций.

Эту же задачу можно решить, заменяя горизонтальную плоскость проекций $П_1$ на $П_4 \perp П_2$ (рис. 39, *б*). В этом случае: 1) параллельно фронтальной проекции прямой A_2B_2 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1; 2) от фронтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до горизонтальных проекций точек A_1 и B_1 (координаты y). Новая проекция A_4B_4 будет являться натуральной длиной прямой AB, а угол φ_2, заключенный между натуральной величиной прямой и ее проекцией на плоскость $П_2$, есть угол наклона прямой к данной плоскости проекций.

З а д а ч а 2

Дано: прямая AB общего положения (рис. 40).

Выполнить: преобразовать прямую AB в проецирующую.

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *проецирующей называется прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. На эту плоскость прямая проецируется в точку*. Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в прямую проецирующую, производят две замены.

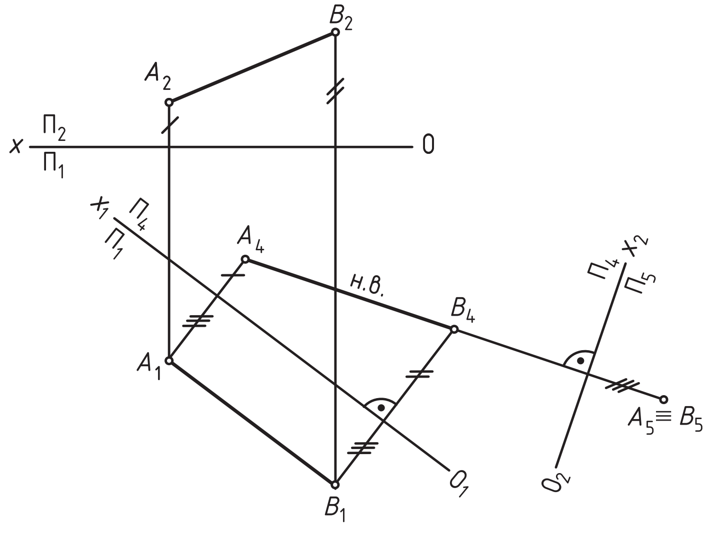


Рис. 40. Преобразование прямой из общего положения в проецирующее

I. Прямую общего положения преобразуют в прямую частного положения (прямую уровня), параллельную какой-либо плоскости проекций. Для этого новую плоскость ставят в положение, параллельное прямой AB, т. е. заменяют, например плоскость $П_2$ на $П_4 \perp П_1$.

В этом случае: 1) параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1; 2) от горизонтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций точек A_2 и B_2 (координаты z). Новая проекция A_4B_4 будет являться прямой уровня и проецироваться на плоскость Π_4 в натуральную величину.

II. Прямую уровня A_4B_4 преобразуют в проецирующую, т. е. ставят в положение, перпендикулярное плоскости проекций. С этой целью заменяют плоскость Π_1 на $\Pi_5 \perp \Pi_4$.

В этом случае: 1) перпендикулярно проекции прямой A_4B_4 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_2x_2; 2) от проекции прямой A_4B_4 проводят проекционную связь, перпендикулярную новой оси проекций, и на ней откладывают расстояния от оси проекций 0_1x_1 до горизонтальных проекций точек A_1 и B_1 (координаты y). Тогда прямая AB становится перпендикулярной относительно плоскости Π_5 и спроецируется на нее в виде точки $A_5 \equiv B_5$.

З а д а ч а 3

Дано: плоскость α (ΔABC) общего положения (рис. 41).

Выполнить: определить натуральную величину плоскости α (ΔABC).

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *плоскость, параллельная какой-либо плоскости проекций, проецируется на нее в натуральную величину. Такая плоскость называется плоскостью уровня.* Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня и определить таким образом ее натуральную величину, производят две замены.

I. Плоскость общего положения преобразуют в плоскость частного положения — проецирующую. Напоминаем, что *проецирующей называется плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. На эту плоскость проекций заданная плоскость проецируется в прямую линию.* Если хотят получить горизонтально-проецирующую плоскость ($\alpha \perp \Pi_1$), то в заданной плоскости строят фронталь f, и новую плоскость проекций ставят перпендикулярно к ней. Если хотят получить фронтально-проецирующую плоскость ($\alpha \perp \Pi_2$), то в заданной плоскости проводят горизонталь h, и новую плоскость проекций ставят перпендикулярно к ней. Например, проводят в заданной плоскости α (ΔABC) проекции горизонтали: горизонтальную — h_1 и фронтальную — h_2. Заменяют плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

В этом случае: 1) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 плоскости α *(ΔABC)* в любом месте проводят новую ось проекций 0_1x_1; 2) от горизонтальной проекции плоскости α (ΔABC) проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций точек A_2, B_2 и C_2 (координаты z). Сохраняя координаты z, горизонталь преобразуется на плоскости Π_4 в точку, а плоскость α в прямую линию $A_4B_4C_4$, заняв проецирующее положение.

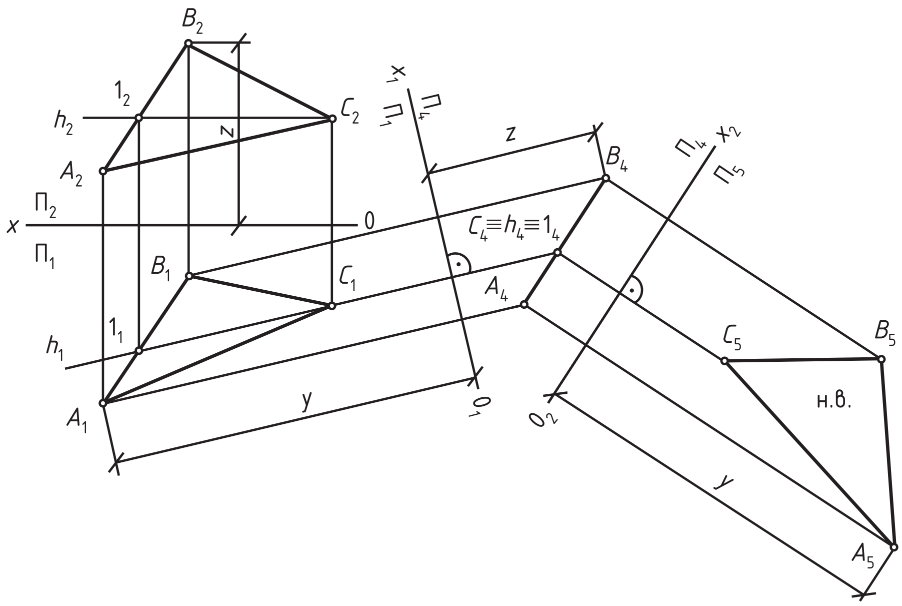


Рис. 41. Определение натуральной величины плоскости α (Δ*ABC)*

II. Проекцию плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) преобразуют в плоскость уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций. Заменяют плоскость Π_1 на $\Pi_5 \perp \Pi_4$. В этом случае: 1) параллельно проекции плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_2x_2; 2) от проекции плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от оси проекций 0_1x_1 до горизонтальных проекций точек A_1, B_1 и C_1 (координаты y). Новая проекция $A_5B_5C_5$ будет являться натуральной величиной плоскости α (ΔABC).

З а д а ч а 4

Дано: плоскость α (□*BCDE)* общего положения и точка *A* (рис. 42).

Выполнить: определить расстояние от точки *A* до плоскости α (□*BCDE*).

Порядок выполнения:

Для того чтобы определить расстояние от точки *A* до плоскости α (□*BCDE*), необходимо плоскость α из общего положения преобразовать в проецирующую плоскость. С этой целью в заданной плоскости α (□*BCDE*) определяют проекции горизонтали: горизонтальную — h_1 и фронтальную — h_2. Перпендикулярно h_1 вводят новую плоскость, т. е. заменяют плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Плоскость α преобразуется в прямую линию — проекцию $B_4C_4D_4E_4$. Проекцию A_4 точки *A* определяют как показано на рис. 38, *а*. Перпендикуляр A_4K_4, проведенный в плоскости Π_4 из проекции точки A_4 на проекцию плоскости $B_4C_4D_4E_4$, является искомым расстоянием, так как $|A_1K_1| \parallel \Pi_4 \Rightarrow |A_4K_4|$ — н.в.

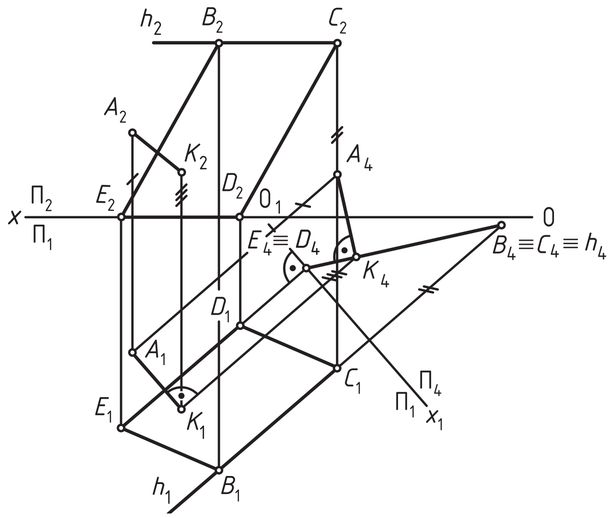


Рис. 42. Определение расстояния от точки *A* до плоскости α (□*BCDE*)

З а д а ч а 5

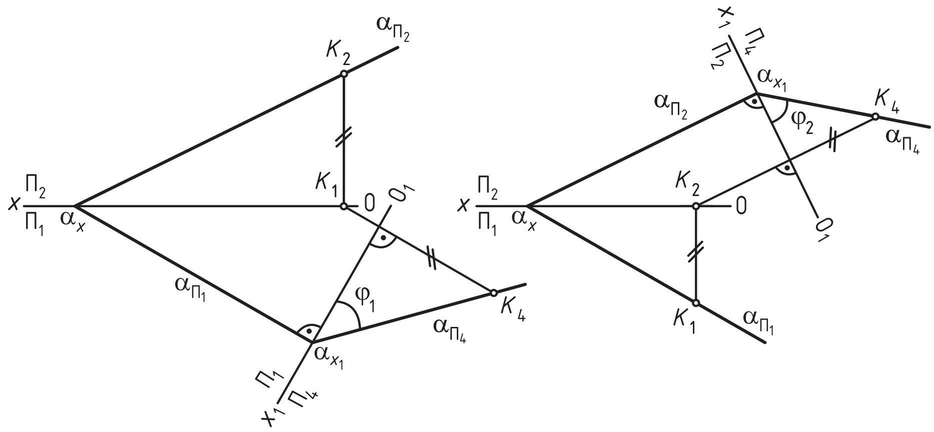
Дано: плоскость α общего положения, заданная следами.

Выполнить: определить углы наклона плоскости α к плоскостям проекций $П_1$ и $П_2$.

Порядок выполнения:

Для того чтобы определить углы наклона плоскости α к плоскостям проекций $П_1$ и $П_2$, необходимо плоскость α из общего положения преобразовать в проецирующую плоскость, перпендикулярную плоскости проекций. С этой целью на следе плоскости, например фронтальном $\alpha_{П_2}$, берут произвольную точку *K* и определяют ее проекции: фронтальную — K_2 и горизонтальную — K_1. Производят замену плоскости $П_2$ на $П_4 \perp П_1$. Новую плоскость проекций $П_4$ выстраивают перпендикулярно горизонтальному следу $\alpha_{П_1}$ плоскости α. В проекционной связи определяют проекцию K_4 точки *K*, соединяют ее с точкой схода следов и выстраивают след плоскости $\alpha_{П_4}$. Угол φ_1, заключенный между следом плоскости $\alpha_{П_4}$ и осью проекций 0_1x_1, есть угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 43, *а*).

Для определения угла наклона плоскости α к плоскости проекций $П_2$ необходимо на горизонтальном следе плоскости $\alpha_{П_1}$ взять произвольную точку *K* и определить ее проекции: горизонтальную — K_1 и фронтальную — K_2. Затем произвести замену плоскости $П_1$ на $П_4 \perp П_2$. Новую плоскость проекций $П_4$ выстраивают перпендикулярно фронтальному следу $\alpha_{П_2}$ плоскости α. В проекционной связи определяют проекцию K_4 точки *K*, соединяют ее с точкой схода следов и выстраивают след плоскости α_{Π_4}. Угол φ_2, заключенный между следом плоскости α_{Π_4} и осью проекций 0_1x_1, есть угол наклона плоскости α к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис.43, *б*).



а *б*

Рис. 43. Определение углов наклона плоскости α к плоскостям проекций Π_1 и Π_2

З а д а ч а 6

Дано: четырехгранная пирамида *ABCS* (рис. 44).

Выполнить: определить величину двугранного угла при ребре *AB* пирамиды *ABCS*.

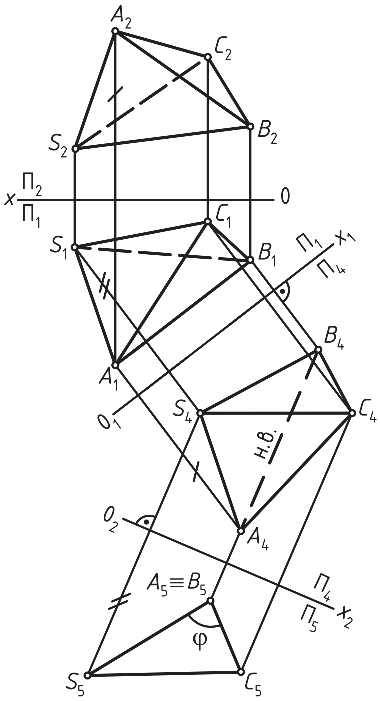


Рис. 44. Определение величины двугранного угла при ребре *AB* пирамиды *ABCS*

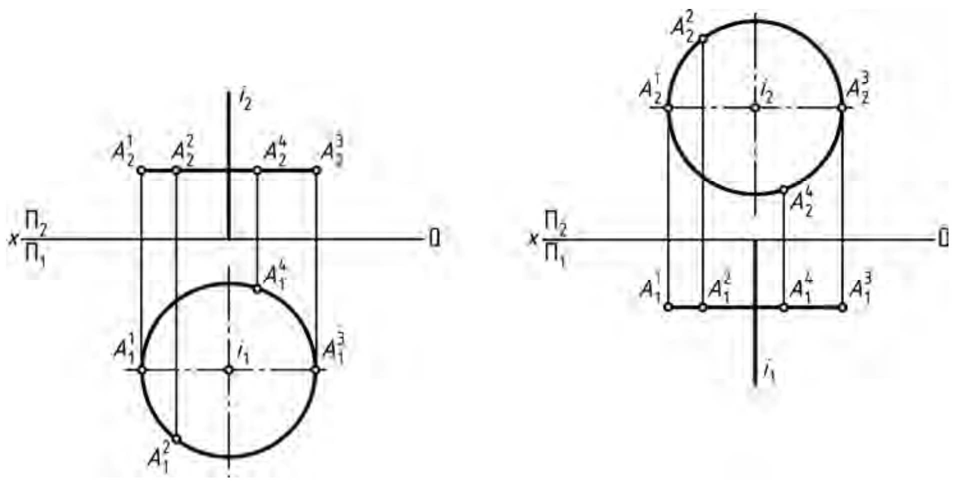
Порядок выполнения:

Ребро AB является общим для двух граней пирамиды $ABCS$: грани ΔABC и грани ΔABS. Последовательно переходя от системы плоскостей проекций $П_1/П_2$ к системе плоскостей $П_1/П_4$ и системе $П_4/П_5$, проекцию ребра AB преобразуем вначале в прямую уровня, определив натуральную величину ребра пирамиды A_4B_4, а затем в проецирующую прямую — точку $A_5 \equiv B_5$. Произведя таким образом две замены плоскостей проекций, плоскость проекций $П_5$, перпендикулярная AB, станет параллельной сторонам линейного угла между двумя гранями пирамиды: ΔABC и ΔABS. Полученной величиной линейного угла и измеряется двугранный угол φ при ребре AB пирамиды $ABCS$.

5.3. Способ вращения

Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций. При этом способе положение плоскостей проекций остается неизменным, меняется положение геометрической фигуры относительно плоскостей проекций путем вращения ее вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций. Например, при вращении точки A вокруг оси i, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция точки A_1 перемещается по окружности, а фронтальная ее проекция A_2 — по прямой, параллельной оси x (рис. 45, *а*).

При вращении точки A вокруг оси i, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций $П_2$, фронтальная проекция точки A_2 перемещается по окружности, а горизонтальная ее проекция A_1 — по прямой, параллельной оси x (рис. 45, *б*).



а *б*

Рис. 45. Проекции точки в способе вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к какой-либо плоскости проекций, одна из проекций точки описывает окружность, другая ее проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые способом вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

З а д а ч а 7

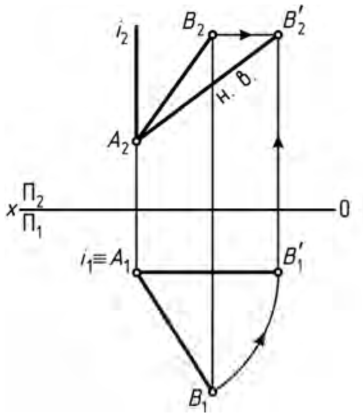
Дано: прямая AB общего положения (рис. 46, *а* и *б*).

Выполнить: определить натуральную длину прямой AB.

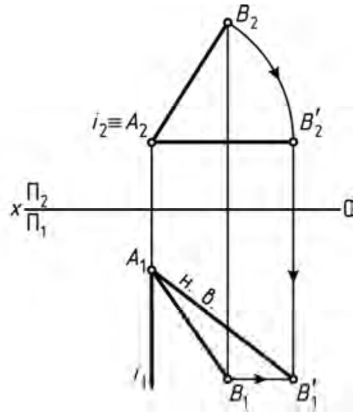
Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом — ось вращения $i \perp \Pi_1$ (рис. 46, *а*). Для определения натуральной длины прямой AB через одну из точек прямой, например через точку A, проводят ось вращения i, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций Π_1. Отрезок прямой AB проецируется в натуральную длину, когда он параллелен плоскости проекций. С этой целью поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_1B'_1$). Горизонтальная проекция точки B_1, описав окружность, переместилась в положение B'_1. Тогда фронтальная проекция B_2 точки B переместится в положение B'_2. Соединяя фронтальную проекцию A_2 с B'_2, получают натуральную длину отрезка прямой AB.

Во втором примере ось вращения $i \perp \Pi_2$ (рис. 46, *б*). Для определения натуральной длины прямой AB через одну из точек прямой, например через точку A, проводят ось вращения i, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций Π_2. Затем поворачивают фронтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_2B'_2$). Фронтальная проекция точки B_2, описав окружность, переместилась в положение B'_2. Тогда горизонтальная проекция B_1 точки B переместится в положение B'_1. Соединяя горизонтальную проекцию A_1 с B'_1, получают натуральную длину отрезка прямой AB.



а



б

Рис. 46. Определение натуральной длины прямой

З а д а ч а 8

Дано: прямая AB общего положения (рис. 47).

Выполнить: преобразовать прямую AB в проецирующую.

Порядок выполнения:

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в прямую проецирующую, необходимо выполнить следующее:

I. Прямую общего положения преобразуют в прямую частного положения, параллельную какой-либо плоскости проекций (прямую уровня). Для этого через одну из точек прямой, например через точку B, проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$. Затем поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение A'_1B_1). Горизонтальная проекция A_1 точки A, описав окружность, переместилась в положение A'_1. Тогда фронтальная проекция A_2 точки A переместится в положение A'_2. Соединяя фронтальные проекции точек A'_2 и B_2, получают натуральную длину отрезка прямой AB.

II. Прямую уровня (A'_2B_2) преобразуют в горизонтально проецирующую, т. е. ставят в положение, перпендикулярное плоскости проекций Π_1. С этой целью через точку A проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$. Затем поворачивают фронтальную проекцию отрезка до положения, перпендикулярного оси проекций $0x$ (положение $A'_2B'_2$). Фронтальная проекция B_2 точки B, описав окружность, переместилась в положение B'_2. Тогда горизонтальная проекция B_1 точки B переместится в положение $A'_1 \equiv B'_1$, т. е. прямая AB стала проецирующей.

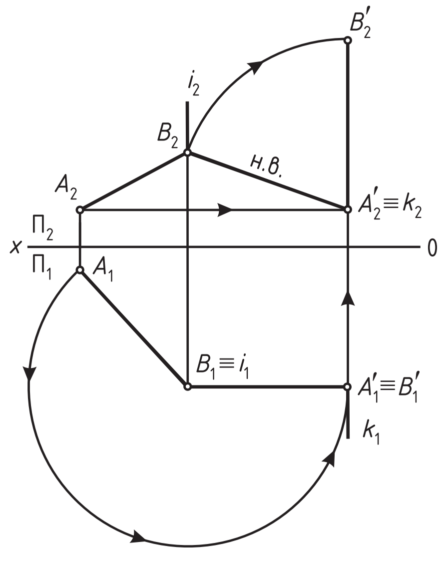


Рис. 47. Преобразование прямой AB из общего положения в проецирующее

З а д а ч а 9

Дано: плоскость ΔABC общего положения (рис. 48).

Выполнить: определить натуральную величину плоскости ΔABC.

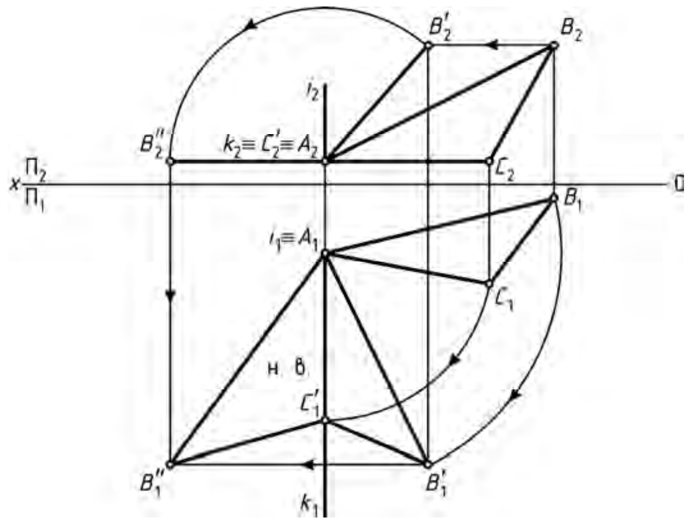


Рис. 48. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 1)

Порядок выполнения:

Для решения задачи требуется выполнить два преобразования.

I. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую. В заданной плоскости ΔABC прямая AC является ее горизонталью. В этом случае: 1) через одну из точек прямой AC, например A, проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$; 2) поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, перпендикулярного оси проекций $0x$ (положение $A_1C'_1$). Фронтальная проекция точки C_2 переместится в положение $A_2 \equiv C'_2$; 3) изменение положения прямой AC повлекло за собой и изменение положения прямой AB плоскости ΔABC. Горизонтальная проекция B_1 переместилась в положение B'_1. При этом прямая BC своей величины не изменяет. Тогда фронтальная проекция точки B_2 переместится в положение B'_2. Соединяя горизонтальные проекции точек A_1, C'_1 и B'_1, получают горизонтальную проекцию плоскости ΔACB. Соединяя фронтальную проекцию $A_2 \equiv C'_2$ с B'_2, получают прямую — фронтальную проекцию плоскости α. Таким образом, плоскость ΔABC преобразуется, заняв фронтально-проецирующее положение.

II. Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость горизонтальную уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций Π_1. В этом случае через точку A проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$. Затем поворачивают фронтальную проекцию плоскости ΔABC до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_2 \equiv C'_2$, B''_2). Горизонтальная проекция точки B'_1 переместится в положение B''_1. Соединяя горизонтальные проекции A_1 с B''_1 и C'_1, получают натуральную величину плоскости ΔABC.

В предложенной задаче одна из сторон плоскости ΔABC — прямая AC — является ее горизонталью. При отсутствии такого условия вначале необходимо любую из сторон плоскости ΔABC, в нашем примере AC, преобразовать в прямую уровня (горизонталь или фронталь) и затем повторить описанные выше действия (рис. 49).

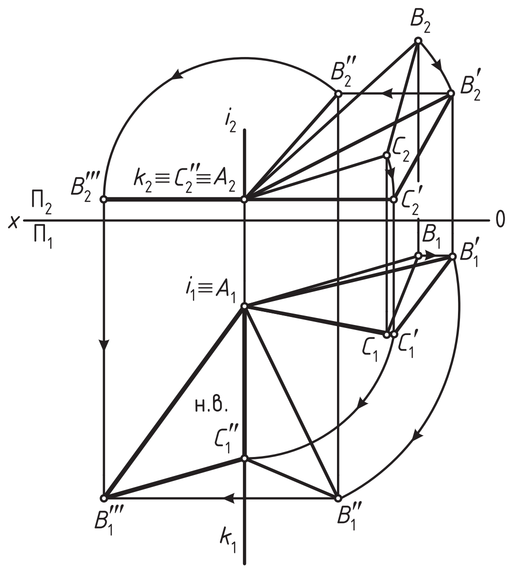


Рис. 49. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 2)

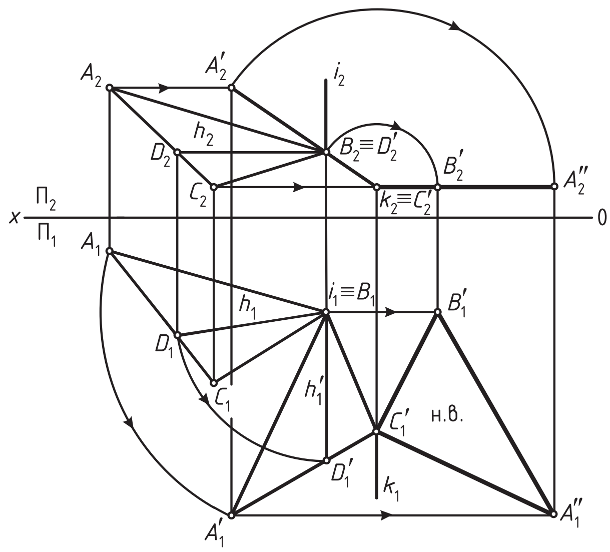


Рис. 50. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 3)

Задачу 3 можно решить и несколько иначе (рис. 50). Для определения натуральной величины плоскости вначале ее преобразуют из общего положения в частное — проецирующее, например, во фронтально проецирующую плоскость. Известно, что отличительным признаком такой плоскости является перпендикулярность ее горизонтальной проекции горизонтали h_1 к оси проекций $0x$. В связи с этим, в плоскости ΔABC проводят горизонталь BD, которая вращением вокруг оси $i \perp \Pi_1$ преобразует плоскость во фронтально проецирующее положение ($A'_2B_2C'_2$). Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость горизонтальную уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций Π_1. С этой целью через точку C проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$. Затем поворачивают проекцию $A'_2B_2C'_2$ плоскости до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A''_2B'_2C'_2$). В плоскости проекций Π_1, соединяя проекции точек A''_1, B'_1 и C'_1, получают натуральную величину плоскости ΔABC.

З а д а ч а 10

Дано: прямая пирамида $ABCS$ (рис. 51).

Выполнить: определить натуральную длину ребер пирамиды $ABCS$.

Порядок выполнения:

Через вершину S пирамиды $ABCS$ проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$. Отрезок прямой AS проецируется на плоскость Π_2 в натуральную длину, так как $|AS| \parallel \Pi_2$. Отрезки прямых BS и CS — общего положения. Для определения натуральных величин отрезков прямых BS и CS необходимо их горизонтальные проекции повернуть до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $S_1B'_1$ и $S_1C'_1$). Горизонтальная проекция точки B_1, описав окружность, переместилась в положение B'_1. Тогда фронтальная проекция B_2 переместится в положение B'_2. Соединяя фронтальную проекцию S_2 с B'_2, получают натуральную длину ребра BS. Аналогично определяют и натуральную длину ребра CS.

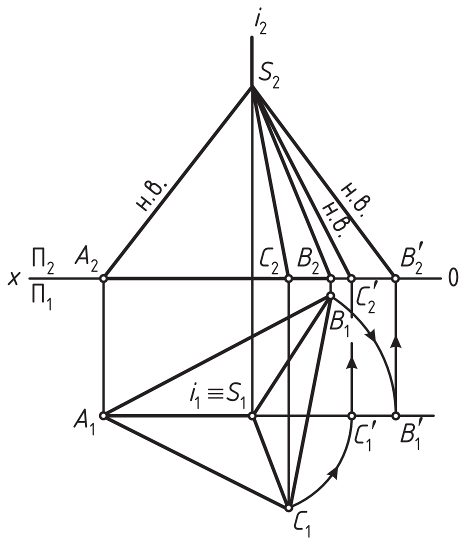


Рис. 51. Определение натуральной длины ребер пирамиды

Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций (вращение вокруг линии уровня). Данный способ является более эффективным и значительно упрощает решение задач, связанных с определением метрических характеристик плоских фигур. С помощью такого вращения можно плоскость, которой принадлежит рассматриваемый геометрический объект (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), повернуть в положение, параллельное плоскости проекций. В этом случае ортогональная проекция принадлежащего плоскости объекта будет конгруэнтна оригиналу, что позволит определить метрические характеристики проецируемой фигуры без дополнительных построений непосредственно по ее проекции. Так, вращая плоскость вокруг горизонтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости проекций Π_1, и получить неискаженный вид горизонтальной проекции. Вращая плоскость вокруг фронтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости проекций Π_2, и получить неискаженный вид фронтальной проекции.

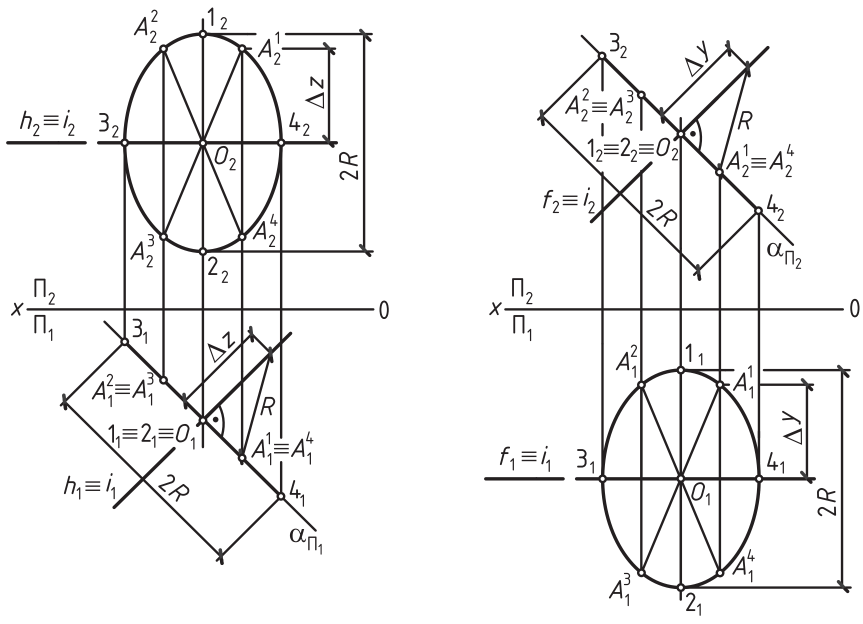


Рис. 52. Проекции точки в способе вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций

Любая точка плоскости при ее вращении вокруг горизонтали или фронтали перемещается по окружности, принадлежащей данной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Центр окружности будет находиться на оси вращения, а величина радиуса вращения равна расстоянию от точки до оси вращения. Если за ось вращения взята горизонталь, то окружность (как траектория движения точки) будет проецироваться на плоскость Π_1 в отрезок прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали h_1. На плоскость Π_2 окружность проецируется в эллипс, построение которого выполнять не требуется.

Точка пересечения горизонтальных проекций горизонтали и окружности определяет горизонтальную проекцию центра вращения O_1 (рис. 52, *а*). По аналогии, если за ось вращения взята фронталь, то окружность, представляющая траекторию перемещения точки, будет проецироваться на плоскость $П_2$ в отрезок прямой, перпендикулярной фронтальной проекции фронтали f_2. Фронтальная проекция центра вращения O_2 определяется пересечением фронтальных проекций горизонтали и окружности (рис. 52, *б*).

При вращении точки вокруг оси, параллельной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к горизонтальной проекции оси вращения. При вращении точки вокруг оси, параллельной фронтальной плоскости проекций $П_2$, фронтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые данным способом.

З а д а ч а 11

Дано: точка *A* и прямая частного положения *BC*.

Выполнить: определить расстояние от точки *A* до прямой *BC*.

Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом в качестве прямой частного положения взята горизонтальная прямая уровня: $|BC| \,||\, П_1$ (рис. 53, *а*). Точка *A* при вращении вокруг прямой *BC* будет перемещаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения $i \equiv |BC|$. Чтобы поместить точку в новое положение путем поворота ее вокруг оси вращения, необходимо найти положение центра вращения и определить натуральную величину радиуса вращения. Для определения горизонтальной проекции центра вращения O_1 через горизонтальную проекцию точки A_1 проводим перпендикуляр к горизонтальной проекции оси вращения $i_1 \equiv |B_1C_1|$. Фронтальную проекцию центра вращения O_2 находим в проекционной связи. Натуральную величину радиуса вращения *R* определяем методом прямоугольного треугольника, один катет которого есть горизонтальная проекция радиуса вращения A_1O_1, а другой катет равен Δz — разности аппликат концов отрезка *AO*. Следовательно, $|A_0O_1|$ — н.в. *R*. Новое положение A'_1 точки *A* таким образом определяет искомое расстояние от точки *A* до прямой *BC*: $|A'_1O_1|$ — н.в. расстояния.

Во втором примере в качестве прямой частного положения взята фронтальная прямая уровня: $|BC| \,||\, П_2$ (рис. 53, *б*). Для определения фронтальной проекции центра вращения O_2 через фронтальную проекцию точки A_2 проводим перпендикуляр к фронтальной проекции оси вращения $i_2 \equiv |B_2C_2|$. Горизонтальную проекцию центра вращения O_1

находим в проекционной связи. Натуральную величину радиуса вращения R также определяем методом прямоугольного треугольника, один катет которого есть фронтальная проекция радиуса вращения A_2O_2, а другой катет равен Δy — разности ординат концов отрезка AO. Следовательно, $|A_0O_2|$ — н.в. R. Новое положение A'_2 точки A таким образом определяет искомое расстояние от точки A до прямой BC: $|A'_2O_2|$ — н.в. расстояния.

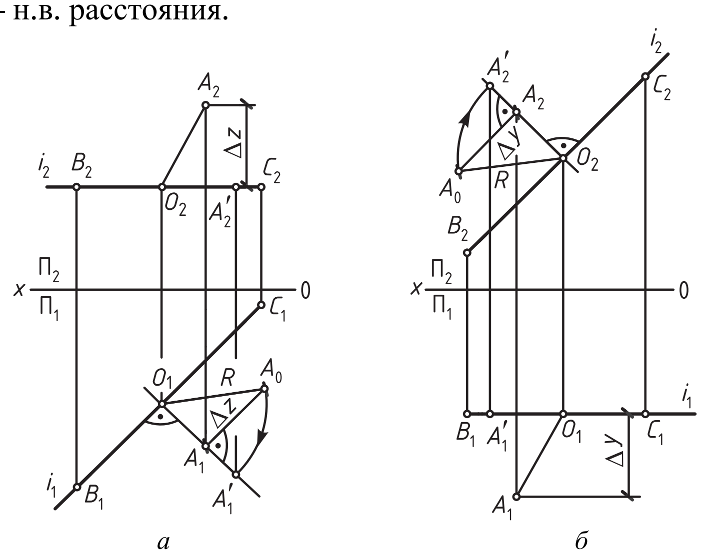


Рис. 53. Определение расстояния от точки до прямой

Задача 12

Дано: прямая AB общего положения и прямая уровня CD.

Выполнить: определить натуральную длину прямой AB вращением вокруг прямой CD.

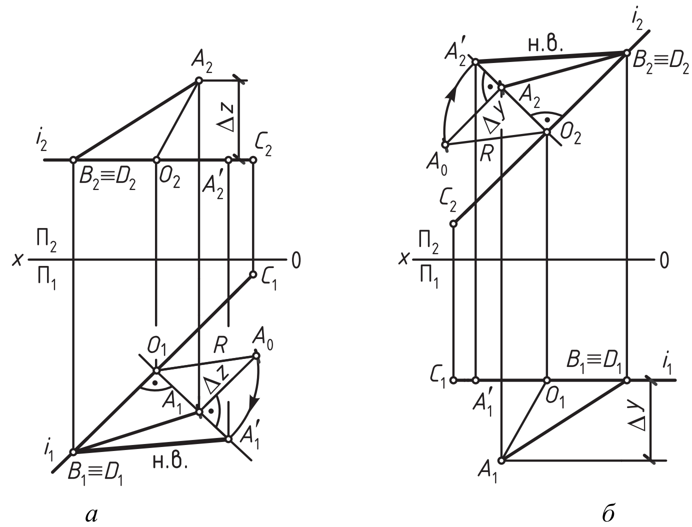


Рис. 54. Определение натуральной длины прямой

Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом прямая CD является горизонтальной прямой уровня: $|CD| \parallel \Pi_1$ (рис. 54, *а*). Все построения по определению нового положения точки A путем поворота ее вокруг оси вращения аналогичны предыдущей задаче (см. рис. 53, *а*). Соединяя горизонтальные проекции точек A'_1 и B_1, получают натуральную длину прямой AB. Фронтальная проекция прямой $A'_2 B_2$ преобразуется в прямую, параллельную плоскости проекций Π_1, и совпадет с фронтальной проекцией прямой C_2D_2. Во втором примере прямая CD — фронтальная прямая уровня: $|CD| \parallel \Pi_2$ (рис. 54, *б*). Все построения по определению нового положения точки A путем поворота ее вокруг оси вращения также аналогичны предыдущей задаче (см. рис. 53, *б*). Соединяя фронтальные проекции точек A'_2 и B_2, получают натуральную длину прямой AB. Горизонтальная проекция прямой $A'_1 B_1$ преобразуется в прямую, параллельную плоскости проекций Π_2, и совпадет с горизонтальной проекцией прямой C_1D_1.

Задача 13

Дано: плоскость ΔABC общего положения.

Выполнить: определить натуральную величину плоскости ΔABC вращением вокруг горизонтали и фронтали плоскости.

Порядок выполнения:

Для того чтобы определить натуральную величину плоскости общего положения необходимо преобразовать ее в плоскость уровня, параллельную какой-либо плоскости проекций. Отметим главное в построении: как только плоскость ΔABC станет параллельной, например плоскости проекций Π_1, горизонтальные проекции каждой из перемещающихся вершин плоскости окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки. Если плоскость ΔABC становится параллельной плоскости проекций Π_2, то фронтальные проекции каждой из перемещающихся вершин плоскости окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки.

Рассмотрим два примера. В первом примере натуральную величину плоскости ΔABC определим вращением вокруг горизонтали плоскости (рис. 55).

В этом случае: 1) выстраиваем в плоскости ΔABC горизонталь $h \equiv i$. Из горизонтальных проекций точек C_1 и B_1 проводим перпендикуляры к горизонтальной проекции оси вращения $h_1 \equiv i_1$, по которым будут перемещаться горизонтальные проекции точек, и определяем центры вращения O_1 и O'_1; 2) строим проекции радиуса вращения одной из точек, например B. Это будут отрезки B_1O_1 и B_2O_2; 3) методом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину радиуса вращения R точки B. Отрезок $|B_1B_0| = R$ откладываем от точки O_1 вдоль прямой, по которой перемещается горизонтальная проекция B_1 точки B; 4) через полученную проекцию точки B'_1 и неподвижную, зафиксированную горизонталью, проекцию точки 1_1, проводим прямую до пересечения с прямой, по которой перемещается горизонтальная проекция C_1 точки C; 5) соединяя найденные проекции точек B'_1 и C'_1 между собой и с неподвижной вершиной A_1, получаем новую горизонтальную проекцию плоскости ΔABC, которая и определяет ее натуральную величину. Следует знать, что фронтальная проекция плоскости ΔABC при таком вращении будет преобразована в прямую, которая на плоскости Π_2 совпадет с прямой $A_2B'_2C'_2$.

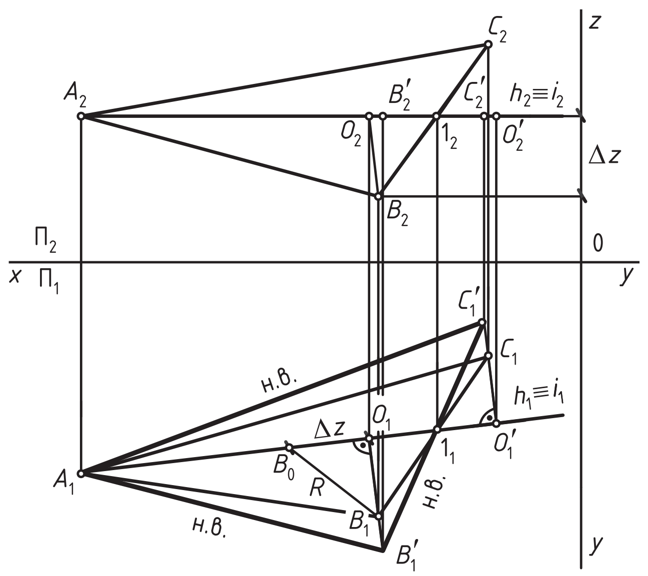


Рис. 55. Определение натуральной величины плоскости ΔABC вращением вокруг горизонтали

Во втором примере натуральную величину плоскости ΔABC определим вращением вокруг фронтали плоскости (рис. 56). Все построения аналогичны, как и при вращении плоскости вокруг горизонтали (см. рис. 55). Натуральную величину радиуса вращения R точки C определяем способом вращения вокруг оси $n \perp \Pi_1$. Вращением вокруг оси $k \perp \Pi_2$ определяем проекцию C''_2 точки C. Через полученную проекцию точки C''_2 и неподвижную проекцию точки 1_2, проводим прямую до пересечения с прямой, по которой перемещается фронтальная проекция B_2 точки B. Соединяя найденные проекции точек B'_2 и C''_2 между собой и с неподвижной вершиной A_2, получаем новую фронтальную проекцию плоскости ΔABC, которая и определяет ее натуральную величину. Горизонтальная проекция плоскости ΔABC при таком вращении будет преобразована в прямую, которая на плоскости Π_1 совпадет с прямой $A_1B'_1C''_1$.

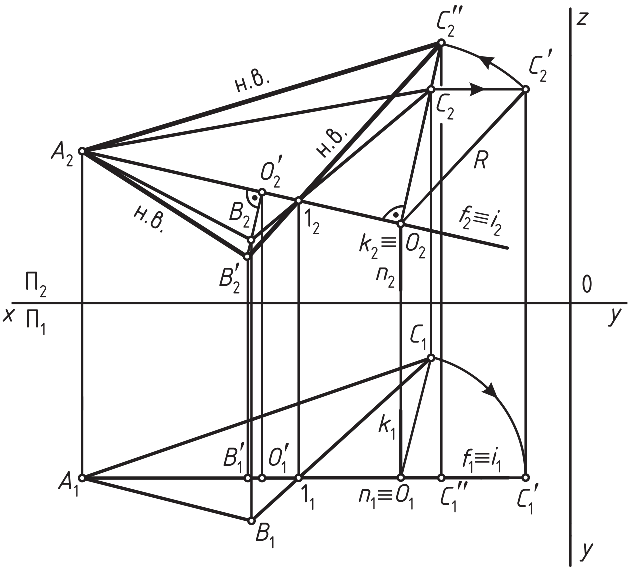


Рис. 56. Определение натуральной величины плоскости ΔABC вращением вокруг фронтали

Тема 6. Поверхности

6.1. Поверхности в технике и строительстве. Образование поверхности и ее задание на чертеже. 6.2. Классификация поверхностей. 6.3. Многогранники. Образование поверхностей некоторых многогранников. Точки на поверхности гранных геометрических тел. Общие принципы построения разверток гранных поверхностей. 6.4. Поверхности вращения. Образование некоторых поверхностей вращения. Точки на поверхности геометрических тел вращения. Общие принципы построения разверток поверхностей вращения. 6.5. Поверхности винтовые и циклические. 6.6. Проекции геометрических тел с вырезом. Построение разверток геометрических поверхностей с нанесением линии выреза. 6.7. Развертки наклонных геометрических тел

6.1. Поверхности в технике и строительстве. Образование поверхности и ее задание на чертеже

Мир поверхностей многогранен и безграничен. Он простирается от элементарных, простых до сложнейших, причудливых форм поверхностей и их сочетаний. По разнообразию форм и свойств, по той роли, которую они играют в науке, технике, строительстве, архитектуре, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических образов.

С точки зрения начертательной геометрии многое из того, что нас окружает — это линии и поверхности простых и сложных форм, и все, что создается человеком (конструкции, объекты, сооружения и т. д.), ограничивается этими поверхностями.

Поверхность в начертательной геометрии определяется как *непрерывное множество последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону и называемой образующей поверхности.*

Обязательным условием перемещения образующей в пространстве при образовании поверхности является пересечение ее с неподвижными линиями пространства, называемыми *направляющими поверхности*. Кроме этого должен быть указан характер движения образующей по направляющим. На рис. 57 показан процесс образования некоторой поверхности. В качестве образующей взята плоская кривая линия m, которая скользит по двум направляющим n_1 и n_2, оставаясь все время параллельной плоскости β. Точка A, принадлежащая образующей m, перемещается по кривой n_1. Такой способ образования поверхности называется кинематическим, и он позволяет задать любую поверхность Ф определителем. *Определителем поверхности* называется необходимая и достаточная совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно задают (определяют) поверхность Ф.

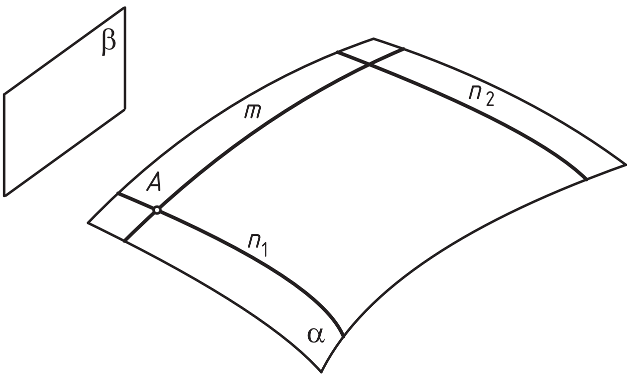


Рис. 57. Кинематический способ образования поверхности

Определитель поверхности Ф может быть записан в виде структурной формы:

Ф (Г), [А],

где (Г) — геометрическая часть определителя, т. е. перечисление геометрических фигур, которые образуют поверхность; [А] — алгоритмическая часть определителя, устанавливающая связь между этими фигурами. Для того чтобы определитель относился к конкретному виду поверхности, каждая часть определителя должна иметь конкретное содержание.

На рис. 58 показано образование некоторых поверхностей в начертательной геометрии кинематическим способом:

призматической поверхности — прямая образующая m перемещается по ломанной направляющей n, сохраняя параллельность заданному направлению S (рис. 58, *а*);

цилиндрической поверхности — прямая образующая m перемещается по кривой направляющей n, сохраняя параллельность заданному направлению S (рис. 58, *б*);

пирамидальной поверхности — прямая образующая m перемещается по ломанной направляющей n, проходя через постоянную точку (вершину) S (рис. 58, *в*);

конической поверхности — прямая образующая m перемещается по кривой направляющей n, проходя через постоянную точку (вершину) S (рис. 58, *г*).

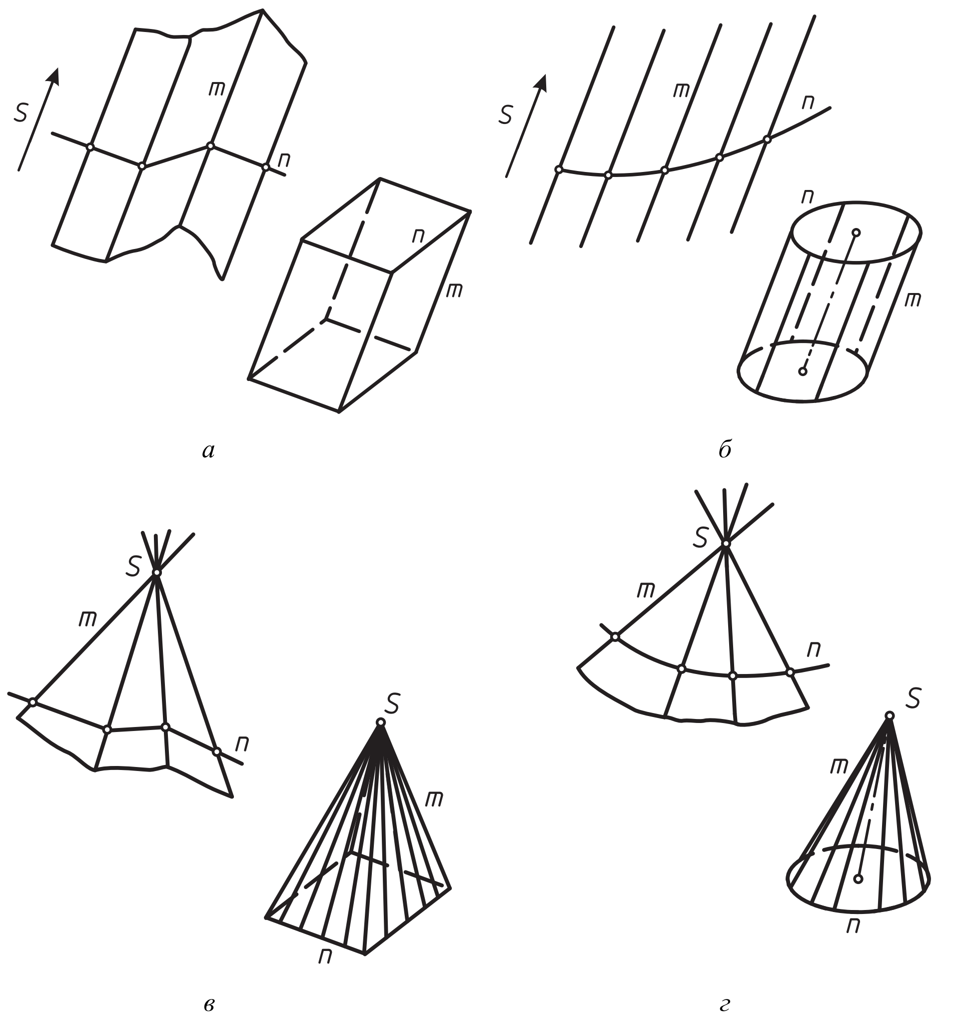


Рис. 58. Образование некоторых поверхностей

На чертеже поверхность может быть задана:

определителем поверхности (например, проекциями образующих и направляющих);

каркасом — упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности. Каркас может быть точечным и линейным. *Точечным каркасом* называют совокупность точек на поверхности, достаточно точно определяющих эту поверхность. *Линейным каркасом* называют совокупность линий, имеющих единый закон образования и связанных между собой определенной зависимостью. Для получения линейного каркаса поверхность пересекается параллельными плоскостями, линии пересечения которых с поверхностью и образуют ее каркас;

очерком — след на плоскости проекции проецирующей цилиндрической поверхности, огибающей данную поверхность. Задание поверхности очерком обеспечивает наглядность изображения поверхности и облегчает чтение чертежа.

Поверхность считается заданной, если относительно любой точки пространства можно решить задачи о принадлежности ее данной поверхности.

6.2. Классификация поверхностей

Классификация поверхностей на протяжении длительного периода времени является предметом научных исследований. Это связано с тем, что за ее основу можно взять разные критерии, например характер образующей, признак развертывания и др. В основу классификации поверхностей может быть также положен и их определитель.

Принимая во внимание геометрическую часть определителя — вид линии, определяющей поверхность, все поверхности можно разделить на два класса: линейчатые и нелинейчатые.

Линейчатые — это поверхности, образующая которых прямая линия. *Нелинейчатыми* или *криволинейными* называются поверхности, образующая которых является кривой линией.

I. Линейчатые поверхности подразделяются на следующие виды:

развертываемые (торсовые) поверхности, которые можно совместить с плоскостью без складок и разрывов. К ним относят конические (образующие пересекаются в одной точке); цилиндрические (образующие параллельны между собой и оси́ вращения); поверхности с ребром возврата (образующие — множество касательных линий к заданной пространственной кривой, называемой ребром возврата);

неразвертываемые поверхности, которые невозможно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Они подразделяются на поверхности с плоскостью параллелизма (все образующие параллельны какой-либо плоскости) и поверхности без плоскости параллелизма.

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности (или ее отсека) с плоскостью путем изгибания. *Свойства разверток поверхностей*: сохранение длин линий, углов между линиями и площади, ограниченной замкнутым контуром.

В зависимости от формы направляющих и их расположения в пространстве можно получить различные поверхности, относящиеся к классу линейчатых поверхностей:

1. Линейчатые поверхности с тремя направляющими:

поверхность общего вида (косой цилиндр с тремя направляющими);

поверхность дважды косого цилиндроида;

поверхность дважды косого коноида;

поверхность однополостного гиперболоида.

2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана):

поверхность прямого цилиндроида;

поверхность прямого коноида;

косая плоскость.

Линейчатые поверхности с двумя направляющими и без плоскости параллелизма:

поверхность косого цилиндроида;

поверхность косого коноида;

дважды косая плоскость.

3. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы:

поверхность с ребром возврата;

коническая поверхность;

цилиндрическая поверхность;

плоскость.

II. Нелинейчатые поверхности подразделяются на следующие виды:

1. Нелинейчатые поверхности с постоянной образующей:

поверхность общего вида;

трубчатая поверхность.

2. Нелинейчатые поверхности с переменной образующей:

поверхность общего вида;

каналовая поверхность;

циклическая поверхность.

Согласно алгоритмической части определителя, характеризующей закон движения образующей, линейчатые и нелинейчатые поверхности можно разделить на три подкласса:

поверхности параллельного переноса, образованные поступательным перемещением образующей;

поверхности вращения, образованные вращением образующей;

поверхности винтовые, образованные винтовым перемещением образующей.

Поверхности вращения в зависимости от вида образующей подразделяются на несколько групп:

сфера, тор, глобоид (образующая — окружность);

эллипсоид вращения (образующая — эллипс);

гиперболоид вращения (образующая — гипербола);

параболоид вращения (образующая — парабола);

поверхность вращения общего вида (образующая — произвольная кривая линия).

Все поверхности в зависимости от вида направляющей, которая может быть ломаной, прямой или кривой линией, подразделяются на гранные поверхности и кривые.

Гранными называют поверхности, в образовании которых участвуют правильные многоугольники. *Кривыми* называют поверхности, в образовании которых участвуют плоские кривые линии правильной формы. При этом если направляющей является окружность, то получают *поверхность вращения*.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *геометрическим телом*.

6.3. Многогранники. Образование поверхностей некоторых многогранников. Точки на поверхности гранных геометрических тел. Общие принципы построения разверток гранных поверхностей

Многогранники относят к гранным поверхностям. Эти поверхности являются закономерными (т. е. образующая такой поверхности перемещается по определенному закону), линейчатыми и развертываемыми.

Многогранником называют геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники являются его гранями, а линии пересечения граней — его ребрами. Концы ребер многогранника называются его вершинами. Образующая гранной поверхности есть прямая, направляющая — ломаная линия.

На ортогональном чертеже многогранник задается проекциями его вершин (точками), ребер (отрезками прямых) и граней (плоскими фигурами). На рис. 59 показан пример изображения многогранника на ортогональном чертеже. Вершины многогранника заданы точками A, B, C и S, ребра — отрезками прямых AB, AC, BC, AS, BS и CS, а грани — треугольниками ABC, ABS, BCS и ACS. Проекции ребер многогранника, образующих его внешний контур, на ортогональном чертеже всегда видимы. Видимость остальных ребер многогранника определяется методом конкурирующих точек (см. тему 2).

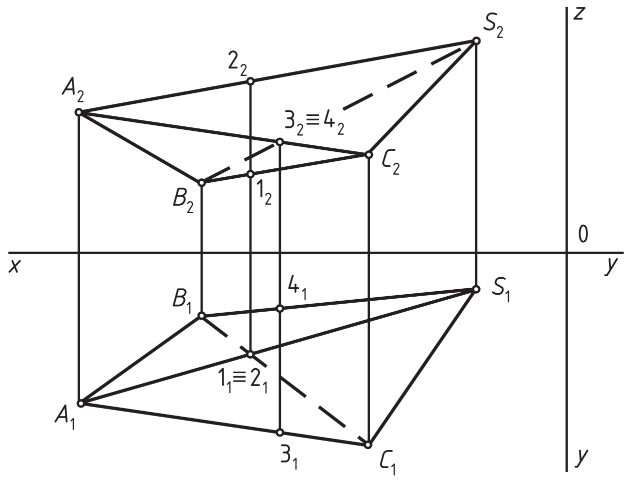


Рис. 59. Проекции многогранника *ABCS*

Многогранники и многогранные поверхности нашли широкое применение в технике, строительстве и архитектуре: пирамиды, башни, крепости, крыши домов, мостовые опоры, перекрытия и т. д. Из всего многообразия гранных поверхностей рассмотрим наиболее известные: призматическую и пирамидальную поверхности.

Призматической называется поверхность, образующая которой, перемещаясь в пространстве, остается параллельной самой себе.

Призмой называется многогранник, две грани которого конгруэнтны, а остальные пересекаются по параллельным прямым.

По числу боковых граней различают призмы трехгранные, четырехгранные и т. д. Призма, все боковые грани которой являются прямоугольниками, т. е. ребра перпендикулярны основанию призмы, называется *прямой*. Призма является *правильной*, если ее основаниями служат правильные многоугольники, и высота проходит через ее центр. У правильных многогранников все грани являются равными правильными многоугольниками и все двугранные углы их конгруэнтны.

Проецирование прямой призмы начинают с горизонтальной проекции (рис. 60). Основания призмы будут проецироваться на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину, так как они расположены параллельно плоскости Π_1. На фронтальную и профильную плоскости проекций основания призмы проецируются в виде прямых, параллельных оси проекций. Грани призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. На фронтальной и профильной плоскостях проекций они будут выполняться в виде прямоугольников различной величины. Сечением прямой призмы плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций Π_1, является многогранник.

Каждая грань призмы представляет собой плоскость и, следовательно, проекции точки, принадлежащей поверхности, определяют исходя из принадлежности точки плоскости. Точка, принадлежащая плоскости, лежит на линии, принадлежащей также данной плоскости. Проекции точки, заданной на поверхности призмы, определяют с помощью образующих и линий проекционной связи. При этом помнят, что призматическая поверхность является проецирующей и все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на плоскость Π_1 на ее очерк. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 60).

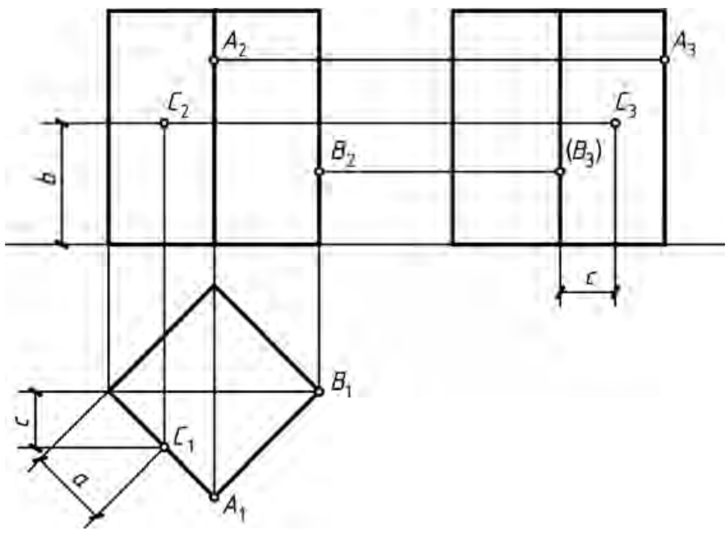


Рис. 60. Проекции точек на поверхности прямой призмы

При построении развертки любой геометрической фигуры необходимо вначале определить натуральные величины оснований и ребер или образующих геометрического тела, используя способы преобразования плоскостей проекций.

При построении развертки прямой призмы ее основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Грани прямой призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, ребра призмы — горизонтально-проецирующими прямыми, которые на плоскость Π_1 проецируются в точки, а на плоскости Π_2 и Π_3 — в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой призмы никаких дополнительных построений не требуется.

Развертка прямой призмы производится методом раскатки (рис. 61). Положение точек, принадлежащих поверхности призмы, определяется следующим образом: заложение a каждой точки берется с горизонтальной проекции призмы, превышение b точек — с фронтальной или профильной проекций призмы (см. рис. 60).

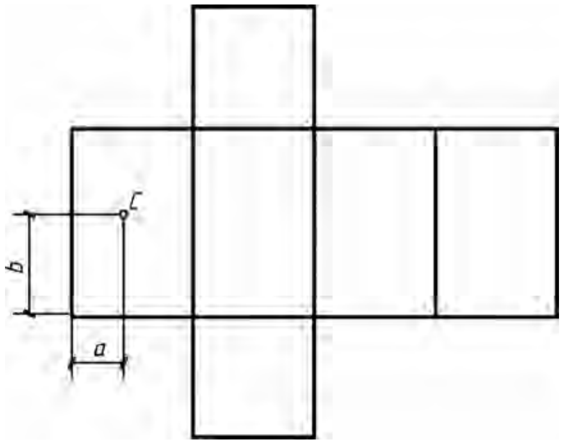


Рис. 61. Развертка прямой призмы

Пирамидальной называется поверхность, образующая которой при перемещении проходит через одну и ту же точку пространства.

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) представляет собой многоугольник, остальные грани являются треугольниками с общей вершиной *S*.

По числу углов многоугольника основания различают пирамиды треугольные, четырехугольные и т. д. Если вершина пирамиды *S* проецируется ортогонально (перпендикулярно) в центр тяжести ее основания, то такая пирамида называется *прямой*. Прямая пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной* пирамидой.

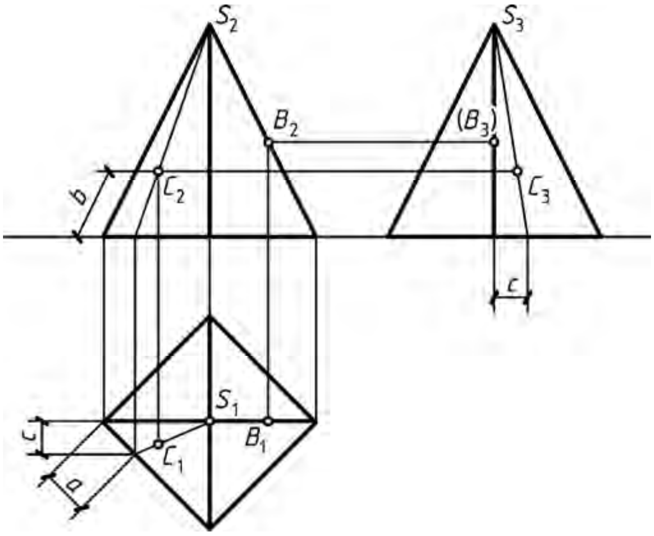


Рис. 62. Проекции точек на поверхности прямой пирамиды, получаемые с помощью образующей

Проецирование прямой пирамиды начинают с горизонтальной проекции (рис. 62). Основание пирамиды будет проецироваться на горизонтальную плоскость проекций $П_1$ в натуральную величину, так как оно расположено параллельно плоскости $П_1$. На фронтальную и профильную плоскости проекций основание пирамиды проецируется в виде прямой, параллельной оси проекций. Грани пирамиды в зависимости от их количества могут занимать общее и частное положение по отношению к плоскостям проекций и проецируются на них в виде треугольников различной величины.

Сечением прямой пирамиды плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, является многогранник. Каждая грань пирамиды представляет собой плоскость, и, следовательно, проекции точки, принадлежащей поверхности, определяют исходя из принадлежности точки плоскости. Проекции точки, заданной на поверхности пирамиды, определяют с помощью прямой, лежащей в плоскости, или образующей, соединяющей основание пирамиды с его вершиной *S*.

Следует помнить, что точка, принадлежащая плоскости, лежит на линии, принадлежащей также данной плоскости. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 62). Вместо образующей для определения проекций точки можно использовать вспомогательную плоскость уровня (рис. 63).

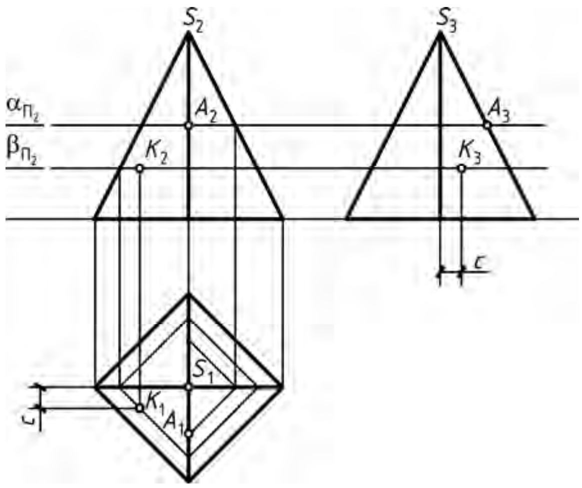


Рис. 63. Проекции точек на поверхности прямой пирамиды, получаемые с помощью вспомогательной плоскости уровня

При построении развертки прямой пирамиды вначале определяют натуральные величины ее основания и ребер. Так в данном примере основание пирамиды, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Грани прямой пирамиды являются плоскостями общего положения, ребра пирамиды, как правило, — прямыми общего положения и, в частном случае (см. рис. 62 и 63), — прямыми уровня, которые на плоскости $П_2$ или $П_3$ проецируются в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой пирамиды требуются дополнительные построения в том случае, если ребра пирамиды являются прямыми общего положения. Тогда, применяя способы преобразования плоскостей проекций (чаще способ вращения), определяют натуральные величины ребер пирамиды (см. рис. 51).

Развертку прямой пирамиды производят методом треугольников (триангуляции) (рис. 64). Положение точек, принадлежащих поверхности пирамиды, определяют следующим образом: заложение a каждой точки берут с горизонтальной проекции пирамиды, превышение b точек — с фронтальной или профильной проекций пирамиды (см. рис. 62).

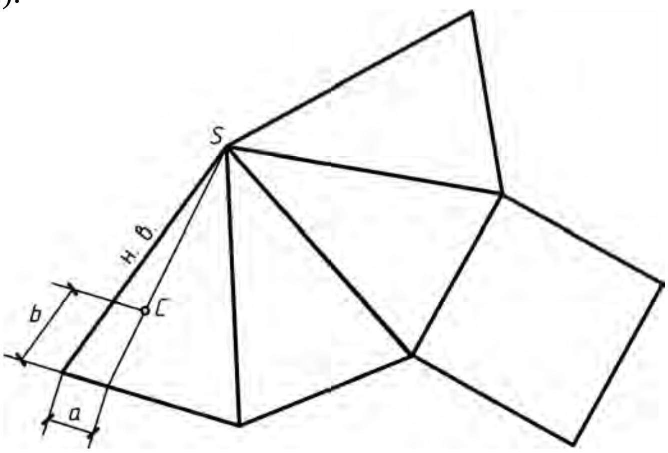


Рис. 64. Развертка прямой пирамиды

6.4. Поверхности вращения. Образование некоторых поверхностей вращения. Точки на поверхности геометрических тел вращения. Общие принципы построения разверток поверхностей вращения

Поверхности вращения относят к кривым поверхностям, в образовании которых участвуют плоские кривые линии правильной формы. Поверхность вращения образуется путем вращения любой линии, например MN, вокруг другой неподвижной прямой линии $0N$ (рис. 65).

Неподвижная прямая $0N$ называется *осью вращения*, линия MN — *образующей* поверхности вращения. Плоскость, перпендикулярная к оси вращения, при пересечении с поверхностью вращения образует в сечении окружность, называемую *параллелью*. Самая большая окружность называется *экватором*, самая малая — *горлом*. Любая секущая плоскость, проходящая через ось вращения, называется *меридиональной плоскостью*, линия ее пересечения с поверхностью вращения — *меридианом*. Меридиан, лежащий в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций $П_2$, называется *главным меридианом*. Он определяет очерк поверхности вращения на плоскости $П_2$.

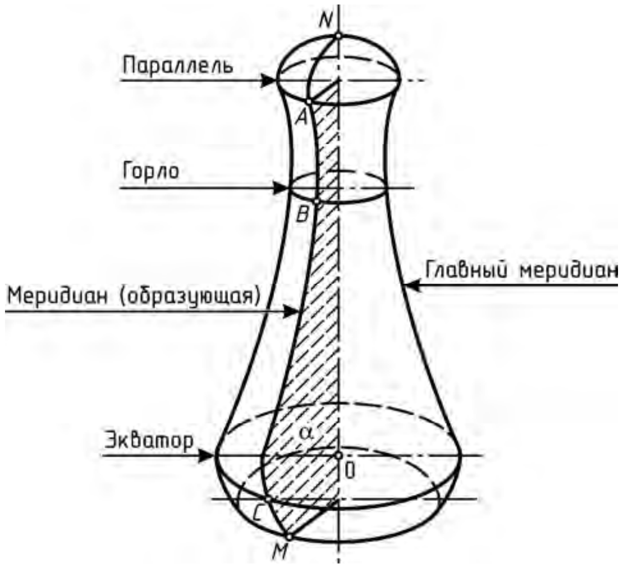


Рис. 65. Образование поверхности вращения

Каждая точка, принадлежащая поверхности вращения, обязательно принадлежит какой-либо одной параллели и какому-либо одному меридиану (образующей).

По виду образующей различают:

линейчатые поверхности вращения;

нелинейчатые поверхности вращения.

I. Линейчатые поверхности вращения относятся к развертываемым поверхностям. Образующей такой поверхности является прямая, направляющей — кривая линия. К этой группе поверхностей относят:

конические;

цилиндрические и др.

Цилиндрической называется поверхность, образующая которой при перемещении вокруг оси вращения остается ей параллельной.

Цилиндром называется геометрическое тело, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон, принятой за ось вращения (рис. 66). Цилиндр может быть *прямым* или *наклонным*.

Проецирование прямого кругового цилиндра с вертикальной осью вращения аналогично проецированию призмы. Основаниями цилиндра являются конгруэнтные круги. При оси вращения, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция цилиндра будет в виде круга, фронтальная и профильная проекции — в виде прямоугольников. Сечением прямого кругового цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси, является круг. При вычерчивании проекций прямого кругового цилиндра вначале выполняются оси симметрии (вращения) тела. Затем основание в виде окружности, потом фронтальная и профильная проекции геометрического тела. Проекции точки, заданной на поверхности цилиндра, определяют с помощью образующих и линий проекционной связи. При этом помнят, что цилиндрическая поверхность является проецирующей, и все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на плоскость Π_1 на ее очерк (см. рис. 66).

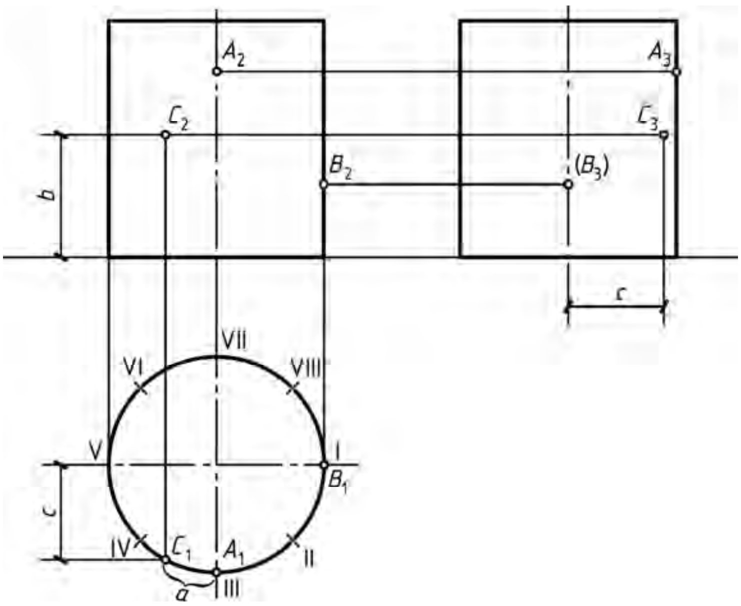


Рис. 66. Проекции точек на поверхности прямого цилиндра

При построении развертки данного прямого цилиндра его основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину. Поверхность прямого цилиндра является горизонтально-проецирующей. Все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на горизонтальную плоскость проекций Π_1 на ее очерк. Образующая такой поверхности — горизонтально-проецирующая прямая, которая на фронтальную плоскость проекций Π_2 и профильную плоскость проекций Π_3 проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого цилиндра никаких дополнительных построений не требуется.

Развертка прямого цилиндра производится методом раскатки (рис. 67). Основание цилиндра (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать равных частей. Положение точек, принадлежащих поверхности цилиндра, определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки берется с горизонтальной проекции цилиндра, превышение *b* точек — с фронтальной или профильной проекций цилиндра (см. рис. 66).

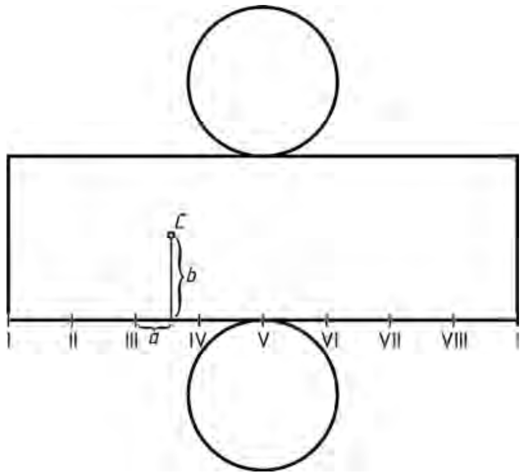


Рис. 67. Развертка прямого цилиндра

Конической называется поверхность, образованная перемещением прямой образующей, проходящей через неподвижную точку (вершину) *S* по кривой направляющей.

Конусом называется геометрическое тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг катета, принятого за ось вращения. Конус может быть *прямым* или *наклонным*. Это зависит от того, перпендикулярны или наклонены к его основанию образующие.

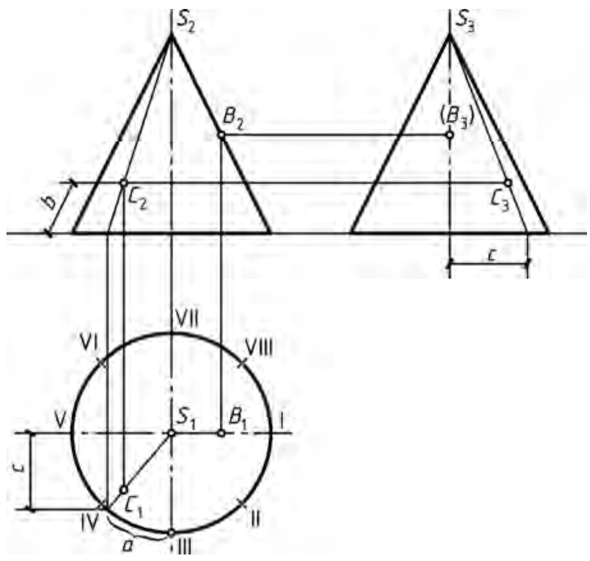


Рис. 68. Проекции точек на поверхности прямого конуса, получаемые с помощью образующей

Проецирование прямого кругового конуса с вертикальной осью вращения аналогично проецированию пирамиды (рис. 68). Основанием конуса является окружность, с выполнения которой следует начинать чертеж конуса. При оси вращения, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция конуса будет в виде круга, фронтальная и профильная проекции — в виде треугольников с вершиной *S*. Сечением прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси, является круг.

Проекции точки, заданной на поверхности конуса, определяют с помощью образующей, соединяющей основание конуса с его вершиной *S*. Следует помнить, что точка, принадлежащая поверхности, лежит на линии, принадлежащей также данной поверхности. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 68). Вместо образующей для определения проекций точки можно использовать вспомогательную параллель (рис. 69).

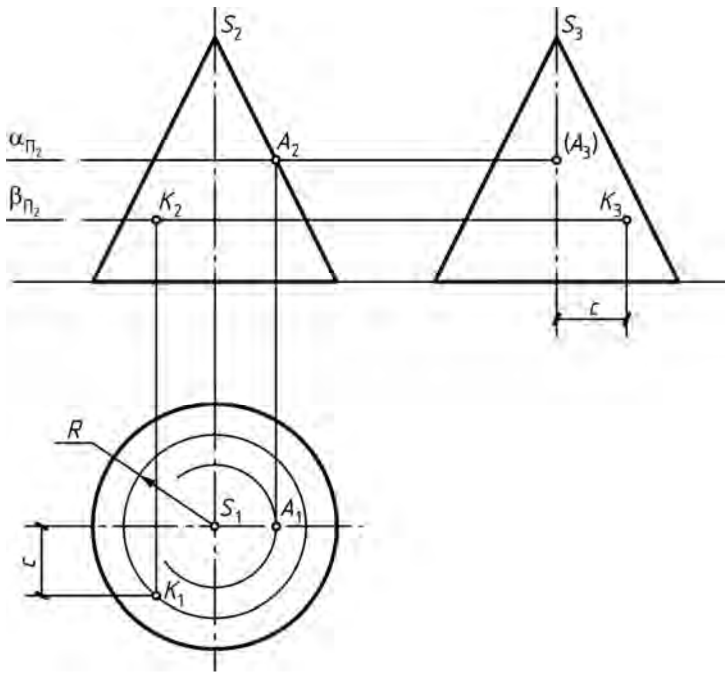


Рис. 69. Проекции точек на поверхности прямого конуса, получаемые с помощью вспомогательной параллели

При построении развертки прямого кругового конуса его основание, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Образующая прямого конуса является прямой частного положения (фронтальной уровня или профильной уровня) и на плоскости $П_2$ или $П_3$ проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого конуса дополнительные построения не требуются.

Развертка прямого конуса производится методом раскатки (рис. 70). Основание конуса (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать равных частей. Положение точек, принадлежащих поверхности конуса, определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки берется с горизонтальной проекции конуса, превышение *b* точек — с фронтальной или профильной проекций конуса (см. рис. 68).

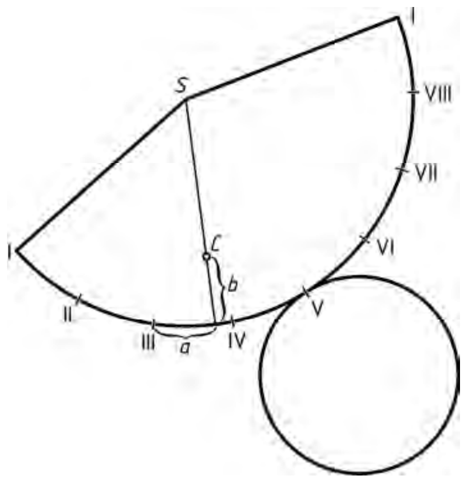


Рис. 70. Развертка прямого конуса

II. Нелинейчатые поверхности вращения относятся к неразвертываемым поверхностям. Образующей и направляющей такой поверхности являются кривые линии.

Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, образованную вращением произвольной кривой (плоской или пространственной) вокруг оси вращения поверхности (рис. 71).

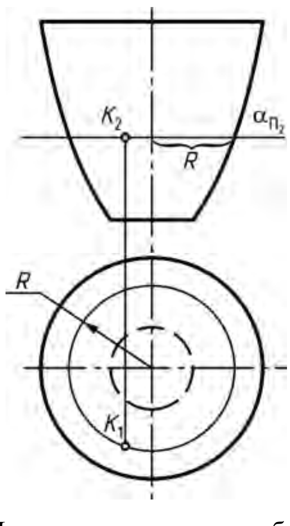


Рис. 71. Поверхность вращения общего вида

Проекции точки, заданной на поверхности общего вида, определяются с помощью параллели, проведенной через заданную точку. Радиус параллели измеряется от оси поверхности до ее очерка. Следует помнить, что точка, принадлежащая поверхности, лежит на линии, также принадлежащей данной поверхности. К этой группе поверхностей относят:

шаровые;

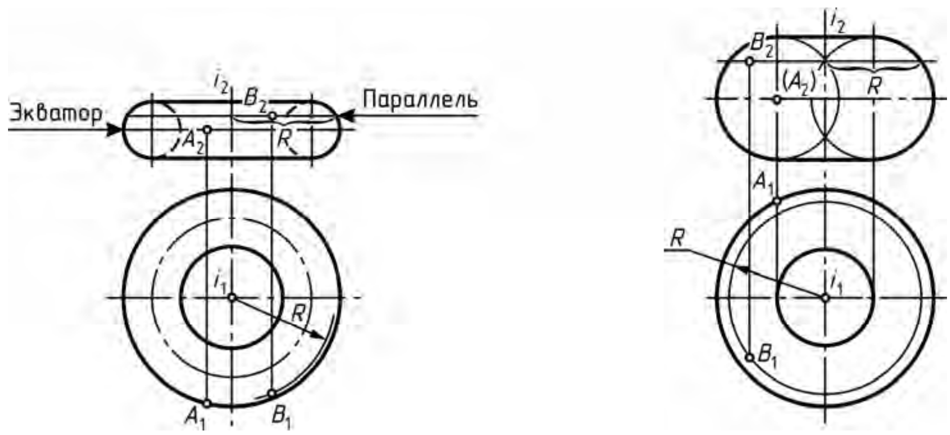
торовые и др.

Сферой (*шаром*) называется геометрическое тело, образованное вращением окружности вокруг ее диаметра, принятого за ось вращения (рис. 72). Центр вращающейся окружности является центром сферы. Сфера проецируется на все плоскости проекций в виде равных окружностей одинакового радиуса. Самая большая окружность — экватор. На горизонтальную плоскость проекций он проецируется в виде круга, на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде прямой линии, параллельной оси проекций $0x$. Соответственно, главный меридиан на плоскость Π_1 проецируется в прямую линию, параллельную оси проекций $0x$, а на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде круга (см. рис. 72). Сечением сферы плоскостью, перпендикулярной к ее оси, является круг.

Рис. 72. Проекции точек на поверхности сферы

Тором называется геометрическое тело, образованное вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Тор является *открытым* (кольцо), если ось вращения поверхности не пересекает эту окружность, т. е. находится за ее пределами (рис. 73, *а*), и *закрытым*, если ось вращения поверхности пересекает или касается окружности (рис. 73, *б*).

Тор проецируется на горизонтальную плоскость проекций в виде окружностей разного радиуса. Самая большая окружность — экватор. На горизонтальную плоскость проекций он проецируется в виде круга, на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде прямой линии, параллельной оси проекций 0*x*. Сечением тора плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, является круг.



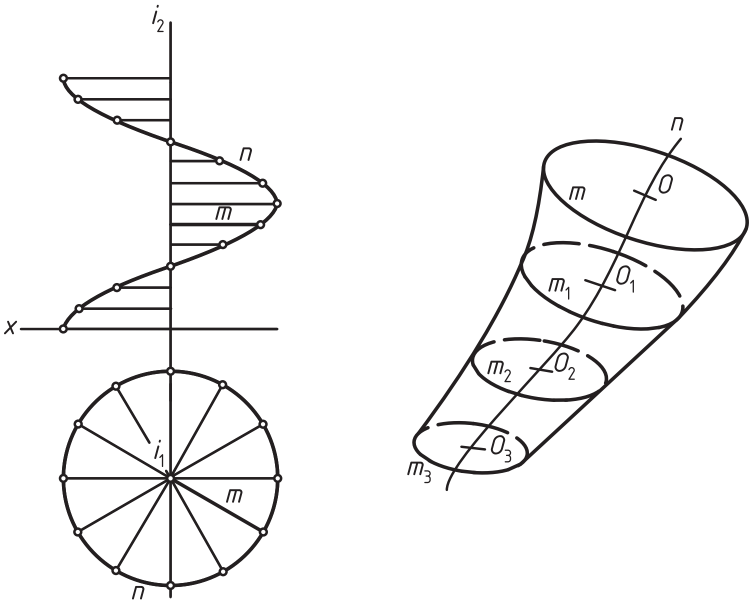
а *б*

Рис. 73. Проекции точек на поверхности тора

6.5. Поверхности винтовые и циклические

Винтовые и циклические поверхности нашли широкое применение в технике, архитектурно-строительной практике, и особенно в машиностроении. Так, в перечень технического использования винтовых поверхностей входят: винты, шнеки, сверла, пружины, поверхности лопаток турбин и вентиляторов, конструкции винтовых аппарелей и лестниц, пандусов гаражей, архитектурных деталей и т. д. Циклические поверхности получили распространение при конструировании и производстве тоннелей, трубопроводов и патрубков, обшивки гондол турбореактивных двигателей и газовых турбин для самолетов и скоростных локомотивов, деталей и элементов силовых конструкций из пластических масс и т. д.

Винтовой называется поверхность, получаемая винтовым перемещением образующей. Винтовое перемещение можно рассматривать как совокупность двух перемещений: поступательного, параллельного некоторой оси *i*, и вращательного вокруг этой оси *i* (рис. 74, *а*). Винтовая поверхность обладает одним важным свойством: совершая винтовое перемещение, поверхность может сдвигаться, т. е. скользить вдоль самой себя. В зависимости от формы образующей винтовые поверхности могут быть отнесены как классу линейчатых, так и нелинейчатых поверхностей. Если винтовое перемещение совершает прямая образующая *m*, то поверхность называется *геликоидом*. В зависимости от величины угла наклона образующей к оси геликоиды бывают *прямыми*, если этот угол равен 90° (см. рис.74, *а*), и *косыми* (наклонными), если угол — произвольный.



а *б*

Рис. 74. Образование винтовой и циклической поверхностей

Циклической называется поверхность, получаемая перемещением круговой образующей m постоянного или переменного радиуса, центр O которой перемещается по криволинейной направляющей n (рис. 74, *б*).

Циклическая поверхность относится к классу нелинейчатых поверхностей с переменной образующей, и она может быть трансформирована в другие поверхности. Так, если круговая образующая имеет переменный радиус, а плоскость окружности все время занимает перпендикулярное положение к линии центров, то такая циклическая поверхность является трубчатой поверхностью с переменным центром. Если круговая образующая имеет постоянный радиус, поверхность становиться трубчатой. В том случае, если линия центров окружностей является прямой, то получается поверхность вращения.

6.6. Проекции геометрических тел с вырезом. Построение разверток геометрических поверхностей с нанесением линии выреза

Очертания строительных объектов и сооружений, детали машин и механизмов и т. д. представляют собой сочетание различных геометрических поверхностей. Определение проекций точек на заданной поверхности применяется при решении многих инженерных задач, в т. ч.

при построении проекций геометрических тел с вырезом. Рассмотрим практические примеры таких построений.

З а д а ч а 14

Дано: прямая призма *ABCD* с вырезом.

Выполнить: 1) построить три проекции прямой призмы с вырезом; 2) определить натуральную величину сечения призмы фронтально-проецирующей плоскостью α (рис. 75); 3) построить развертку призмы с нанесением на ней линии выреза (рис. 76).

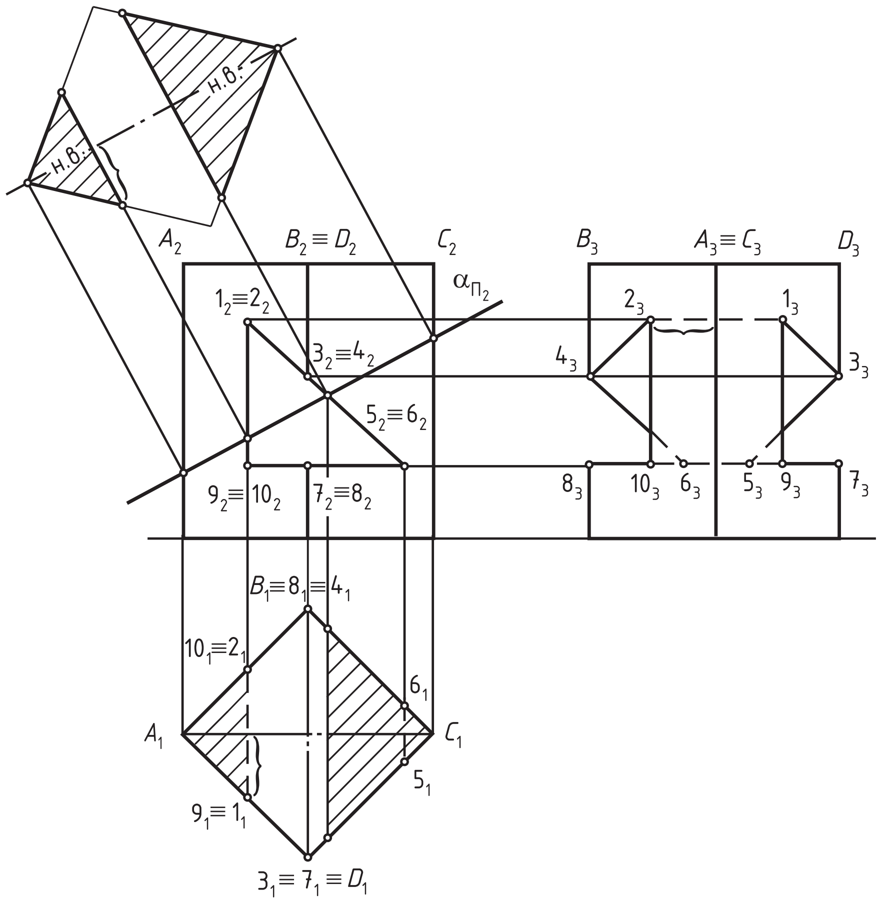


Рис. 75. Проекции прямой призмы с вырезом и натуральная величина сечения призмы плоскостью α

Порядок выполнения:

1. Построение трех проекций призмы с вырезом выполняют в следующей последовательности:

— на фронтальной плоскости проекций Π_2 отмечают точки по контуру выреза в геометрическом теле:

очерковые (очерчивающие форму выреза);

характерные (лежащие на ребрах или осях симметрии тела);

промежуточные (уточняющие характер выреза);

— определяют горизонтальные проекции точек, исходя из их принадлежности поверхности призмы;

— выстраивают профильные проекции точек выреза, используя координату *y* каждой точки;

— проводят линии, определяющие форму выреза в геометрическом теле.

Вырез в геометрическом теле предполагается сквозным. Проецирование прямой призмы без выреза на три плоскости проекций и определение проекций точек на поверхности призмы показано на рис. 60.

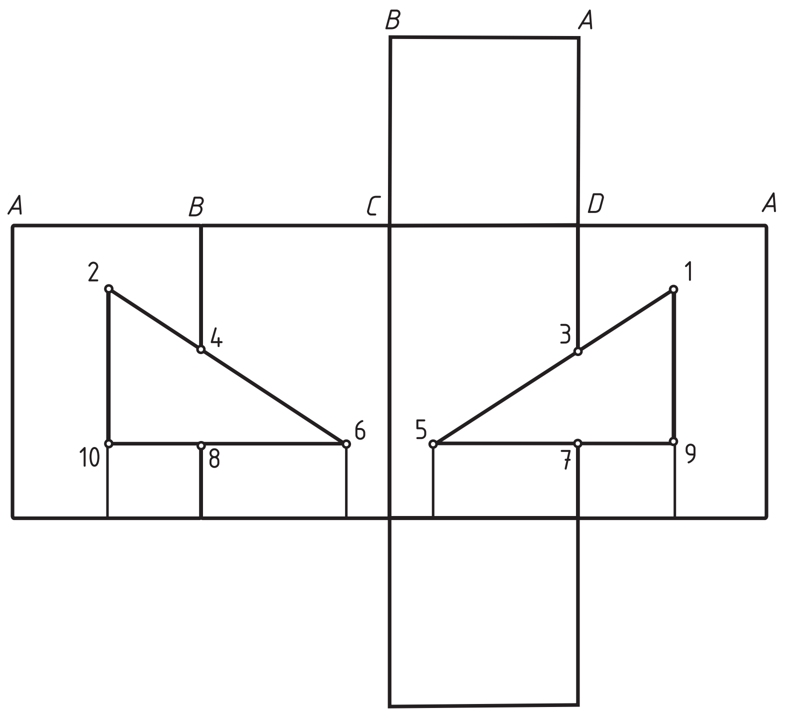


Рис. 76. Развертка прямой призмы с нанесением линии выреза

2. Натуральную величину сечения прямой призмы с вырезом фронтально-проецирующей плоскостью α допустимо определять любым известным способом, в данном примере определяют способом плоскопараллельного перемещения. Для этого параллельно фронтальному следу плоскости сечения α_{Π_2} проводят вспомогательную ось, на которую переносят все точки сечения призмы плоскостью. Через данные точки проводят прямые перпендикулярные вспомогательной оси, и на них откладывают расстояния, равные расстояниям от оси симметрии до горизонтальных проекций точек сечения призмы плоскостью α.

3. Напоминаем, что *при построении развертки любой геометрической фигуры необходимо вначале определить натуральные величины оснований и ребер или образующей геометрического тела, используя способы преобразования проекций.*

При построении развертки прямой призмы ее основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Грани прямой призмы являются горизонтально проецирующими плоскостями, ребра призмы — горизонтально проецирующими прямыми, которые на плоскость Π_1 проецируются в точки, а на плоскости Π_2 и Π_3 — в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой призмы никаких дополнительных построений не требуется (рис. 76).

Развертка прямой призмы производится методом раскатки (см. рис. 61). Положение точек линии выреза определяется следующим образом: заложение a каждой точки выреза берется с горизонтальной проекции призмы, превышение b точек выреза — с фронтальной или профильной проекций призмы (см. рис. 60). Соединение точек линии выреза производится последовательно отдельными прямыми линиями в том случае, если форма выреза в геометрическом теле представляет собой какой-либо многоугольник, и отдельными кривыми линиями, если форма выреза круговая (круг, полукруг и т. д.).

Задача 15

Дано: прямая пирамида *ABCDS* с вырезом.

Выполнить: 1) построить три проекции прямой пирамиды с вырезом; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью γ (рис. 77); 3) построить развертку пирамиды с нанесением на ней линии выреза (рис. 78).

Порядок выполнения:

1. Порядок построения трех проекций пирамиды с вырезом аналогичен порядку построения проекций прямой призмы с вырезом. Вырез в геометрическом теле предполагается сквозным. Проецирование прямой пирамиды без выреза на три плоскости проекций и определение проекций точек на поверхности пирамиды показано на рис. 62 и 63.

2. Натуральную величину сечения прямой пирамиды с вырезом фронтально-проецирующей плоскостью γ допустимо определять любым известным способом, в данном примере определяют способом плоскопараллельного перемещения. Для этого параллельно фронтальному следу плоскости сечения γ_{Π_2} проводят вспомогательную ось, на которую переносят все точки сечения пирамиды плоскостью. Через данные точки проводят прямые, перпендикулярные вспомогательной оси, и на них откладывают расстояния, равные расстояниям от оси симметрии до горизонтальных проекций точек сечения пирамиды плоскостью γ.

3. При построении развертки прямой пирамиды с вырезом ее основание, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

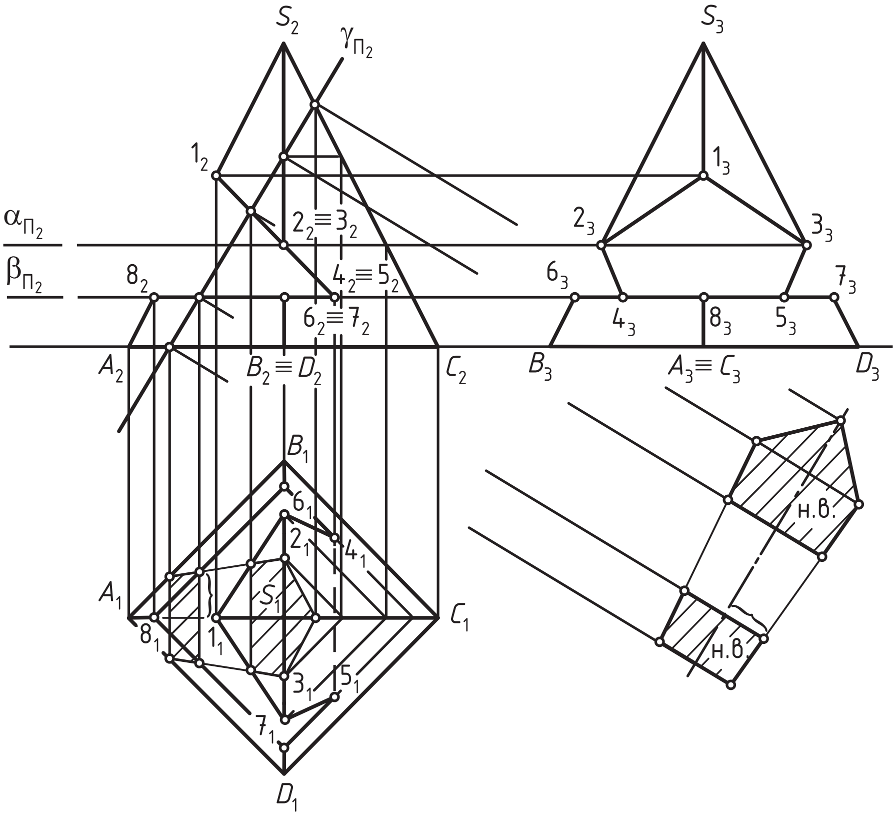


Рис. 77. Проекции прямой пирамиды с вырезом и натуральная величина сечения пирамиды плоскостью α

Грани прямой пирамиды являются плоскостями общего положения, ребра пирамиды, как правило, прямыми общего положения и, в частном случае, прямыми уровня, которые на плоскости Π_2 или Π_3 проецируются в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой пирамиды требуются дополнительные построения в том случае, если ребра пирамиды являются прямыми общего положения. Тогда, применяя способы преобразования плоскостей проекций (чаще способ вращения), определяют натуральные величины ребер пирамиды (см. рис. 51). Развертка прямой пирамиды производится методом треугольников (триангуляции) (см. рис. 64). Положение точек линии выреза определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки выреза берется с горизонтальной проекции пирамиды, превышение *b* точек выреза — с фронтальной или профильной проекций пирамиды (см. рис. 62). Соединение точек линии выреза производится последовательно отдельными прямыми линиями в том случае, если форма выреза в геометрическом теле представляет собой какой-либо многоугольник, и отдельными кривыми линиями, если форма выреза круговая (круг, полукруг и т. д.). На рис. 78 дана развертка прямой пирамиды с нанесением линии выреза.

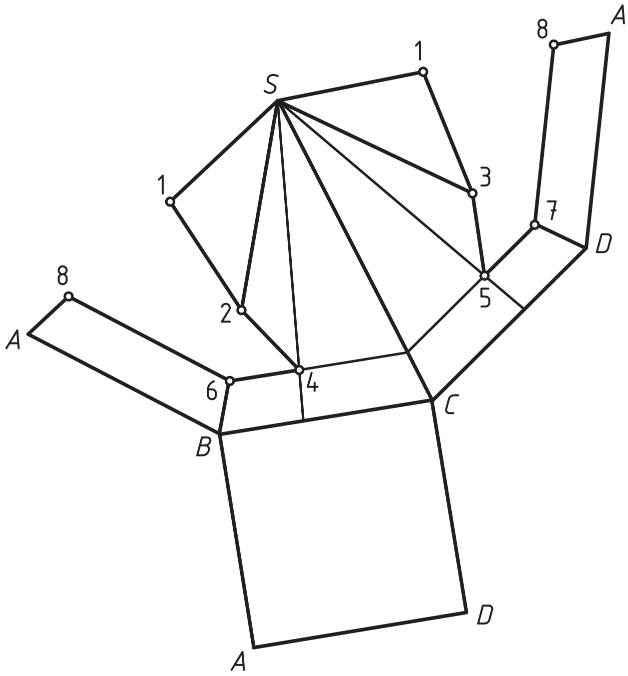


Рис. 78. Развертка прямой пирамиды с нанесением линии выреза

З а д а ч а 16

Дано: прямой круговой цилиндр с вырезом.

Выполнить: 1) построить три проекции прямого кругового цилиндра с вырезом; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью α (рис. 79); 3) построить развертку данного цилиндра с нанесением на ней линии выреза (рис. 80).

Порядок выполнения:

1. Порядок построения трех проекций прямого кругового цилиндра с вырезом аналогичен порядку построения проекций прямой призмы с вырезом. Вырез в геометрическом теле предполагается сквозным. Проецирование прямого кругового цилиндра без выреза на три плоскости проекций и определение проекций точек на поверхности цилиндра дано на рис. 66.

2. Натуральную величину сечения кругового цилиндра с вырезом фронтально-проецирующей плоскостью α допустимо определять любым известным способом, в данном примере определяют способом плоскопараллельного перемещения. Вспомогательную ось, на которую переносят все точки сечения цилиндра плоскостью, выполняют как показано в задачах 1 и 2. Через данные точки проводят прямые, перпен-

дикулярные вспомогательной оси, и на них откладывают расстояния, равные расстояниям от оси симметрии до горизонтальных проекций точек сечения цилиндра плоскостью α.

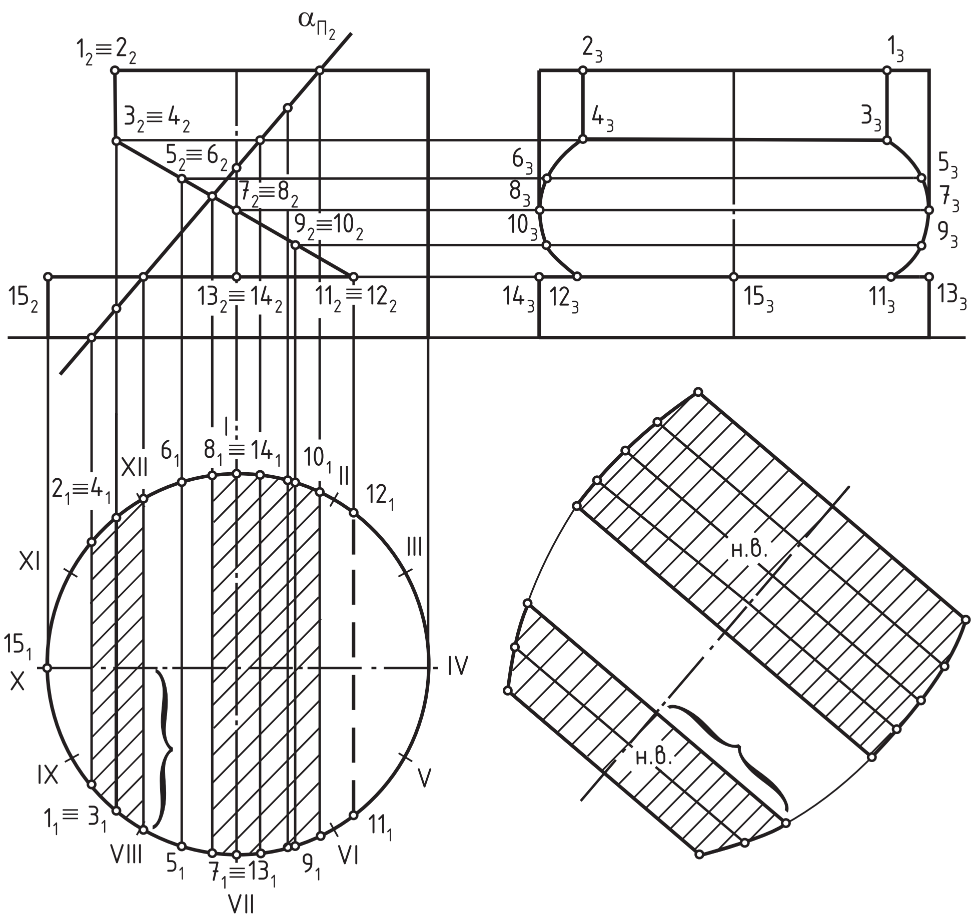


Рис. 79. Проекции прямого цилиндра с вырезом и натуральная величина сечения цилиндра плоскостью α

3. При построении развертки прямого цилиндра его основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Поверхность прямого цилиндра является горизонтально проецирующей. Все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на плоскость $П_1$ на ее очерк. Образующая такой поверхности — горизонтально проецирующая прямая, которая на плоскости $П_2$ и $П_3$ проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого цилиндра никаких дополнительных построений не требуется (см. рис. 80). Развертка прямого цилиндра производится методом раскатки (см. рис. 67). Основание цилиндра (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать

равных частей. Положение точек линии выреза определяется следующим образом: заложение a каждой точки выреза берется с горизонтальной проекции цилиндра, превышение b точек выреза — с фронтальной или профильной проекций цилиндра (см. рис. 66). Соединение точек линии выреза производится последовательно отдельными прямыми или кривыми линиями.

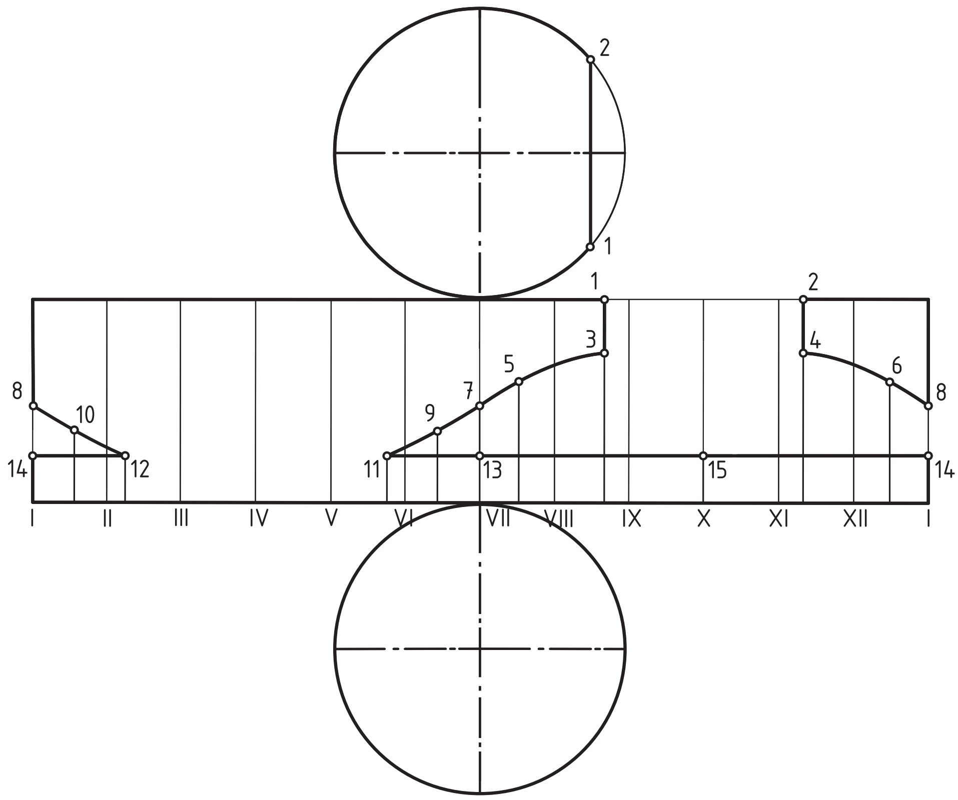


Рис. 80. Развертка прямого цилиндра с нанесением линии выреза

З а д а ч а 17

Дано: прямой круговой конус с вырезом.

Выполнить: 1) построить три проекции прямого кругового конуса с вырезом; 2) определить натуральную величину сечения конуса фронтально-проецирующей плоскостью δ (рис. 81); 3) построить развертку данного конуса с нанесением на ней линии выреза (рис. 82).

Порядок выполнения:

1. Порядок построения трех проекций прямого кругового конуса с вырезом аналогичен порядку построения проекций прямой призмы с вырезом. Вырез в геометрическом теле предполагается сквозным. Проецирование прямого кругового конуса без выреза на три плоскости проекций и определение проекций точек на поверхности конуса показано на рис. 68 и 69.

2. Натуральную величину сечения кругового конуса с вырезом фронтально-проецирующей плоскостью δ допустимо определять любым известным способом, в данном примере определяют способом плоскопараллельного перемещения. Вспомогательную ось, на которую переносят все точки сечения конуса плоскостью, проводят либо параллельно фронтальному следу плоскости сечения δ_{Π_2}, как показано на рис. 75, 77 и 79, либо произвольно (см. рис. 81). Через данные точки проводят прямые, перпендикулярные вспомогательной оси, и на них откладывают расстояния, равные расстояниям от оси симметрии до горизонтальных проекций точек сечения конуса плоскостью δ.

3. При построении развертки прямого кругового конуса его основание, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину.

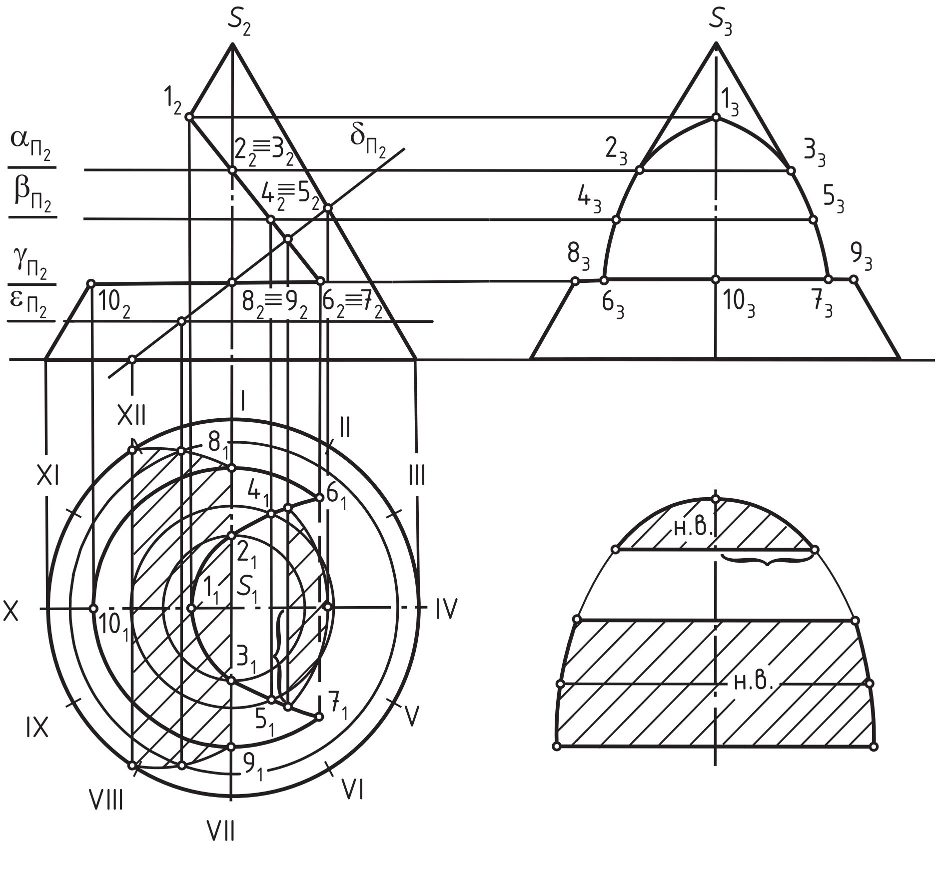


Рис. 81. Проекции прямого конуса с вырезом и натуральная величина
сечения цилиндра плоскостью δ

Образующая прямого конуса является прямой частного положения (фронтальной уровня или профильной уровня) и на плоскости Π_2 или Π_3 проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого конуса дополнительные построения не требуются (см. рис. 82).

Развертка прямого конуса производится методом раскатки (см. рис. 70). Основание конуса (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать равных частей. Положение точек линии выреза определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки выреза берется с горизонтальной проекции конуса, превышение *b* точек выреза — с фронтальной или профильной проекций конуса (см. рис. 68). Соединение точек линии выреза производится последовательно отдельными кривыми или прямыми линиями.

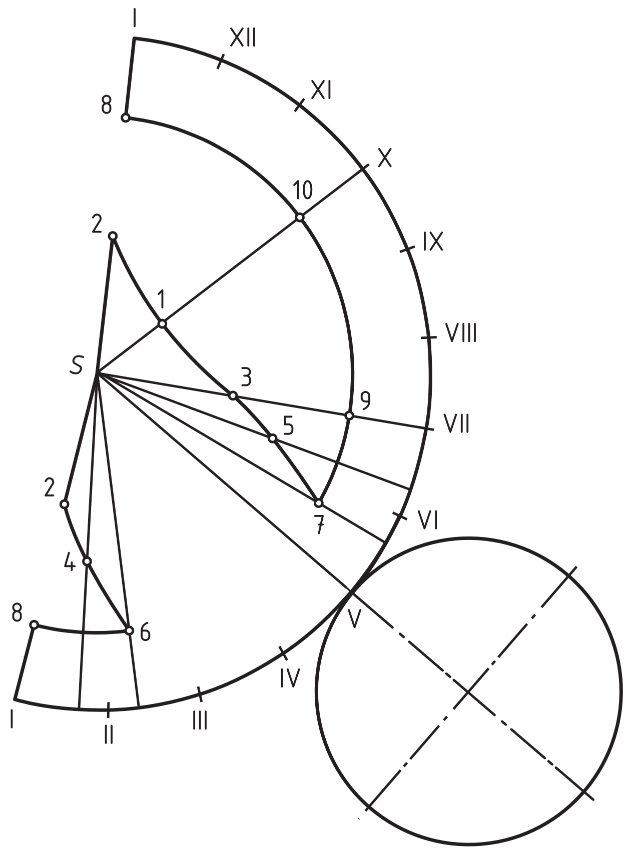


Рис. 82. Развертка прямого конуса с нанесением линии выреза

З а д а ч а 18

Дано: сфера с вырезом.

Выполнить: 1) построить три проекции сферы с вырезом; 2) определить натуральную величину сечения сферы фронтально-проецирующей плоскостью δ (рис. 83).

Порядок выполнения:

1. Порядок построения трех проекций сферы с вырезом аналогичен порядку построения проекций геометрических тел с вырезом, рассмот-

ренных выше. Вырез в сфере предполагается сквозным. Проецирование сферы без выреза на две плоскости проекций и определение проекций точек на ее поверхности показано на рис. 72.

Напоминаем, что сфера (шар) проецируется на все плоскости проекций в виде равных окружностей одинакового радиуса. Самая большая окружность — экватор. На горизонтальную плоскость проекций экватор проецируется в виде круга, на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде прямой линии, параллельной оси проекций $0x$. Соответственно, главный меридиан на плоскость проекций Π_1 проецируется в прямую линию, параллельную оси проекций $0x$, а на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде круга (см. рис. 83).

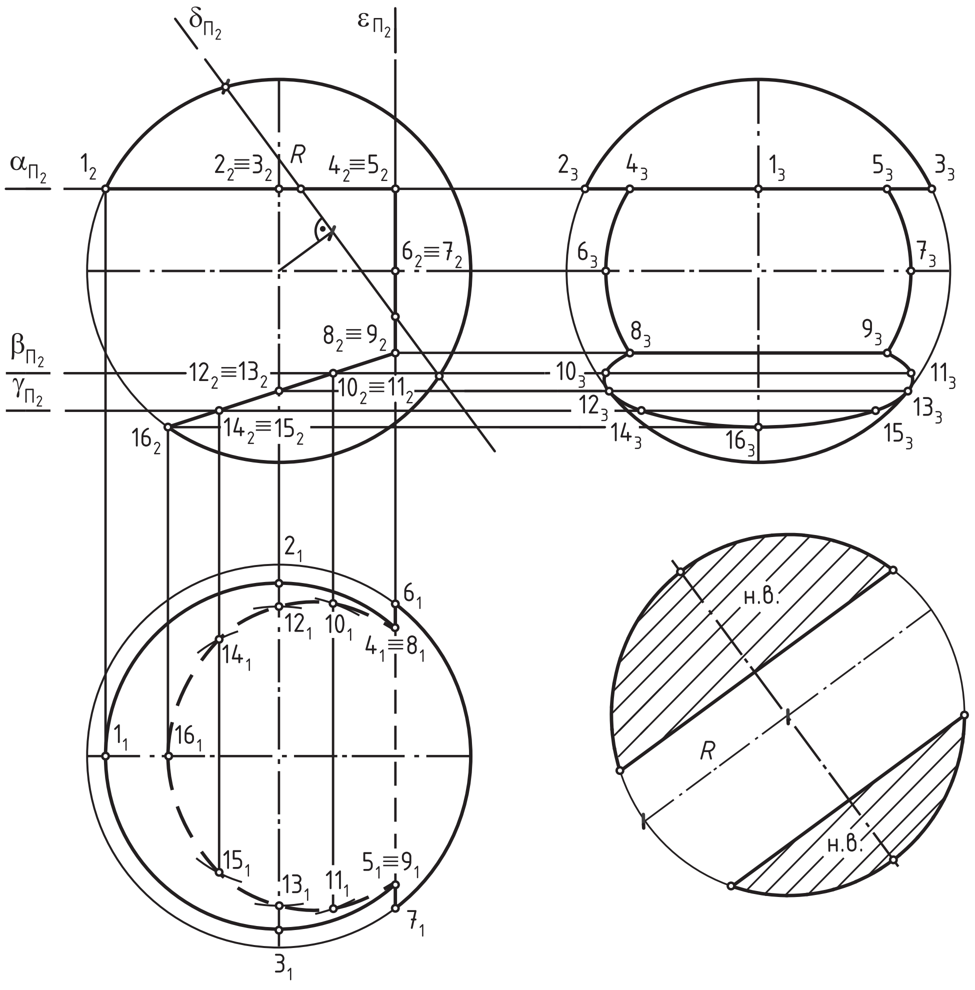


Рис. 83. Проекции сферы с вырезом

При пересечении сферы любой плоскостью ее натуральное сечение всегда есть окружность. Однако сечение проецируется в виде окружности (в натуральную величину) только если секущая плоскость параллельна какой-либо плоскости проекций. Если секущая плоскость является, например фронтально-проецирующей, то сечение на горизонтальной и профильной плоскостях проекций изображается в виде эллипса.

2. Натуральную величину сечения сферы с вырезом фронтально-проецирующей плоскостью δ допустимо определять любым известным способом, в данном примере определяют способом плоскопараллельного перемещения. Вспомогательную ось проводят параллельно фронтальному следу плоскости сечения δ_{Π_2}. В этом случае сечение будет проецироваться в виде окружности (в натуральную величину). Определяют радиус R окружности сечения. Для этого из центра сферы проводят перпендикуляр к фронтальному следу плоскости сечения δ_{Π_2}. Полученным радиусом R проводят окружность, на которую переносят все точки сечения сферы плоскостью δ. Через данные точки проводят прямые, перпендикулярные вспомогательной оси, до пересечения с окружностью радиуса R.

6.7. Развертки наклонных геометрических тел

Построение разверток наклонных геометрических тел осуществляется по аналогии с построением разверток прямых геометрических фигур.

Напомним, что при *построении развертки любой геометрической фигуры (как прямой, так и наклонной) необходимо вначале определить натуральные величины оснований и ребер или образующих геометрического тела, используя способы преобразования плоскостей проекций*.

На рис. 84 показана развертка наклонной трехгранной призмы. Основания призмы ΔABC являются горизонтальными плоскостями уровня и проецируются на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину. Ребра наклонной призмы являются фронтальными прямыми уровня и проецируются на фронтальную плоскость проекций Π_2 также в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки данной геометрической фигуры дополнительные построения не требуются. Развертка наклонной призмы производится методом раскатки. Для этого перпендикулярно фронтальным проекциям ребер призмы из вершин ее оснований проводят вспомогательные прямые, на которых отмечают отрезки (CB, BA, AC), равные по величине сторонам основания призмы. Соединяя данные отрезки между собой прямыми линиями, получают развертку наклонной призмы. Основания развертки призмы выполняют методом треугольников (см. рис. 64).

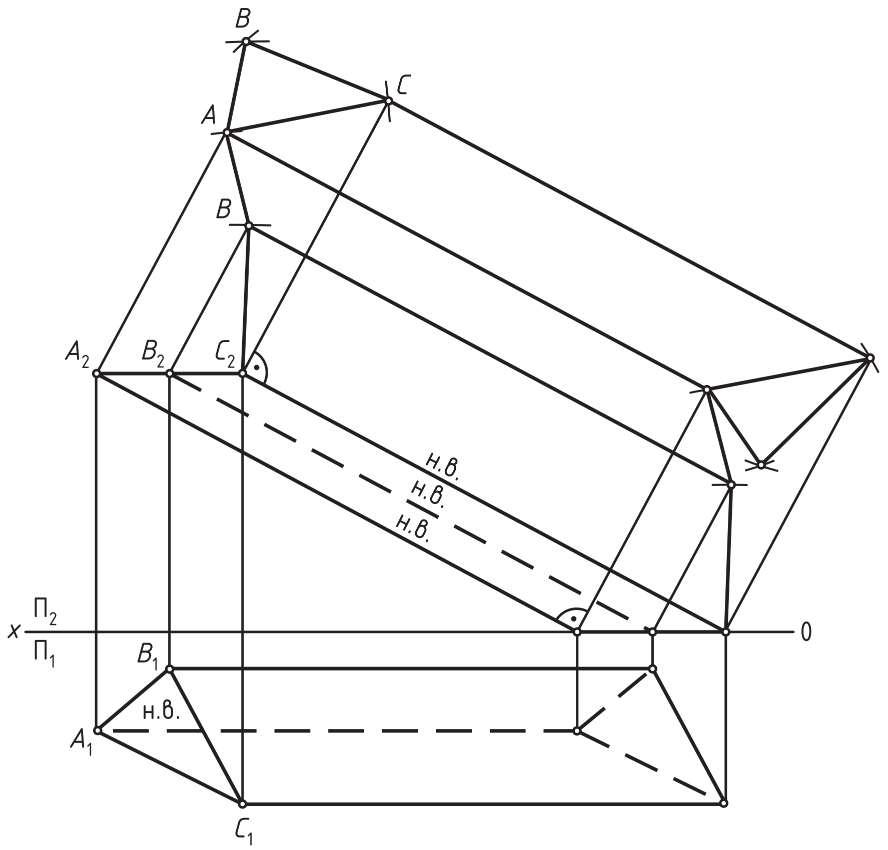


Рис. 84. Развертка наклонной призмы

Развертка наклонной четырехгранной пирамиды *ABCDS* дана на рис. 85. Основание пирамиды *ABCD* является горизонтально-проецирующей плоскостью. Для определения натуральной величины основания пирамиды в данном примере применяют способ замены плоскостей проекций. Проекцию основания преобразуют в плоскость уровня. Заменяют плоскость $П_2$ на $П_4 \perp П_1$. Параллельно проекции $A_1B_1C_1D_1$ и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1. Превышения каждой проекции точки основания пирамиды в плоскости $П_4$ взяты с плоскости $П_2$ (координаты z). Новая проекция $A_4B_4C_4D_4$ будет являться натуральной величиной основания наклонной пирамиды. Ребра пирамиды *AS*, *BS* и *CS* являются прямыми общего положения. Для определения натуральных величин этих ребер пирамиды применяют способ вращения вокруг оси $i \perp П_1$ в точке *S*. Ребро *DS* пирамиды *ABCDS* является горизонтальной прямой уровня, следовательно, проецируется на горизонтальную плоскость проекций $П_1$ в натуральную величину. Развертка наклонной пирамиды производится методом треугольников (триангуляции) по типу прямой пирамиды (см. рис. 64).

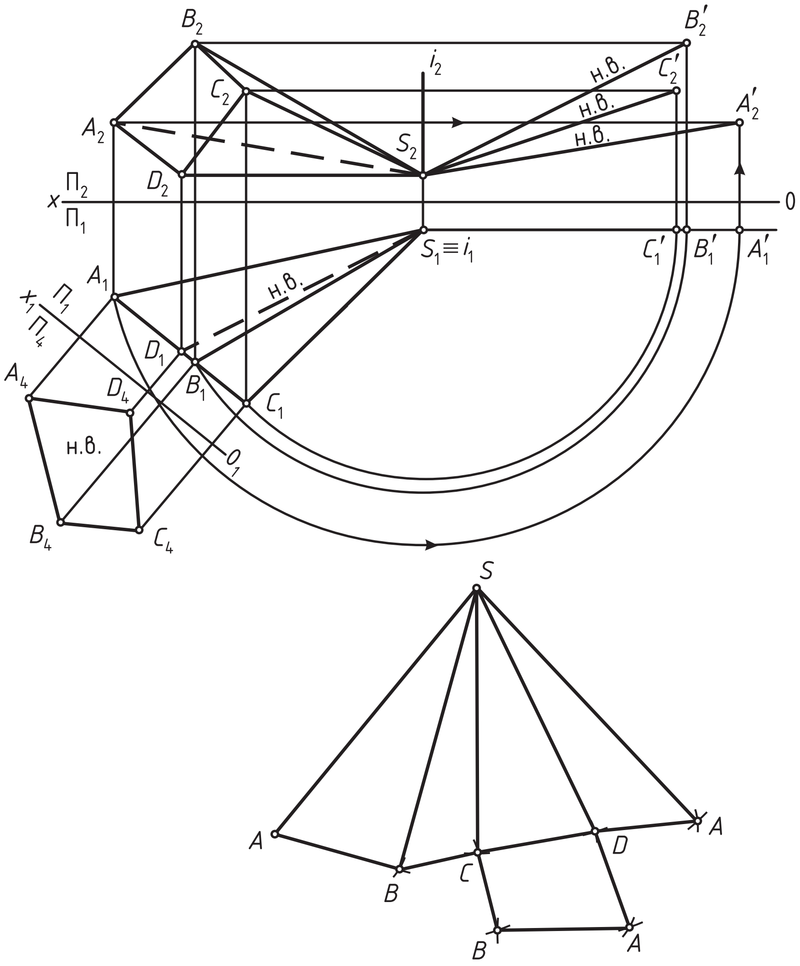


Рис. 85. Развертка наклонной пирамиды

Построение развертки наклонного цилиндра аналогично развертке наклонной призмы (рис. 86). Основания цилиндра являются горизонтальными плоскостями уровня и проецируются на плоскость Π_1 в натуральную величину. Образующие наклонного цилиндра, получаемые делением основания цилиндра на восемь равных частей, являются фронтальными прямыми уровня и проецируются на плоскость Π_2 также в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки цилиндра дополнительные построения не требуются. Развертка наклонного цилиндра производится методом раскатки. Для этого перпендикулярно фронтальным проекциям образующих цилиндра из точек его оснований, через которые проходят образующие (I—VIII), проводят вспомогательные прямые, на которых откладывают отрезки, равные по величине хорде — кратчайшему расстоянию между двумя точками основания. Соединяя данные отрезки между собой плавными линиями, получают развертку наклонного цилиндра.

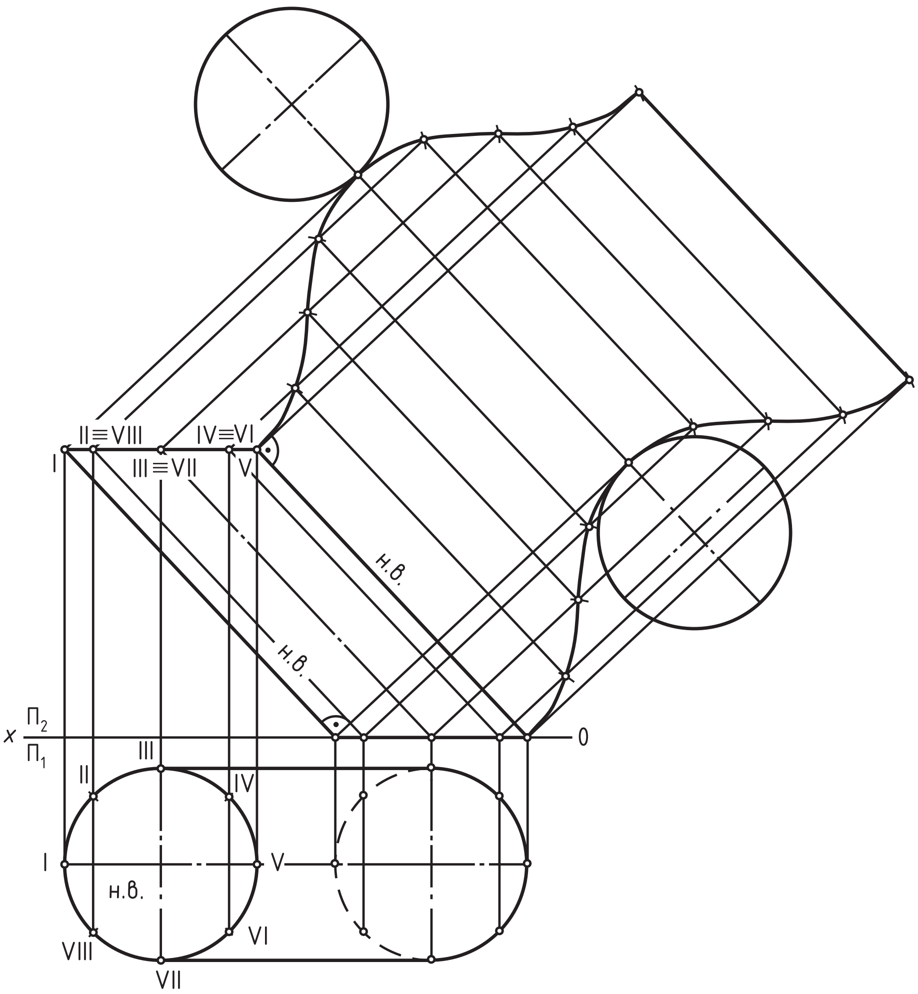


Рис. 86. Развертка наклонного цилиндра

На рис. 87 показана развертка наклонного конуса. Основание конуса — горизонтальная плоскость уровня проецируется на плоскость $П_1$ в натуральную величину. Образующие конуса получают делением основания конуса на восемь равных частей. При этом образующие I*S* и V*S* являются фронтальными прямыми уровня и проецируются на плоскость $П_2$ в натуральную величину. Натуральные величины других образующих определяют способом вращения вокруг оси $i \perp П_1$ в точке *S*. Развертка наклонного конуса производится методом треугольников по типу прямой пирамиды. В качестве двух пересекающихся катетов треугольника берут две величины: постоянную и переменную. Постоянная величина — хорда — расстояние между двумя точками основания. Переменная — натуральная величина каждой образующей конуса. Соединяя полученные точки основания развертки (I—VIII) между собой плавными линиями, получают развертку наклонного конуса.

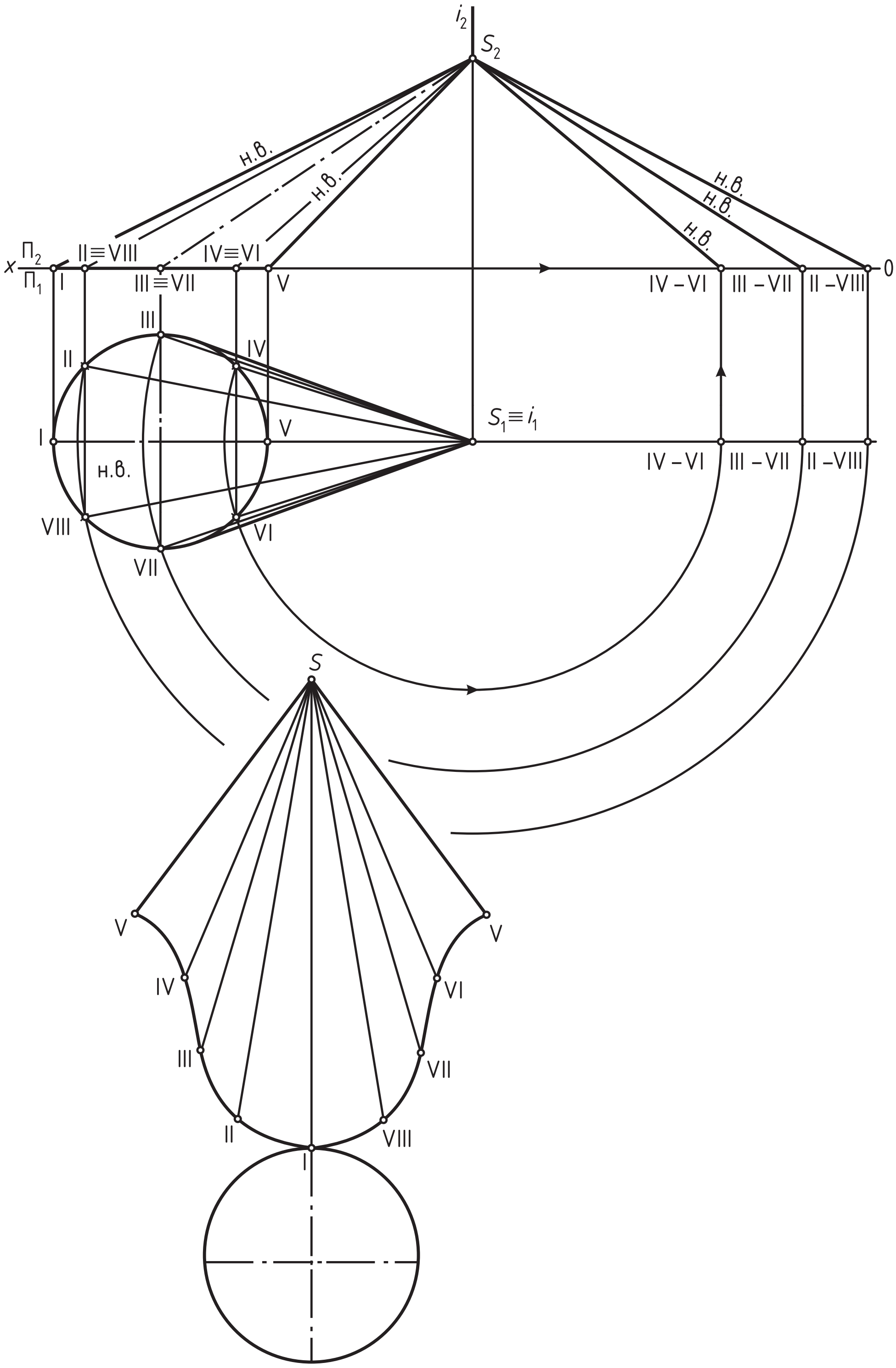


Рис. 87. Развертка наклонного конуса

Тема 7. Пересечение поверхности плоскостью

7.1. Общие понятия и определения. 7.2. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями частного положения. Определение натуральной величины сечения. 7.3. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями общего положения. Определение натуральной величины сечения

7.1. Общие понятия и определения

Сечением называется плоская фигура, полученная в результате пересечения геометрического тела секущей плоскостью и содержащая точки, принадлежащие поверхности тела и плоскости.

Сечение ограничивается замкнутой ломаной линией, если плоскостью пересекается гранная поверхность, и замкнутой кривой линией, если плоскостью пересекается кривая поверхность.

Построение линии сечения в общем случае сводится к определению точек пересечения ребер многогранника или образующих кривой поверхности с секущей плоскостью. Следовательно, построение линии сечения сводится к множественной задаче определения точек пересечения прямой с плоскостью.

7.2. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями частного положения. Определение натуральной величины сечения

Сечение поверхностей гранных геометрических тел плоскостями частного положения. Сечением многогранника плоскостью является плоский многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам, а стороны — граням многогранника. В зависимости от вида гранной поверхности и положения секущей плоскости сечение может принимать различные геометрические фигуры. Например, при пересечении поверхностей прямых правильных призмы и пирамиды плоскостями возможно образование геометрических фигур, показанных на рис. 88 и 89.

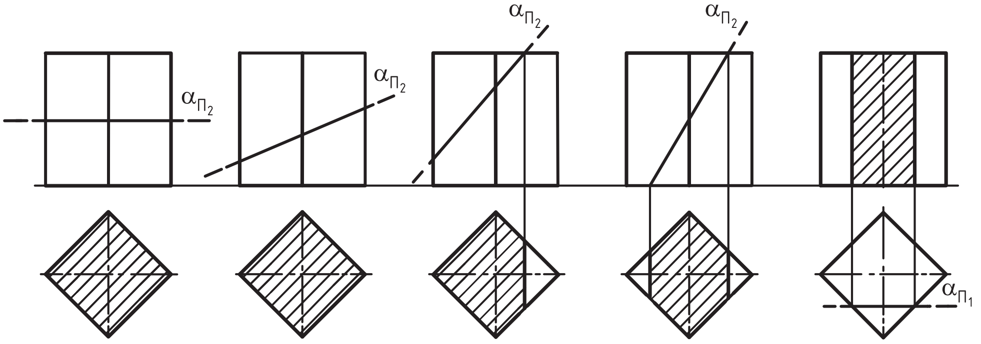


Рис. 88. Сечение прямой призмы плоскостями частного положения

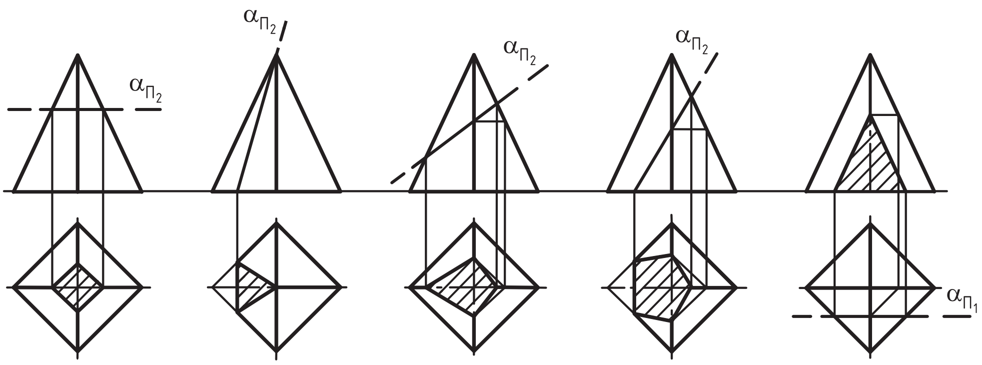


Рис. 89. Сечение прямой пирамиды плоскостями частного положения

Построение линии пересечения многогранника плоскостью сводится к многократному решению задачи на определение точек пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. Определение натуральной величины сечения гранной поверхности плоскостью определяют любым известным способом, например, способом совмещения секущей плоскости с плоскостью проекций, способом вращения, способом замены плоскостей проекций и т. д.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 19

Дано: прямая шестигранная пирамида *ABCDEFS* с вершиной в точке *S* и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 90).

Выполнить: 1) построить линию пересечения пирамиды плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, в т. ч. и линия пересечения пирамиды плоскостью, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение фронтального следа $\alpha_{П_2}$ с ребрами пирамиды образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения пирамиды плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

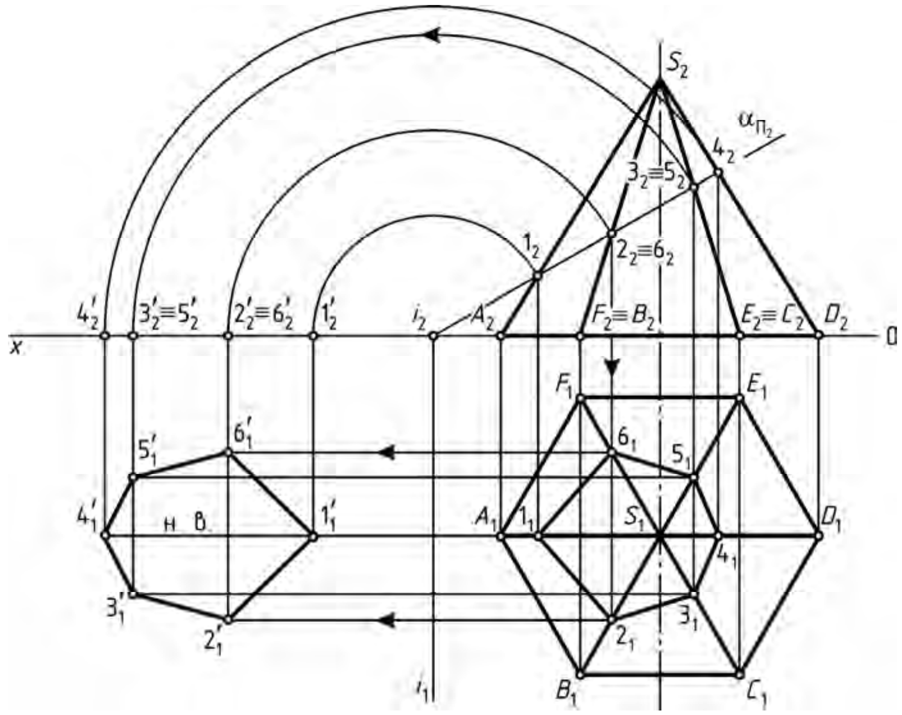


Рис. 90. Пересечение прямой пирамиды плоскостью частного положения

З а д а ч а 20

Дано: прямая шестигранная призма и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 91).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами призмы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2$.

2. Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения призмы плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

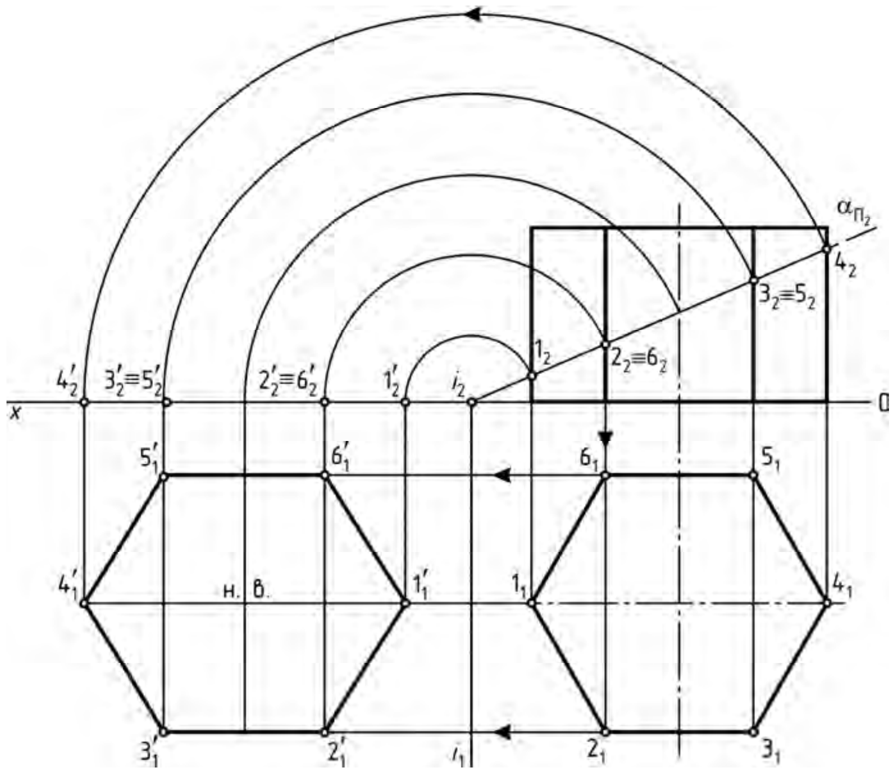


Рис. 91. Пересечение прямой призмы плоскостью частного положения

З а д а ч а 21

Дано: наклонная пирамида *ABCDS* с вершиной в точке *S* и горизонтально-проецирующая плоскость α (рис. 92).

Выполнить: 1) построить линию пересечения пирамиды плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Горизонтальный след α_{Π_1} горизонтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством (любой геометрический элемент, принадлежащий горизонтально-проецирующей плоскости, в т. ч. и линия пересечения пирамиды плоскостью, будет проецироваться в ее горизонтальный след). Следовательно, пересечение следа α_{Π_1} с поверхностью наклонной пирамиды образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1$.

2. Фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 3_2 4_2$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральная величина сечения пирамиды плоскостью в данной задаче определена способом плоскопараллельного перемещения и вынесена за пределы графических построений.

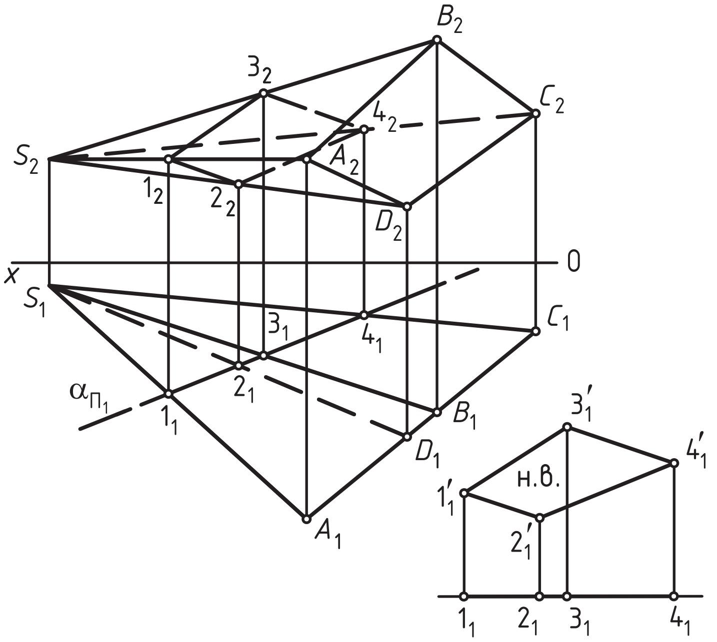


Рис. 92. Пересечение наклонной пирамиды плоскостью частного положения

Сечение поверхностей геометрических тел вращения плоскостями частного положения. Сечением тел вращения плоскостью является плоская кривая линия. В зависимости от вида поверхности вращения и положения секущей плоскости сечение может принимать различные геометрические фигуры. Так, при пересечении поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью возможно образование следующих геометрических фигур:

окружности, если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, такое сечение называют нормальным (рис. 93, *а*);

эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает все его образующие (рис. 93, *б*);

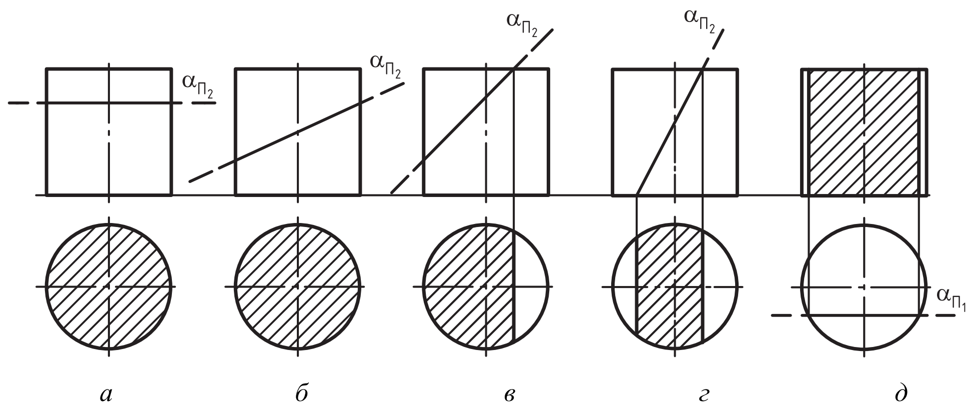


Рис. 93. Пересечение прямого цилиндра плоскостями частного положения

усеченного эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает одно или оба его основания (рис. 93, *в* и *г*);

прямоугольника, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 93, *д*).

При пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостью возможно образование следующих геометрических фигур:

окружности, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (рис. 94, *а*);

треугольника, если секущая плоскость пересекает конус через его вершину по двум образующим (рис. 94, *б*);

эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси конуса и пересекает все его образующие (рис. 94, *в*).

параболы, если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса (рис. 94, *г*);

гиперболы, если секущая плоскость параллельна оси конуса или параллельна двум его образующим (рис. 94, *д*).

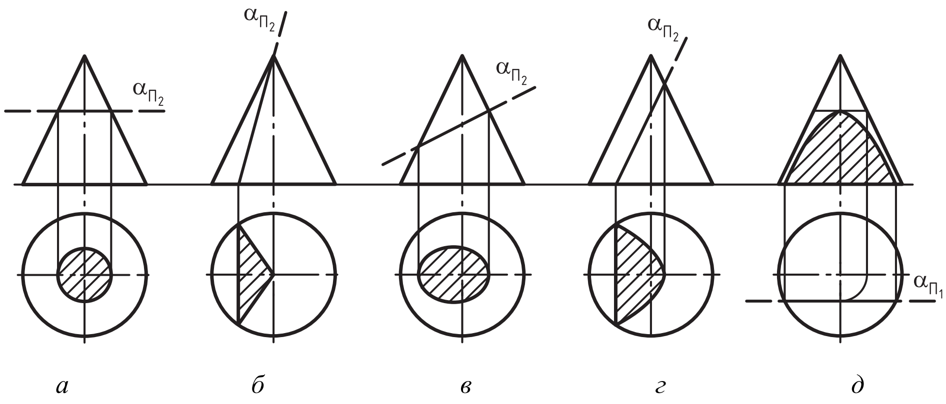


Рис. 94. Пересечение прямого конуса плоскостями частного положения

Построение линии пересечения тел вращения плоскостью сводится к многократному решению задачи на определение точек пересечения образующих кривой поверхности с секущей плоскостью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 22

Дано: прямой круговой цилиндр и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 95, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения цилиндра плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра плоскостью.

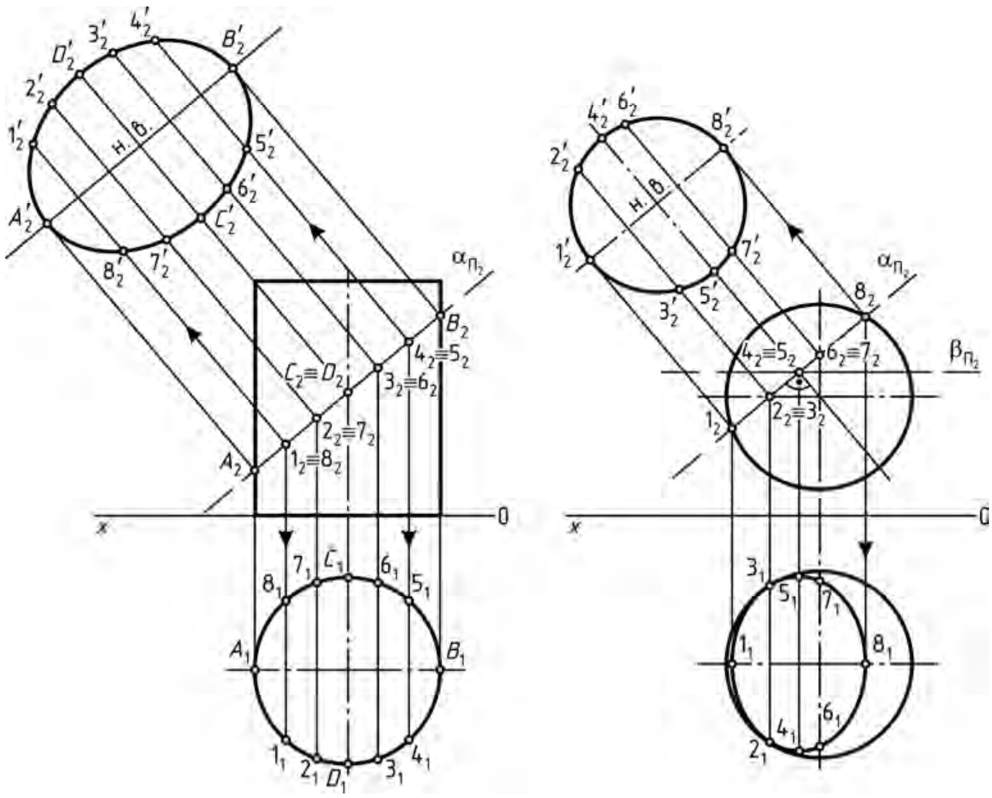
Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью цилиндра образует фрон-

тальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_21_22_2D_23_24_2B_25_26_2C_27_28_2$.

2. Цилиндрическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_11_12_1D_13_14_1B_15_16_1C_17_18_1$ определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения цилиндра плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.



а *б*

Рис. 95. Пересечение геометрических тел плоскостью частного положения

З а д а ч а 23

Дано: сфера и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 95, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения сферы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения сферы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью сферы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_22_24_26_28_27_25_23_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 7_1 5_1 3_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения сферы плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

З а д а ч а 24

Дано: прямой круговой конус и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 96).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

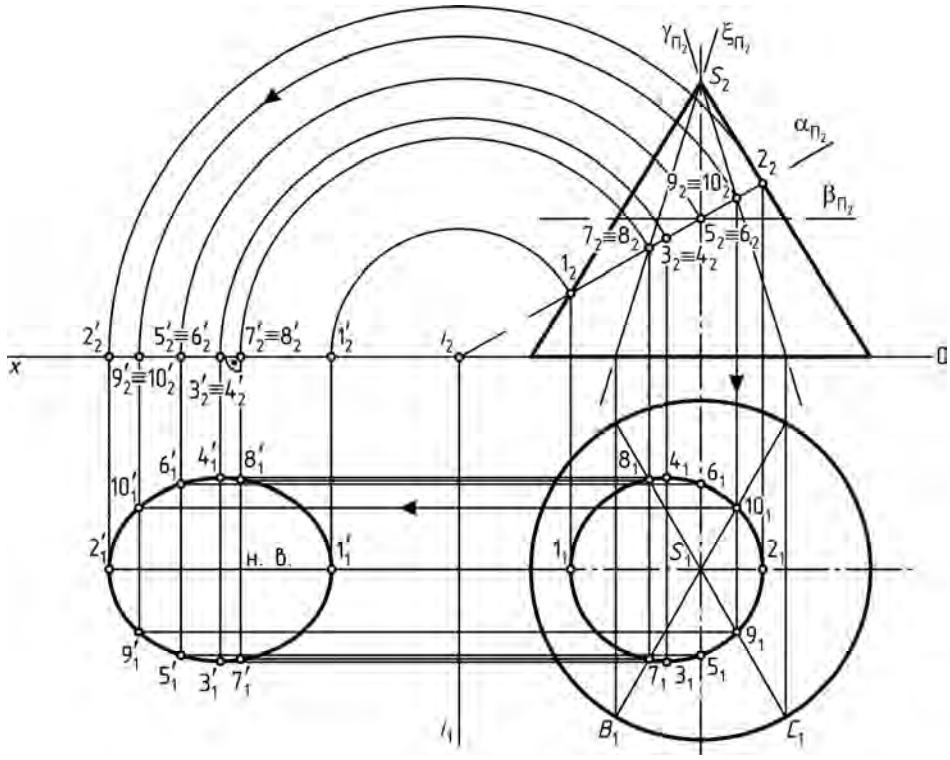


Рис. 96. Пересечение прямого конуса плоскостью частного положения

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа $\alpha_{П_2}$ с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 8_2 4_2 6_2 10_2 2_2 9_2 5_2 3_2 7_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 8_1 4_1 6_1 10_1 2_1 9_1 5_1 3_1 7_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения конуса плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

З а д а ч а 25

Дано: наклонный цилиндр и горизонтально-проецирующая плоскость α (рис. 97).

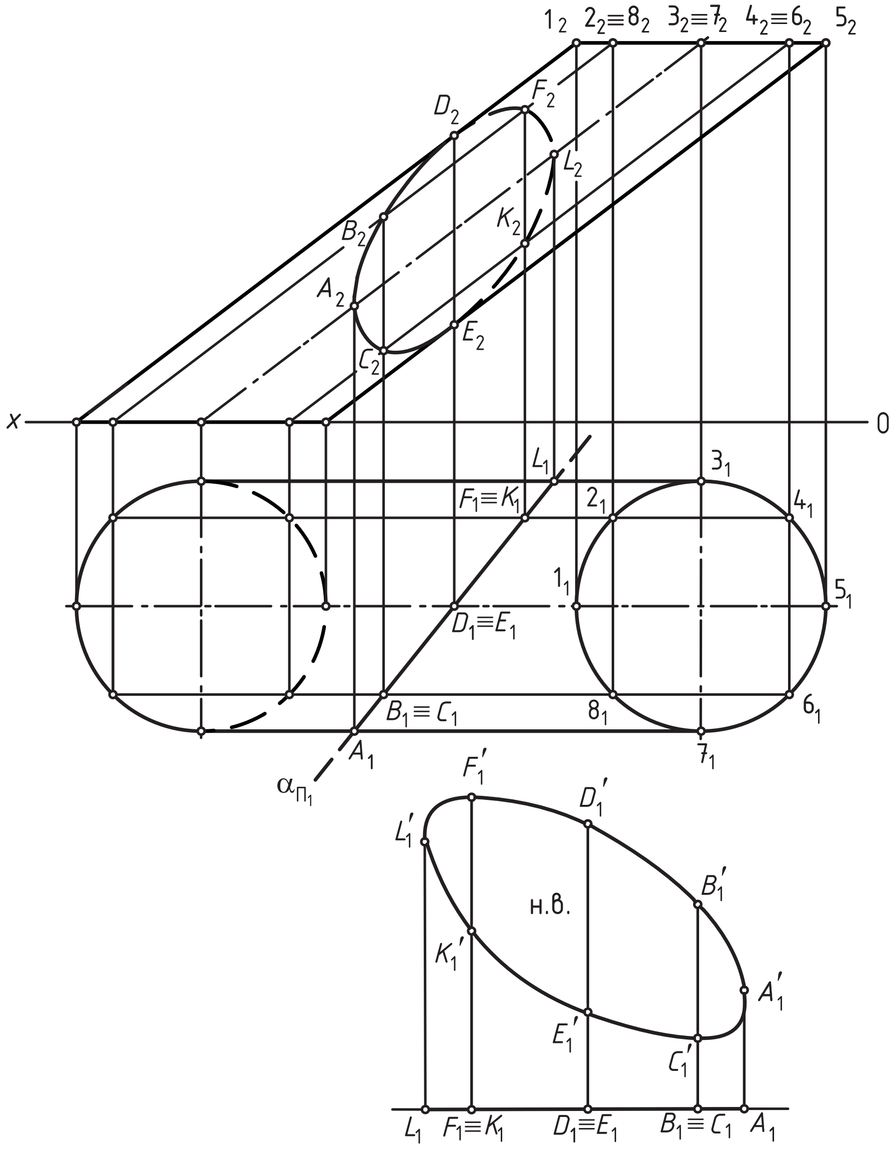


Рис. 97. Пересечение наклонного цилиндра плоскостью частного положения

Выполнить: 1) построить линию пересечения цилиндра плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Горизонтальный след α_{Π_1} горизонтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение следа α_{Π_1} с поверхностью цилиндра образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_1B_1C_1D_1E_1F_1K_1L_1$.

2. Фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_2B_2D_2F_2L_2K_2E_2C_2$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью определяют любым известным способом.

7.3. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями общего положения. Определение натуральной величины сечения

Сечение поверхностей гранных геометрических тел плоскостями общего положения. Построение линии пересечения многогранника плоскостью общего положения сводится к двум этапам. На первом этапе плоскость из общего положения преобразуют в частное (проецирующее) положение. На втором — определяют точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 26

Дано: прямая трехгранная пирамида ABC с вершиной в точке S и плоскость общего положения α, заданная ΔDEF (рис. 98).

Выполнить: 1) построить линию пересечения пирамиды плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α (ΔDEF) из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию пирамиды ($A_4B_4C_4S_4$).

2. След α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) с ребрами пирамиды образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $2_43_44_4$.

3. Горизонтальную ($2_13_14_1$) и фронтальную ($2_23_24_2$) проекции сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью можно определить любым известным способом (на примере не показано).

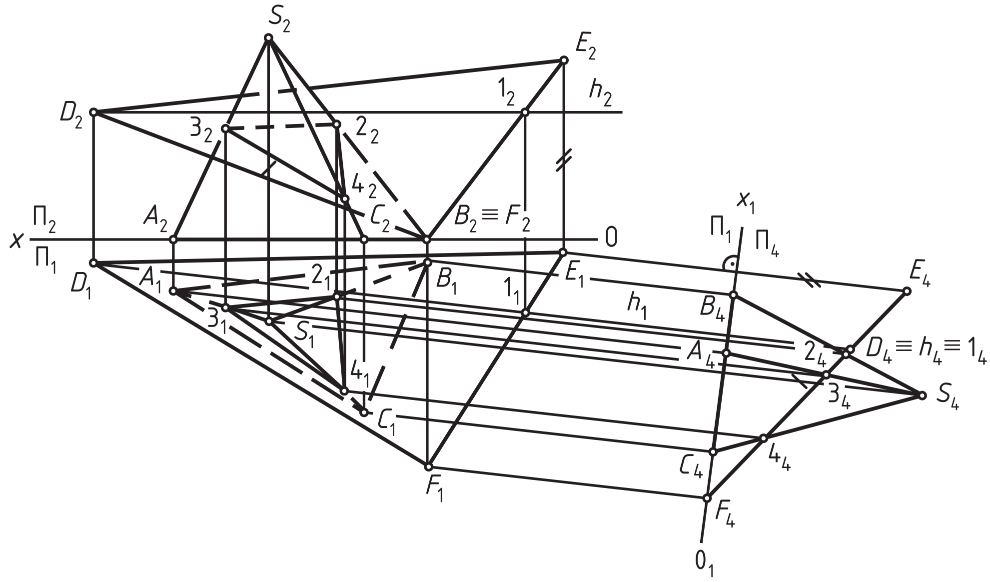


Рис. 98. Пересечение прямой пирамиды плоскостью общего положения α (ΔDEF)

З а д а ч а 27

Дано: прямая четырехгранная призма *ABCD* и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 99).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию призмы ($A_4B_4C_4D_4$).

2. След α_{Π_4} проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} с ребрами призмы образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4$.

3. Призматическая поверхность является горизонтально проецирующей. Поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 4_1 3_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 4_2 3_2$) определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом вращения. Однако допустимо применение и любого другого способа.

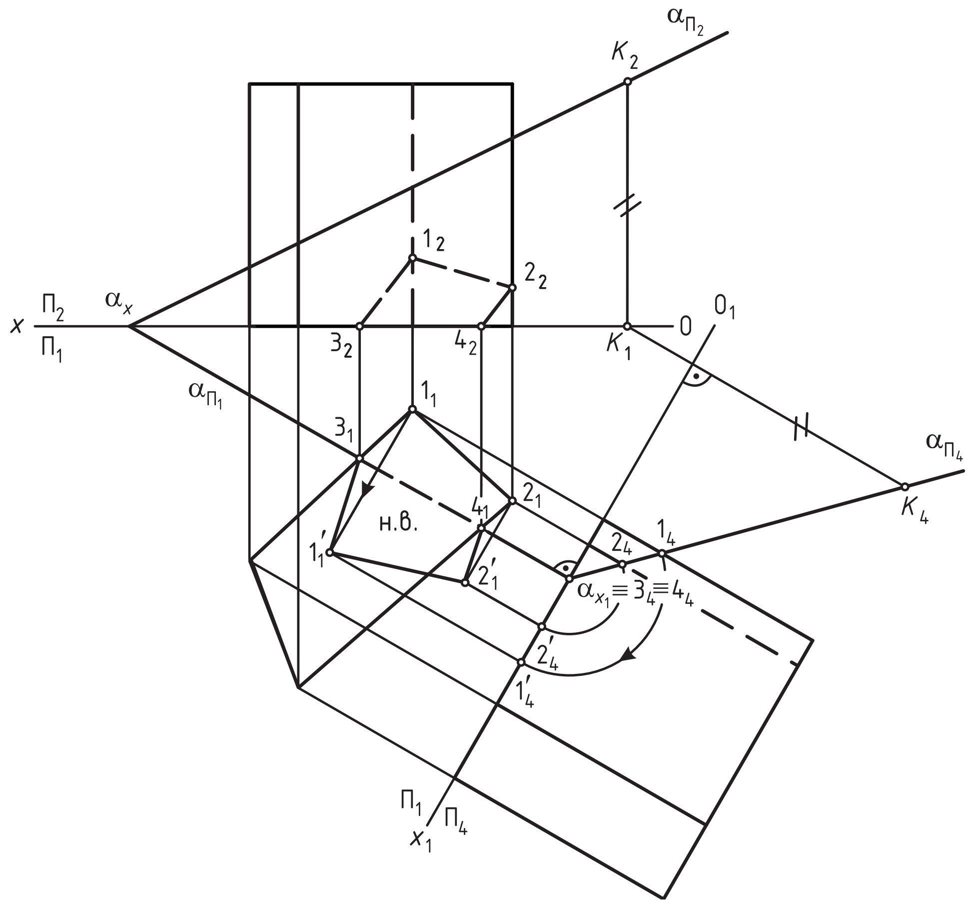


Рис. 99. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения α, заданной следами

З а д а ч а 28

Дано: прямая четырехгранная призма и плоскость общего положения α, заданная ΔABC (рис. 100).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α (ΔABC) из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} ($\Delta A_4B_4C_4$) — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию призмы.

2. След α_{Π_4} ($\Delta A_4B_4C_4$) проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} ($\Delta A_4B_4C_4$) с ребрами призмы образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_42_43_44\,_45_4$.

3. Призматическая поверхность является горизонтально проецирующей. Поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 3_1 5_1 4_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 3_2 5_2 4_2$) определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом вращения.

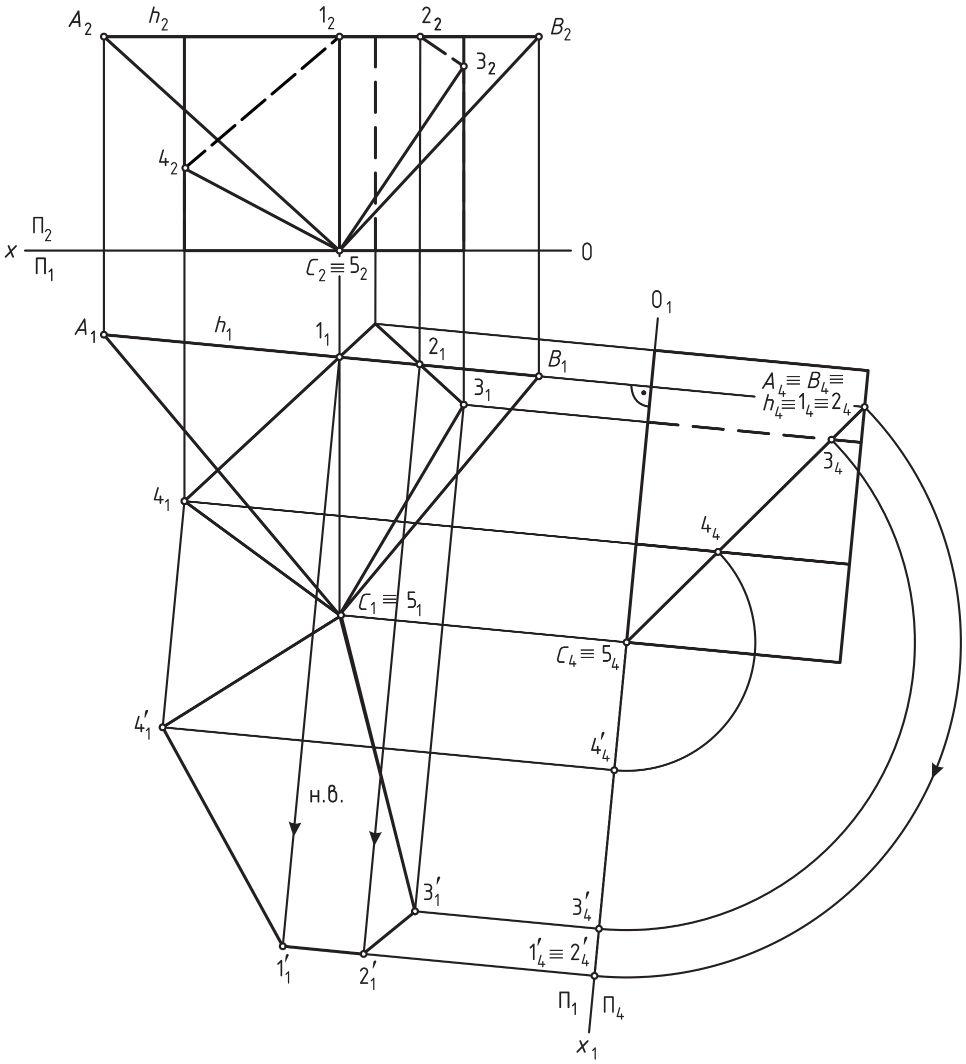


Рис. 100. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения α, заданной ΔABC

З а д а ч а 29

Дано: наклонная четырехгранная призма *ABCD* и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 101).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

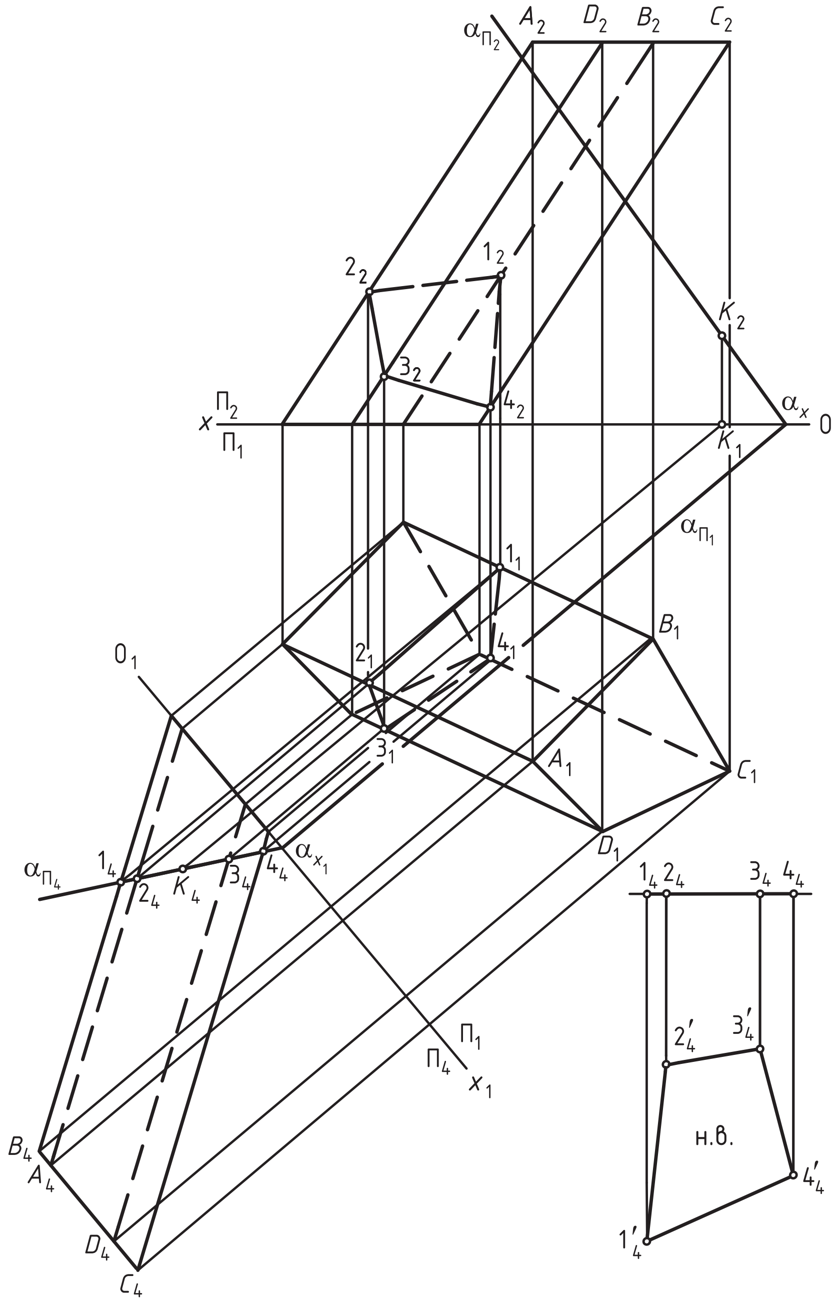


Рис. 101. Пересечение наклонной призмы плоскостью общего положения α, заданной следами

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где $\alpha_{П_4}$ — проецирующий след плоскости. В плоскости $П_4$ выстраивают проекцию призмы ($A_4B_4C_4D_4$).

2. След $\alpha_{П_4}$ обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение следа $\alpha_{П_4}$ с ребрами призмы образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4$.

3. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 3_1 4_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 3_2 4_2$) определяют из условия принадлежности точки прямой (ребру призмы).

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.

Сечение поверхностей геометрических тел вращения плоскостями общего положения. Построение линии пересечения тел вращения плоскостью общего положения также сводится к двум этапам. На первом этапе плоскость из общего положения преобразуют в частное (проецирующее), а затем определяют точки пересечения образующих кривой поверхности с секущей плоскостью. Отличительная особенность от построения линии пересечения плоскостью гранных поверхностей заключается в том, что линия сечения поверхностей вращения плоскостями общего или частного положения является замкнутой кривой линией и ее построение следует производить с помощью лекала.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 30

Дано: прямой круговой цилиндр и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 102).

Выполнить: 1) построить линию пересечения цилиндра плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где $\alpha_{П_4}$ — проецирующий след плоскости. В плоскости $П_4$ выстраивают проекцию цилиндра.

2. След $\alpha_{П_4}$ проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение следа $\alpha_{П_4}$ с поверхностью цилиндра образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4 5_4$.

3. Цилиндрическая поверхность является горизонтально проецирующей. Поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$) определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.

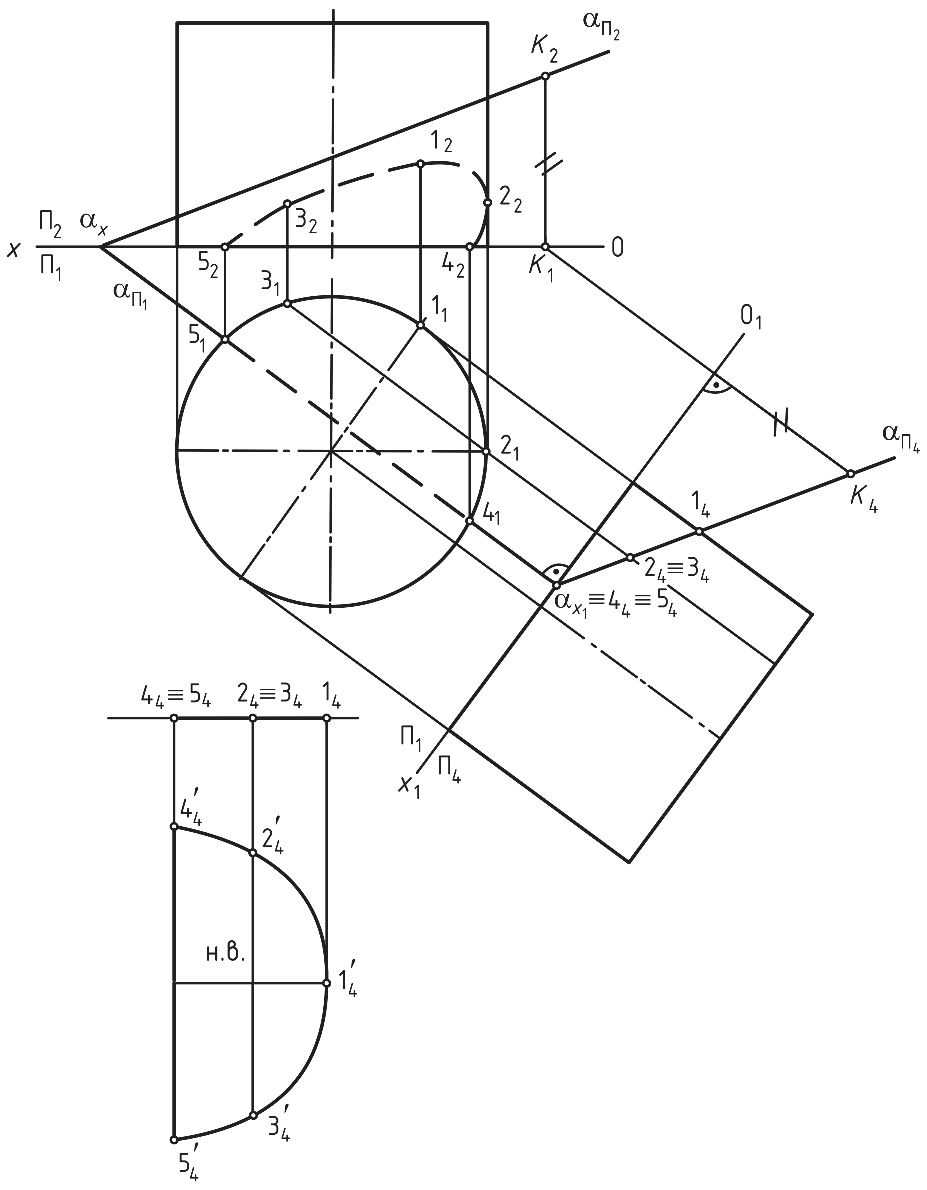


Рис. 102. Пересечение прямого цилиндра плоскостью общего положения

З а д а ч а 31

Дано: прямой круговой конус и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 103).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где $\alpha_{П_4}$ — проецирующий след плоскости. В плоскости $П_4$ выстраивают проекцию конуса.

2. След α_{Π_4} обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} с поверхностью конуса образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4 5_4$.

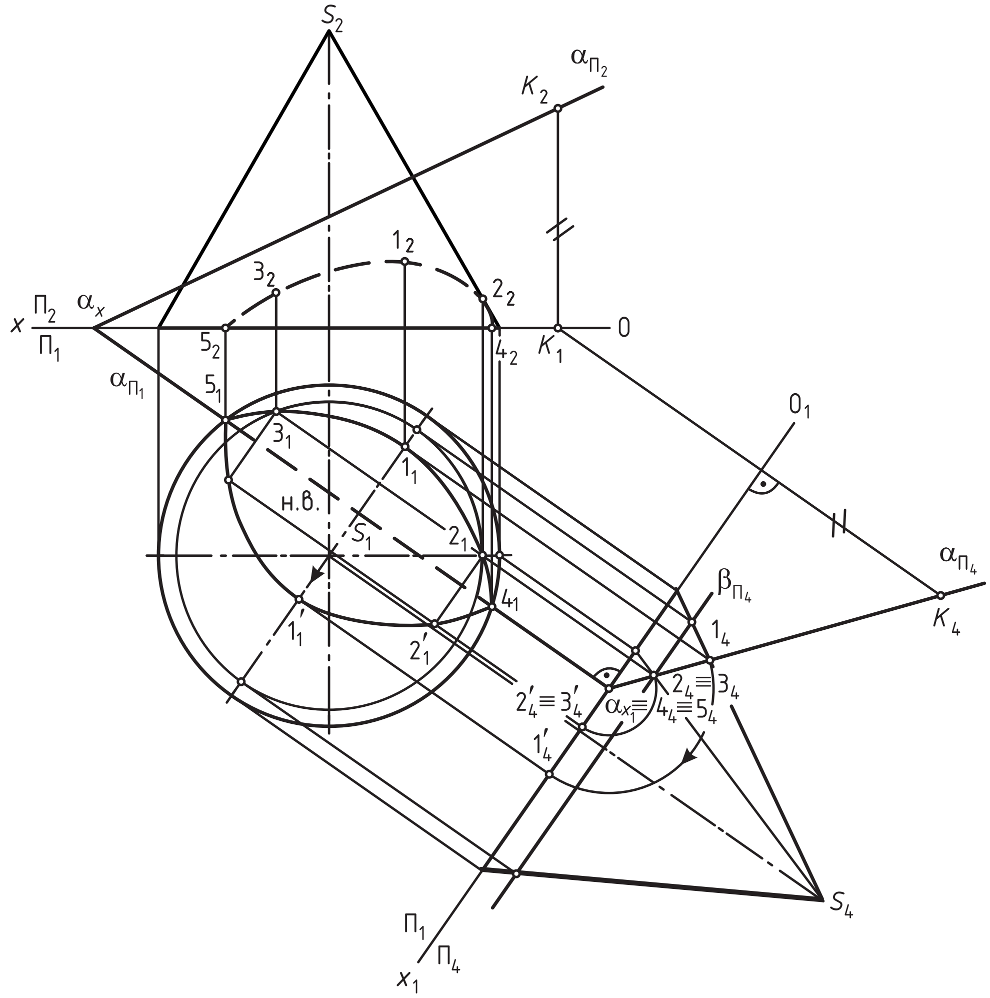


Рис. 103. Пересечение прямого конуса плоскостью общего положения

3. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 4_1 5_1 3_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 4_2 5_2 3_2$) определяют из условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом вращения.

Задача 32

Дано: наклонный конус и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 104).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

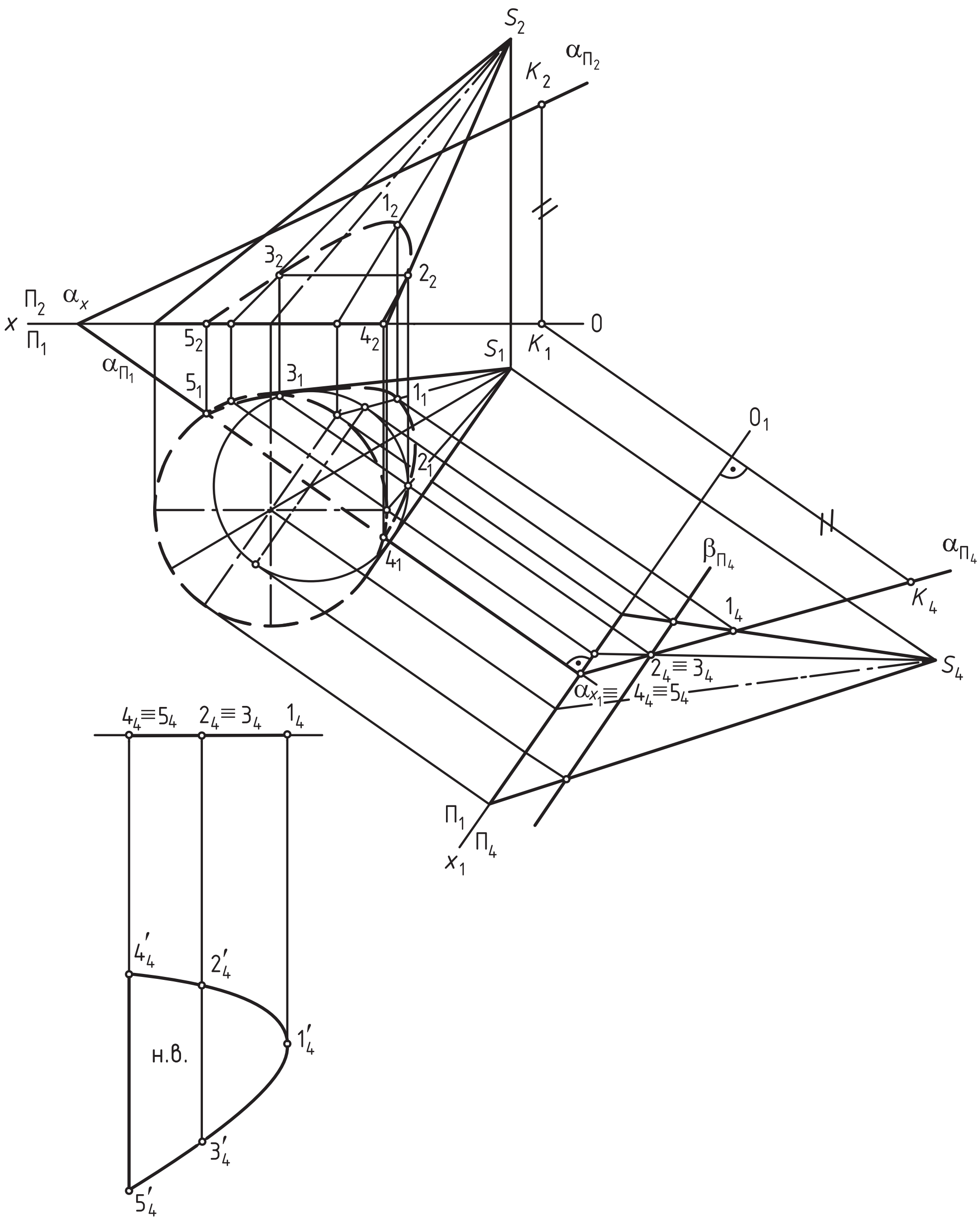


Рис. 104. Пересечение наклонного конуса плоскостью общего положения

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию конуса.

2. След α_{Π_4} обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение следа α_{Π_4} с поверхностью конуса образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4 5_4$.

3. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 4_1 5_1 3_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 4_2 5_2 3_2$) определяют из условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.

Тема 8. Пересечение поверхности прямой линией

Пересечение прямой с поверхностью называется *проницанием*. Построение точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел в общем случае сводится к следующему алгоритму:

1) заключить прямую во вспомогательную плоскость-посредник;

2) построить линию пересечения плоскости-посредника с поверхностью заданного геометрического тела;

3) определить точки пересечения линии сечения с данной прямой, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 33

Дано: прямая трехгранная призма и прямая общего положения l (рис. 105, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой l.

Порядок выполнения:

Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому проекции точек пересечения прямой с поверхностью могут быть построены без применения вспомогательной плоскости, только с помощью линий проекционной связи. Горизонтальные проекции K_1 и M_1 точек пересечения прямой l с призмой определяют в пересечении горизонтальных проекций призмы и прямой. Фронтальные проекции точек K_2 и M_2 определяют с помощью линий проекционной связи. Видимость прямой l определяют по положению точек K и M.

З а д а ч а 34

Дано: прямой круговой цилиндр и прямая общего положения l (рис. 105, *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Цилиндрическая поверхность в данном примере является горизонтально-проецирующей, поэтому проекции точек пересечения прямой с поверхностью могут быть построены без применения вспомогательной плоскости-посредника, только с помощью линий проекционной связи. Горизонтальную проекцию K_1 точки пересечения прямой l с цилиндром определяют в пересечении горизонтальных проекций цилиндра и прямой. Фронтальную проекцию точки K_2 определяют с помощью линий проекционной связи. В точке M прямая пересекает верхнее основание цилиндра. Здесь определяют фронтальную проекцию M_2 точки пересечения прямой l с цилиндром, горизонтальную проекцию M_1 находят в проекционной связи. Видимость прямой l определяют по положению точек K и M.

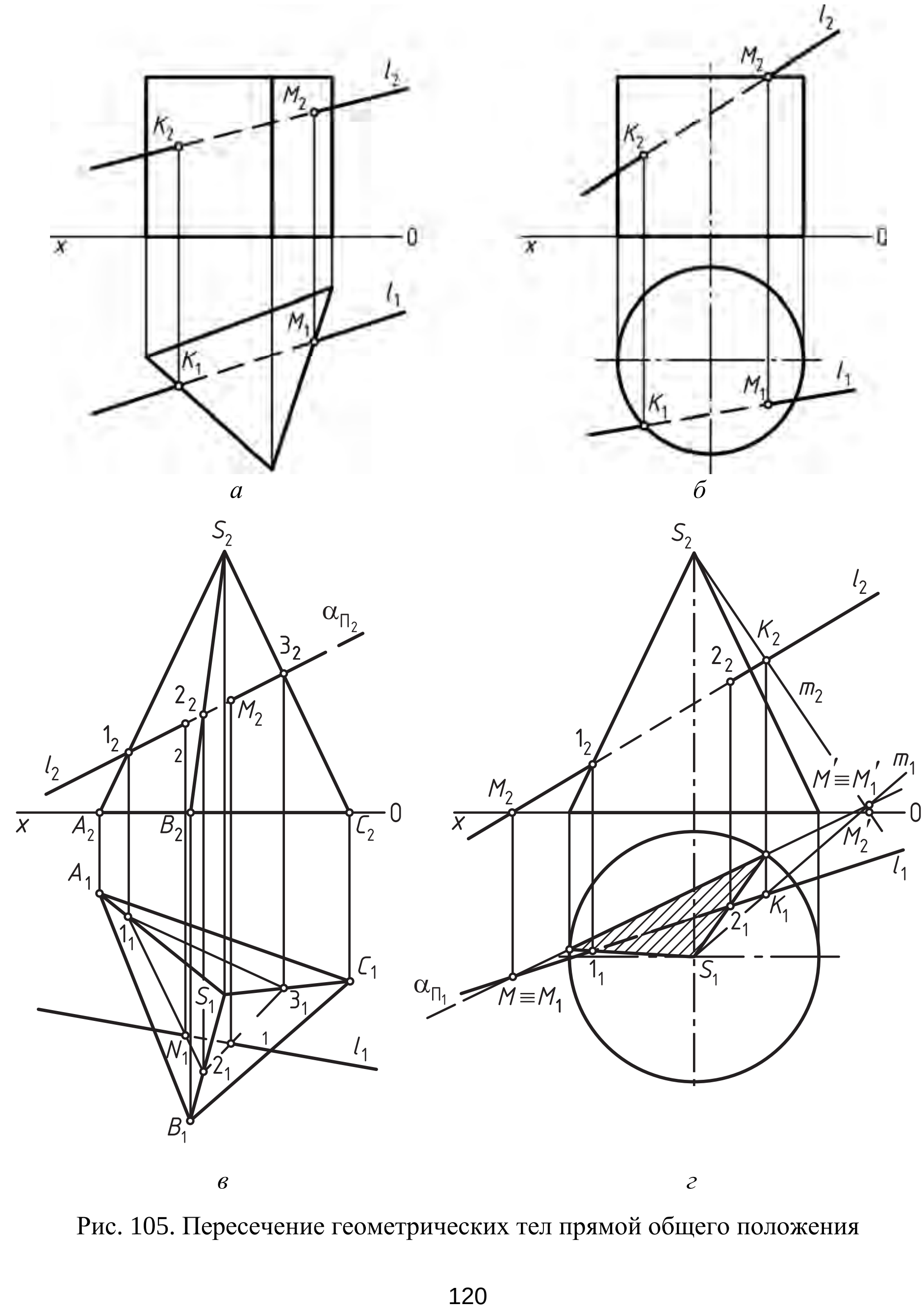


Рис. 105. Пересечение геометрических тел прямой общего положения

З а д а ч а 35

Дано: прямая трехгранная пирамида *ABCS* с вершиной в точке *S* и прямая общего положения *l* (рис. 105, *в*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой *l* с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую *l* во фронтально-проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами пирамиды *ABCS* образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью —$1_2 2_2 3_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α с пирамидой — $1_1 2_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции N_1 и M_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой *l*, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции N_2 и M_2 точек пересечения прямой с поверхностью пирамиды определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой *l* определяют по положению точек *N* и *M*.

З а д а ч а 36

Дано: прямой круговой конус с вершиной в точке *S* и прямая общего положения *l* (рис. 105, *г*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой *l* с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Рассмотрим первый способ.

1. Заключают прямую *l* в плоскость-посредник α, заданную двумя пересекающимися прямыми, одна из которых прямая *l*, а другая прямая *m*, проходящая через вершину конуса *S* и пересекающая прямую *l* в точке *K*.

2. Преобразуют плоскость-посредник α, заданную двумя пересекающимися прямыми, в плоскость, заданную следами. Определяя горизонтальные следы прямых *l* и *m*, выстраивают горизонтальный след α_{Π_1} плоскости α.

3. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α ($l \cap m$) с конусом (треугольник с вершиной *S*).

4. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой *l*, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

5. Видимость прямой *l* определяют по положению точек 1 и 2.

Рассмотрим второй способ (рис. 106).

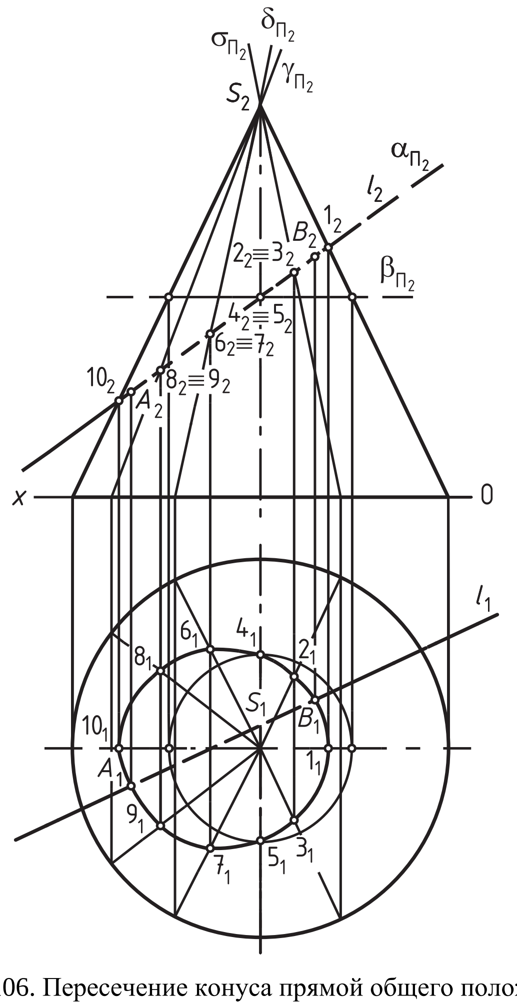


Рис. 106. Пересечение конуса прямой общего положения

1. Заключают фронтальную проекцию прямой *l* во фронтально проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 9_2 10_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с конусом ($1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 10_1 9_1 7_1 5_1 3_1$). Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

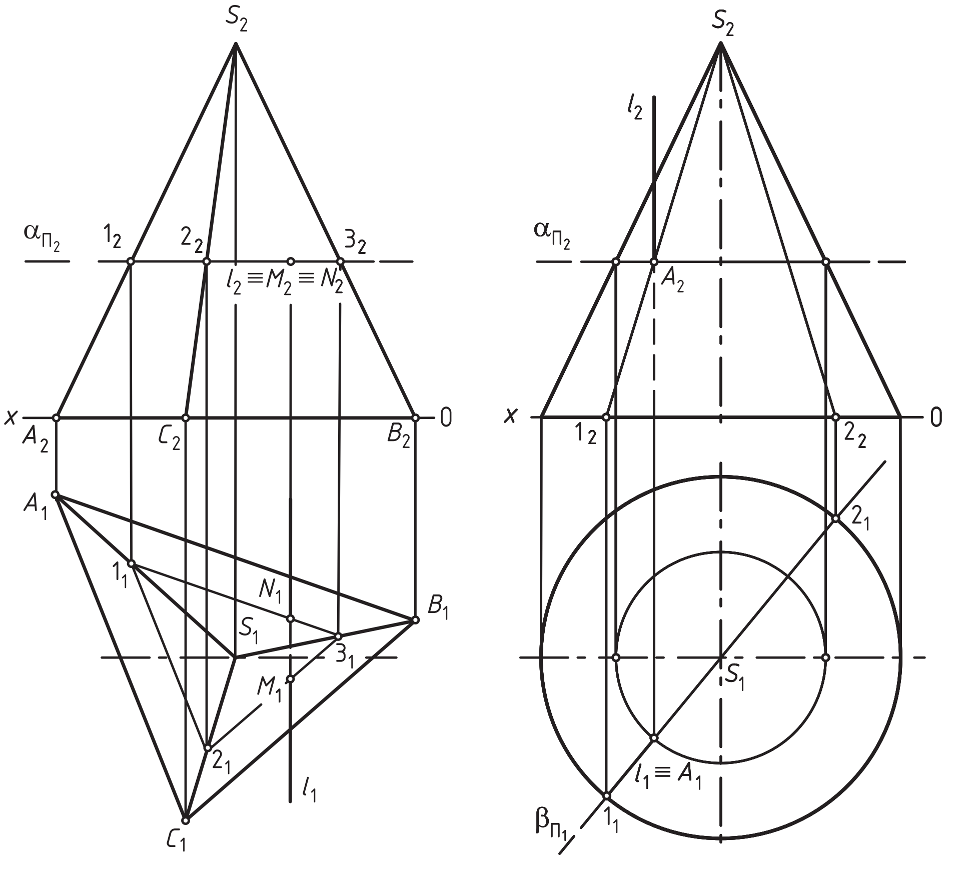
3. Определяют горизонтальные проекции A_1 и B_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции A_2 и B_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек A и B.

З а д а ч а 37

Дано: прямая трехгранная пирамида $ABCS$ с вершиной в точке S и фронтально-проецирующая прямая l (рис. 107, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.



а *б*

Рис. 107. Пересечение геометрических тел прямой частного положения

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l в горизонтальную плоскость уровня α. Фронтальный след α_{Π_2} горизонтальной плоскости уровня α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами пирамиды образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_2 2_2 3_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α с пирамидой — $1_1 2_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции N_1 и M_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения ($1_1 2_1 3_1$) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции N_2 и M_2 точек пересечения прямой с поверхностью пирамиды определяют с помощью линий проекционной связи. Так как прямая l является фронтально-проецирующей прямой, то $l_2 \equiv M_2 \equiv N_2$.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек N и M.

З а д а ч а 38

Дано: прямой круговой конус с вершиной в точке S и горизонтально-проецирующая прямая l (рис. 107, *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Рассмотрим первый способ.

1. Заключают прямую l в горизонтально-проецирующую плоскость-посредник β, проходящую через вершину конуса S. Горизонтальный след β_{Π_1} горизонтально проецирующей плоскости β обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа β_{Π_1} с поверхностью конуса образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_1 S_1 2_1$.

2. Выстраивают фронтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника β с конусом — $1_2 S_2 2_2$.

3. Определяют фронтальную проекцию A_2 точки пересечения фронтальных проекций линии сечения и прямой l, которая и будет являться искомой точкой пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальную проекцию A_1 точки пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи. Так как прямая l является горизонтально-проецирующей прямой, то $l_1 \equiv A_1$.

4. Видимость прямой определяют по положению точки A.

Рассмотрим второй способ (см. рис. 107, *б*).

1. Через горизонтальную проекцию прямой l_1 проводят параллель в виде окружности.

2. Определяют фронтальную проекцию полученной параллели — плоскость α_{Π_2}.

3. Определяют фронтальную проекцию A_2 точки пересечения фронтальных проекций окружности и прямой l, которая и будет являться искомой точкой пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальную проекцию A_1 точки пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой определяют по положению точки A.

З а д а ч а 39

Дано: сфера и прямая общего положения l.

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Первый способ (рис. 108):

1. Применяя способ замены плоскостей проекций, прямую l преобразуют из общего положения в частное. Для этого вначале ограничивают прямую l в точках A и B. Новую плоскость Π_4 выстраивают параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию сферы и проекцию прямой l_4.

2. Заключают прямую в горизонтально-проецирующую плоскость-посредник α. Горизонтальный след α_{Π_1} горизонтально-проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверхностью сферы образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

3. Выстраивают в плоскости Π_4 проекции прямой l_4 (A_4B_4) и линии пересечения плоскости-посредника α со сферой. Так как секущая плоскость параллельна плоскости проекций Π_4, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

4. Определяют проекции 1_4 и 2_4 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальные 1_1 и 2_1 и фронтальные 1_2 и 2_2 проекции точек пересечения прямой l с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

5. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

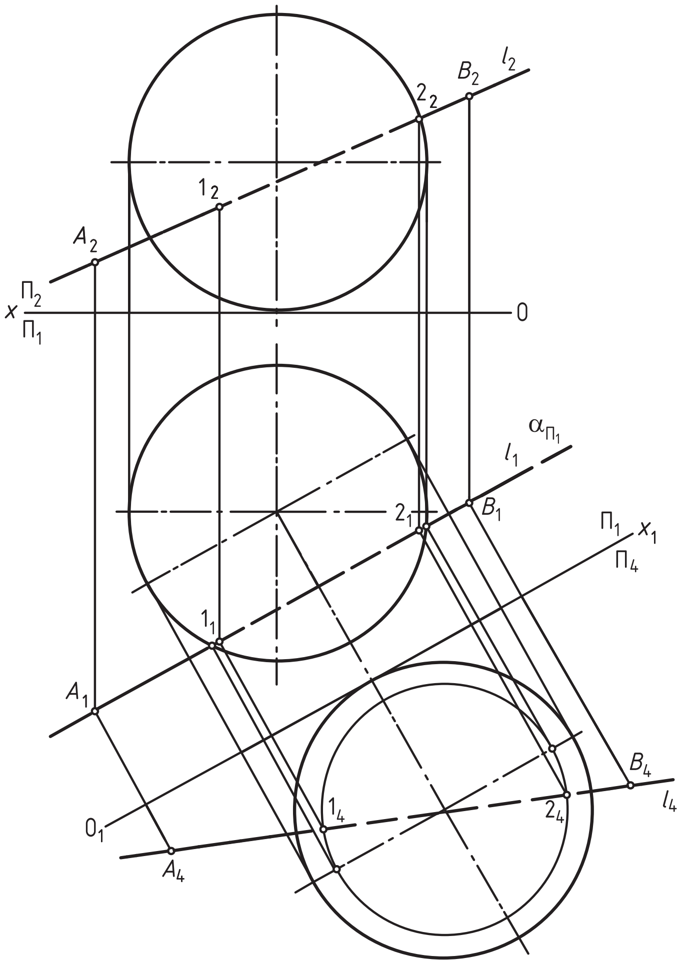


Рис. 108. Пересечение сферы прямой общего положения
способом замены плоскостей проекций

Второй способ (рис. 109):

1. Заключают прямую l во фронтально проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2\, 9_2 10_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с конусом — $1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 10_1 9_1 7_1 5_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции A_1 и B_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые

и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции A_2 и B_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой определяют по положению точек *A* и *B*.

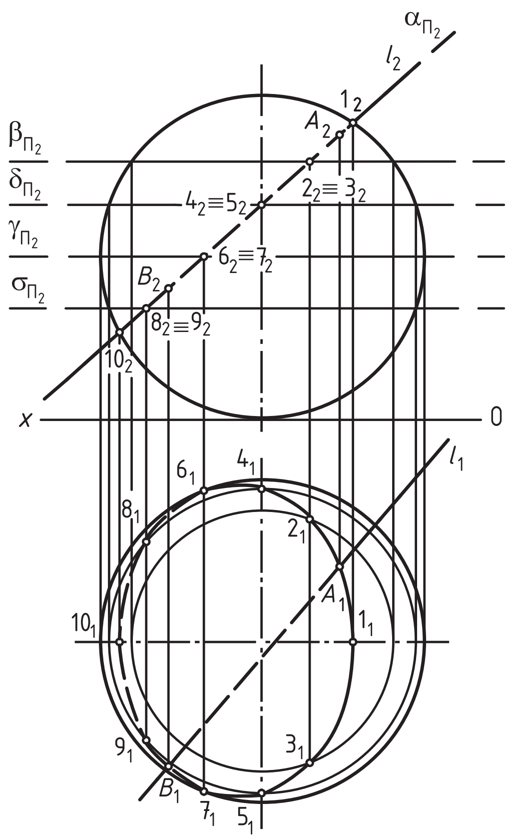


Рис. 109. Пересечение сферы прямой общего положения

З а д а ч а 40

Дано: сфера и фронтально-проецирующая прямая *l* (рис. 110, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой *l* с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

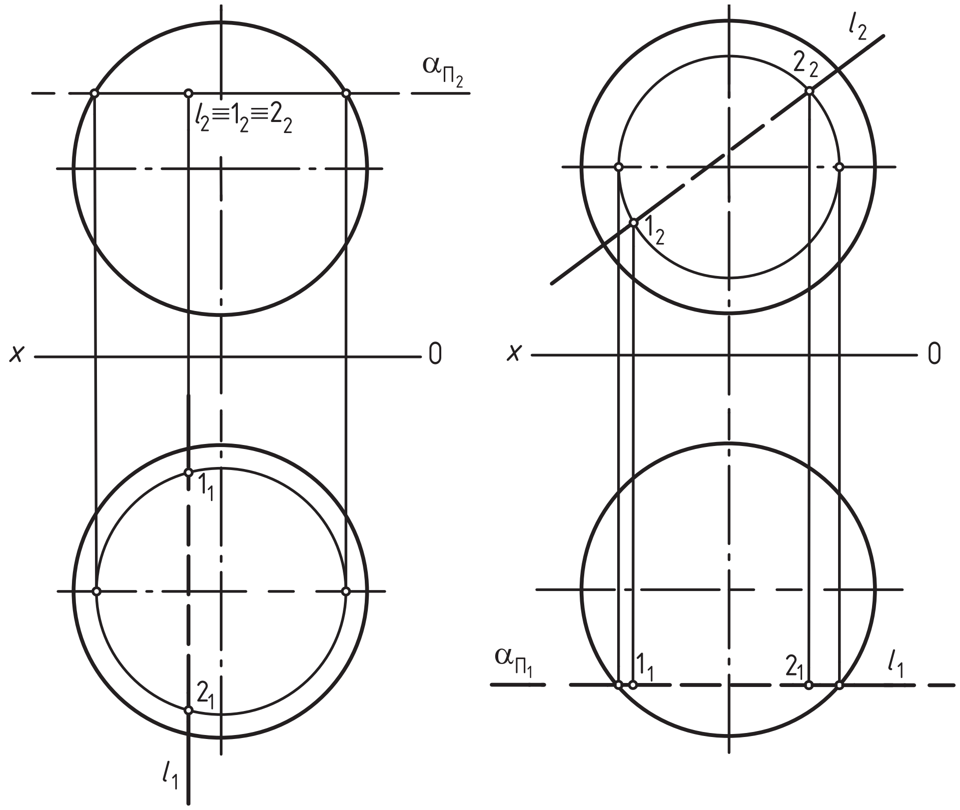
1. Заключают прямую *l* в горизонтальную плоскость уровня α. Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа $\alpha_{П_2}$ с поверхностью сферы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α со сферой. Так как секущая плоскость парал-

лельна горизонтальной плоскости проекций, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

3. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.



а *б*

Рис. 110. Пересечение сферы прямой частного положения

З а д а ч а 41

Дано: сфера и фронтальная прямая уровня l (рис. 110, *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l во фронтальную плоскость уровня α. Горизонтальный след α_{Π_1} плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверх-

ностью сферы образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

2. Выстраивают фронтальную проекцию линии пересечения плоскости α со сферой. Так как секущая плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

3. Определяют фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения фронтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения прямой с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

З а д а ч а 42

Дано: наклонный цилиндр и прямая общего положения l (рис. 111).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

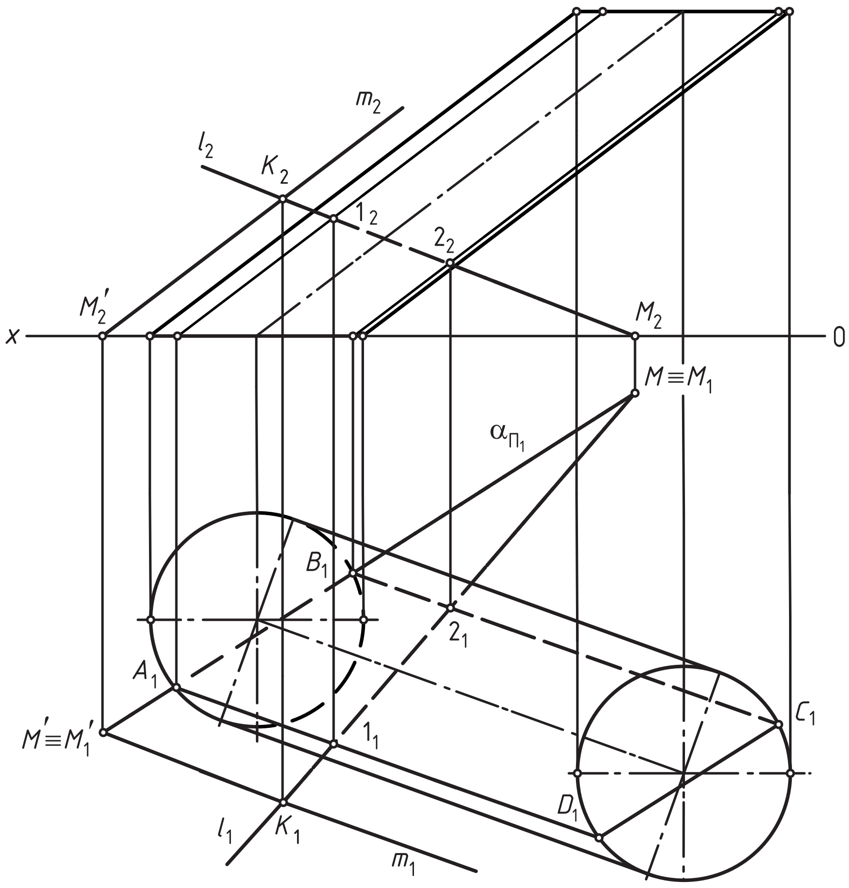


Рис. 111. Пересечение наклонного цилиндра прямой общего положения.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l в плоскость-посредник α, заданную двумя пересекающимися прямыми, одна из которых прямая l, а другая прямая m, проходящая параллельно образующей цилиндра и пересекающая прямую l в точке K.

2. Преобразуют плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми, в плоскость, заданную следами. Определяя горизонтальные следы $M \equiv M_1$ и $M' \equiv M_1'$ прямых l и m, выстраивают горизонтальный след α_{Π_1} плоскости α.

3. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с цилиндром (прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$).

4. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью цилиндра определяют с помощью линий проекционной связи.

5. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

З а д а ч а 43

Дано: наклонная призма и прямая общего положения l (рис. 112).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l во фронтально-проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами призмы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $D_2E_2F_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с призмой — $D_1E_1F_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью призмы определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

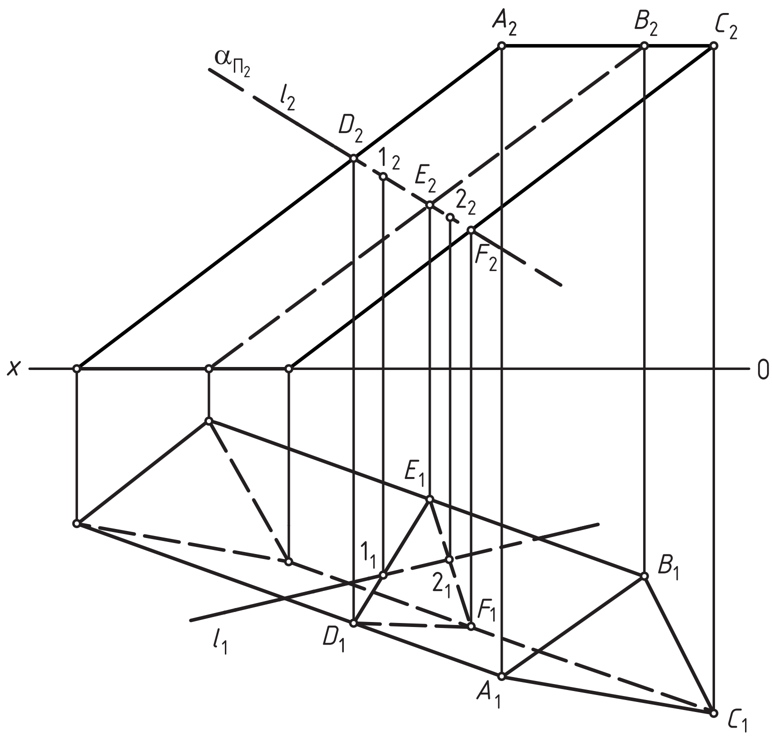


Рис. 112. Пересечение наклонной призмы прямой общего положения

Тема 9. Взаимное пересечение поверхностей

9.1. Взаимное пересечение поверхностей. Полное и частичное пересечение поверхностей. Основные способы построения линий пересечения поверхностей. 9.2. Способ вспомогательных секущих плоскостей. 9.3. Способ вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер)

9.1. Взаимное пересечение поверхностей. Полное и частичное пересечение поверхностей. Основные способы построения линий пересечения поверхностей

Поверхности инженерных сооружений представляют собой сочетание простейших геометрических поверхностей — конических, цилиндрических, призматических, пирамидальных, сферических и т. д. При выполнении технических чертежей таких сооружений выполняют построение линий пересечения поверхностей.

Линия пересечения поверхностей — это замкнутая ломаная или кривая линия, принадлежащая обеим пересекающимся поверхностям.

При пересечении поверхностей образующие или ребра этих поверхностей пересекаются. Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо решить множественную задачу на определение точек пересечения прямой с поверхностью. Соединение этих точек в определенной последовательности и определяет линию пересечения поверхностей.

При пересечении поверхностей различают:

полное пересечение поверхностей, при котором все ребра или образующие одной поверхности пересекаются с другой поверхностью;

частичное (неполное) пересечение поверхностей, при котором у обеих поверхностей есть ребра или образующие, не участвующие в пересечении.

Линия пересечения поверхностей может быть определена двумя основными способами:

1) вспомогательных секущих плоскостей;

2) вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер).

Вспомогательные плоскости и поверхности, участвующие в пересечении поверхностей, называют *посредниками*.

9.2. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Рассмотрим некоторые примеры построения линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.

Пересечение гранных поверхностей

З а д а ч а 44

Дано: прямая четырехгранная призма *KLMN* и наклонная трехгранная пирамида *ABCS* с вершиной в точке *S* (рис. 113, *а*).

Выполнить: 1) построить линии пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и граней пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является горизонтально-проецирующей. В этом случае горизонтальные проекции точек $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$ и $6_1 7_1 8_1$, определяющих линии пересечения призмы *KLMN* и пирамиды *ABCS*, находят в пересечении горизонтальных проекций этих геометрических тел.

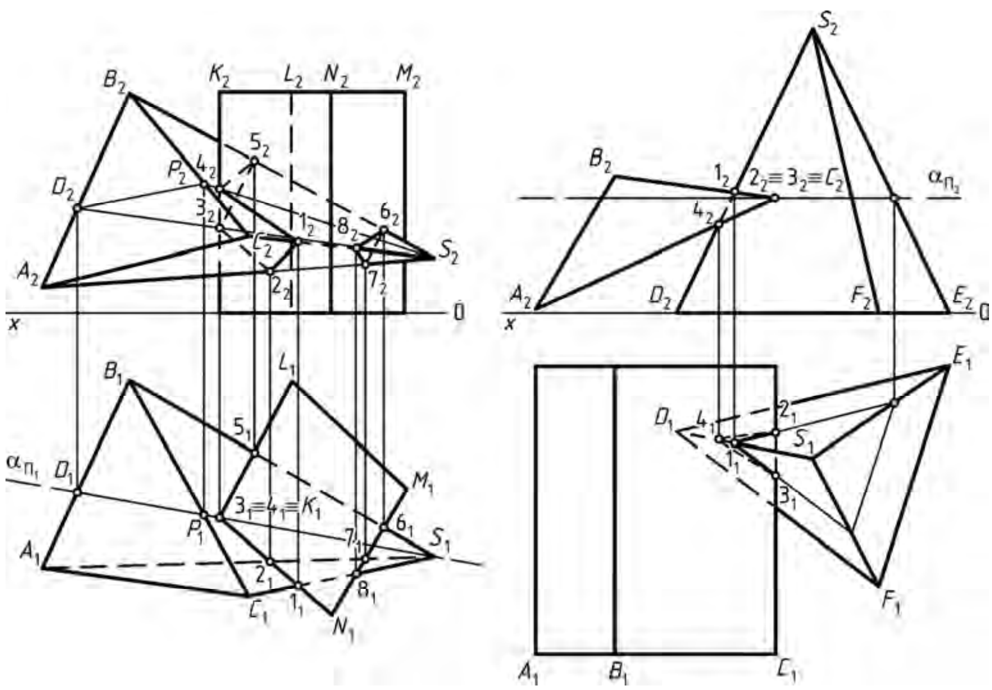
2. Фронтальные проекции точек $1_2 2_2 5_2$ и $6_2 7_2 8_2$ определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Фронтальные проекции точек 3_2 и 4_2 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтально-проецирующей, горизонтальный след которой α_{Π_1} обладает собира-

тельным свойством. Горизонтальный след α_{Π_1} плоскости-посредника проводят через горизонтальные проекции точек $3_1 \equiv 4_1$, вершину S и основание пирамиды ABC. Пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверхностью пирамиды образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $D_1P_1S_1$. Фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $D_2P_2S_2$ определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой. Фронтальные проекции точек 3_2 и 4_2 определяют из пересечения фигуры сечения геометрического тела плоскостью $D_2P_2S_2$ с проекцией K_2 ребра K призмы.

4. Соединение точек, определяющих линии пересечения поверхностей, производят последовательно по их горизонтальным проекциям.

5. Видимость линий пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и призмы.



а *б*

Рис. 113. Пересечение гранных поверхностей

З а д а ч а 45

Дано: прямая трехгранная пирамида $DEFS$ с вершиной в точке S и прямая трехгранная призма ABC (рис. 113, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и граней пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей. В этом случае фронтальные проекции точек $1_2 2_2 3_2 4_2$, определяющих линию пересечения призмы и пирамиды, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 4_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность пирамиды, образуя фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью. Горизонтальные проекции сечений геометрических тел плоскостью α определяют с помощью линий проекционной связи. Пересечение полученных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1.

4. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

5. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и призмы.

Пересечение гранных поверхностей и поверхностей вращения

З а д а ч а 46

Дано: прямая четырехгранная пирамида и сфера (рис. 114, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Сфера проецируется на все плоскости проекций в виде равных окружностей одинакового радиуса. В этом случае в пересечении фронтальных проекций геометрических тел (пирамиды и сферы) намечают вспомогательные точки линии пересечения заданных поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 8_2 уже принадлежат линии пересечения поверхностей из условия пересечения ребра пирамиды и образующей сферы.

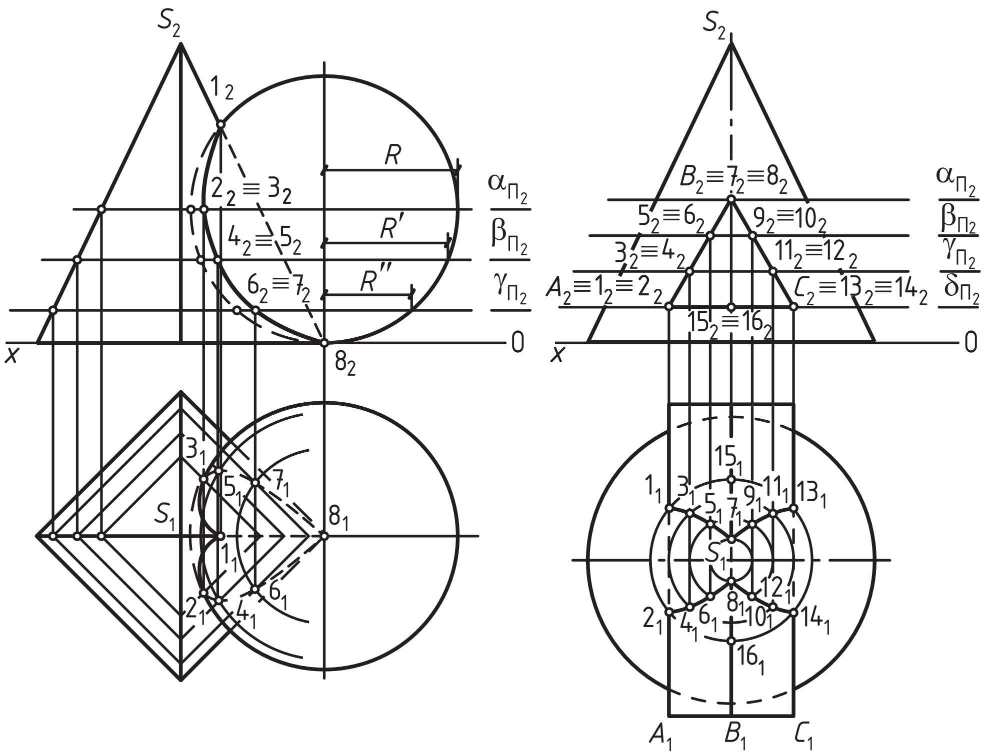
2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек, например 2_1 и 3_1, определяют следующим образом. Через вспомогательные точки в плоскости Π_2

проводят плоскость-посредник α — горизонтальную уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции вспомогательных точек, одновременно пересекает поверхность пирамиды и поверхность сферы, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — правильный четырехугольник (квадрат) и окружность заданного радиуса *R*. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей β и γ.

4. Фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, $4_2 \equiv 5_2$ и $6_2 \equiv 7_2$, определяющих линию пересечения пирамиды и сферы, находят с помощью линий проекционной связи.

5. Соединение точек, образующих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и образующей сферы.



а *б*

Рис. 114. Пересечение гранных поверхностей и поверхностей вращения

З а д а ч а 47

Дано: прямой круговой конус и прямая трехгранная призма *АВС* (рис. 114, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей, поэтому фронтальные проекции точек 1—16, определяющих линию пересечения призмы *АВС* и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек, например 5_1 и 6_1, 9_1 и 10_1, определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости β — горизонтальной уровня, фронтальный след которой β_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след β_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $5_2 \equiv 6_2$ и $9_2 \equiv 10_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность конуса, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — прямоугольник и окружность заданного радиуса *R*. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 5_1 и 6_1, 9_1 и 10_1. Горизонтальные проекции остальных точек определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей α, γ и δ. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней призмы и образующей конуса.

З а д а ч а 48

Дано: прямая трехгранная призма и прямой круговой цилиндр (рис. 115).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Цилиндрическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей, поэтому фронтальные проекции точек 1—7, определяющих линию пересечения призмы и цилиндра, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей. Отсюда, горизонтальные проекции точек 1—7 определяют с помощью линий проекционной связи, исходя из принадлежности точки поверхности.

3. Профильные проекции точек определяют с помощью линий проекционной связи (см. раздел 6.6).

4. Соединение точек, определяющих линию пересечения заданных поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

5. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер призмы и образующих цилиндра.

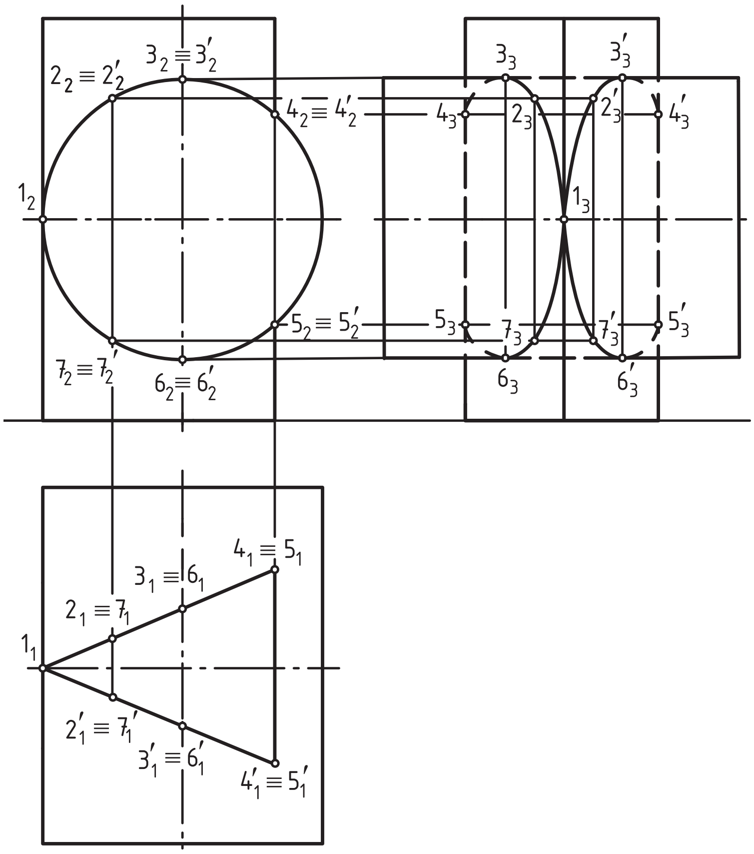


Рис. 115. Пересечение гранной поверхности и поверхности вращения

Пересечение поверхностей вращения

З а д а ч а 49

Дано: два прямых круговых конуса (рис. 116).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют фронтальную проекцию точки 1_2 в точке пересечения образующих конусов. Горизонтальную проекцию точки 1_1 выстраивают с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

2. Находят горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1 в точках пересечения оснований конусов. Фронтальные проекции точек $4_2 \equiv 5_2$ выстраивают с помощью линий проекционной связи.

3. Проекции промежуточных точек 2 и 3 определяют с помощью произвольно взятой вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника одновременно пересекает поверхность обоих конусов, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — окружности заданного радиуса R и R'. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$ выстраивают с помощью линий проекционной связи.

4. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их горизонтальным и фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих конусов.

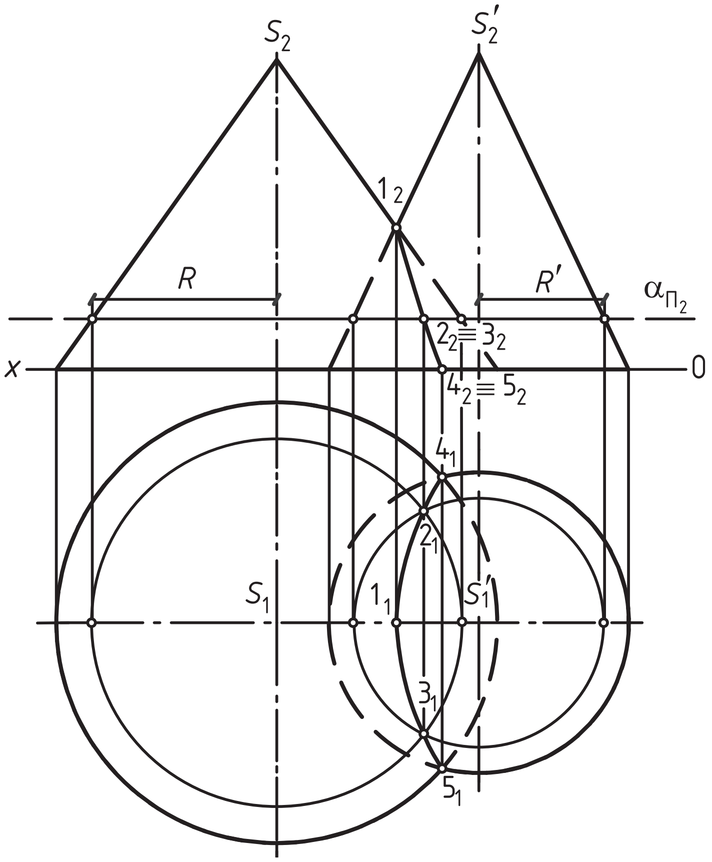
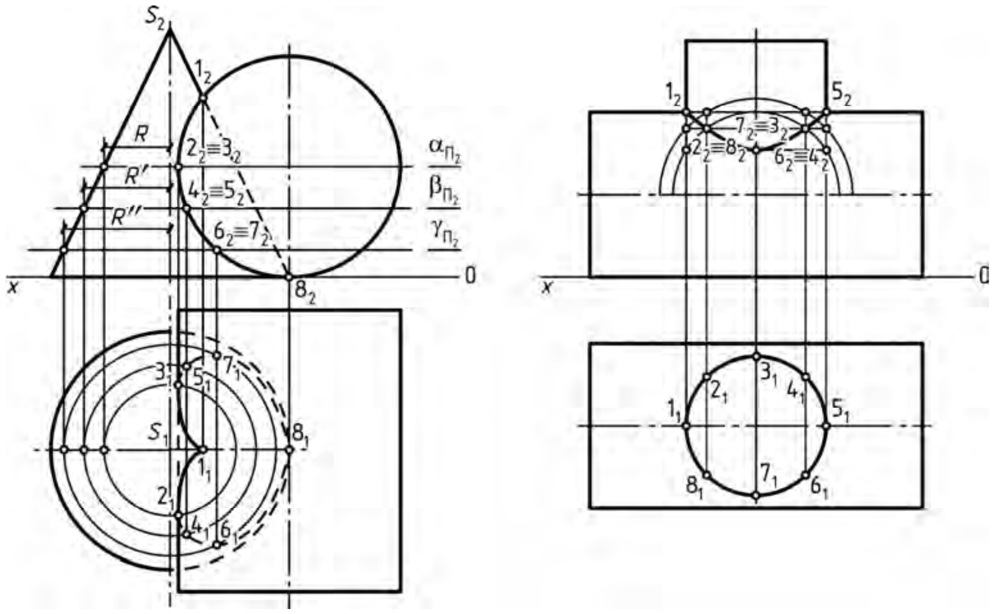


Рис. 116. Пересечение поверхностей прямых круговых конусов

З а д а ч а 50

Дано: прямой круговой конус и прямой круговой цилиндр (рис. 117, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость образующих пересекающихся поверхностей.



а *б*

Рис. 117. Пересечение поверхностей вращения

Порядок выполнения:

1. Цилиндрическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей. В этом случае фронтальные проекции точек $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2$, определяющих линию пересечения цилиндра и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек, например 2_1 и 3_1, определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, одновременно пересекает поверхность цилиндра и поверхность конуса, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — прямоугольник и окружность заданного радиуса *R*. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1.

4. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей-посредников β и γ.

5. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

6. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих конуса и цилиндра.

9.3. Способ вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер)

При построении линии пересечения поверхностей в некоторых случаях наиболее оптимальным является применение в качестве вспомогательной секущей не плоскости, а поверхности, например сферической.

Способ вспомогательных шаровых поверхностей или способ сфер состоит в том, что для определения точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей, проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Сфера минимального радиуса должна вписываться в одну поверхность вращения и пересекаться с другой или вписываться в обе заданные поверхности вращения. Выстраивают линии пересечения сферы с поверхностями — это окружности, которые проецируются на плоскость проекций в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Проведя несколько таких вспомогательных секущих сфер, определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

Способ сфер применяется, если:

1) обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения;

2) оси вращения обеих поверхностей пересекаются в одной точке;

3) оси вращения обеих поверхностей параллельны какой-либо плоскости проекций.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения поверхностей способом сфер.

З а д а ч а 51

Дано: два прямых круговых цилиндра (рис. 117, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей вращения; 2) определить видимость пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют точку пересечения осей вращения заданных поверхностей. Оси вращения обеих поверхностей параллельны фронтальной плоскости проекций Π_2.

2. Определяют точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 5_2, определяющих линию пересечения поверхностей цилиндров, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

3. Проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Радиус данной сферы является минимальным и служит перпендикуляром к образующей цилиндра, поверхность которого профильно-проецирующая.

4. Выстраивают линии пересечения сферы с заданными поверхностями — это окружности, которые проецируются на фронтальную плоскость проекций $П_2$ в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей цилиндров.

5. Проводят несколько таких вспомогательных секущих сфер. Определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

6. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

7. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих цилиндров.

З а д а ч а 52

Дано: прямой круговой конус и наклонный цилиндр (рис. 118).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей вращения; 2) определить видимость пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют точку пересечения осей вращения заданных поверхностей — точка *K*. Оси вращения обеих поверхностей параллельны фронтальной плоскости проекций $П_2$.

2. Определяют точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 8_2, определяющих линию пересечения поверхностей цилиндра и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Радиус данной сферы является минимальным и служит перпендикуляром к образующей конуса.

4. Выстраивают линии пересечения сферы с заданными поверхностями — это окружности, которые проецируются на фронтальную

плоскость проекций $П_2$ в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса.

5. Проводят несколько таких вспомогательных секущих сфер. Определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

6. Горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости α — горизонтальной уровня.

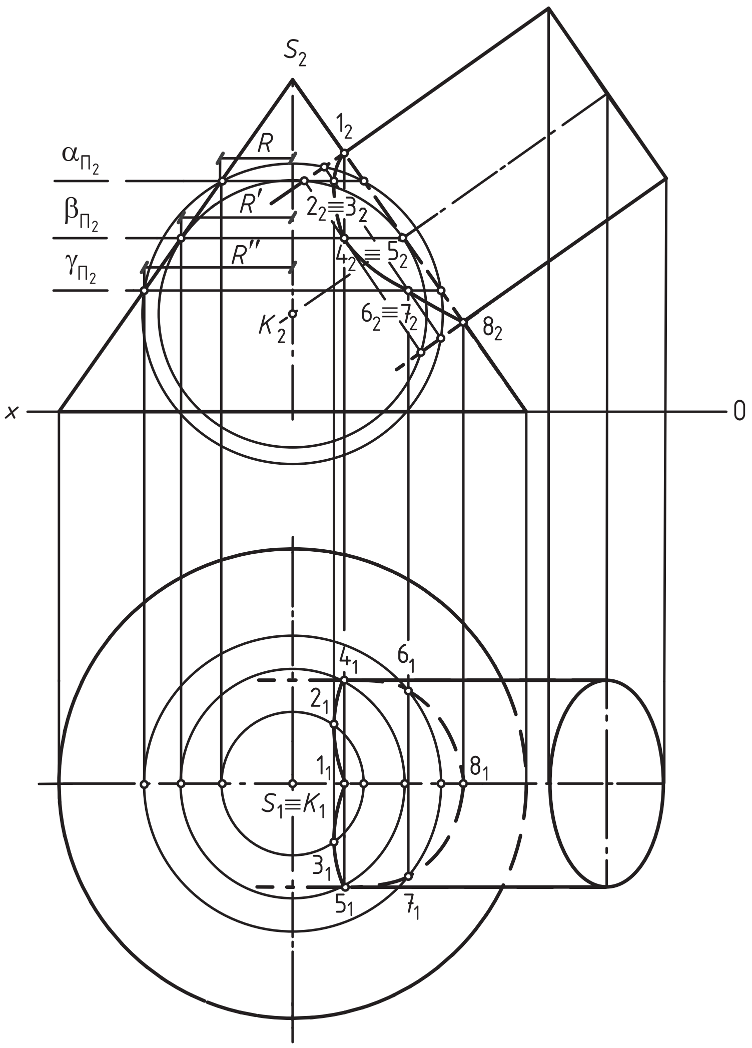


Рис. 118. Пересечение прямого кругового конуса и наклонного цилиндра

Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, пересекает поверхность конуса, образуя в плоскости $П_1$ горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — окружность заданного радиуса *R*. Пересечение полученной горизонтальной проекции сечения и линий проекционной связи от заданных фронтальных проекций точек определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей β и γ.

7. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих поверхностей.

Тема 10. Проекции с числовыми отметками

10.1. Сущность способа проекций с числовыми отметками. Точка и прямая в проекциях с числовыми отметками. 10.2. Плоскость в проекциях с числовыми отметками. 10.3. Поверхность в проекциях с числовыми отметками. 10.4. Топографическая поверхность. 10.5. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью. 10.6. Примеры решения инженерных задач

10.1. Сущность способа проекций с числовыми отметками. Точка и прямая в проекциях с числовыми отметками

При проектировании автомобильных дорог, аэродромов, мостов и других инженерных сооружений вместе с ними на чертежах изображается и земная поверхность. Вместе с тем, при изображении земной поверхности способ проецирования на две плоскости проекций становится неудобным, так как величины значений по осям x и y (т. е. длина и ширина объекта) достаточно большие, а по оси z (высота) — незначительные. В связи с этим, наиболее оптимальным является применение способа проекций с числовыми отметками, который относится к одному из видов прямоугольного проецирования.

Сущность данного способа заключается в том, что предмет ортогонально проецируется только на одну плоскость проекций, как правило, горизонтальную, называемую плоскостью нулевого уровня Π_0. Так как одна проекция не определяет положение предмета в пространстве, то фронтальную проекцию заменяют числами (отметками), которые ставятся около проецируемых точек. Эти отметки (обычно в метрах) указывают превышение точек над плоскостью нулевого уровня Π_0.

При проецировании земной поверхности за абсолютный нулевой уровень принимают постоянный уровень воды в Балтийском море. При этом точки, расположенные выше плоскости нулевого уровня, обозначают цифрой со знаком «+», который на изображениях не ставится, а точки, расположенные ниже плоскости нулевого уровня — цифрой со знаком «–».

Проекции точки и прямой в проекциях с числовыми отметками. Для задания точек вышеописанным способом, кроме числовых отметок проецируемых точек, необходимо иметь масштаб или указание, в каких линейных единицах выражены данные числовые отметки.

Изобразим плоскость нулевого уровня $П_0$ и точки пространства A и B. Построим проекции точек на плоскости $П_0$ и определим их отметки в выбранном масштабе. Соединив точки, получаем отрезок прямой AB (рис. 119).

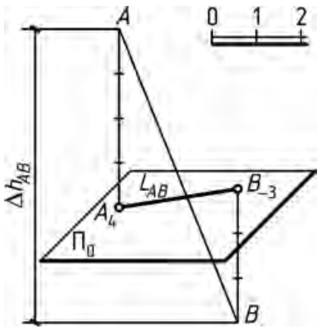


Рис. 119. Проекции отрезка прямой

Длина горизонтальной проекции отрезка прямой AB называется *заложением отрезка прямой* и обозначается L_{AB}.

Разность высотных отметок концов отрезка прямой называют *превышением* или *подъемом отрезка прямой* и обозначают Δh_{AB}.

Отношение превышения концов отрезка прямой к его заложению называют *уклоном отрезка прямой* и обозначают i:$i = \Delta h_{AB} / L_{AB}$.

Отметим на отрезке прямой AB точку C, которая находится выше точки A на 1 м, и построим проекцию точки C_2 (рис. 120).

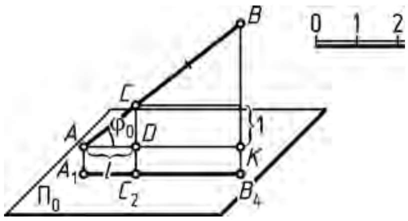


Рис. 120. Уклон и интервал отрезка прямой

Заложение отрезка прямой при разности высотных отметок его концов, равной единице, называют *интервалом* и обозначают l.

Уклон и интервал отрезка прямой являются величинами, обратными друг другу. Из $\Delta\ ABK$ (см. рис. 120) видно, что $i = \operatorname{tg} \varphi_0$, где φ_0 — угол наклона прямой AB к плоскости $П_0$, а из ΔACD имеем, что $\operatorname{tg} \varphi_0 = 1/l$, следовательно, $i = 1/l$. Уклон и интервал — взаимообратные характеристики крутизны прямой: чем круче прямая, тем больше ее уклон и меньше интервал.

Градуирование прямой. Интервал прямой используют для определения на ней точек с целочисленными высотными отметками. Эта операция называется градуированием. Отсюда, проградуировать прямую — значит определить на ней точки, имеющие высотные отметки, выраженные целыми числами. Проградуировать прямую можно аналитически, определив по формуле величину интервала, и графически, используя теорему Фалеса.

З а д а ч а 53

Дано: прямая AB.

Выполнить: проградуировать прямую AB (рис. 121).

Порядок выполнения:

Из точки A, имеющей меньшую высотную отметку, проводят под произвольным углом вспомогательную прямую, на которой в заданном масштабе отмечают целые отметки точек. Концы отрезков соединяют прямой, а через точки деления проводят параллельные прямые, определяющие на прямой AB точки с целочисленными отметками и величину интервала прямой l. Угол наклона прямой к плоскости Π_0 можно определить из прямоугольного треугольника (см. рис. 120), в котором один катет равен интервалу, а другой — единице превышения в заданном масштабе.

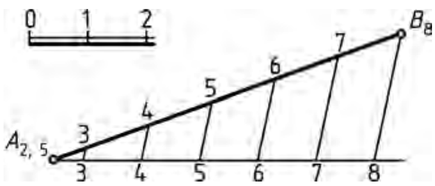


Рис. 121. Градуирование отрезка прямой

Относительное положение прямых пространства. В проекциях с числовыми отметками прямые пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны, пересекаться и скрещиваться.

1. Если прямые пространства параллельны, то их проекции параллельны, интервалы равны и отметки возрастают в одном направлении (рис. 122).

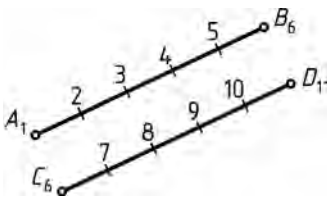


Рис. 122. Параллельные прямые

2. Если прямые пространства пересекаются, то их проекции пересекаются и отметки в точке пересечения проекций прямых одинаковые (рис. 123).

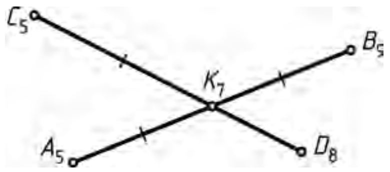


Рис. 123. Пересекающиеся прямые

3. Если прямые пространства скрещиваются, то их отметки в точке пересечения проекций прямых различны (рис. 124).

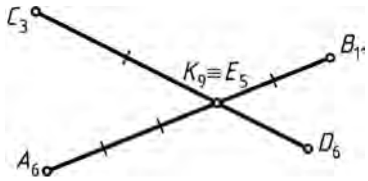


Рис. 124. Скрещивающиеся прямые

Из приведенных примеров видно, что для определения взаимного положения прямых пространства их необходимо проградуировать.

10.2. Плоскость в проекциях с числовыми отметками

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана уже известными нам способами:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой;
3) двумя параллельными прямыми;
4) двумя пересекающимися прямыми;
5) плоской фигурой.

Однако в проекциях с числовыми отметками наиболее рациональным считается задание плоскости масштабом уклона.

Плоскость, заданная масштабом уклона. Даны плоскость нулевого уровня Π_0 и плоскость общего положения α (рис. 125).

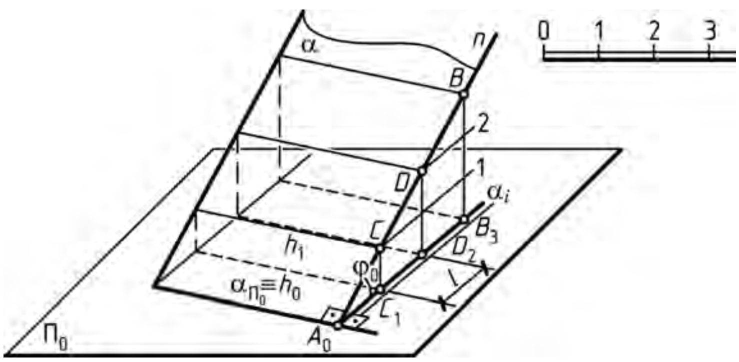


Рис. 125. Плоскость, заданная масштабом уклона

Линия пересечения плоскости α с плоскостью нулевого уровня Π_0 называется *горизонтальным следом плоскости* и обозначается α_{Π_0}:

$$\alpha_{\Pi_0} = \alpha \cap \Pi_0.$$

Горизонтальный след плоскости является ее нулевой горизонталью ($\alpha_{\Pi_0} \equiv h_0$) и перпендикулярен линии n наибольшего ската или наклона плоскости α к плоскости нулевого уровня Π_0 ($n \perp \alpha_{\Pi_0}$).

Зададим на линии n наибольшего ската плоскости α отрезок AB и спроецируем его на плоскость нулевого уровня Π_0: $|AB| \rightarrow |A_0B_3|$.

Отметим на отрезке AB точки C и D, отстоящие от плоскости Π_0 на 1 и 2 м, и построим их проекции C_1 и D_2. Проекции точек A_0, C_1, D_2, B_3 отстоят друг от друга на расстоянии, равном интервалу l.

Проградуированная горизонтальная проекция линии наибольшего ската называется *масштабом уклона плоскости* и обозначается α_i.

Масштаб уклона обозначается двумя параллельными линиями — тонкой и толстой, отстоящих друг от друга на расстоянии 1 мм. Высотные отметки точек ставятся на тонкой линии.

Угол наклона плоскости α к плоскости нулевого уровня Π_0 называется *углом падения плоскости* и обозначается φ_0. Угол падения плоскости измеряется между линией наибольшего ската n и ее горизонтальной проекцией α_i.

Проведем через точки C, D и B проектные горизонтали плоскости α. Они параллельны между собой и горизонтальному следу плоскости α_{Π_0} и перпендикулярны линии наибольшего ската n. Построим проекции этих горизонталей (см. рис. 125).

Проекции горизонталей плоскости α *и масштаб уклона плоскости* α_i *взаимно перпендикулярны.*

В плоскости можно провести множество прямых с различными уклонами, но не превышающими наибольший уклон плоскости, который имеет линия наибольшего ската: $i = \mathrm{tg}\,\varphi_0$, где угол φ_0 определяется из прямоугольного треугольника, один катет которого равен l, а другой — единице масштаба (см. рис. 125).

Относительное положение плоскостей пространства. В проекциях с числовыми отметками плоскости пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны и пересекаться.

1. Если плоскости параллельны, то их масштабы уклонов параллельны, интервалы равны и возрастают в одном направлении (рис. 126).

2. Если плоскости пересекаются, то линия их пересечения проходит через точки пересечения горизонталей с одинаковыми отметками (рис. 127).

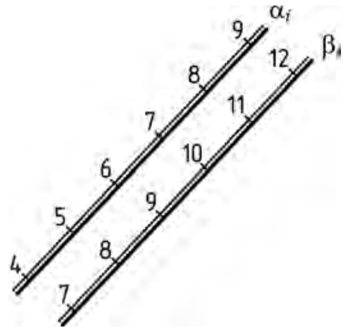


Рис. 126. Параллельные плоскости

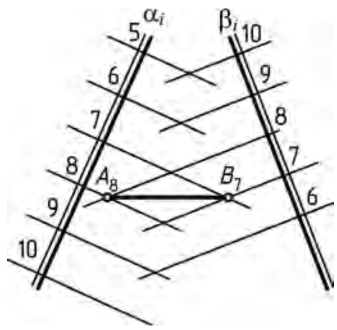


Рис. 127. Пересекающиеся плоскости

З а д а ч а 54

Дано: прямая AB и плоскость α_i.

Выполнить: определить точки пересечения прямой AB и плоскости α_i (рис. 128).

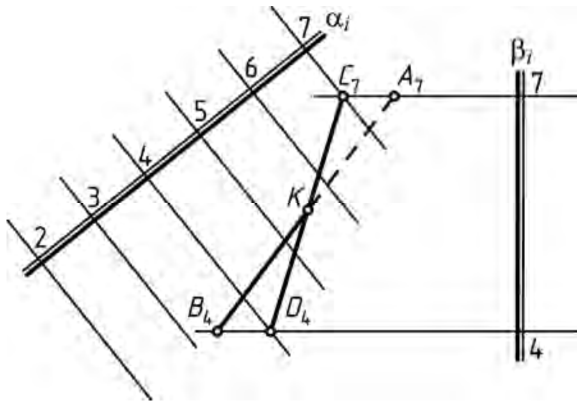


Рис. 128. Пересечение прямой с плоскостью в проекциях с числовыми отметками

Порядок выполнения:

Пересечение прямой с плоскостью в проекциях с числовыми отметками сводится к нахождению точки, общей для прямой и плоскости. Для определения точки пересечения прямой AB и плоскости α_i прямая заключается во вспомогательную плоскость-посредник β_i, проектные горизонтали которой в пределах чертежа пересекаются с соответствующими (одноименными) проектными горизонталями заданной плоскости α_i. Затем выстраивается линия пересечения вспомогательной плоскости β_i и заданной плоскости α_i. Там, где линия пересечения плоскостей пересечет заданную прямую AB, и будет точка K пересечения прямой с плоскостью.

$$|AB| \subset \beta;\ \beta \cap \alpha = |CD|;\ |CD| \cap |AB| = K \Rightarrow |AB| \cap \alpha = K.$$

10.3. Поверхность в проекциях с числовыми отметками

В проекциях с числовыми отметками при проектировании различных инженерных сооружений широко применяются геометрические и графические поверхности. К *геометрическим* относят поверхности закономерные, подчиняющиеся определенным геометрическим законам. Наибольшее применение в проекциях с числовыми отметками имеют конические поверхности и поверхности постоянного ската. *Графической* является поверхность, закон образования которой неизвестен, например, земная поверхность, называемая топографической.

Для изображения геометрических и графических поверхностей используют проекции горизонталей, которые получают при пересечении данной поверхности с несколькими горизонтальными плоскостями уровня, отстоящими друг от друга на одну единицу длины, равной, как правило, 1 м.

В геометрических поверхностях о форме и размерах предмета судят по одной ортогональной (горизонтальной) проекции и высотным отметкам, показанным в характерных точках. Так, в многограннике, например в пирамиде, характерными точками являются его вершины.

На рис. 129 задана трехгранная пирамида $ABCS$, основанием которой является $\Delta\ ABC$, расположенный в плоскости нулевого уровня Π_0. Вершина S пирамиды $ABCS$ отстоит от плоскости нулевого уровня Π_0 на расстоянии 5 м.

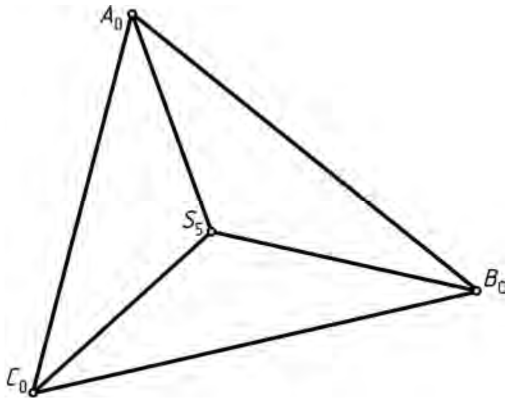
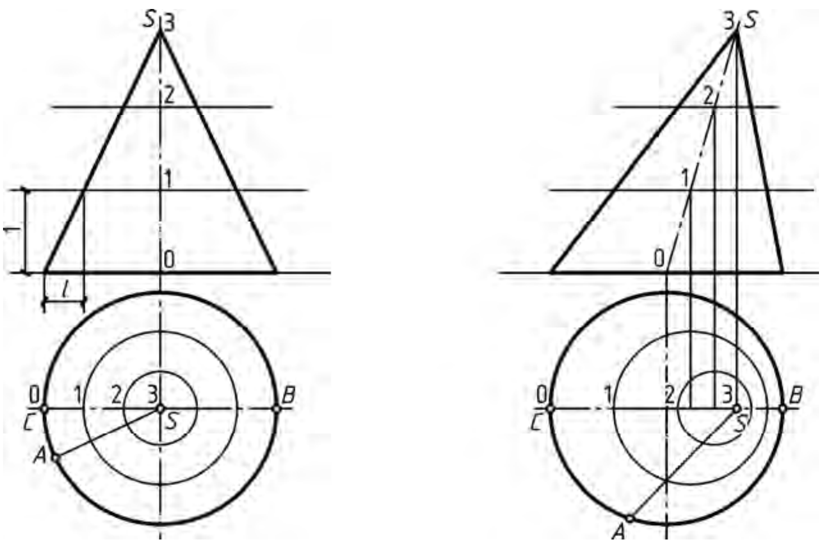


Рис. 129. Гранная поверхность в проекциях с числовыми отметками

Криволинейные поверхности изображаются проекциями своих горизонталей. На рис. 130, *а* показано образование горизонталей конической поверхности — прямого кругового конуса. Горизонтали такой поверхности являются окружностями с центрами, расположенными на оси вращения конуса, поэтому прямой круговой конус изображается на плане серией концентрических окружностей, проведенных через равные интервалы. По интервалам можно судить об уклоне. В данном случае интервалы равны по всем образующим конуса. Отсюда, поверхность имеет один и тот же уклон по всем направлениям: уклон образующей *SA* равен уклону *SB* и уклону *SC*.



а *б*

Рис. 130. Криволинейная поверхность в проекциях с числовыми отметками

На рис. 130, *б* показано образование горизонталей поверхности наклонного конуса. Горизонтали такой поверхности являются эксцентрическими окружностями со смещенными центрами, т. е. интервалы с левой и правой стороны конуса будут разными. Отсюда, данная коническая поверхность имеет и разные уклоны: уклон образующей *SC* меньше, чем уклон образующей *SA*, так как интервал *SC* больше интервала *SA*. Наименьший интервал имеет образующая *SB*, которая в данном случае имеет и наибольший уклон, т. е. для поверхности наклонного конуса образующая *SB* является линией наибольшего ската или наклона поверхности к плоскости нулевого уровня Π_0.

Линия наибольшего ската поверхности есть непрерывное множество наименьших интервалов этой поверхности.

Коническая поверхность используется в строительстве при сооружении дамб, насыпей; при примыкании двух автомобильных дорог, идущих в плане местности под некоторым углом друг к другу. При этом, если уклон откосов насыпей одинаков и интервалы равны, то соединение откосов происходит по поверхности кругового конуса. Если уклоны откосов насыпей неодинаковые, например, при подходе дороги к мосту, и интервалы различны, то соединение откосов происходит по поверхности эллиптического конуса.

На криволинейном участке автомобильной дороги с одновременным подъемом (спуском) в откосах насыпей или выемок образуется поверхность, которая по своей протяженности имеет постоянно заданный уклон. Такая поверхность называется *поверхностью постоянного (одинакового) ската* или *равного уклона*. Поверхность одинакового ската есть линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой составляют с горизонтальной плоскостью одинаковый угол наклона. Образование поверхности постоянного ската рассмотрено на рис. 131. Если прямой круговой конус перемещать таким образом, чтобы его вершина скользила по некоторой заданной кривой, например, по краю дороги, а его ось все время оставалась бы вертикальной, то поверхность, огибающая различные положения конуса, будет поверхностью постоянного ската. Наклон поверхности к плоскости нулевого уровня $П_0$ соответствует наклону образующих конуса к этой плоскости.

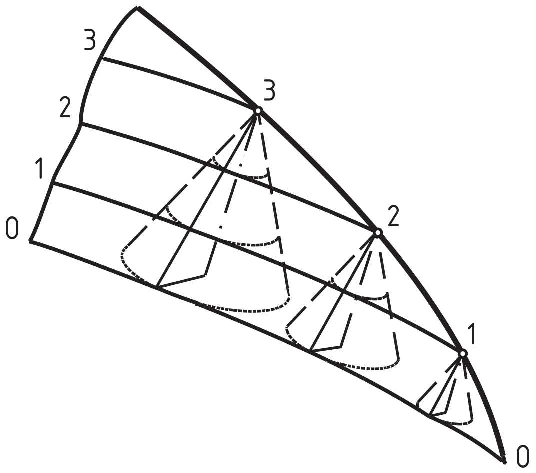


Рис. 131. Образование поверхности постоянного ската

На рис. 132 показан криволинейный участок автомобильной дороги с уклоном $i_д = 1:5$ и интервалом $l_д = 5$ м. Масштаб 1: 200. Дорога с постоянно заданным уклоном называется *аппарелью*. На рис. 132 также показаны горизонтали конуса с уклоном $i_к = 1:1$ и интервалом $l_к = 1$м и горизонтали поверхности одинакового ската (откоса) — это кривые линии, огибающие горизонтали конуса с одинаковыми отметками, при этом $l_к = l_{отк}$. Если участок автомобильной дороги прямолинеен, то горизонтали откоса являются прямыми линиями.

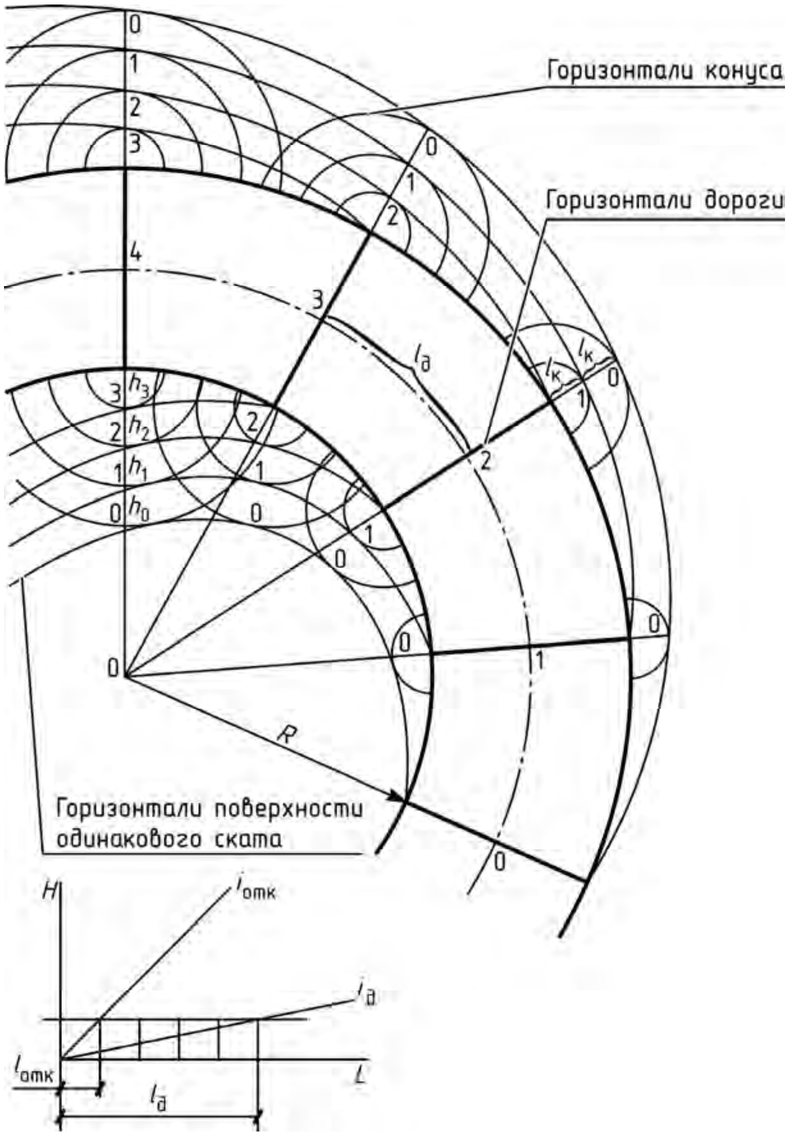
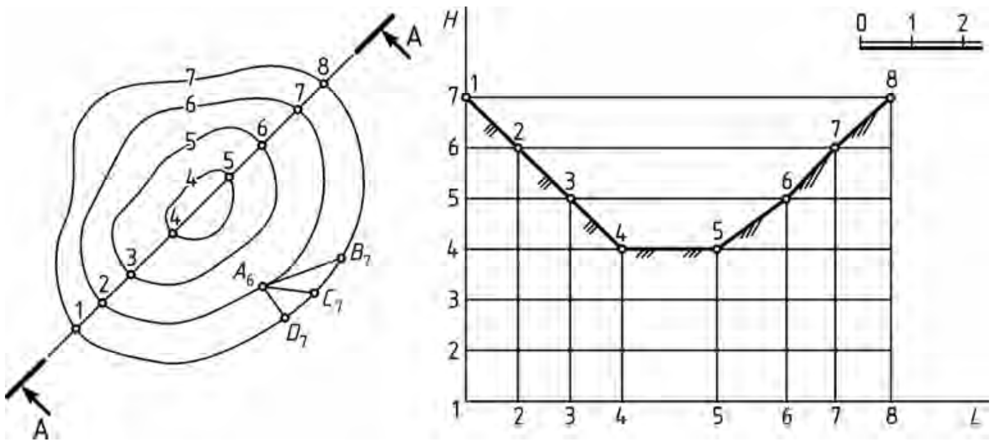


Рис. 132. Криволинейный участок автомобильной дороги

10.4. Топографическая поверхность

Топографическая поверхность в плане местности показывается с помощью горизонталей — линий различной кривизны, соединяющих точки земной поверхности с одинаковыми высотными отметками (рис. 133, *а*).

Разность высотных отметок между двумя соседними горизонталями принимают, как правило, равной 1 м. Расстояние между соседними горизонталями — интервал — определяет уклон топографической поверхности: $l_{AD} < l_{AC} < l_{AB}$. Отсюда, линия наибольшего ската A_6D_7 является самой крутой, а линия наибольшего ската $A_6\,B_7$ — самой пологой (см. рис. 133, *а*).



а *б*

Рис. 133. Топографическая поверхность и ее профиль

Отметки горизонталей пишут в разрыве линий основанием к понижению и по ним определяют форму земной поверхности:

1) вершина — поверхность, горизонтали которой выражены в виде замкнутых кривых линий, при этом каждая внутренняя горизонталь имеет высотную отметку больше каждой внешней;

2) котловина — поверхность, горизонтали которой выражены в виде замкнутых кривых линий, при этом каждая внутренняя горизонталь имеет числовую отметку меньше каждой внешней;

3) седловина — поверхность, ограниченная с четырех сторон выпуклыми сторонами горизонталей;

4) водораздел (линия хребта) — линия наибольшего ската поверхности, проходящей через точки максимальной кривизны горизонталей в случае, когда любая огибающая горизонталь имеет меньшую высотную отметку, чем огибаемая горизонталь;

5) водослив (тальвег) — линия наибольшего ската поверхности, проходящей через точки максимальной кривизны горизонталей (линия долины) в случае, когда любая огибающая горизонталь имеет бóльшую высотную отметку, чем огибаемая горизонталь.

В практической деятельности для решения целого ряда инженерных задач пользуются вертикальным разрезом топографической поверхности, называемым профилем.

Профилем называется линия пересечения топографической поверхности с вертикальной секущей плоскостью. Профиль может быть совмещенным с топографической поверхностью или вынесенным за ее пределы.

З а д а ч а 55

Дано: топографическая поверхность — котловина (см. рис. 133, *а*).

Выполнить: построить профиль топографической поверхности по сечению *А* — *А* (рис. 133, *б*).

Порядок выполнения:

Намечают точки пересечения секущей плоскости A — A с топографическими горизонталями поверхности (1, 2, 3, 4 и т. д.). Вычерчивают две взаимно перпендикулярные прямые линии — горизонтальную (L) и вертикальную (H). На горизонтальной прямой отмечают интервалы топографической поверхности вдоль секущей плоскости A — A, т. е. расстояния между точками пересечения секущей плоскости с топографическими горизонталями поверхности. На вертикальной прямой отмечают единицы вертикального масштаба. Если М 1:200, то 1 м = 0,5 см. Точки пересечения одноименных перпендикуляров, проведенных от вертикальной и горизонтальной прямых, соединяют ломаной линией.

10.5. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью

Рассмотрим пересечение топографической поверхности плоскостью и прямой общего положения.

З а д а ч а 56

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности плоскостью общего положения (рис. 134).

Порядок выполнения:

Для построения линии пересечения плоскости α_i, заданной масштабом уклона, с топографической поверхностью достаточно отметить точки пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей и соединить их ломаной линией.

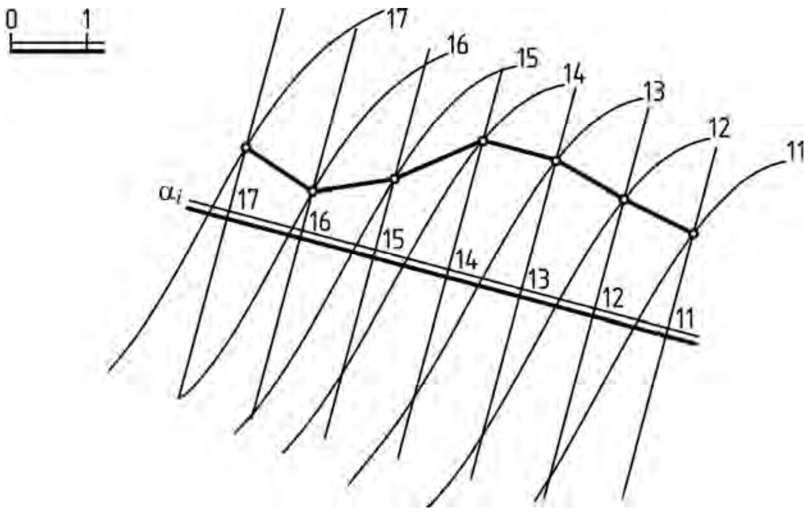


Рис. 134. Пересечение топографической поверхности плоскостью

З а д а ч а 57

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности прямой *AB* общего положения (рис. 135).

Порядок выполнения:

Для определения точки пересечения прямой *AB* с топографической поверхностью прямую градуируют и заключают во вспомогательную плоскость-посредник α_i, проектные горизонтали которой в пределах чертежа пересекаются с соответствующими (одноименными) горизонталями заданной поверхности.

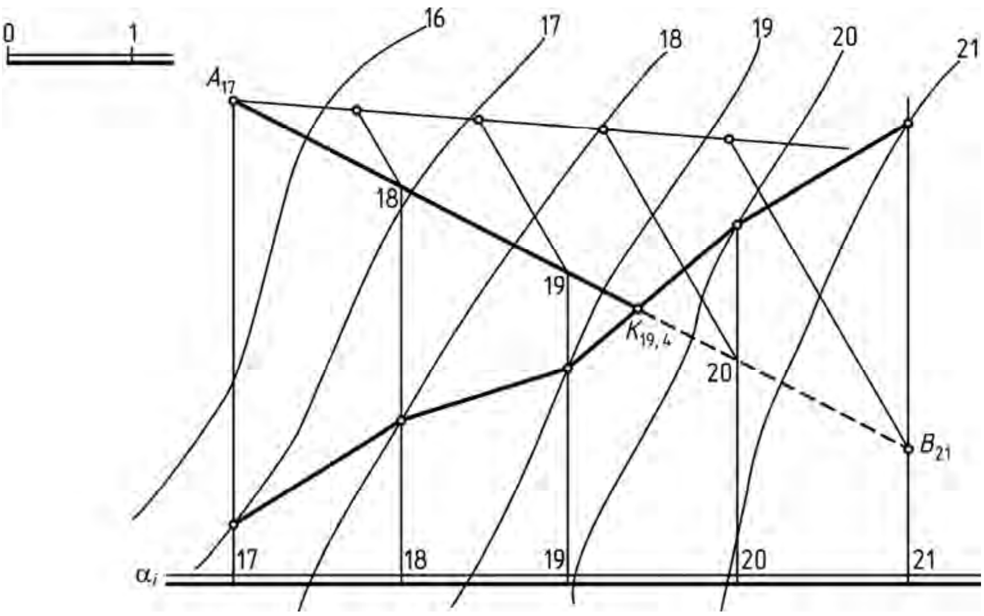


Рис. 135. Пересечение топографической поверхности прямой

Затем выстраивают линию пересечения вспомогательной плоскости α_i и поверхности. Там, где линия пересечения плоскости α_i и топографической поверхности пересечет заданную прямую *AB*, и будет точка пересечения прямой с топографической поверхностью.

З а д а ч а 58

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности прямой *AB* способом профиля (рис. 136).

Порядок выполнения:

Для определения точек пересечения прямой *AB* с топографической поверхностью прямая заключается в плоскость-посредник α_i. По сечению данной плоскости выстраивается профиль топографической поверхности. На профиль наносится прямая *AB* в соответствующих высотных отметках. Там, где прямая AB пересекается с профилем топографической поверхности, определяют точки пересечения прямой с топографической поверхностью.

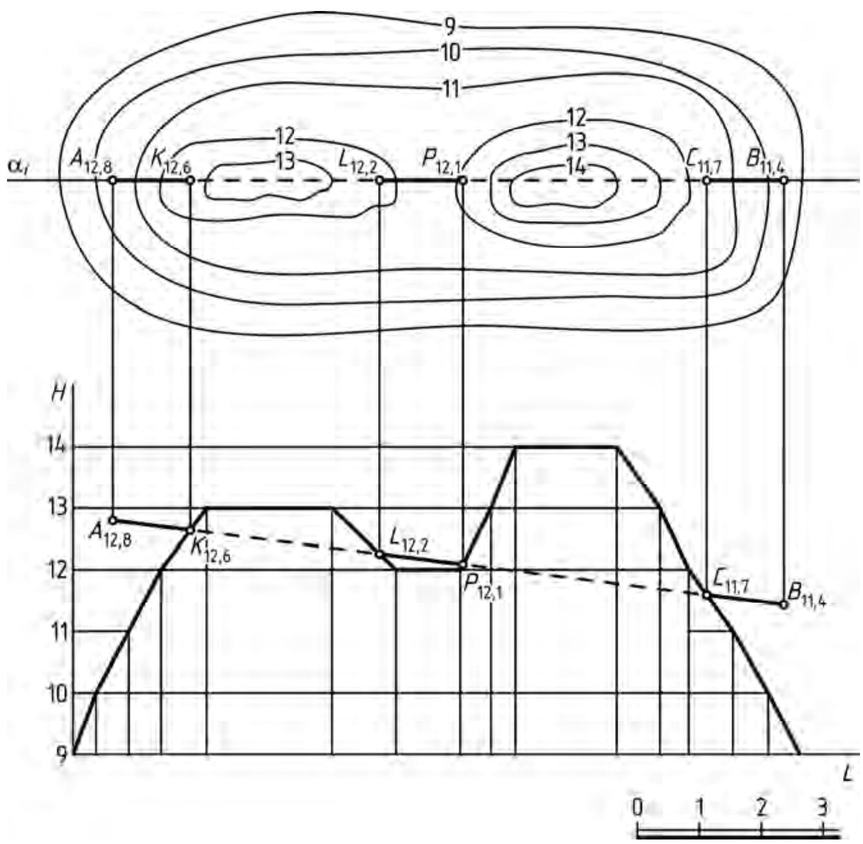


Рис. 136. Пересечение топографической поверхности прямой способом профиля

10.6. Примеры решения инженерных задач

З а д а ч а 59

Дано: прямолинейный участок автомобильной дороги с постоянно заданным уклоном i_a = 1:3. Уклон откосов i = 1:1. М 1: 200.

Выполнить: определить границу земляных работ (рис. 137).

Порядок выполнения:

1. Построить график масштаба уклонов и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов и аппарели.

2. Проградуировать полотно автомобильной дороги, показать на оси дороги точки с высотными отметками 16, 17, 18, 19 и т. д. Через эти точки провести горизонтали аппарели перпендикулярно оси дороги.

3. Построить масштабы уклонов откосов дороги, градуируя их интервалами насыпи и выемки.

4. Вычертить проектные горизонтали откосов дороги.

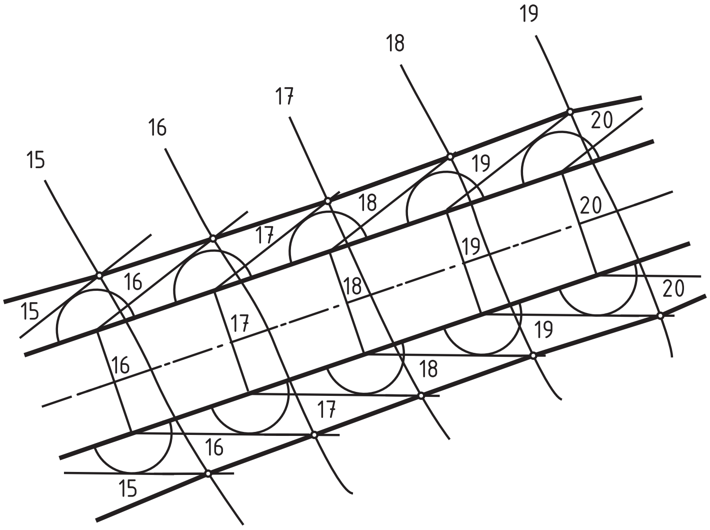


График масштаба уклонов

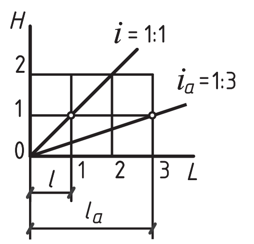


Рис. 137. Определение границы земляных работ для прямолинейного участка автомобильной дороги

5. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи и выемки. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинаковые отметки.

6. Направление падения плоскостей откосов показывают на чертежах берг-штрихами (см. рис. 139 и 140).

З а д а ч а 60

Дано: искусственное сооружение — горизонтальная площадка. Высотная отметка 52.00. Уклоны откосов: $i_{\text{выемки}}$ = 2:3, $i_{\text{насыпи}}$ =1:1. М 1:200.

Выполнить: 1) запроектировать горизонтальную площадку на заданной высотной отметке топографической поверхности; 2) построить профиль топографической поверхности и сооружения по сечению *A — A* (рис. 139).

Порядок выполнения:

1. Определить точки нулевых работ (точки 0) и места выемки и насыпи, сравнивая отметки площадки и топографической поверхности.

2. Построить графики масштабов уклонов и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов выемки и насыпи.

3. Построить масштабы уклонов всех откосов площадки, градуируя их интервалами насыпи и выемки. Масштаб уклонов конической поверхности провести в направлении к центру окружности, ограничивающей контур площадки.

4. Вычертить проектные горизонтали всех откосов насыпи и выемки.

5. Построить линии взаимного пересечения откосов насыпи и выемки — это линии пересечения одноименных проектных горизонталей. Их проводят через точки пересечения горизонталей соседних откосов с одинаковыми отметками. Плоские откосы пересекаются по прямой, конический откос с плоским откосом пересекаются по кривой линии.

6. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи и выемки. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинаковые отметки. Границы земляных работ соседних откосов должны пересекаться в точках, лежащих на линии взаимного пересечения этих откосов (точки *B*, *C*, *D*, *E* и *F*) (рис. 138).

7. Показать берг-штрихами направление падения плоскостей откосов насыпи и выемки. Берг-штрихи вычерчивают перпендикулярно горизонталям откосов на прямолинейных участках площадки и на продолжении радиусов окружности конической поверхности.

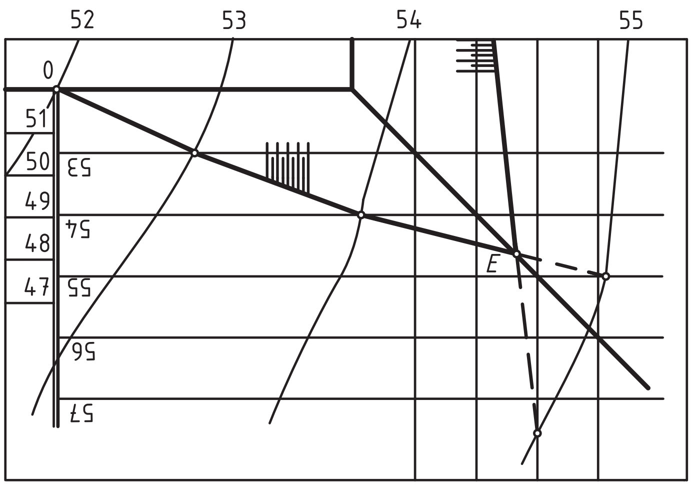


Рис. 138. Пример построения границы земляных работ

8. Построить профиль топографической поверхности по сечению *A — A* (точки 1, 2, 3, 4, 5). На него нанести профиль искусственного сооружения — линию пересечения откосов насыпи и выемки и горизонтальной площадки с секущей плоскостью *A — A* (точки 6, 7, 8, 9) (см. рис. 139).

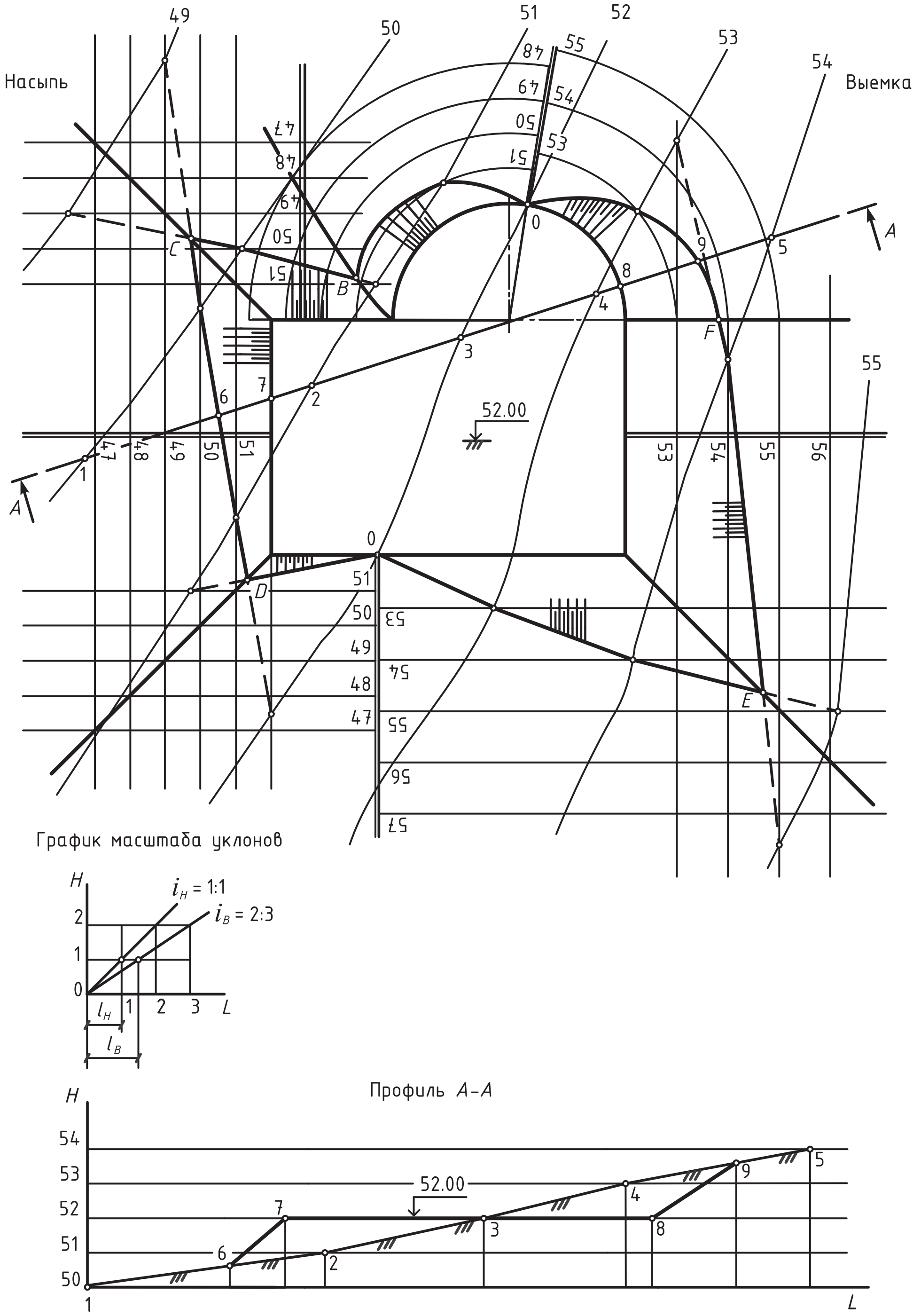


Рис. 139. Проектирование горизонтальной площадки на заданной высотной отметке и построение профиля топографической поверхности и сооружения

З а д а ч а 61

Дано: искусственное сооружение — плотина. Высотная отметка: 22.00. Уклоны откосов насыпи i = 1:1. М 1: 200.

Выполнить: 1) построить откосы плотины и определить границу земляных работ; 2) построить профиль топографической поверхности и сооружения по сечению *A — A* (рис. 140).

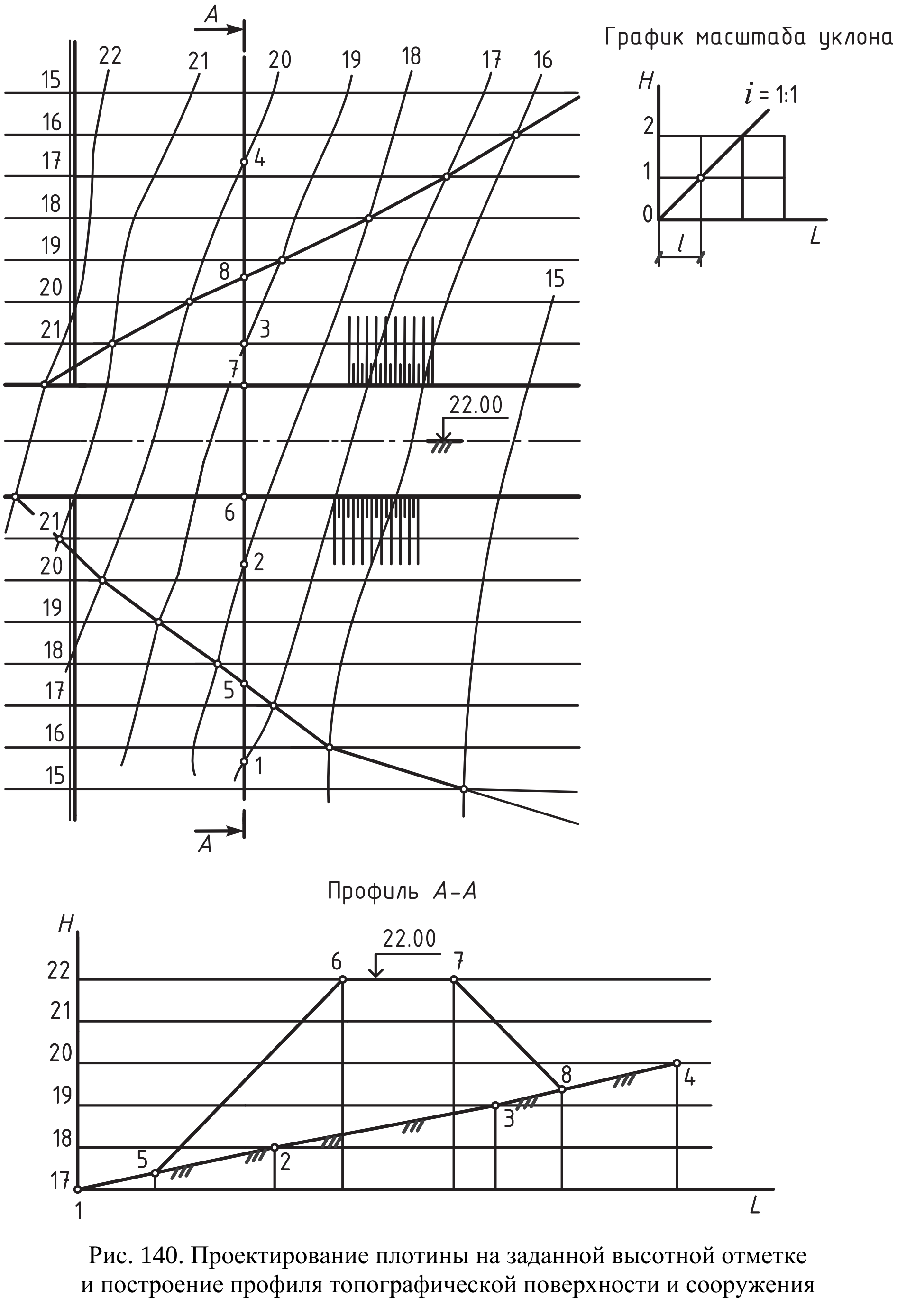


Рис. 140. Проектирование плотины на заданной высотной отметке и построение профиля топографической поверхности и сооружения

Порядок выполнения:

1. Построить график масштаба уклона и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов насыпи.

2. Построить масштабы уклонов откосов плотины, градуируя их интервалами насыпи.

3. Вычертить проектные горизонтали откосов насыпи.

4. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинаковые отметки.

5. Показать берг-штрихами направление падения плоскостей откосов насыпи. Берг-штрихи вычерчивают перпендикулярно горизонталям откосов.

6. Построить профиль топографической поверхности по сечению $A — A$ (точки 1, 2, 3, 4). На него нанести профиль искусственного сооружения — линию пересечения откосов насыпи и плотины с секущей плоскостью $A — A$ (точки 5, 6, 7, 8) (см. рис. 140).

Тема 11. Аксонометрические проекции

11.1. Виды аксонометрических проекций. Коэффициенты искажения по осям. 11.2. Изображение точки, прямой, плоской фигуры и многогранника в аксонометрии. 11.3. Окружность в аксонометрии. 11.4. Аксонометрические проекции геометрических тел

11.1. Виды аксонометрических проекций. Коэффициенты искажения по осям

При выполнении технических чертежей часто оказывается необходимым наряду с изображением предметов на комплексном чертеже иметь и более наглядное изображение. К таким изображениям относят аксонометрическую проекцию или сокращенно *аксонометрию,* что в переводе с греческого означает «измерение по осям».

Различают аксонометрическое проецирование *центральное* и *параллельное*. Рассмотрим *параллельную аксонометрию.* В этом случае аксонометрическое проецирование представляет собой параллельное проецирование геометрической фигуры на произвольно выбранную плоскость K, которая называется картинной плоскостью. Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что геометрическую фигуру относят к некоторой системе прямоугольных координат и затем проецируют параллельными лучами на плоскость вместе с координатной системой.

На рис. 141 показано аксонометрическое проецирование на картинную плоскость K произвольной точки пространства A, ее горизонтальной проекции A_1 и декартовой системы координат, к которой отнесена в пространстве эта точка.

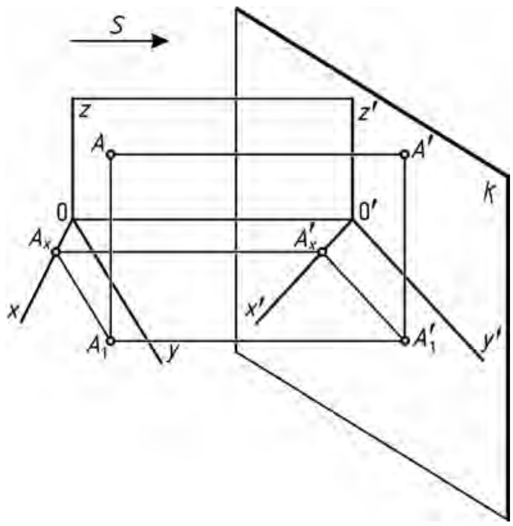


Рис. 141. Проецирование точки

Проецирование осуществляется параллельно некоторому заданному направлению S. Проекция точки A на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией* или *аксонометрией точки* A и обозначается A'. Проекции пространственных координатных осей x, y и z на картинную плоскость K называются *аксонометрическими осями* или *осями аксонометрических координат* и обозначаются x', y' и z'. Горизонтальная проекция точки A_1 на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией точки* A_1 или *вторичной горизонтальной проекцией точки* A и обозначается A_1'. Аналогично могут быть получены вторичные фронтальная и профильная проекции точки A.

Координаты точки A в декартовой системе координат определяются как $X_A = 0A_x$; $Y_A = 0A_y$; $Z_A = 0A_z$.

Проекции пространственных координат точки A на картинную плоскость K называются *аксонометрическими координатами точки* A и обозначаются $X'_A = 0'A'_x$; $Y'_A = 0'A'_y$; $Z'_A = 0'A'_z$.

На пространственных координатных осях x, y и z откладываются равные отрезки $b = b_x = b_y = b_z$. Величина отрезка b принимается за единицу длины и называется *натуральным масштабом*. Проекции натурального масштаба на картинную плоскость K называются *аксонометрическими масштабами* и обозначаются b'_x, b'_y и b'_z.

Координаты точки A при произвольном положении пространственной системы координат относительно картинной плоскости K будут проецироваться на последнюю с искажениями. Отношения аксонометрических координат точки A к ее натуральным (пространственным) координатам называются *показателями* или *коэффициентами искажения по осям*: $k_1 = x'_A/x_A$; $k_2 = y'_A/y_A$; $k_3 = z'_A/z_A$.

Величину коэффициентов искажения можно также определить как отношение соответствующего аксонометрического масштаба к натуральному: $k_1 = b'_x / b_x$; $k_2 = b'_y / b_y$; $k_3 = b'_z / b_z$.

Коэффициенты искажения являются отвлеченными числами, показывающими, в каком отношении меняются размеры геометрических образов при проецировании их на плоскость аксонометрических проекций.

По направлению проецирования на плоскость различают:

прямоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций прямой угол;

косоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи образуют с плоскостью проекций острый угол.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения по осям аксонометрические проекции делятся на следующие виды:

1) *изометрические* (изометрия) — коэффициенты искажения равны по всем трем осям ($k_1 = k_2 = k_3$);

2) *диметрические* (диметрия) — коэффициенты искажения равны по каким-либо двум осям ($k_1 = k_2$ или $k_1 = k_3$ или $k_2 = k_3$);

3) *триметрические* (триметрия) — коэффициенты искажения различны по всем трем осям ($k_1 \neq k_2 \neq k_3$).

Все виды аксонометрических проекций характеризуются двумя параметрами — направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по этим осям.

ГОСТ 2.317-69 устанавливает аксонометрические проекции, применяемые в чертежах всех отраслей промышленности и строительства. Рассмотрим наиболее часто применяемые в техническом черчении виды аксонометрических проекций.

Прямоугольная изометрия. Положение аксонометрических осей в прямоугольной изометрии показано на рис. 142. Коэффициент искажения по осям x', y' и z' равен 0,82. В целях упрощения изометрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x', y' и z', приняв коэффициент искажения равным 1.

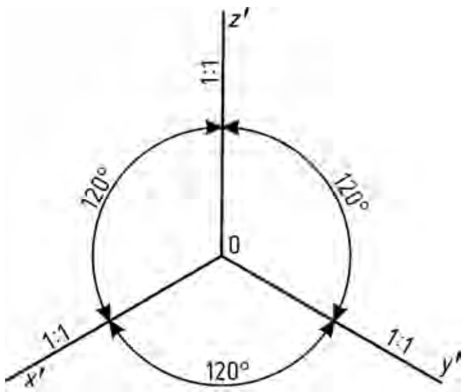
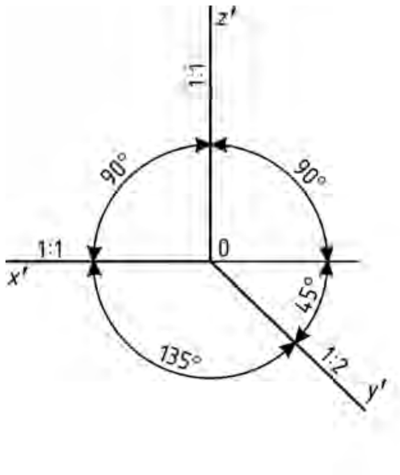


Рис. 142. Прямоугольная изометрия

Прямоугольная диметрия. Положение аксонометрических осей в прямоугольной диметрии показано на рис. 143, *б*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 0,94, а по оси y' равен 0,47. В целях упрощения диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x' и z' и с коэффициентом искажения по оси y', равным 0,5.

Косоугольная фронтальная диметрия. Положение аксонометрических осей в косоугольной фронтальной диметрии показано на рис. 143, *а*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 1, по оси y равен 0,5.

Выбор аксонометрических проекций для построения изображений различных объектов определяется в основном их формой и устройством и подчиняется определенным требованиям, главными из которых являются наглядность и простота построения. Задав систему аксонометрических осей и коэффициенты искажения по ним, можно построить аксонометрические изображения любой геометрической фигуры по ее ортогональным проекциям.



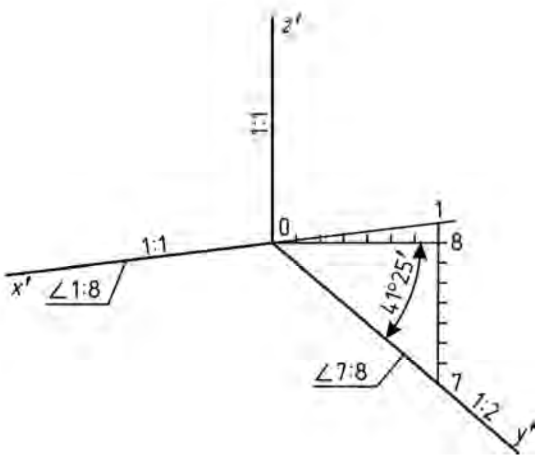


Рис. 143. Косоугольная и прямоугольная фронтальные диметрии

11.2. Изображение точки, прямой, плоской фигуры и многогранника в аксонометрии

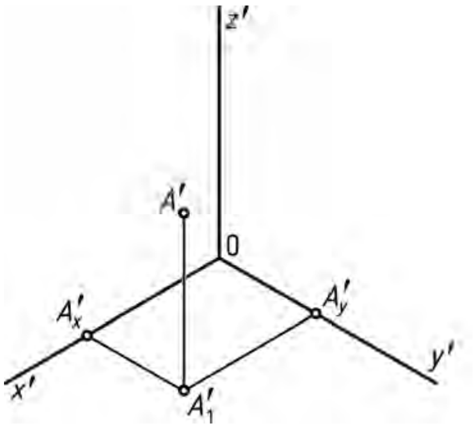
Для построения аксонометрической проекции точки *А* при заданном направлении аксонометрических осей необходимо отложить на координатных осях пространственные координаты этой точки, учитывая коэффициенты искажения по осям.

Рассмотрим построение аксонометрической проекции точки *А* в прямоугольной изометрии. В этом виде аксонометрического проецирования углы между координатными осями равны 120°, а коэффициенты искажения по координатным осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

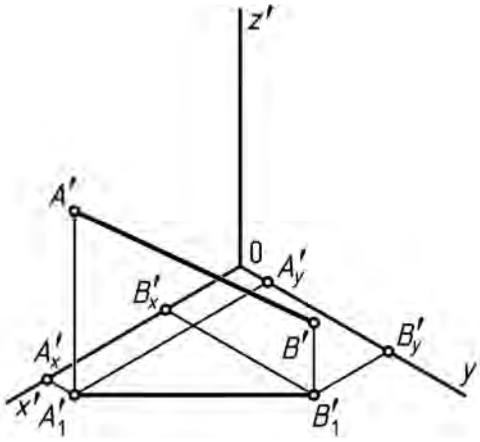
Сначала по ортогональным проекциям точки A определяют ее пространственные координаты: $X_A = 0A_x$; $Y_A = 0A_y$; $Z_A = 0A_z$.

Затем, учитывая коэффициенты искажения по координатным осям, находят аксонометрические координаты точки A: $X'_A = k_1 X_A$; $Y'_A = k_2 Y_A$; $Z'_A = k_3 Z_A$. Так как коэффициенты искажения по осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, то $X'_A = X_A$; $Y'_A = Y_A$; $Z'_A = Z_A$.

В заданной системе аксонометрических осей выстраивают, как правило, вначале вторичную горизонтальную проекцию A'_1, а затем, откладывая аксонометрическую координату Z'_A точки A параллельно оси z', выстраивают аксонометрию точки A' (рис. 144, *а*).



а



б

Рис. 144. Аксонометрические проекции точки и прямой

Используя данную систему построения аксонометрической проекции точки, можно выстраивать аксонометрические проекции любого геометрического образа (отрезка, плоской фигуры, многогранника, поверхности и т. д.) в любом виде аксонометрии.

На рис. 144, *б* показано построение отрезка *AB* прямой в прямоугольной изометрии. По вышеописанному алгоритму вначале выстраивают вторичные горизонтальные проекции A_1' и B_1', а затем, откладывая аксонометрическую координату Z'_A и Z'_B точек *A* и *B* параллельно оси *z'*, выстраивают аксонометрию точек *A'* и *B'*. Соединив вторичные горизонтальные проекции A_1' и B_1', получают вторичную горизонтальную проекцию отрезка прямой $A_1'B_1'$. Соединив аксонометрии точек *A'* и *B'*, получают аксонометрию отрезка прямой *A'B'*.

По аналогии, задав дополнительно точки *C*, *D* и *E*, можно построить аксонометрическую проекцию плоской фигуры (рис. 145).

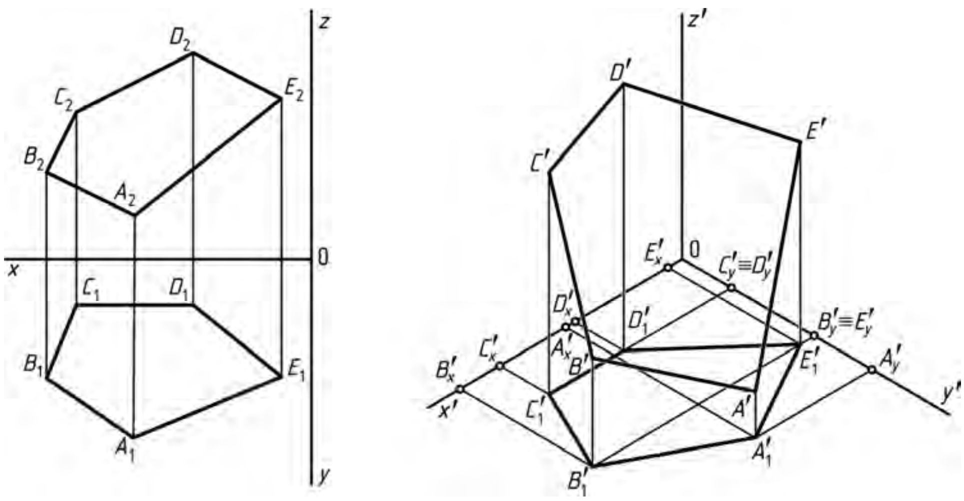


Рис. 145. Аксонометрическая проекция плоской фигуры

Построение аксонометрических проекций многогранника сводится к определению аксонометрических проекций его вершин и соединению их между собой отрезками прямых линий (рис. 146).

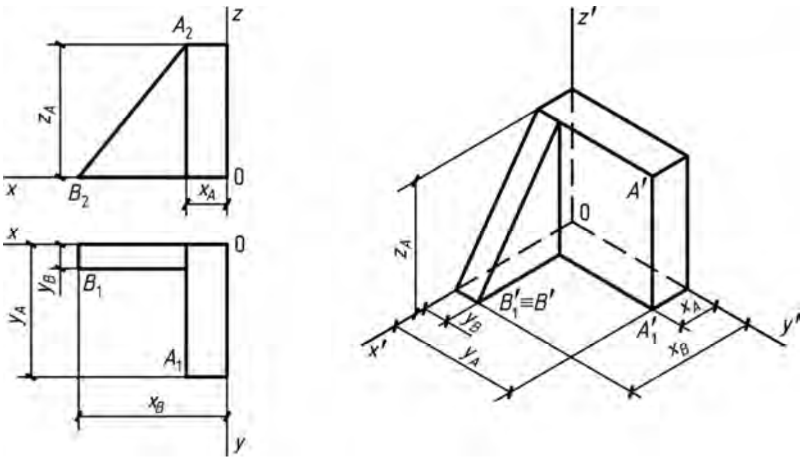


Рис. 146. Аксонометрическая проекция многогранника

11.3. Окружность в аксонометрии

Построение аксонометрических проекций предметов, форма которых имеет поверхность вращения, невозможно без изображения аксонометрической проекции окружности. Аксонометрическая проекция окружности представляет собой замкнутую кривую линию, для удобства построения которой иногда применяют способ сетки. В этом случае окружность делят на определенное количество частей, строят сетку и вписывают эллипс (рис. 147).

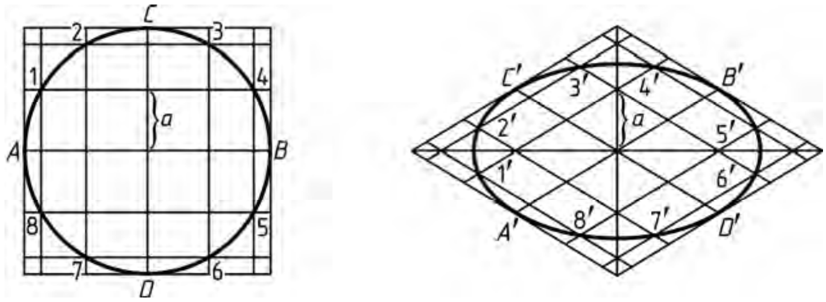


Рис. 147. Аксонометрическая проекция окружности

Данный способ используется для всех видов аксонометрических проекций, где окружность проецируется с искажением. Однако там, где это возможно, в аксонометрических проекциях эллипс заменяют овалом. *Овалом* называется кривая линия, по начертанию похожая на эллипс, но выстроенная с помощью циркуля.

Рассмотрим построение окружности в прямоугольной изометрии. Основное требование к построению аксонометрических проекций окружностей следующее: направление большой оси эллипсов определяется как перпендикуляр к той оси координат, которой нет в плоскости окружности. Так, в координатной плоскости Π_1 большая ось эллипса перпендикулярна оси z', в плоскости Π_2 перпендикулярна оси y', в плоскости Π_3 перпендикулярна оси x' (рис. 148).

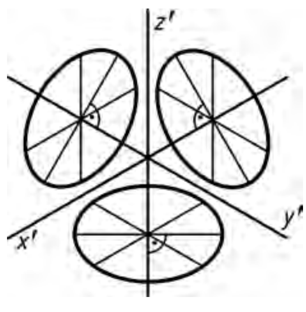


Рис. 148. Аксонометрические проекции окружности

В целях упрощения построений эллипсы могут быть заменены овалами, состоящими из дуг окружностей. В прямоугольной изометрии форма овалов будет одинакова для всех трех координатных плоскостей проекций. При выполнении прямоугольной изометрии без искажения по осям x, y и z, согласно ГОСТ 2.317—69 большая ось эллипсов равна 1,22, малая ось эллипсов — 0,71 диаметра заданной окружности.

Приведем пример построения овала без вычисления размеров большой и малой осей. Направление большой оси определяется исходя из вышеназванного требования, в нашем примере — перпендикулярно координатной оси z'. Очерчивается окружность заданного радиуса. Через центр окружности проводятся прямые, параллельные координатным осям x' и y'. Пересечением этих прямых с очерком окружности являются точки сопряжения дуг овала. Из построений определяются: центры большой (0_1) и малой ($0_1'$) дуг овала, радиус большой R и малой r дуг овала (рис. 149).

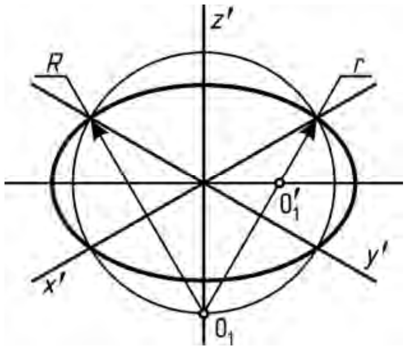


Рис. 149. Построение овала в прямоугольной изометрии

11.4. Аксонометрические проекции геометрических тел

Построение аксонометрических проекций геометрических тел рекомендуется начинать с построения аксонометрических проекций их оснований, к которым выстраивают изображение других элементов геометрических тел (ребер, граней, оснований, образующих). На рис. 150 показано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения правильной прямой шестигранной призмы согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

Оси аксонометрии проводят по нижнему основанию призмы. Строят вторичную проекцию основания. Затем на вертикальных прямых от каждой вершины откладывают высоту призмы, получая вершины верхнего основания. Соединяют полученные точки и получают верхнее основание призмы.

На рис. 151 дано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения правильной прямой шестигранной пирамиды. Вначале строят вторичную проекцию ее основания. Затем от центра основания, через которое проходят оси аксонометрии, проводят вертикальную прямую и на ней откладывают высоту пирамиды согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

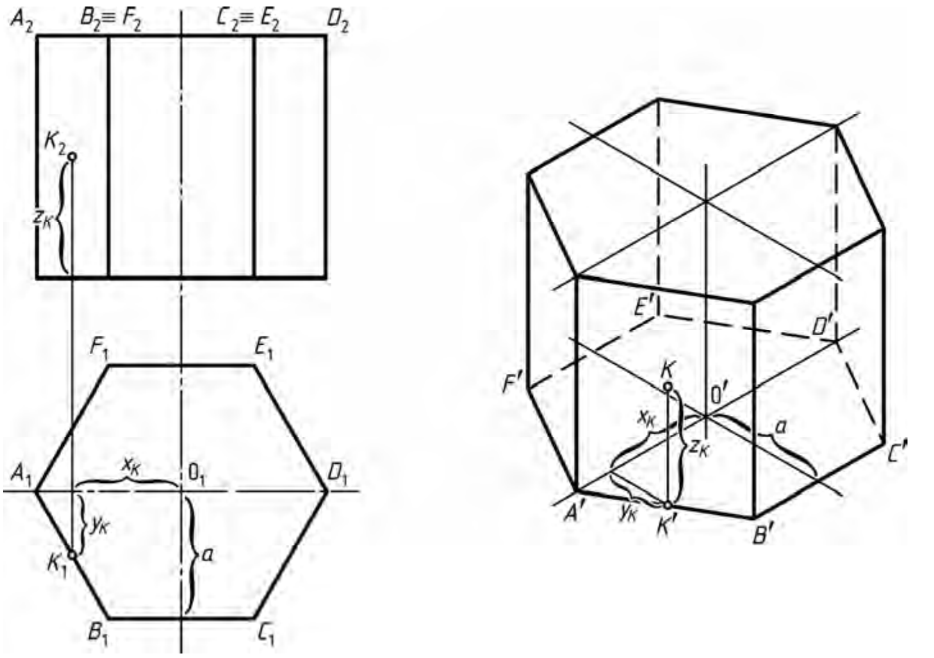


Рис. 150. Аксонометрическая проекция призмы

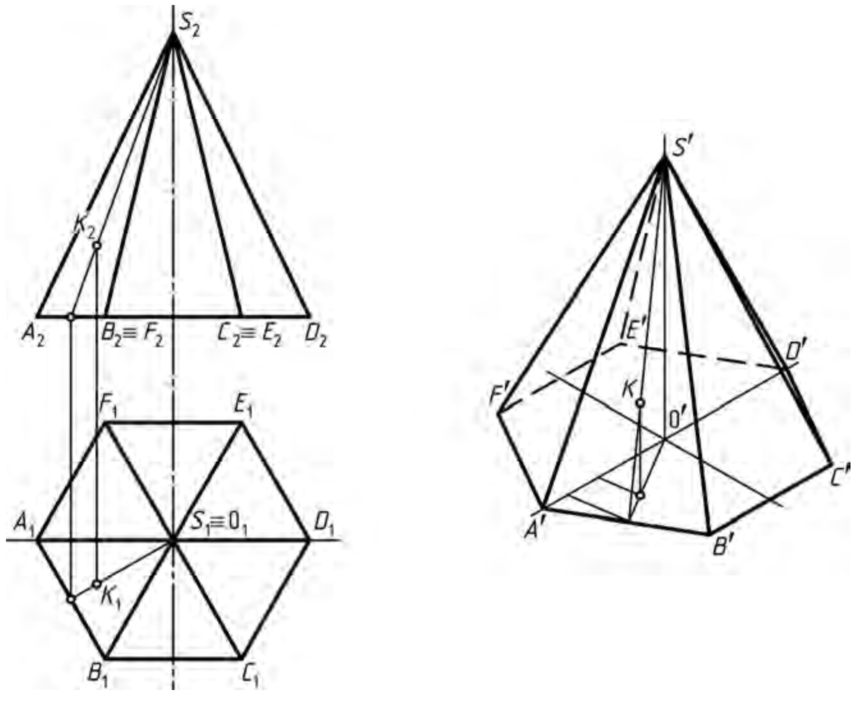


Рис. 151. Аксонометрическая проекция пирамиды

На рис. 152 дано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения прямого кругового конуса. Вначале строят вторичную проекцию основания конуса в виде эллипса (овал). Затем от центра основания, через которое проходят оси аксонометрии, проводят вертикальную прямую и на ней откладывают высоту конуса согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

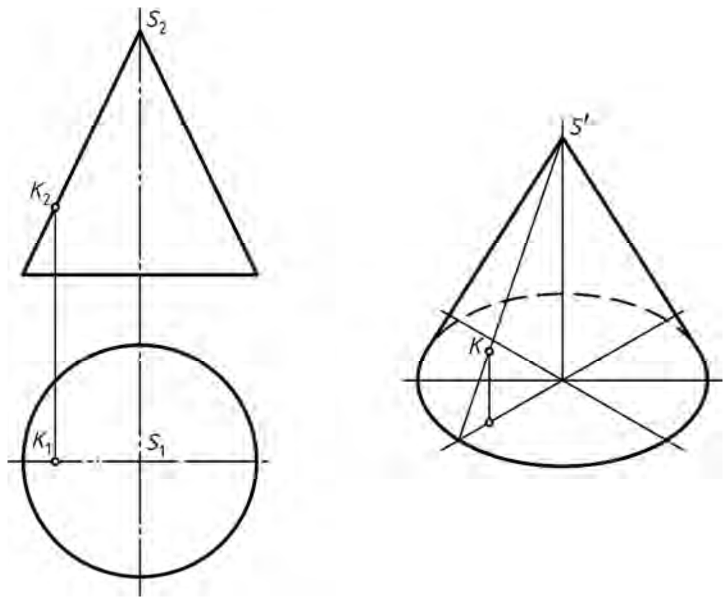


Рис. 152. Аксонометрическая проекция конуса

На рис. 153 показано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения прямого кругового цилиндра с вырезами.

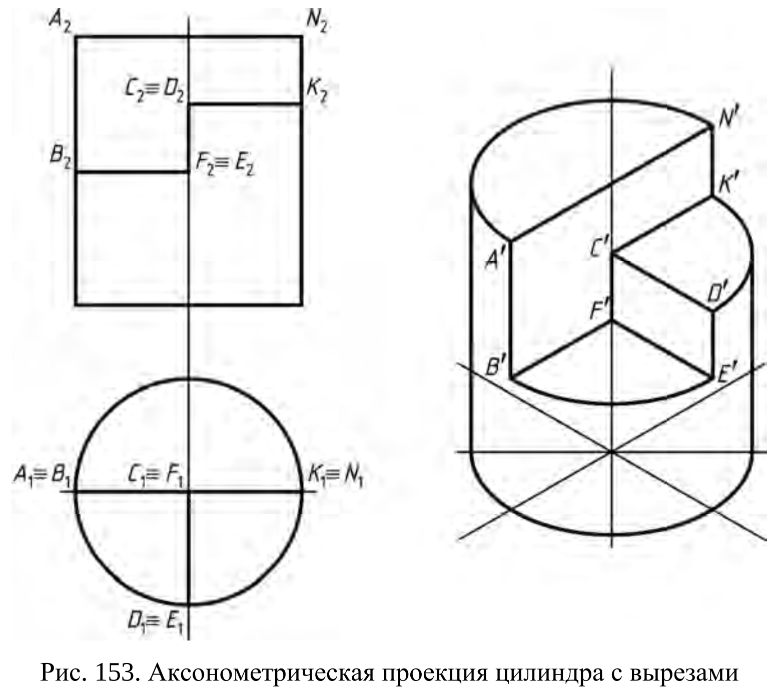


Рис. 153. Аксонометрическая проекция цилиндра с вырезами

Оси аксонометрии проводят по нижнему основанию цилиндра. Строят вторичную проекцию основания в виде эллипса (овал). Затем берут полную высоту цилиндра и делают вырезки согласно предложенному чертежу в двух проекциях. Вначале находят линию $A'N'$, затем опускаются ниже и выстраивают линии $C'K'$ и $C'D'$ и потом выполняют линии $B'F'$ и $F'E'$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

> Приобретение любого познания всегда полезно для ума, ибо он сможет отвергнуть бесполезное и сохранить хорошее. Ведь ни одну вещь нельзя ни любить, ни ненавидеть, если сначала ее не познать.
>
> *Леонардо да Винчи*

Свыше 200 лет прошло с момента выхода во Франции уникального труда Гаспара Монжа «Начертательная геометрия» (Geometrie descriptive, 1795). Именно с тех пор исчисляется и история этой удивительной науки, интерес к которой вызвал Г. Монж.

Сын лавочника и внук извозчика, республиканец и бонапартист, министр революционной Франции Гаспар Монж, чья подпись стояла под постановлением Конвента о казни Людовика XVI, для нас был, прежде всего, гениальным ученым, обобщившим научные труды своих предшественников и создавшим единую графическую науку об ортогональном проецировании — начертательную геометрию. Новая наука, по его словам, была «…пригодна для того, чтобы развивать интеллектуальные способности народа и тем самым способствовать усовершенствованию рода человеческого» [12]. С тех пор, в связи с возросшей потребностью общества и производства в развитии инженерной техники и технологий, начертательная геометрия как наука стала быстро распространяться не только во Франции, но и в других странах, в т. ч. и в России. Она прочно укрепилась в высших технических и художественных школах как обязательная учебная дисциплина, являющаяся базовой при подготовке инженера, конструктора, архитектора, дизайнера, художника.

Сегодня изучение начертательной геометрии и базирующихся на ее основе черчения и инженерной графики, по-прежнему является актуальным. В федеральном государственном образовательном стандарте высшего профессионального образования по направлению подготовки 270800 «Строительство» (квалификация (степень) «бакалавр») отмечается, что приоритетными направлениями подготовки инженеров различных специальностей на современном этапе являются: изыскательское, проектно-конструкторское, производственно-технологическое, производственно-управленческое, экспериментально-исследовательское, монтажно-наладочное и сервисно-эксплуатационное. Эффективность подготовки специалистов по каждому из этих направлений требует достаточно высокого уровня графического образования инженера, его графическую грамотность, компетентность и культуру, особенно в области строительства, архитектуры, дизайна. Обеспечение качества инженерного графического образования в современных условиях требует новых подходов, изменения его структуры, содержания, методик, а также разработки учебной и учебно-методической литературы, к которой можно отнести и данное пособие, адресованное студентам строительных специальностей.

Список рекомендуемой литературы

1. *Автономова, М. П.* Начертательная геометрия : учеб. пособие / М. П. Автономова, А. П. Степанова. — Ростов н/Д : Феникс, 2009. — 283, [1] с. (Высшее образование).

2. *Брилинг, Н. С.* Черчение : справочное пособие / Н. С. Брилинг, С. Н. Балягин. — М. : Стройиздат, 1994. — 421 с.: ил.

3. *Брилинг, Н. С.* Черчение : учеб. пособие для сред. спец. учеб. заведений / Н. С. Брилинг. — М. : Стройиздат, 1989. — 420 с.

4. *Ермилова, Н. Ю.* Начертательная геометрия : учебно-методический комплекс для студентов строит. спец. ИДО ВолгГАСУ / Н. Ю. Ермилова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2009. — 125 с.

5. *Ермилова, Н. Ю.* Способы преобразования чертежа : методические указания / Н. Ю. Ермилова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2003. — 37 с.

6. *Каргин, Д. И.* Гаспар Монж — творец начертательной геометрии. «Гаспар Монж». Сборник статей к двухсотлетию со дня рождения / под ред. академика В. И. Смирнова. — Л. : Изд-во АН СССР, 1947. — 85 с.

7. *Климухин, А. Г.* Начертательная геометрия : учеб. пособие / А. Г. Климухин. — М. : Архитектура — С, 2007. — 336 с.: ил.

8. *Королев, Ю. И.* Начертательная геометрия : учебник / Ю. Н. Королев. — 2-е изд. — М. : Питер, 2009. — 256 с. (Учебник для ВУЗов).

9. Курс начертательной геометрии : учеб. пособие для втузов / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский / под ред. В. О. Гордона и Ю. Б. Иванова. — 24-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2002. — 272 с.: ил.

10. *Локтев, О. В.* Краткий курс начертательной геометрии : учеб. для втузов. — 4-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2001. — 136 с.: ил.

11. *Локтев, О. В.* Задачник по начертательной геометрии : учеб. пос. для втузов / О. В. Локтев, П. А. Числов. — 4-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2002. — 104 с.: ил.

12. *Монж, Г.* Начертательная геометрия / под общ. ред. Т. П. Кравца. — Л. : Изд-во АН СССР, 1947. — 291 с.

13. *Нартова, Л. Г.* Начертательная геометрия. Теория и практика : учеб. для вузов / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. — М. : Дрофа, 2008. — 304 с. (Высшее образование).

14. Начертательная геометрия : учеб. для втузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев / под ред. Н. Н. Крылова. — 9-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2006. — 224 с.: ил.

15. *Николаенко, Н. С.* Из истории развития начертательной геометрии. Сайт Elib. altstu. ru. http://elib.altstu.ru/elib/main.htm.

16. *Рынин, Н. А.* Значение начертательной геометрии и сравнительная оценка ее методов / Н. А. Рынин. — СПб. : Изд-во Тип. Ю. Н. Эрлих, 1907. — 96 с.

17. *Тарасов, Б. Ф.* Валериан Иванович Курдюмов (1853—1904) / Б. Ф. Тарасов. — СПб. : Наука, 1997. — 231 с.

18. *Тарасов, Б. Ф.* Начертательная геометрия / Б. Ф. Тарасов, Л. А. Дудкина, С. О. Немолотов. — СПб. : Изд-во «Лань», 2001. — 256 с.

19. *Фролов, С. А.* Начертательная геометрия : учебник / С. А. Фролов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : ИНФРА- М, 2010. — 285 с. (Высшее образование).

20. *Чекмарев, А. А.* Начертательная геометрия и черчение : учебник / А. А. Чекмарев. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшее образование, 2011. — 471 с. (Основы наук).

21. *Шевченко, О. Н.* О познавательном интересе, начертательной геометрии и многом другом : учеб. пособие / О. Н. Шевченко. — Оренбург : ГОУ ВПО «ОГУ», 2003. — 154 с.

Учебное издание

Ермилова Наталья Юрьевна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ОСНОВЫ КУРСА И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *М. С. Лысенко*
Редактор *Р. В. Худадян*
Компьютерная правка и верстка *Ю. С. Лозовицкая*

Подписано в свет 13.03.2012
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 11,0. Объем данных 8,3 Мб

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru