

Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Н. Ю. Ермилова

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ:
РУКОВОДСТВО К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА
И РЕШЕНИЮ ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие



© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный
архитектурно-строительный университет», 2013

Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.3я73
Е732

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат технических наук *Е. Н. Асеева*, доцент кафедры начертательной геометрии и компьютерной графики Волгоградского государственного технического университета;

кандидат технических наук *М. В. Цыганов*, доцент кафедры инженерной графики, стандартизации и метрологии Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Ермилова, Н. Ю.

Е732

Начертательная геометрия: руководство к изучению курса и решению графических задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. Ю. Ермилова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (1,57 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/online/> — Загл. с титул. с экрана.

ISBN 978-5-98276-569-7

Содержит теоретические основы курса начертательной геометрии, примеры поэтапного решения типовых задач, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельного освоения дисциплины.

Для студентов, обучающихся по направлению «Строительство» (бакалавриат), но может быть полезно студентам и другим специальностям, изучающих дисциплину «Начертательная геометрия».

Данный учебный материал может быть также рекомендован при подготовке студентов к тестированию в рамках Федерального интернет-экзамена в сфере профессионального образования (ФЭПО).

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

Имеется печатный аналог (Начертательная геометрия: руководство к изучению курса и решению графических задач : учебное пособие / Н. Ю. Ермилова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. Волгоград : ВолГАСУ, 2013. — 105, [2] с.)

УДК 514.18 (075.8)

ББК 22.151.3я73

Нелегальное использование данного продукта запрещено

ISBN 978-5-98276-569-7



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Принятые обозначения.....	6
Введение.....	8
<i>Тема 1. Проекция точки.</i> Проекция точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже. Метод конкурирующих точек.....	11
Контрольные вопросы.....	14
Задачи.....	15
<i>Тема 2. Проекция прямой.</i> Прямые общего и частного положения. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций. Относительное расположение прямых. Относительное расположение прямой и точки. Следы прямой.....	16
Контрольные вопросы.....	18
Задачи.....	19
<i>Тема 3. Проекция плоскости.</i> Плоскости общего и частного положения. Главные линии плоскости. Следы плоскости. Принадлежность точки и прямой плоскости. Относительное расположение плоскостей. Относительное расположение прямой и плоскости.....	22
Контрольные вопросы.....	29
Задачи.....	31
<i>Тема 4. Способы преобразования проекций.</i> Способ замены плоскостей проекций. Способ вращения.....	44
Контрольные вопросы.....	50
Задачи.....	50
<i>Тема 5. Поверхности.</i> Точки на поверхности геометрических тел. Многогранники. Поверхности вращения. Геометрические тела с вырезом. Развертки геометрических поверхностей.....	54
Контрольные вопросы.....	61
Задачи.....	62
<i>Тема 6. Пересечение поверхности плоскостью.</i> Сечения многогранников и тел вращения плоскостями общего и частного положения. Определение натуральной величины сечения геометрических тел.....	66
Контрольные вопросы.....	71
Задачи.....	72
<i>Тема 7. Взаимное пересечение поверхностей.</i> Пересечение прямой линии с поверхностью. Полное и частичное пересечение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей. Способ вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер).....	77
Контрольные вопросы.....	82
Задачи.....	82
<i>Тема 8. Проекция с числовыми отметками.</i> Точка, прямая, плоскость в проекциях с числовыми отметками. Плоскость, заданная масштабом уклона. Поверхность в проекциях с числовыми отметками. Топографическая поверхность. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью.....	88

Контрольные вопросы.....	93
Задачи.....	93
<i>Тема 9. Аксонометрические проекции. Точка, прямая, плоская фигура и многогранники в аксонометрии. Окружность в аксонометрии. Аксонометрические проекции геометрических тел.....</i>	98
Контрольные вопросы.....	102
Задачи.....	103
Заключение.....	105
Список рекомендуемой литературы.....	106

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие адресовано студентам технических вузов в качестве руководства при изучении теоретических основ и решении графических задач по начертательной геометрии в соответствии с ФГОС ВПО и рабочей программой учебной дисциплины «Инженерная графика» для специальностей направления подготовки 270800.62 «Строительство» (бакалавриат).

Данное издание согласовано с изложением курса начертательной геометрии по учебному пособию Н. Ю. Ермиловой «Начертательная геометрия: основы курса и примеры решения задач» (Волгоград: ВолгГАСУ, 2012) и содержит учебный материал, включающий теоретические основы изучаемой дисциплины, примеры поэтапного решения типовых задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельной аудиторной и внеаудиторной работы по темам: «Проекция точки», «Проекция прямой», «Проекция плоскости», «Способы преобразования проекций», «Поверхности», «Пересечение поверхности плоскостью», «Взаимное пересечение поверхностей», «Проекция с числовыми отметками», «АксонOMETрические проекции».

Дополняя теоретическую и практическую подготовку студентов по начертательной геометрии, учебное пособие способствует более глубокому самостоятельному изучению дисциплины и формированию общепрофессиональных компетенций в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения.

Как дидактический комплекс, предназначенный для самостоятельной работы студентов и позволяющий осуществлять контроль и оценивать уровень усвоения ими учебного материала, пособие рекомендуется к применению в качестве рабочей тетради при проведении практических занятий по дисциплине «Начертательная геометрия».

По адресу <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> доступно электронное издание данного пособия, что позволяет использовать его студентам как дневной, так и заочной форм обучения.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки в пространстве обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, \dots или арабскими цифрами: 1, 2, 3, 4...

Прямые и кривые линии в пространстве — строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d, \dots , а также проекциями точек, определяющих линию. Например, AB — прямая, проходящая через точки A и B .

Плоскости — строчными буквами греческого алфавита: $\alpha, \beta, \delta, \gamma, \dots$

Поверхности — прописными буквами греческого алфавита: $\Phi, \Theta, \Lambda, \dots$

2. Способ задания геометрического образа указывается в скобках рядом с обозначением геометрического образа. Например: $a (A, B)$ — прямая a задана двумя точками A и B ; $\beta (a \cap b)$ — плоскость β задана двумя пересекающимися прямыми a и b ; $\alpha (\Delta ABC)$ — плоскость α задана треугольником ABC .

3. Расстояние между геометрическими образами обозначаются двумя вертикальными отрезками. Например: $|AB|$ — расстояние между точками A и B (длина отрезка AB).

4. Плоскости проекций обозначаются прописной буквой греческого алфавита Π . Например, горизонтальная плоскость проекций — Π_1 ; фронтальная плоскость проекций — Π_2 ; профильная плоскость проекций — Π_3 .

Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций — буквой Π с добавлением подстрочного индекса: $\Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \dots$

5. Оси проекций — x, y, z , где x — ось абсцисс; y — ось ординат; z — ось аппликата. Начало координат — цифрой 0.

При замене плоскостей проекций оси проекций обозначают: x_1, x_2 , а начало координат — цифрами $0_1, 0_2$.

6. Проекции точек, прямых и плоскостей обозначаются соответствующей буквой с добавлением подстрочного индекса, указывающего плоскость проекций: на плоскости Π_1 — $A_1, a_1, A_1B_1C_1$; на плоскости Π_2 — $A_2, a_2, A_2B_2C_2$; на плоскости Π_3 — $A_3, a_3, A_3B_3C_3$.

7. Углы наклона прямой или плоскости к плоскостям проекций обозначаются строчной буквой греческого алфавита φ . Например, угол наклона к плоскости Π_1 — φ_1 ; угол наклона к плоскости Π_2 — φ_2 ; угол наклона к плоскости Π_3 — φ_3 .

Угол с вершиной в точке обозначается \sphericalangle . Например, $\sphericalangle ABC$ — угол с вершиной в точке B .

Прямой угол обозначается символом: полукруг с точкой внутри сектора.

8. Особые прямые имеют постоянные обозначения:

а) линии уровня: горизонталь — h , фронталь — f ;

б) следы плоскости обозначаются той же буквой, что и плоскость, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего плоскости проекций, например α_{Π_1} — горизонтальный след плоскости; α_{Π_2} — фронтальный след плоскости; α_{Π_3} — профильный след плоскости. Точки $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ — точки схода следов плоскости;

в) следы прямых обозначаются прописными буквами латинского алфавита M, N и P , где M — горизонтальный след прямой, N — фронтальный след прямой, P — профильный след прямой;

г) оси вращения — i, k, n .

9. Плоскость проекций в проекциях с числовыми отметками — Π_0 .

Проекции точек на чертежах с числовыми отметками — той же буквой, что и натуре, с добавлением числа, определяющего расстояние от точки до плоскости проекций: A_4, B_{-3} .

10. Аксонометрические оси проекций — x', y', z' . Аксонометрические проекции точек, прямых, плоской фигуры — буквами, соответствующими натуре, с добавлением значка «штрих»: $A', A'B', A'B'C'$. Вторичные проекции — с добавлением подстрочного индекса: $A'_1, A'_1B'_1, A'_1B'_1C'_1$.

11. Основные операции:

а) совпадение геометрических образов \equiv , например $A_1 \equiv B_1$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

б) подобие геометрических образов \sim , например $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ — треугольники ABC и DEF подобны;

в) конгруэнтность геометрических образов \cong , например $\angle ABC \cong \angle DEF$ — угол ABC конгруэнтен углу DEF ;

г) параллельность геометрических образов \parallel , например $a \parallel b$ — прямая a параллельна прямой b ;

д) перпендикулярность геометрических образов \perp , например $b \perp h$ — прямая b перпендикулярна горизонтали h ;

е) взаимная принадлежность геометрических образов \in , например $A \in b$ — точка A принадлежит прямой b (точка A лежит на прямой b);

ж) включение (содержание) геометрического образа \subset , например $AB \subset \alpha$ — прямая AB принадлежит плоскости α ;

з) пересечение двух геометрических образов \cap , например $\alpha \cap \beta$ — плоскости α и β пересекаются;

и) результат геометрической операции $=$, например $K = a \cap \beta$ — точка K является точкой пересечения прямой a и плоскости β ;

к) импликация — логическое следствие \Rightarrow , например $K \in AB \Rightarrow K_1 \in A_1B_1$ — если точка K принадлежит прямой пространства AB , то проекция этой точки K_1 также принадлежит проекции прямой A_1B_1 .

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия как фундаментальная наука представляет один из разделов геометрии, изучающий методы изображения пространственных образов построенных на плоскости по определенным законам и правилам. В процессе изучения дисциплины «Начертательная геометрия» развивается пространственное воображение личности, проявляющееся в создании визуальных образов окружающего мира и построении новых. Ощущение, восприятие, представление, воображение, задействованные в графической деятельности, носят универсальный характер и могут быть использованы в других видах деятельности. Например, при проектировании и строительстве различных инженерных объектов, при конструировании геометрических поверхностей технических форм и сооружений в авиационной, автомобильной, судостроительной промышленности. Таким образом, освоение данной дисциплины способствует созданию пространственных представлений различной степени обобщенности и схематичности, что позволяет говорить о положительном влиянии на процесс формирования познавательных способностей студентов, расширении круга используемых мыслительных процессов, что, в свою очередь, повышает адаптивные профессиональные возможности будущего инженера, его профессиональную компетентность.

Как учебную дисциплину вуза начертательную геометрию студенты изучают на первом курсе в рамках дисциплины «Инженерная графика». При изучении курса начертательной геометрии следует придерживаться следующих *общих требований и методических рекомендаций*:

1. Начертательную геометрию необходимо изучать строго последовательно и систематично.

2. Прочитанный в учебной литературе материал должен быть глубоко и прочно усвоен. В начертательной геометрии следует избегать механического запоминания («зубрежки») теорем, отдельных положений, формулировок и решений задач. Такое запоминание непрочное и не дает желаемого результата при выполнении графических работ. Студент должен разобраться в теоретическом материале и уметь применить его как общую схему к решению конкретных задач.

При изучении того или иного учебного материала курса иногда у студента возникает ошибочное мнение, что все прочитанное им хорошо понятно, учебный материал легок и прост и можно дальше на нем не задерживаться. Поэтому, свои знания надо проверять ответами на поставленные в каждой теме пособия контрольные вопросы и решением предложенных задач для аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы.

3. Очень большую помощь в изучении курса оказывает хороший конспект учебника или аудиторных лекций, где записывают основные положения изучаемой темы и краткие пояснения графических построений в решении геометрических задач. Такой конспект поможет глубже понять и запомнить изучаемый материал. Он служит также справочником, к которому приходится прибегать, сопоставляя темы в единой взаимосвязи.

При изучении тем курса начертательной геометрии и подготовки к практическим занятиям по дисциплине необходимо:

ознакомиться с содержанием изучаемой темы и прочитать материал лекций, составив себе при этом общее представление об излагаемых вопросах;

прочитать все параграфы учебника, относящиеся к данной теме и отметить трудные для понимания и неясные места. Каждую тему курса по учебнику желательно прочитать дважды;

перейти к тщательному изучению учебного материала, усвоить теоретические положения и выводы, записывая при этом основные положения темы (формулировки теорем, термины, воспроизводить отдельные чертежи из учебника и конспекта лекций);

закончив изучение темы, решить все предложенные преподавателем задачи с целью закрепления теоретического материала и приобретения практических навыков графических построений;

запомнить, что нельзя переходить к изучению нового учебного материала дисциплины, не усвоив предыдущего.

4. В курсе начертательной геометрии решению задач должно быть уделено особое внимание. Решение задач является наилучшим средством более глубокого всестороннего постижения основных положений теории. Прежде чем приступить к решению той или иной геометрической задачи, надо понять ее условие, мысленно представить в пространстве заданные геометрические образы и установить последовательность выполнения графических построений. Решая задачи, относящиеся к пространственным предметам, полезно прибегать к изготовлению простейших макетов, моделей из бумаги, картона, пластилина и т. д. Однако применять моделирование геометрических форм и их сочетаний рекомендуется в начале изучения курса начертательной геометрии. В дальнейшем надо выполнять операции с геометрическими пространственными формами на их проекционных изображениях.

В процессе изучения курса начертательной геометрии студенты выполняют самостоятельные внеаудиторные (домашние) расчетно-графические работы (РГР), представляющие собой эпюры (чертежи) и выполняемые по определенному графику по мере последовательности прохождения курса. Задания на домашние графические работы выдаются индивидуально для каждого студента.

При решении задач и выполнении внеаудиторных расчетно-графических работ также необходимо придерживаться некоторых *общих требований и методических рекомендаций*:

1. Внимательно изучить методические указания по выполнению той или иной расчетно-графической работы и строго им следовать.

2. Использовать при выполнении графических работ весь имеющийся учебный материал (учебники, лекции, конспекты и др.), а также знания, умения и навыки, приобретенные в процессе изучения курса начертательной геометрии и решения аудиторных и внеаудиторных графических задач.

3. Изучить основные положения ГОСТ ЕСКД «Общие правила выполнения чертежей». Все чертежи должны быть выполнены в соответствии с данными стандартами и отличаться четким и аккуратным графическим выполнением. Чертежи выполняют на листах чертежной бумаги формата, указанного для каждой расчетно-графической работы. При этом следует запомнить, что чертежи, помещенные в методических указаниях, не являются эталонами исполнения, а служат лишь примерами расположения графического материала на листе, характеризуют объем и содержание выполняемой работы.

4. Графические работы, выполненные в тонких линиях, представляются на проверку преподавателю. Если в работе имеются незначительные неточности, то студент исправляет ошибки, указанные преподавателем и обводит чертеж. Неверно выполненные графические работы заново выполняются и повторно представляются на проверку преподавателю.

5. При сдаче расчетно-графических работ необходимо правильно объяснить способы решения задач и выполненные построения, дать формулировку применяемых теорем и правил.

Таким образом, следование общим требованиям и методическим рекомендациям при изучении курса начертательной геометрии, выполнении расчетно-графических работ и решении задач позволит студентам своевременно и качественно подготовиться к сдаче экзамена.

Тема 1. ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ

Проекция точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже. Метод конкурирующих точек

Теоретические основы

Проекцией любой точки пространства на плоскость или поверхность называют точку пересечения проецирующего луча, проходящего через точку пространства, с данной плоскостью (поверхностью).

Свойства параллельных проекций:

1. Проекция точки есть точка.
2. Проекция прямой линии в общем случае прямая. В частном случае проекция прямой есть точка.
3. Если точка пространства принадлежит прямой, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой.
4. Отношение отрезков прямой пространства равно отношению их проекций.

При ортогональном проецировании все пространственные геометрические фигуры в начертательной геометрии ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координат — системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей:

Π_1 — горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 — фронтальная плоскость проекций;

Π_3 — профильная плоскость проекций.

Положение любой точки в пространстве определяется расстояниями от точки пространства до плоскостей проекций. Расстояние от точки пространства до плоскости проекций называется *координатой*. Следовательно, положение любой точки в пространстве определяется тремя координатами: x , y и z . Координату x называют *абсциссой*, она определяет расстояние от точки пространства до плоскости Π_3 . Координату y называют *ординатой*, она определяет расстояние от точки пространства до плоскости Π_2 . Координату z называют *апplikатой*, она определяет расстояние от точки пространства до плоскости Π_1 .

Каждую проекцию точки пространства, например, A характеризуют две координаты: $A_1(x, y)$; $A_2(x, z)$; $A_3(y, z)$, где A_1 — горизонтальная проекция точки A (проекция точки на плоскость Π_1), A_2 — фронтальная проекция точки A (проекция точки на плоскость Π_2) и A_3 — профильная проекция точки A (проекция точки на плоскость Π_3). При этом проекция точки A на ось x — A_x ; на ось y — A_y ; на ось z — A_z .

Точки, расположенные на одном проецирующем луче по отношению к плоскости проекций, называются *конкурирующими*.

Метод конкурирующих точек заключается в следующем: из двух конкурирующих точек пространства на плоскости проекций видимой будет та точка, удаление которой от данной плоскости проекций будет наибольшим.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: проекции точек A, B, C и S , имеющие координаты: $A(20,50,15)$; $B(50,15,5)$; $C(65,40,25)$; $S(10,10,40)$.

Выполнить: построить две проекции многогранника $ABCS$ по координатам его вершин.

Порядок выполнения:

1. По координатам точек A, B, C и S определяют их проекции на осях x, y и z . Затем из полученных проекций перпендикулярно осям проекций прочерчивают проекционные связи, на пересечении которых определяют горизонтальные и фронтальные проекции заданных точек (рис. 1).

2. Соединяют одноименные проекции точек A, B, C и S между собой и получают горизонтальную проекцию многогранника $A_1B_1C_1S_1$ и фронтальную проекцию многогранника $A_2B_2C_2S_2$ (рис. 2).

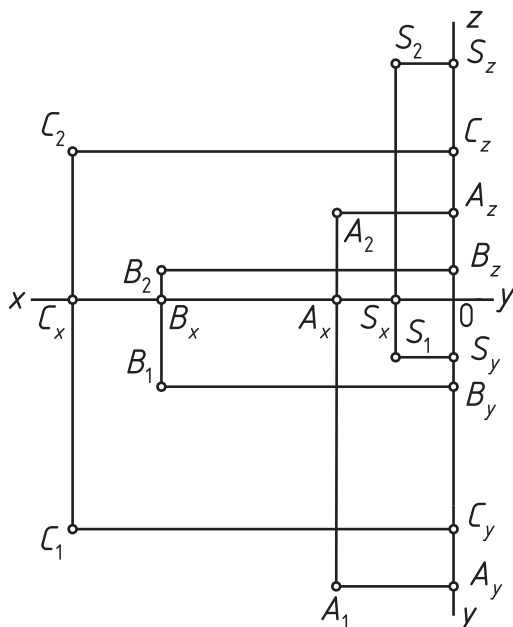


Рис. 1

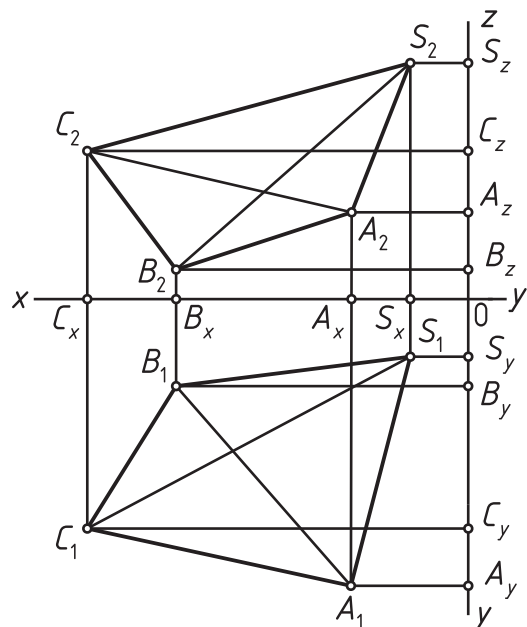


Рис. 2

Задача 2

Дано: многогранник $ABCS$ (рис. 3).

Выполнить: определить видимость ребер многогранника $ABCS$ методом конкурирующих точек.

Порядок выполнения:

1. Определяют видимость ребер многогранника в плоскости Π_1 . Для этого берут две конкурирующие точки 1 и 2, где точка 1 принадлежит прямой AB , а точка 2 — прямой CS . Исходим из принадлежности точки пространства прямой: если $1 \in AB$, то $1_1 \in A_1B_1$, а $1_2 \in A_2B_2$; если $2 \in CS$, то $2_1 \in C_1S_1$, а $2_2 \in C_2S_2$.

Из двух конкурирующих точек 1 и 2 на горизонтальной плоскости проекций видимой будет та точка, фронтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_1 . Так как фронтальная проекция точки 2_2 наиболее удалена от плоскости Π_1 , то данная точка на горизонтальной плоскости проекций будет видимой, а, следовательно, будет видимой и прямая, которой она принадлежит (прямая CS). Прямая AB , в данном случае, будет невидимой (рис. 4).

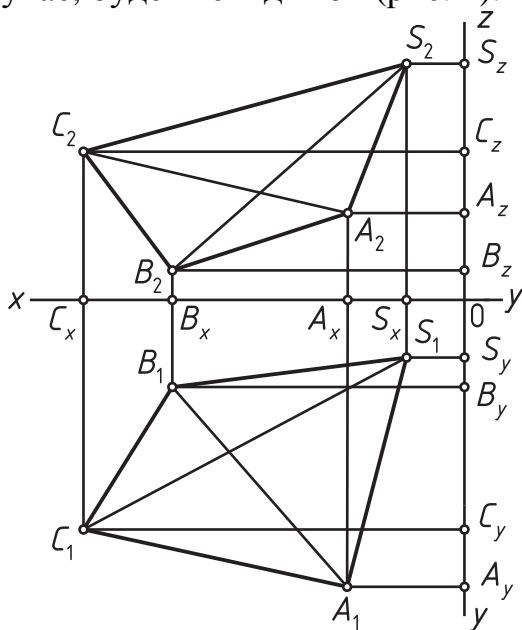


Рис. 3

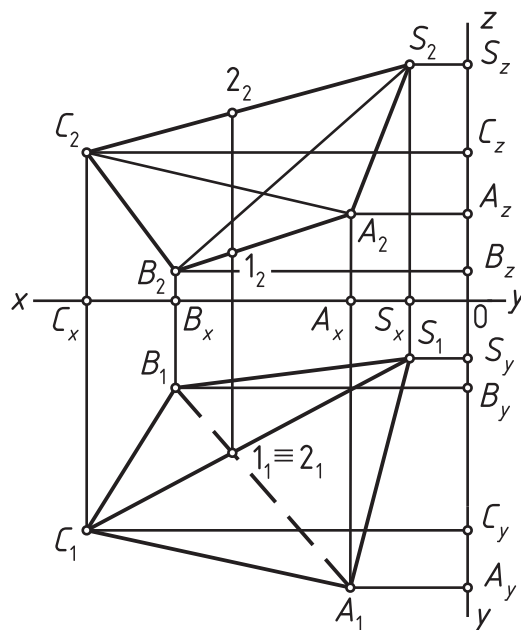


Рис. 4

2. Определяют видимость ребер многогранника в плоскости Π_2 . Для этого берут две конкурирующие точки 3 и 4, где точка 3 принадлежит прямой AC , а точка 4 — прямой BS . Исходим из принадлежности точки прямой пространства: если $3 \in AC$, то $3_1 \in A_1C_1$, а $3_2 \in A_2C_2$; если $4 \in BS$, то $4_1 \in B_1S_1$, а $4_2 \in B_2S_2$. Из двух конкурирующих точек 3 и 4 на фронтальной

плоскости проекций видимой будет та точка, горизонтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_2 . Так как горизонтальная проекция точки 3_1 наиболее удалена от плоскости Π_2 , то данная точка на фронтальной плоскости проекций будет видимой, а, следовательно, будет видимой и прямая, которой она принадлежит (прямая AC). Прямая BS , в данном случае, будет невидимой (рис. 5).

3. На рис. 6 дано итоговое решение задачи по определению видимости ребер многогранника $ABCS$ методом конкурирующих точек.

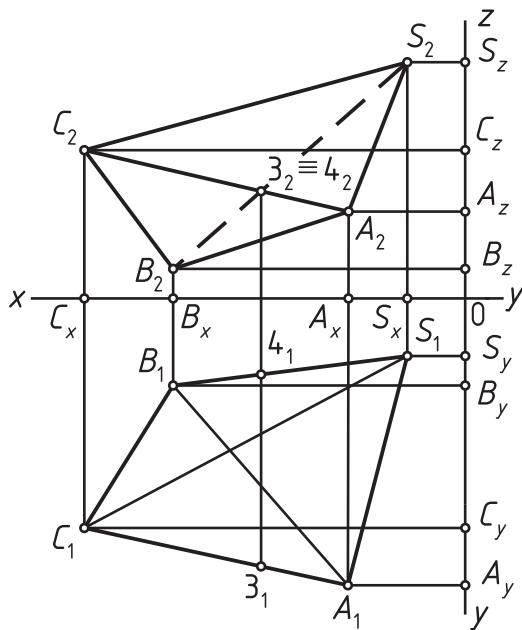


Рис. 5

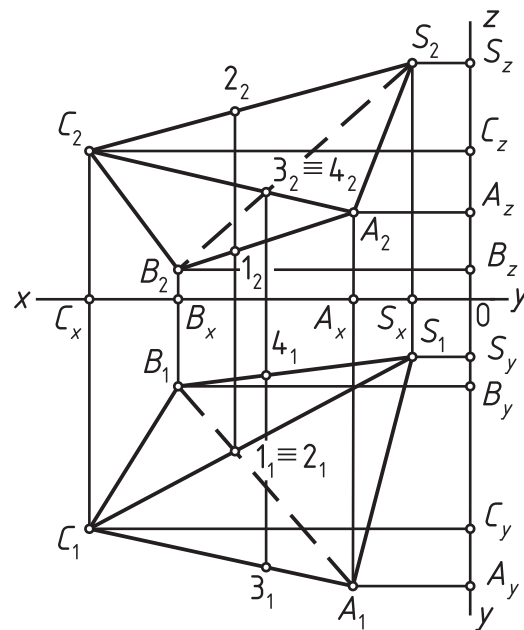


Рис. 6

Контрольные вопросы

1. Как принято обозначать основные геометрические образы (точка, прямая, плоскость, поверхность) и как принято обозначать их проекции?
2. Что называют ортогональной проекцией точки?
3. Как пространственная фигура из трех взаимно-перпендикулярных плоскостей преобразуется в плоскую модель?
4. Что такое «эпюра»? Сколько проекций на эпюре определяют положение точки в пространстве?
5. Что называют координатами точки пространства в декартовой системе координат? Сколько координат определяют положение точки?
6. Какие координаты определяют горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точки на эпюре?
7. Что такое «точки общего и частного положения»?

8. Где находятся проекции точки, если одна из ее координат равна нулю? Если две ее координаты равны нулю?
9. Как на эмпоре связаны между собой проекции точки?
10. Каково может быть взаимное расположение двух точек?
11. Какие точки называются конкурирующими?

Задачи

1. Определить принадлежность точек A , B и C плоскостям проекций (Π_1 , Π_2 , Π_3). Выяснить, какая из заданных точек наиболее удалена от той или иной плоскости проекций (рис. 7).

2. По двум заданным проекциям точек A , B и C построить их третьи проекции и проекции этих точек на координатные оси x , y , z . Выяснить принадлежность точек плоскостям проекций (рис. 8).

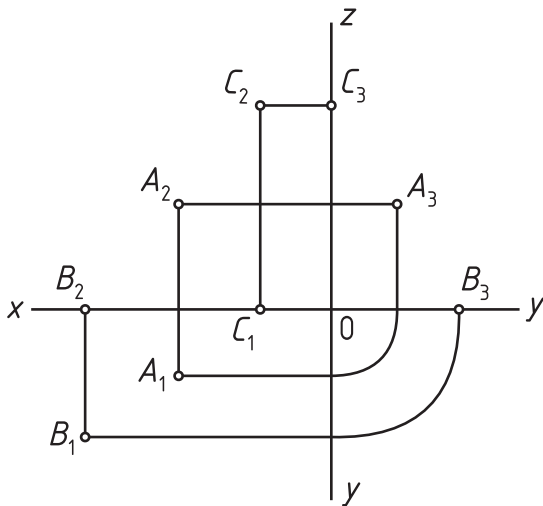


Рис. 7

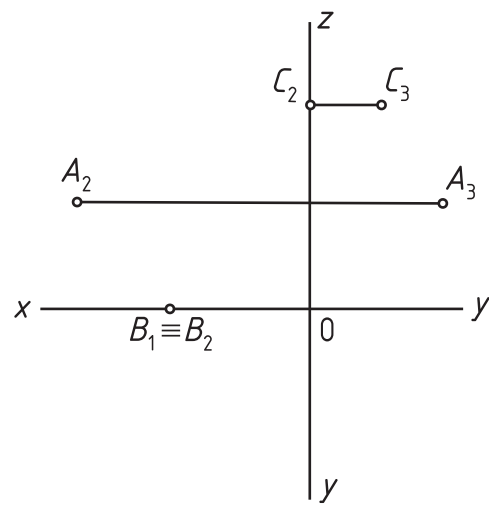


Рис. 8

3. Построить три проекции точек A , B , C , D , E и F , имеющих координаты: $A(35, 10, 50)$; $B(15, 0, 20)$; $C(50, 20, 0)$; $D(0, 30, 40)$; $E(0, 0, 30)$; $F(25, 0, 0)$. Выяснить принадлежность заданных точек.

4. Построить проекции точки D , отстоящей от плоскости Π_1 на расстоянии 40 мм, от плоскости Π_2 на 20 мм и от плоскости Π_3 на 30 мм.

5. Построить три проекции точек A , B , C , D , E и F , где $A \in \Pi_1$, $B \in \Pi_2$, $C \in \Pi_3$, $D \in 0x$, $E \in 0y$ и $F \in 0z$. Записать координаты этих точек.

6. Построить две проекции многогранника $ABCS$ по координатам его вершин: $A(70, 35, 0)$; $B(20, 60, 50)$; $C(60, 0, 60)$; $S(0, 10, 10)$. Определить видимость ребер многогранника $ABCS$. Провести исследование положения в пространстве его вершин и ребер.

Тема 2. ПРОЕКЦИИ ПРЯМОЙ

Прямые общего и частного положения. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций. Относительное расположение прямых. Относительное расположение прямой и точки. Следы прямой

Теоретические основы

Прямая линия может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций. Прямая, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *прямой общего положения*. Прямые, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения*.

Различают:

1. *Прямые уровня* — прямые, параллельные одной какой-либо плоскости проекций (горизонтальная прямая уровня, фронтальная прямая уровня, профильная прямая уровня);

2. *Проецирующие прямые (дважды параллельные)* — прямые, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций и параллельные двум другим плоскостям проекций одновременно (горизонтально-проецирующая прямая, фронтально-проецирующая прямая, профильно-проецирующая прямая).

Натуральная величина отрезка прямой есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость, а другой катет — разнице расстояний концов отрезка до этой плоскости. Угол, заключенный между натуральной величиной отрезка прямой и его проекцией на эту плоскость есть угол наклона отрезка прямой к данной плоскости проекций.

Прямые пространства относительно друг друга могут занимать различные положения: быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися. Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общую точку, называются *параллельными*. Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, называются *пересекающимися*. Прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие одну общую точку, называются *скрещивающимися*. Частным случаем пересечения прямых в пространстве может быть их *перпендикулярность*, т. е. когда прямые перпендикулярны друг другу и образуют прямой угол.

Теорема о проецировании прямого плоского угла: если две прямые в пространстве образуют прямой угол и одна из прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения, т. е. в натуральную величину.

Следом прямой называют точку пересечения прямой с плоскостью проекций. Различают:

1. *Горизонтальный след прямой* — точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 . Обозначается M . Проекции следа: M_1 — горизонтальная проекция горизонтального следа; M_2 — фронтальная проекция горизонтального следа.

2. *Фронтальный след прямой* — точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций Π_2 . Обозначается N . Проекции следа: N_1 — горизонтальная проекция фронтального следа; N_2 — фронтальная проекция фронтального следа.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: отрезок прямой AB общего положения (рис. 9).

Выполнить: 1) определить натуральную величину отрезка прямой AB в плоскостях проекций Π_1 и Π_2 ; 2) определить углы наклона φ_1 и φ_2 отрезка прямой к данным плоскостям проекций.

Порядок выполнения:

1. Определяют натуральную величину отрезка прямой AB на горизонтальной плоскости проекций Π_1 .

Для этого из любого конца горизонтальной проекции отрезка, например из проекции B_1 , восстанавливают перпендикуляр, на котором откладывают разницу превышений концов отрезка прямой Δz , взятую с фронтальной плоскости проекций Π_2 : $\Delta z = z_B - z_A$. Соединяя полученное превышение с проекцией A_1 , получают искомое значение (рис. 10).

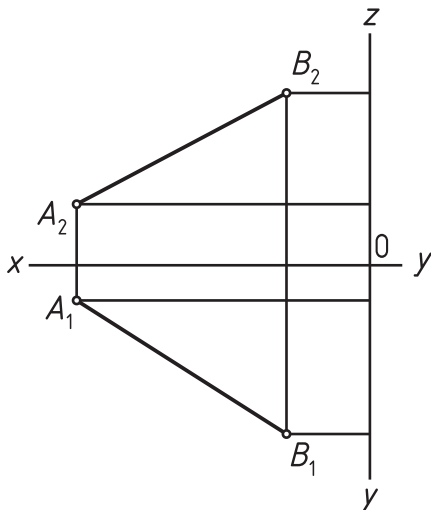


Рис. 9

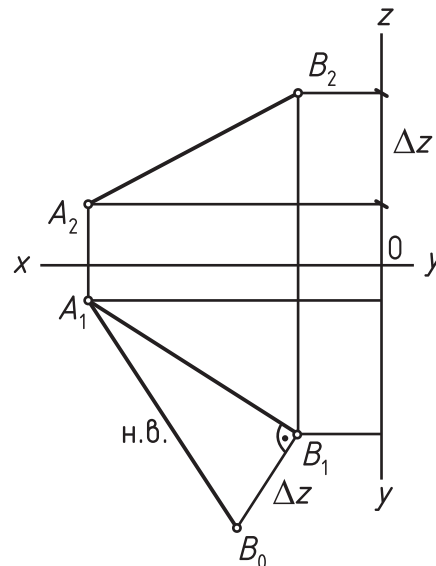


Рис. 10

2. Определяют натуральную величину отрезка прямой на фронтальной плоскости проекций Π_2 . Для этого из любого конца фронтальной проекции этого отрезка, например из проекции A_2 , восстанавливают перпендикуляр, на котором откладывают разницу превышений концов отрезка прямой Δy , взятую с горизонтальной плоскости проекций Π_1 : $\Delta y = y_A - y_B$. Соединяя полученное превышение с проекцией B_2 , получают искомое значение (рис. 11).

3. Определяют углы наклона прямой AB к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 . Угол, заключенный между натуральной величиной отрезка прямой и его горизонтальной проекцией A_1B_1 , есть угол наклона φ_1 отрезка прямой AB к горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Угол, заключенный между натуральной величиной отрезка прямой и его фронтальной проекцией A_2B_2 , есть угол наклона φ_2 отрезка прямой AB к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 12).

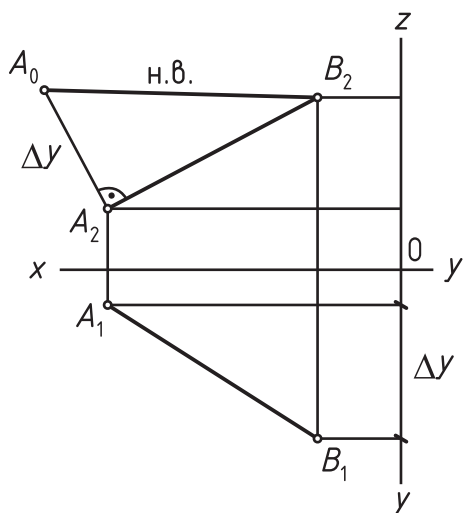


Рис. 11

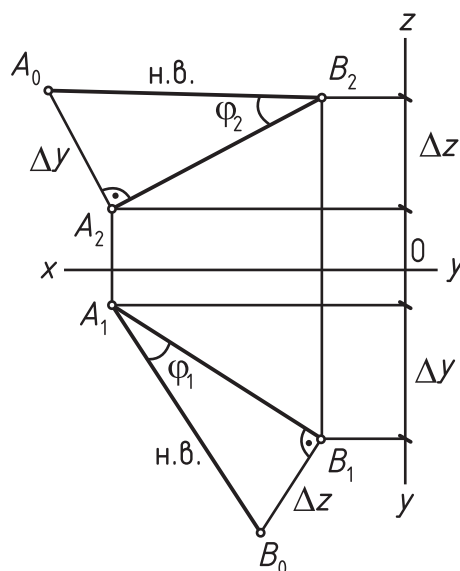


Рис. 12

Контрольные вопросы

1. Какую прямую называют прямой общего положения?
2. Как на эюре определить, принадлежит ли точка прямой?
3. Какие прямые называют прямыми уровня, проецирующими прямыми? Укажите особенности их проекций.
4. Какие точки называют следами прямой? Как их построить на эюре?
5. Какие прямые называются пересекающимися, параллельными и скрещивающимися прямыми?
6. В каком случае прямой угол, образованный двумя прямыми, проецируется на плоскость проекций без искажения?

7. Как на эпюре определить истинную величину отрезка прямой общего положения способом прямоугольного треугольника?

8. Как определить углы наклона отрезка прямой общего положения к плоскостям проекций?

Задачи

7. Построить три проекции отрезка прямой EF . Точки E и F имеют координаты: $E(40, 10, 50)$; $F(10, 30, 10)$. На этой прямой отметить точку K , которая делит отрезок прямой EF в отношении 1:3.

8. Построить три проекции отрезка прямой CD . Точка C принадлежит Π_1 , отстоит от плоскости Π_2 на 20 мм и от плоскости Π_3 — на 40 мм. Точка D принадлежит плоскости Π_3 , отстоит от плоскости Π_1 на 50 мм и от плоскости Π_2 — на 20 мм. Записать координаты этих точек.

9. Найти недостающие проекции точки K , принадлежащей прямой (рис. 13).

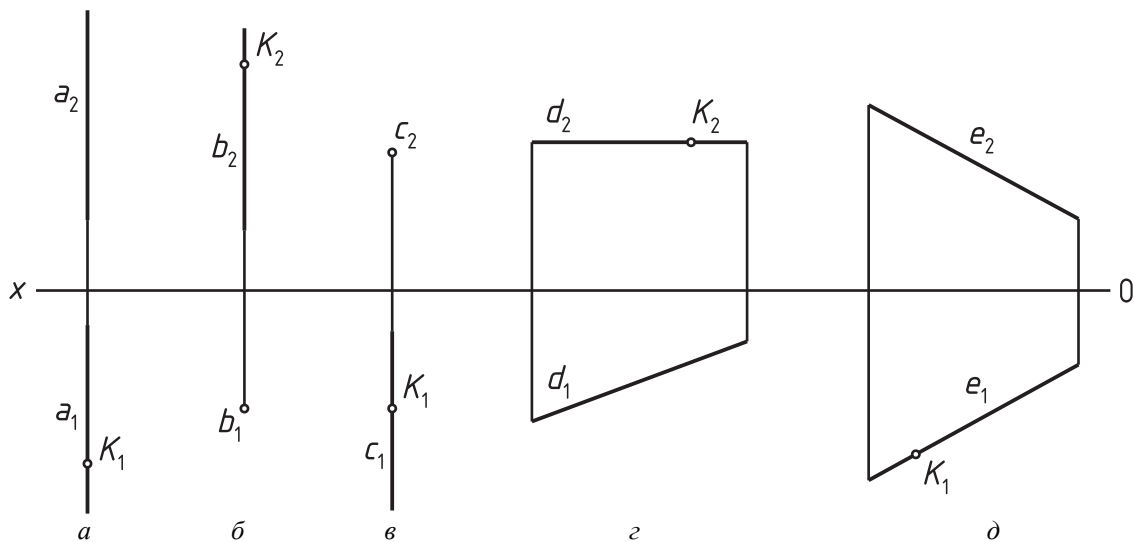


Рис. 13

10. Определить взаимное положение прямых c и d (рис. 14).

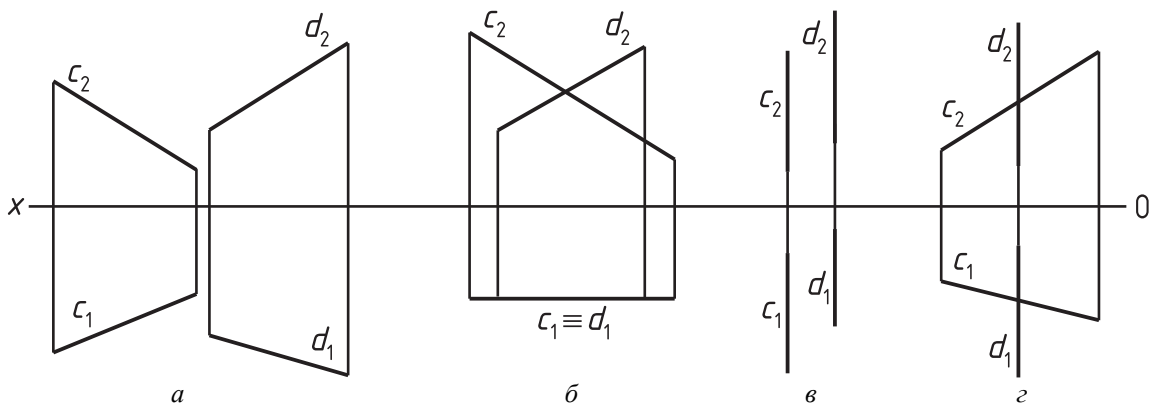


Рис. 14

11. Определить натуральную величину и углы наклона отрезка прямой AB в двух плоскостях проекций Π_1 и Π_2 (рис. 15).

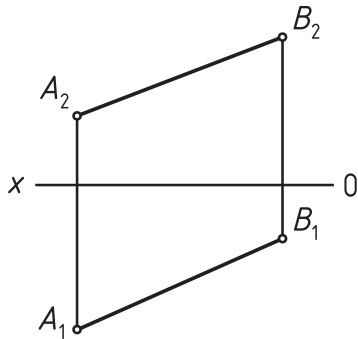


Рис. 15

12. Через точку A провести прямую a , параллельную прямой l , и прямую b , пересекающую прямую l (рис. 16).

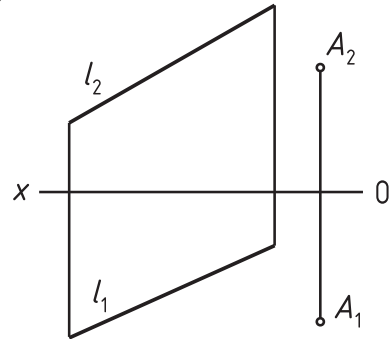


Рис. 16

13. Через точку K провести прямую, пересекающую прямые m и n (рис. 17).

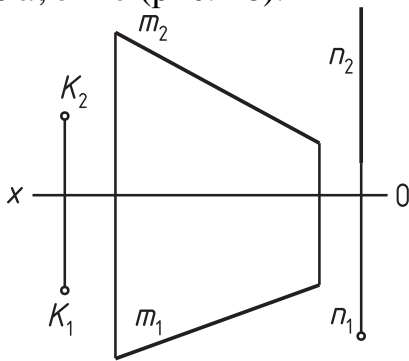


Рис. 17

14. Построить прямую l , пересекающую одновременно заданные прямые a , b и c (рис. 18).

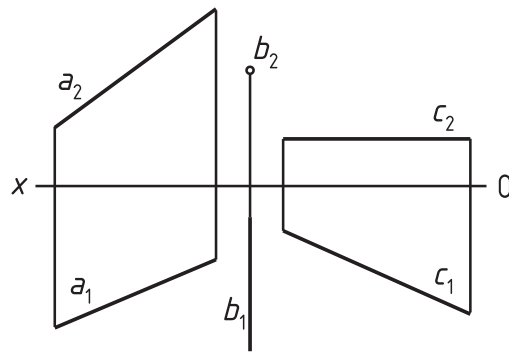


Рис. 18

15. Определить расстояние от точки K до прямой l (рис. 19).

16. Построить проекции прямоугольного треугольника ABC , катет которого BC лежит на прямой m и равен 30 мм (рис. 20).

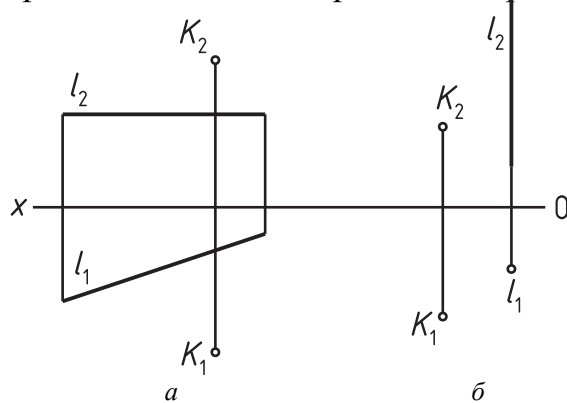


Рис. 19

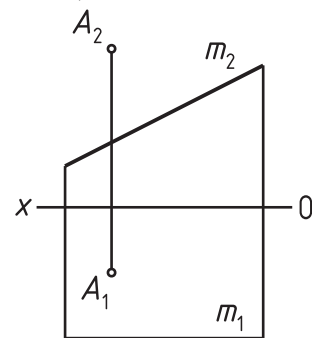


Рис. 20

17. Определить расстояние между прямыми a и b (рис. 21).

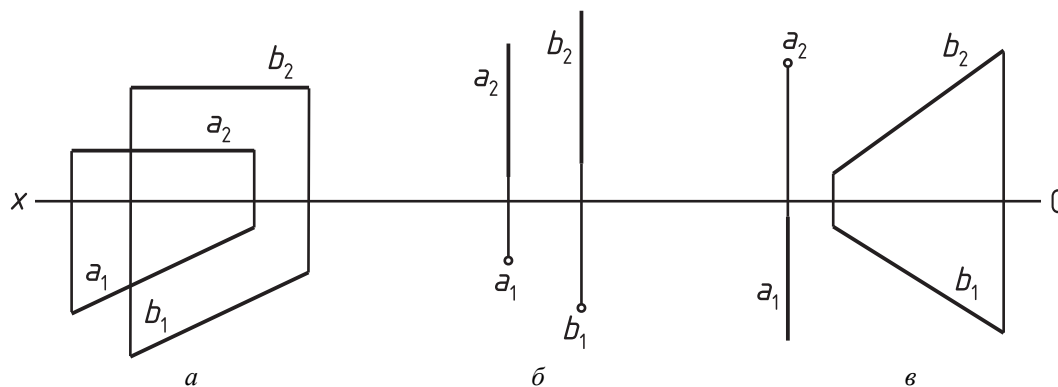


Рис. 21

18. Найти следы прямых (рис. 22).

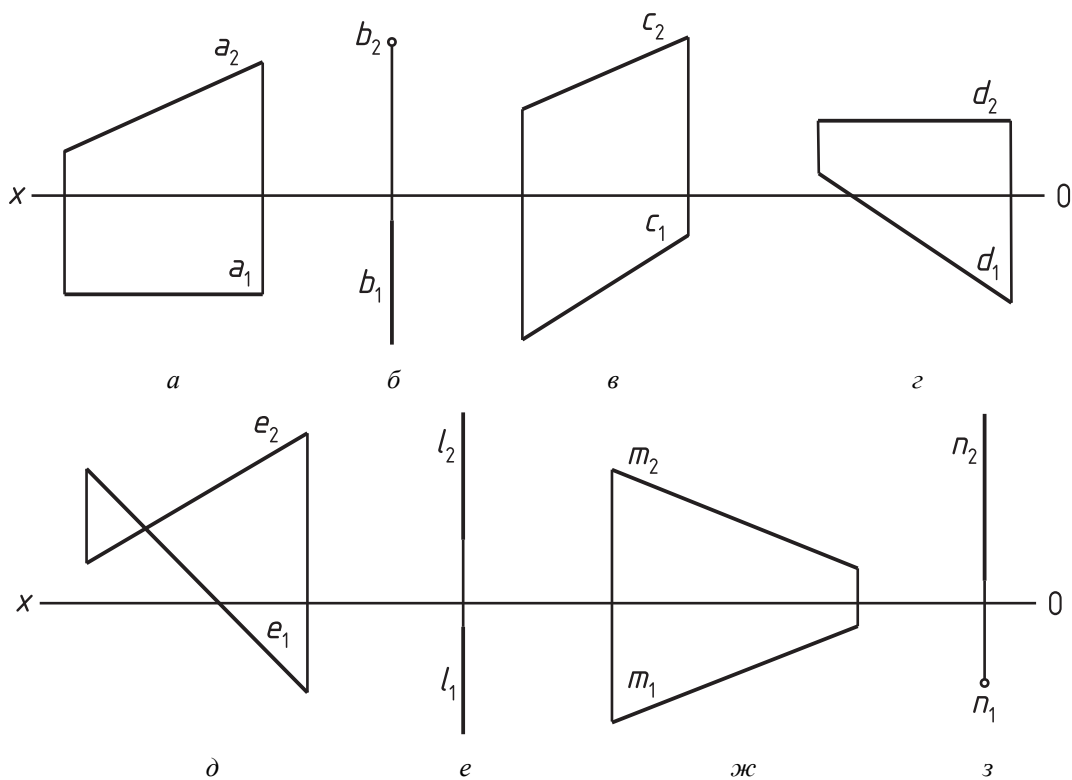


Рис. 22

Тема 3. ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ

Плоскости общего и частного положения. Главные линии плоскости. Следы плоскости. Принадлежность точки и прямой плоскости. Относительное расположение плоскостей. Относительное расположение прямой и плоскости

Теоретические основы

Плоскость может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций. Плоскость, непараллельная и перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения*. Плоскости, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называют *плоскостями частного положения*.

Различают:

1. *Плоскости уровня (дважды проецирующие)* — плоскости, параллельные одной какой-либо плоскости проекций и перпендикулярные к двум другим плоскостям проекций одновременно (*горизонтальная плоскость уровня, фронтальная плоскость уровня, профильная плоскость уровня*);

2. *Проецирующие плоскости* — плоскости, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций (*горизонтально-проецирующая плоскость, фронтально-проецирующая плоскость, профильно-проецирующая плоскость*).

К главным линиям плоскости относят линии уровня плоскости (горизонталь, фронталь, профильная прямая) и линии наклона плоскости к плоскостям проекций (линии наибольшего ската).

Горизонталь — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости и параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Обозначается h . Проекция горизонтали: h_1 — горизонтальная; h_2 — фронтальная. *Фронталь* — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости и параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 . Обозначается f . Проекция фронтали: f_1 — горизонтальная; f_2 — фронтальная. *Профильная прямая* — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости и параллельна профильной плоскости проекций Π_3 . Обозначается p . Проекция профильной прямой: p_1 — горизонтальная; p_2 — фронтальная.

Линией наклона плоскости к плоскостям проекций называют прямую, принадлежащую заданной плоскости и перпендикулярную или горизонтальную, или фронтальную плоскости.

Следом плоскости называют линию пересечения данной плоскости с какой-либо плоскостью проекций. Различают:

1. *Горизонтальный след плоскости;*
2. *Фронтальный след плоскости;*
3. *Профильный след плоскости.*

Точки пересечения следов плоскости с координатными осями x , y и z называют точками схода следов плоскости.

Принадлежность точки и прямой плоскости:

1. Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.

2. Прямая принадлежит плоскости, заданной следами, если она проходит через две точки, расположенные на следах этой плоскости. Эти две точки являются следами этой прямой.

3. Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней одну общую точку и параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

4. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.

Плоскости относительно друг друга могут быть параллельны и пересекаться. Две плоскости *параллельны*, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Плоскости *пересекаются*, то линией пересечения двух плоскостей является прямая. Для построения этой прямой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям.

Прямая относительно плоскости может занимать различные положения:

1. Прямая принадлежит плоскости (см. выше);
2. Прямая параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, принадлежащей этой плоскости;
3. Прямая пересекается с плоскостью в точке. Построить точку пересечения прямой с плоскостью — значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости.

Частным случаем пересечения прямой и плоскости является перпендикулярность этой прямой заданной плоскости. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости. Прямая перпендикулярна плоскости, заданной следами, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам этой плоскости.

Теорема о перпендикулярности прямой плоскости: если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция прямой будет перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой будет перпендикулярна фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: плоскость общего положения α (ΔABC) (рис. 23).

Выполнить: определить углы наклона φ_1 и φ_2 плоскости α (ΔABC) к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .

Порядок выполнения:

1. Определяют угол наклона φ_1 плоскости α (ΔABC) к горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Для этого в плоскости α (ΔABC) выстраивают горизонталь h и определяют ее проекции: h_1 — горизонтальную и h_2 — фронтальную. Используя теорему о проецировании прямого плоского угла, перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 выстраивают горизонтальную проекцию n_1 ($B_1 2_1$) линии наклона n плоскости α (ΔABC) к плоскости проекций Π_1 : $n \perp h$, $h \parallel \Pi_1 \Rightarrow n_1 \perp h_1$. Затем выстраивают ее фронтальную проекцию n_2 ($B_2 2_2$). Методом прямоугольного треугольника определяют натуральную величину линии наклона n плоскости α (ΔABC) к плоскости проекций Π_1 . Угол, заключенный между натуральной величиной n и его горизонтальной проекцией n_1 , есть угол наклона φ_1 плоскости α (ΔABC) к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 24).

2. Определяют угол наклона φ_2 плоскости α (ΔABC) к фронтальной плоскости проекций Π_2 . Для этого в плоскости α (ΔABC) выстраивают фронталь f и определяют ее проекции: f_1 — горизонтальную и f_2 — фронтальную.

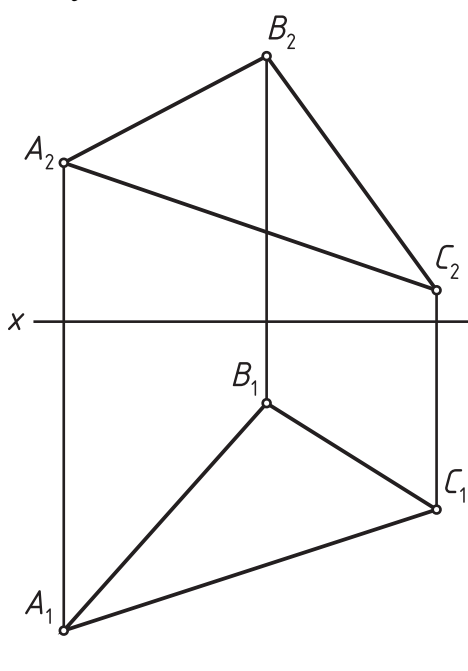


Рис. 23

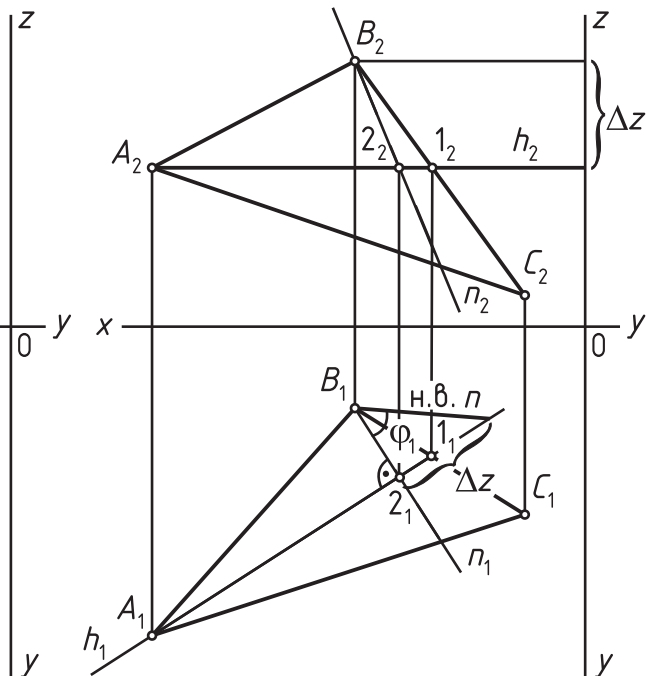


Рис. 24

Используя теорему о проецировании прямого плоского угла, перпендикулярно фронтальной проекции фронтали f_2 выстраивают фронтальную проекцию m_2 (A_2A_2) линии наклона m плоскости α (ΔABC) к плоскости проекций Π_2 : $m \perp f, f \parallel \Pi_2 \Rightarrow m_2 \perp f_2$. Затем выстраивают ее горизонтальную проекцию m_1 (A_1A_1). Методом прямоугольного треугольника определяют натуральную величину линии наклона m плоскости α (ΔABC) к плоскости проекций Π_2 . Угол, заключенный между натуральной величиной m и его фронтальной проекцией m_2 , есть угол наклона φ_2 плоскости α (ΔABC) к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 25).

3. На рис. 26 дано итоговое решение задачи по определению углов наклона φ_1 и φ_2 плоскости α (ΔABC) к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 .

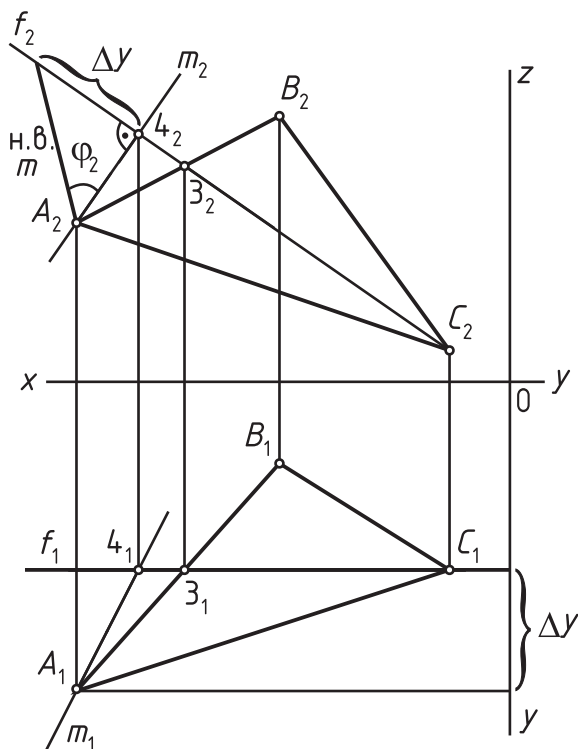


Рис. 25

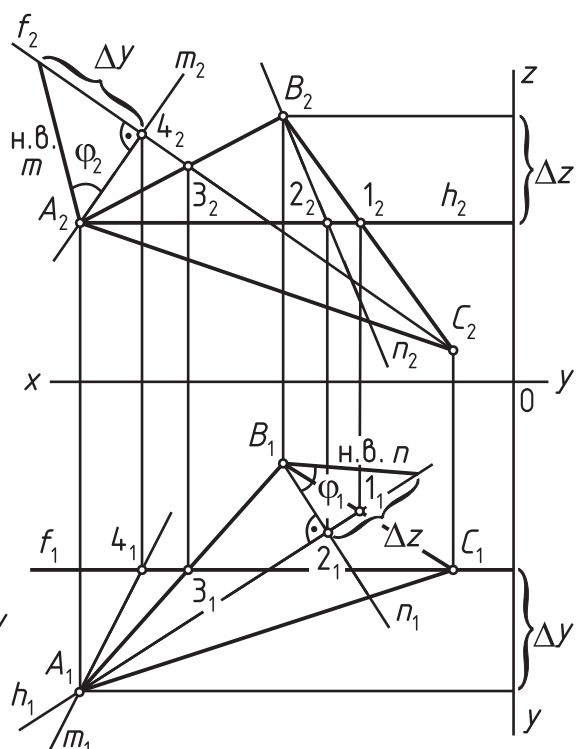


Рис. 26

Задача 2

Дано: плоскости общего положения α (ΔABC) и β (ΔDEF) (рис. 27).

Выполнить: 1) построить линию пересечения плоскостей α (ΔABC) и β (ΔDEF); 2) определить видимость отрезков данных плоскостей.

Порядок выполнения:

1. Линией пересечения плоскостей α (ΔABC) и β (ΔDEF) является прямая, две точки которой принадлежат обеим плоскостям. Определяют первую точку K . Для этого отрезок, например EF , плоскости β (ΔDEF) заклю-

чают во фронтально-проецирующую плоскость γ_{Π_2} . Выстраивают проекции линии пересечения плоскостей α (ΔABC) и γ : $1_2 2_2$ — фронтальную и $1_1 2_1$ — горизонтальную. Там, где горизонтальная проекция ($1_1 2_1$) линии пересечения α (ΔABC) и γ пересекает горизонтальную проекцию отрезка $E_1 F_1$, определяют горизонтальную проекцию K_1 точки K . Затем в проекционной связи определяют ее фронтальную проекцию K_2 (рис. 28).

2. Определяют вторую точку L . Для этого отрезок, например AB , плоскости α (ΔABC) заключают в горизонтально-проецирующую плоскость δ_{Π_1} . Выстраивают проекции линии пересечения плоскостей β (ΔDEF) и δ : $3_1 4_1$ — горизонтальную и $3_2 4_2$ — фронтальную. Там, где фронтальная проекция ($3_2 4_2$) линии пересечения β (ΔDEF) и δ , пересекает фронтальную проекцию отрезка $A_2 B_2$, определяют фронтальную проекцию L_2 точки L . Затем в проекционной связи определяют ее горизонтальную проекцию L_1 (рис. 29).

3. Соединяя одноименные проекции точек K и L , выстраивают линию пересечения плоскостей α (ΔABC) и β (ΔDEF) (рис. 30).

4. Определяют видимость отсеков плоскостей α (ΔABC) и β (ΔDEF). Применяя метод конкурирующих точек, определяют видимость отсеков плоскостей в горизонтальной плоскости проекций — точки 3 и 5 (рис. 31), затем во фронтальной плоскости проекций — точки 1 и 6 (рис. 32). Если для определения видимости отсеков плоскостей двух точек недостаточно, берут необходимое и достаточное их количество.

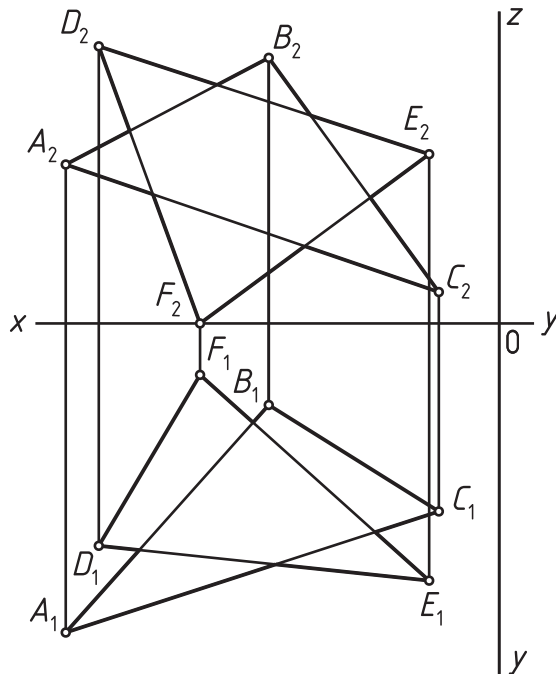


Рис. 27

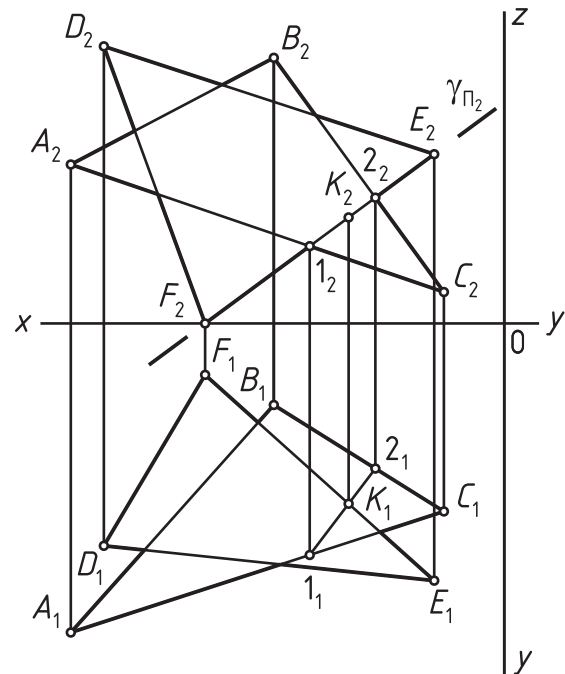


Рис. 28

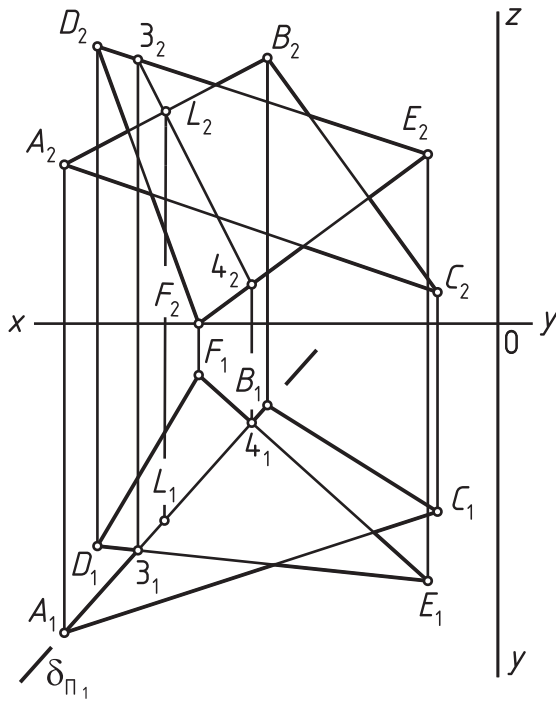


Рис. 29

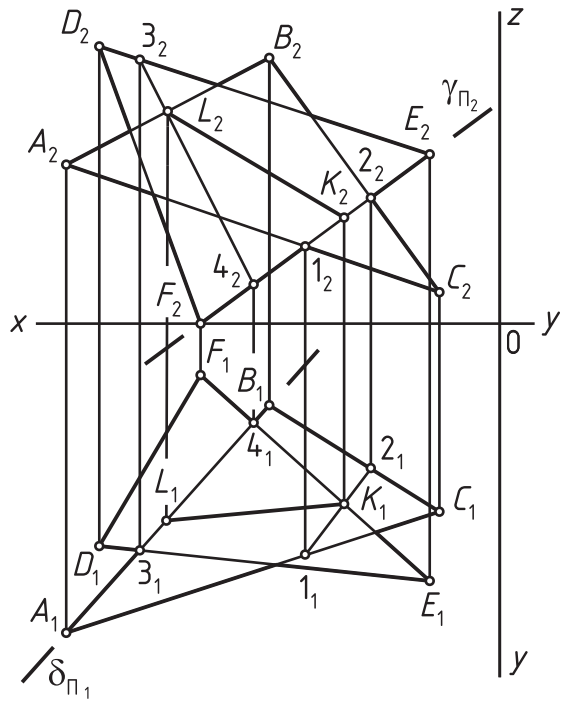


Рис. 30

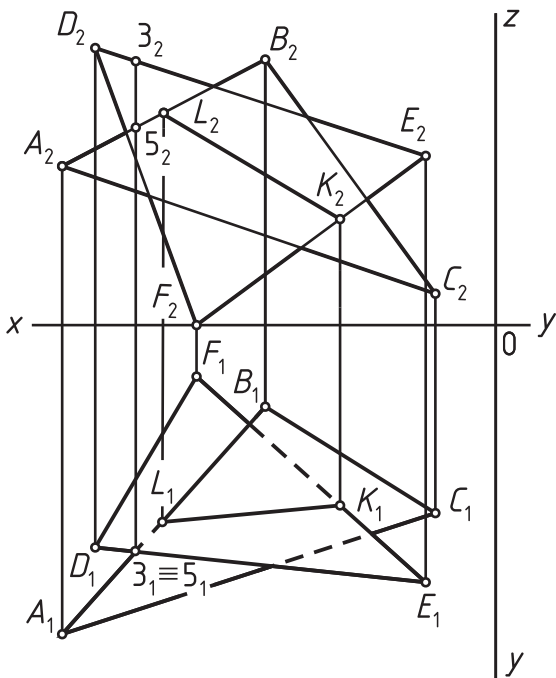


Рис. 31

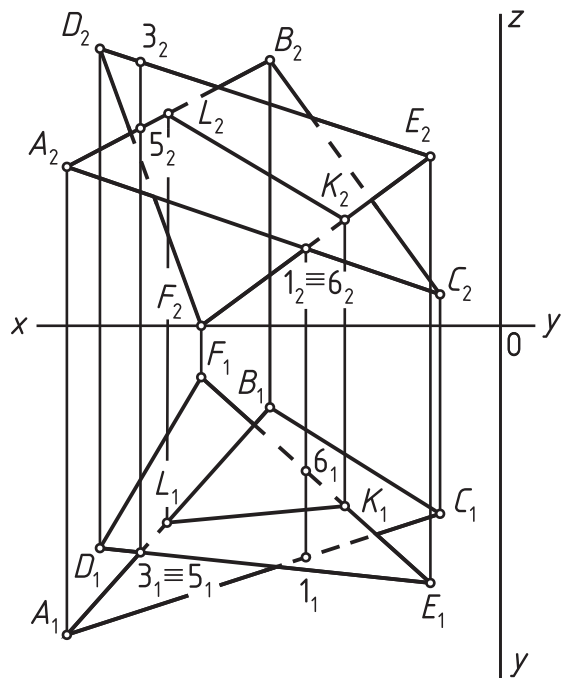


Рис. 32

Задача 3

Дано: плоскость общего положения α (ΔABC) и точка S (рис. 33).

Выполнить: определить расстояние от точки S до плоскости α (ΔABC).

Порядок выполнения:

1. Кратчайшим расстоянием от точки до плоскости является перпендикуляр. Используя теорему о перпендикулярности прямой плоскости, выстраивают перпендикуляр l из точки S на плоскость $\alpha(\Delta ABC)$: $l \perp \alpha(\Delta ABC) \Rightarrow l_1 \perp h_1^\alpha$, а $l_2 \perp f_2^\alpha$. Для этого в плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ проводят проекции горизонтали и фронтали плоскости. Перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 из горизонтальной проекции точки S_1 выстраивают горизонтальную проекцию перпендикуляра l_1 , а перпендикулярно фронтальной проекции фронтали f_2 из фронтальной проекции точки S_2 — фронтальную проекцию перпендикуляра l_2 (рис. 34).

2. Определяют точку пересечения перпендикуляра l с плоскостью $\alpha(\Delta ABC)$. Для этого прямую l заключают в горизонтально-проецирующую плоскость β_{Π_1} . Выстраивают проекции линии пересечения плоскостей $\alpha(\Delta ABC)$ и β : $3_1 4_1$ — горизонтальную и $3_2 4_2$ — фронтальную.

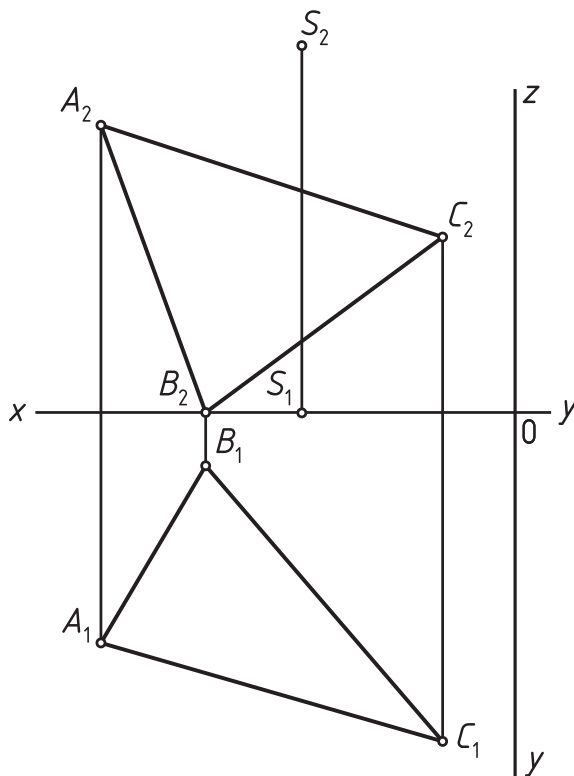


Рис. 33

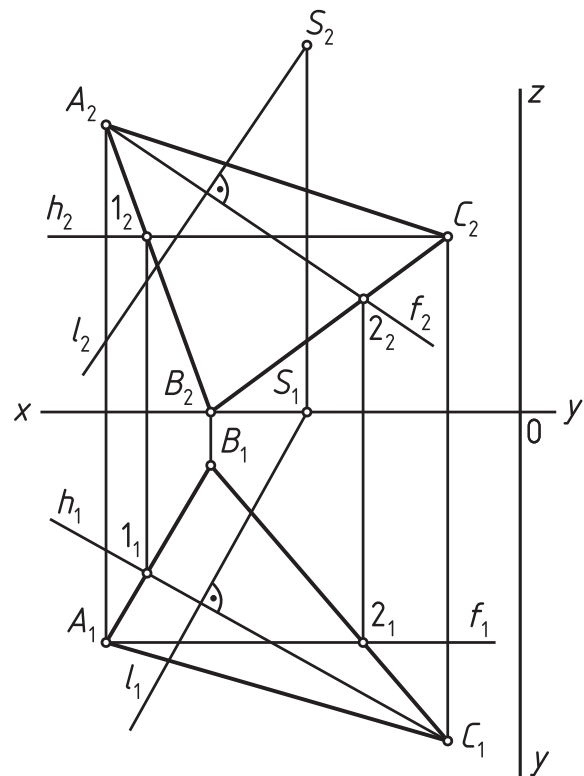


Рис. 34

Там, где фронтальная проекция ($3_2 4_2$) линии пересечения плоскостей α (ΔABC) и β пересекает фронтальную проекцию прямой l_2 , определяют K_2 — фронтальную проекцию точки K пересечения перпендикуляра l с плоскостью α (ΔABC). Затем в проекционной связи определяют ее горизонтальную проекцию K_1 (рис. 35).

3. Определяют натуральную величину искомого расстояния от точки S до плоскости α (ΔABC). В данном примере натуральную величину определяют способом вращения (см. тема 4). Однако допустимо применение и любого другого известного способа. Ось вращения i выбирают перпендикулярно фронтальной плоскости проекций Π_2 в точке S ($S_2 \equiv i_2$). Фронтальную проекцию точки K_2 вращают по дуге, горизонтальную ее проекцию K_1 перемещают по прямой параллельной оси x . Величина $S_1 K'_1$ является искомой (рис. 36).

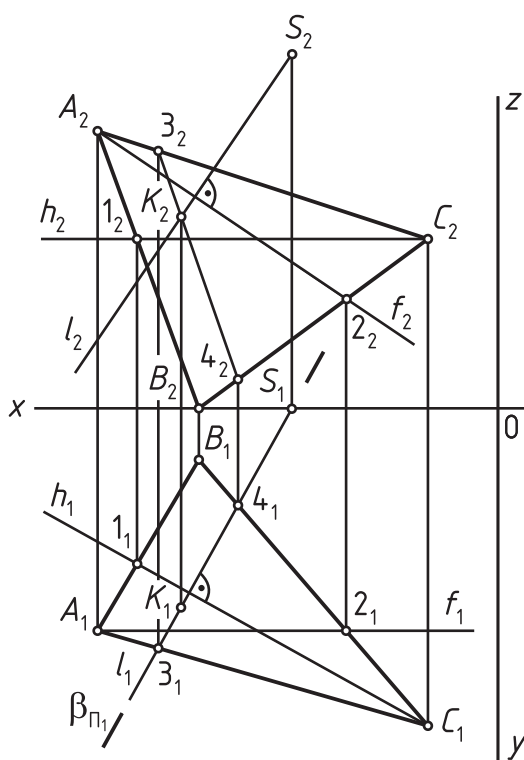


Рис. 35

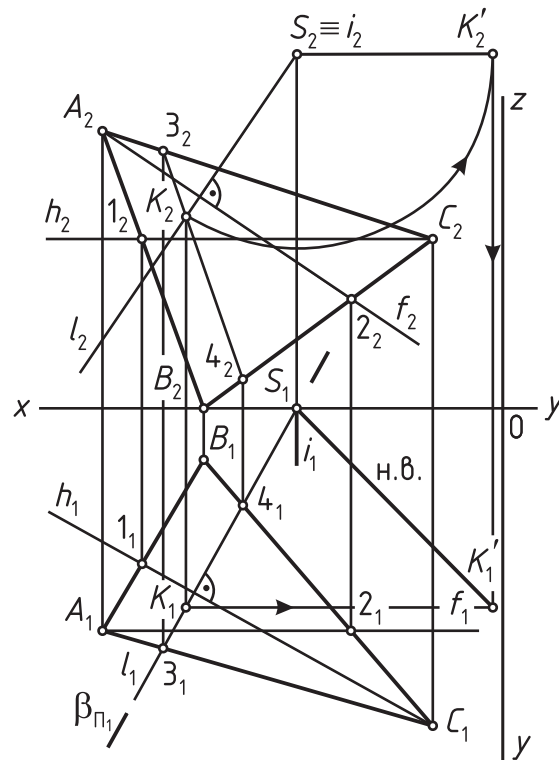


Рис. 36

Контрольные вопросы

1. Какими способами можно задать плоскость и как ее изобразить на эюпуре при каждом способе задания?
2. Что такое следы плоскости? Где расположены проекции следов плоскости?

3. Как на эюре построить следы плоскости, заданной каким-либо другим способом?
4. Как на эюре определить, принадлежит ли заданная точка заданной плоскости?
5. Какие плоскости называют плоскостями общего положения и как изображаются принадлежащие им геометрические фигуры на эюре?
6. Что характерно для чертежа прямой, принадлежащей плоскости общего положения, в случае задания плоскости а) следами; б) другим способом?
7. Какие плоскости называют проецирующими и как изображаются принадлежащие им геометрические фигуры на эюре?
8. Какие плоскости называют плоскостями уровня и как изображаются на эюре принадлежащие им геометрические образы (точки, линии, плоские фигуры)?
9. Какие главные линии плоскости вам известны? Как они подразделяются? Дайте определения.
10. Как на эюре построить в заданной плоскости горизонталь, фронталь (в том числе в плоскости заданный следами)?
11. Как на эюре построить линию наибольшего наклона заданной плоскости к плоскости Π_1 , к плоскости Π_2 ?
12. Как с помощью линий наибольшего наклона плоскости определяются углы наклона заданной плоскости к плоскостям проекций?
13. Назовите условие параллельности плоскостей.
14. Как на эюре построить плоскость, параллельную заданной и проходящую через заданную точку?
15. Как на эюре можно определить, параллельны ли заданные плоскости?
16. Какова последовательность решения задачи для определения линии пересечения плоскостей общего положения?
17. Чем определяется линия пересечения плоскостей, если плоскости заданы следами?
18. Как построить линию пересечения двух плоскостей, если одна из них проецирующая?
19. Назовите условие параллельности прямой и плоскости.
20. Как на эюре определить, параллельны ли между собой заданные прямая и плоскость?
21. Как построить прямую, одновременно параллельную двум плоскостям?
22. Какова последовательность решения задачи для определения точки пересечения прямой с плоскостью?
23. Как определить видимость участков прямой, разделенных точкой пересечения?
24. Как на эюре определяется точка пересечения прямой с плоскостью, если: а) прямая общего положения и плоскость проецирующая; б) прямая проецирующая и плоскость общего положения; в) прямая и плоскость общего положения?

25. Назовите условие перпендикулярности прямой и плоскости.
 26. Как на эюре строят проекции прямой, перпендикулярной к плоскости, если плоскость задана: а) плоской фигурой; б) следами; в) общего положения; г) частного положения?
 27. Приведите алгоритм решения задачи на определение расстояния от точки до плоскости?
 28. Назовите условие перпендикулярности двух плоскостей.

Задачи

19. Заключить прямую l в плоскости частного положения (рис. 37).
 20. Заключить прямую a в плоскость общего положения (рис. 38).

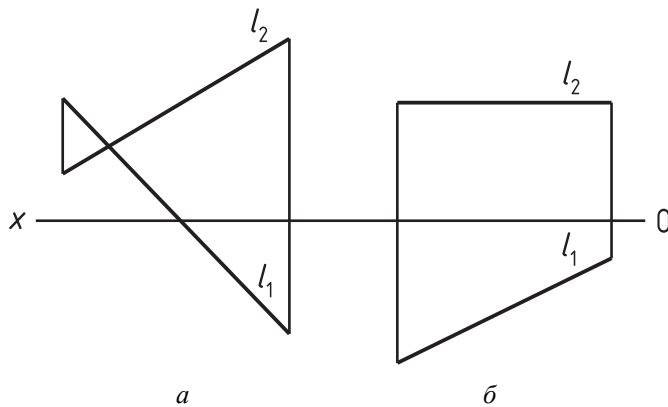


Рис. 37

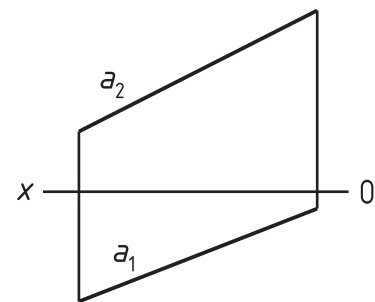


Рис. 38

21. Определить натуральную величину и углы наклона плоскости SBC в двух плоскостях проекций Π_1 и Π_2 (рис. 39).
 22. Провести биссектрису угла D треугольника DEF (рис. 40).

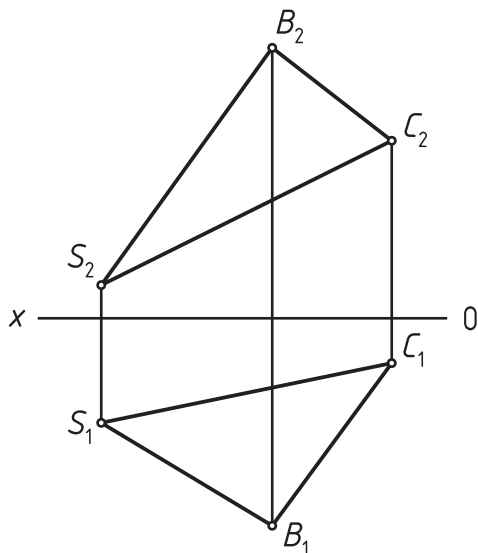


Рис. 39

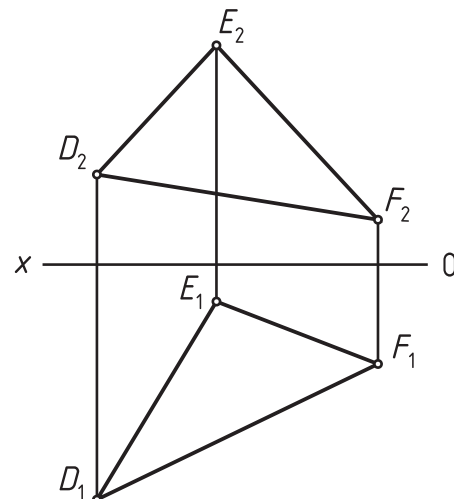


Рис. 40

23. В плоскости α ($\triangle DEF$) провести геометрическое место точек, удаленных от плоскости Π_1 на 45 мм и от плоскости Π_2 — на 25 мм (рис. 41).

24. В плоскости α провести геометрическое место точек, удаленных от плоскости Π_2 на 15 мм и от плоскости Π_1 — на 40 мм (рис. 42).

25. Построить в плоскости α (A, m) через точку A проекции горизонтали h плоскости, а через точку B — проекции фронтали f плоскости (рис. 43).

26. Построить горизонтальную проекцию фронтали f плоскости α (рис. 44).

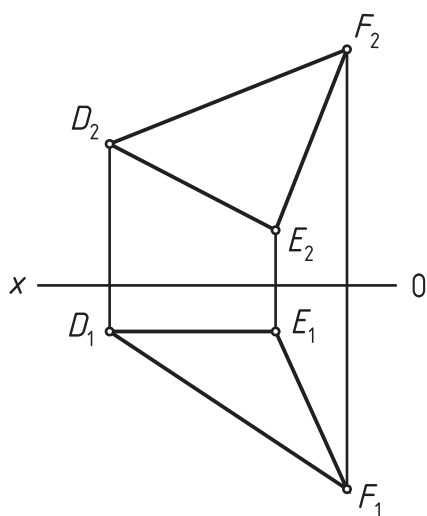


Рис. 41

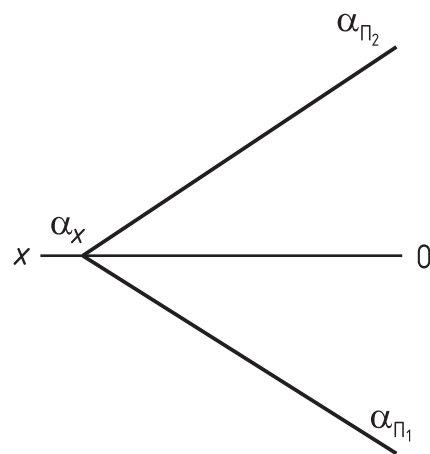


Рис. 42

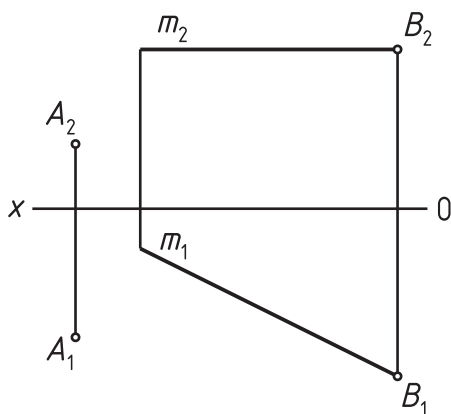


Рис. 43

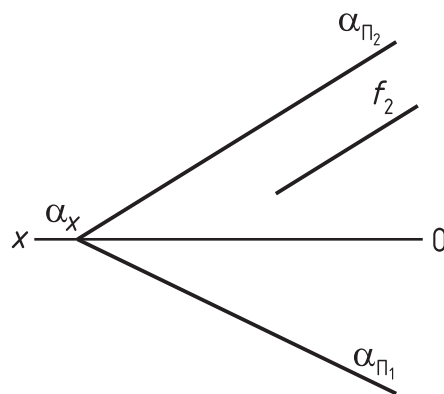


Рис. 44

27. Построить в заданных плоскостях через точку A проекции горизонтали h и фронтали f плоскости (рис. 45).

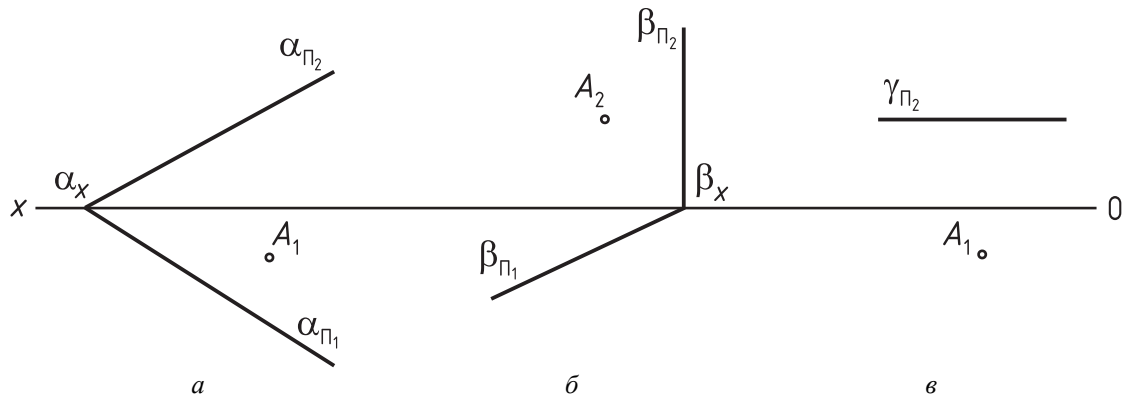


Рис. 45

28. Перейти от заданной плоскости к плоскости α , заданной следами (рис. 46).

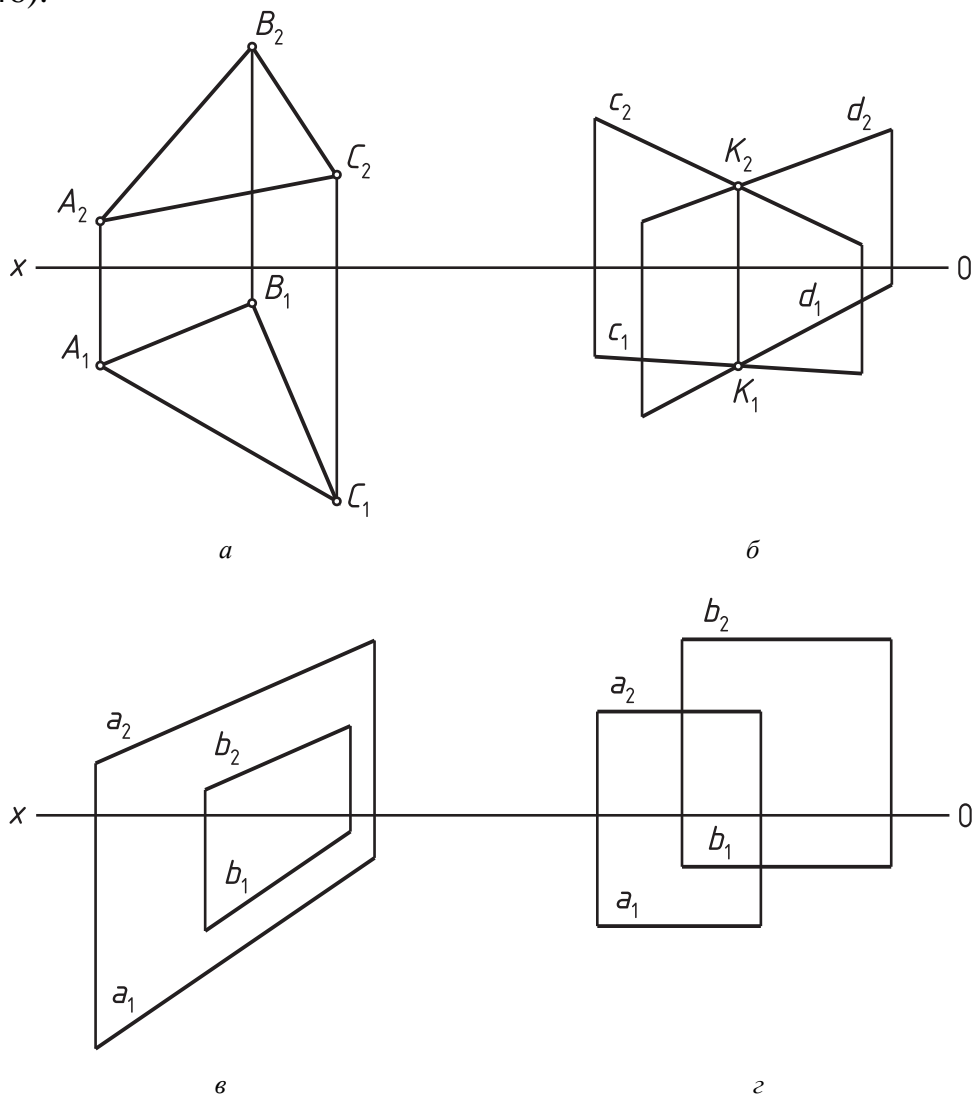


Рис. 46

29. Построить недостающие проекции точек D , E и F , принадлежащих плоскости α (рис. 47).

30. Построить фронтальную проекцию треугольника ABC , принадлежащего плоскости β (рис. 48).

31. Построить недостающие проекции точки K и прямой l , принадлежащих плоскости α (ΔABC) (рис. 49).

32. Достроить горизонтальную проекцию плоской фигуры $ABCDE$. Определить углы наклона данной плоскости к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 (рис. 50).

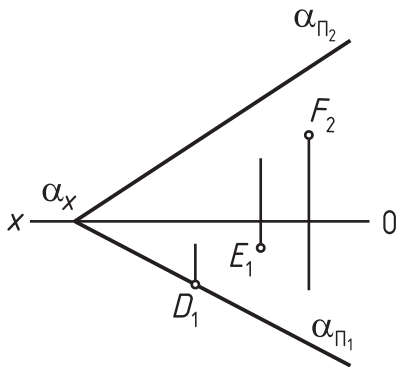


Рис. 47

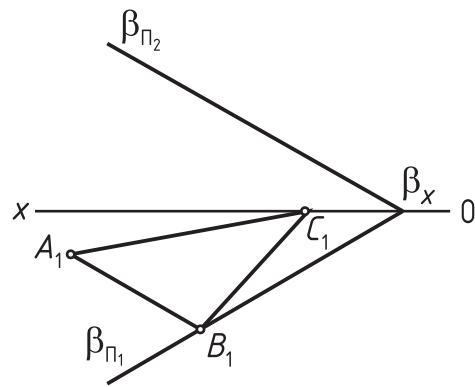


Рис. 48

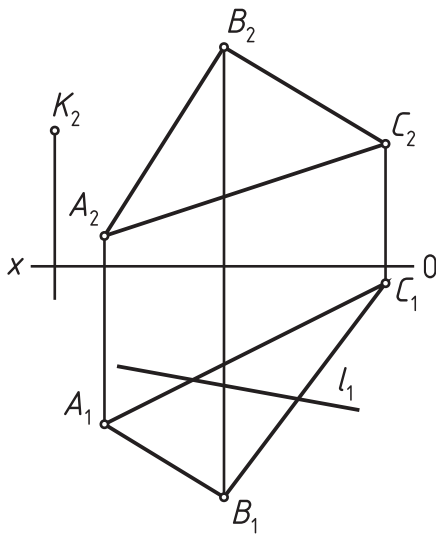


Рис. 49

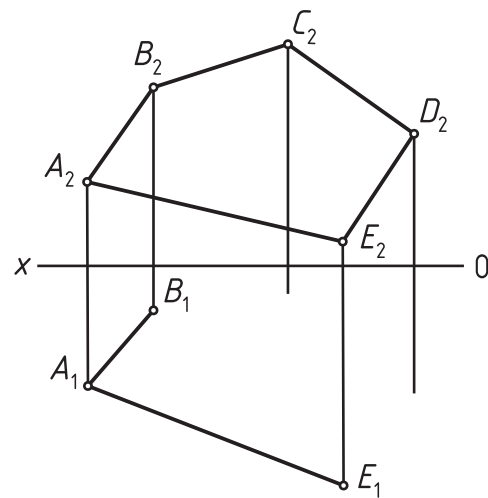


Рис. 50

33. Построить горизонтальную проекцию прямой l , принадлежащей плоскости α ($a \cap b$) (рис. 51).

34. Построить фронтальную проекцию прямой m , принадлежащей плоскости α (рис. 52).

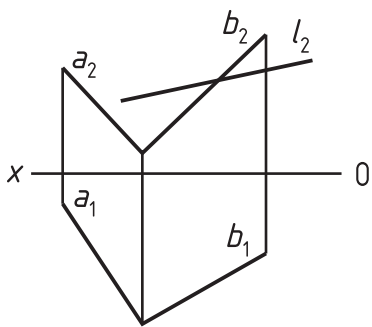


Рис. 51

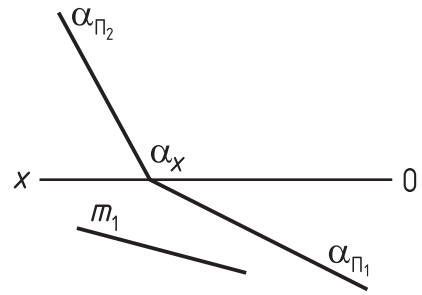


Рис. 52

35. Определить точку пересечения прямой с плоскостью (рис. 53).

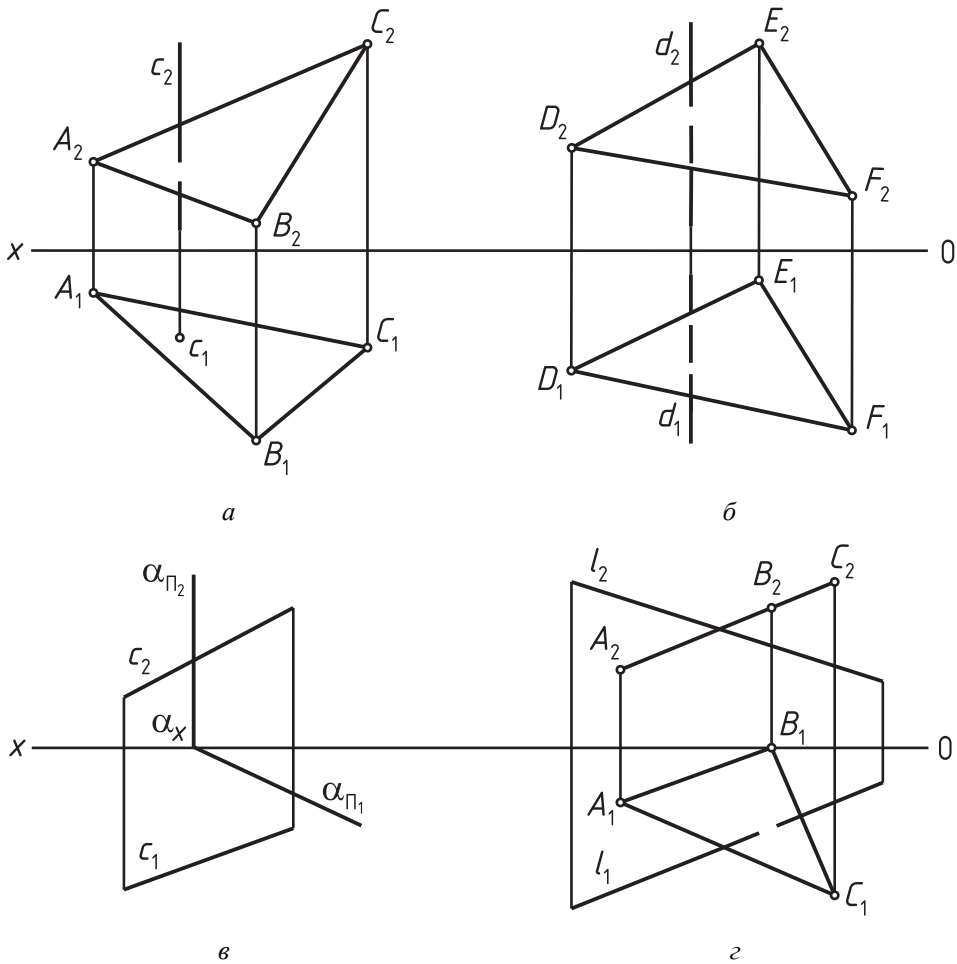


Рис. 53 (начало)

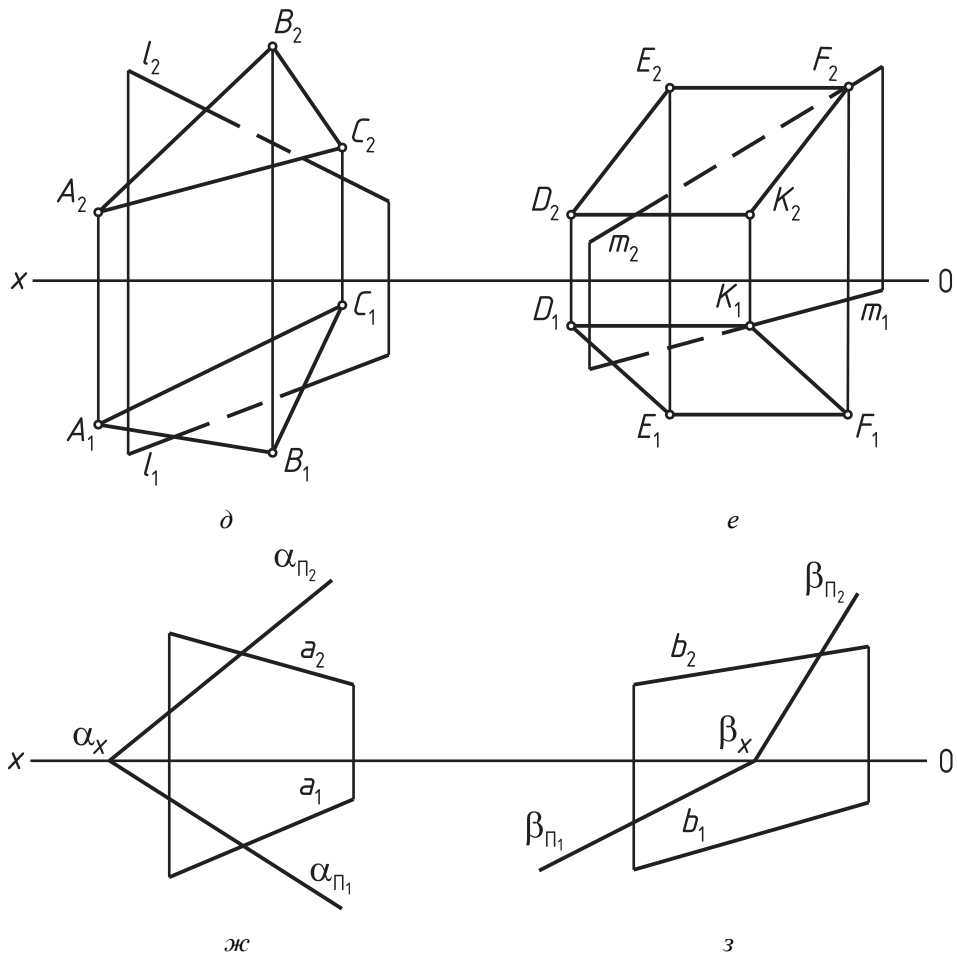


Рис. 53 (окончание)

36. Построить линию пересечения плоскостей α (ΔABC) и β (ΔDEF). Определить видимость отрезков плоскостей (рис. 54).

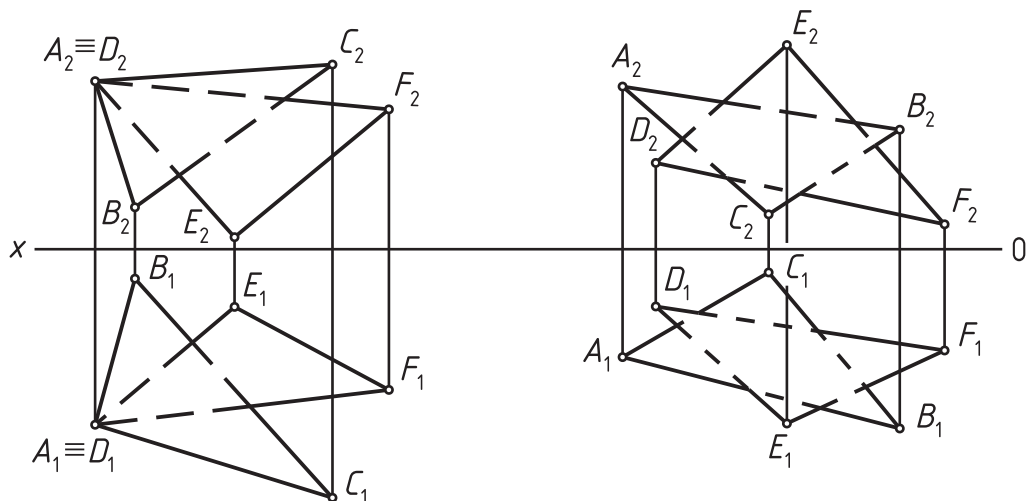


Рис. 54

37. Построить линию пересечения плоскостей, заданных плоской фигурой и следами (рис. 55).

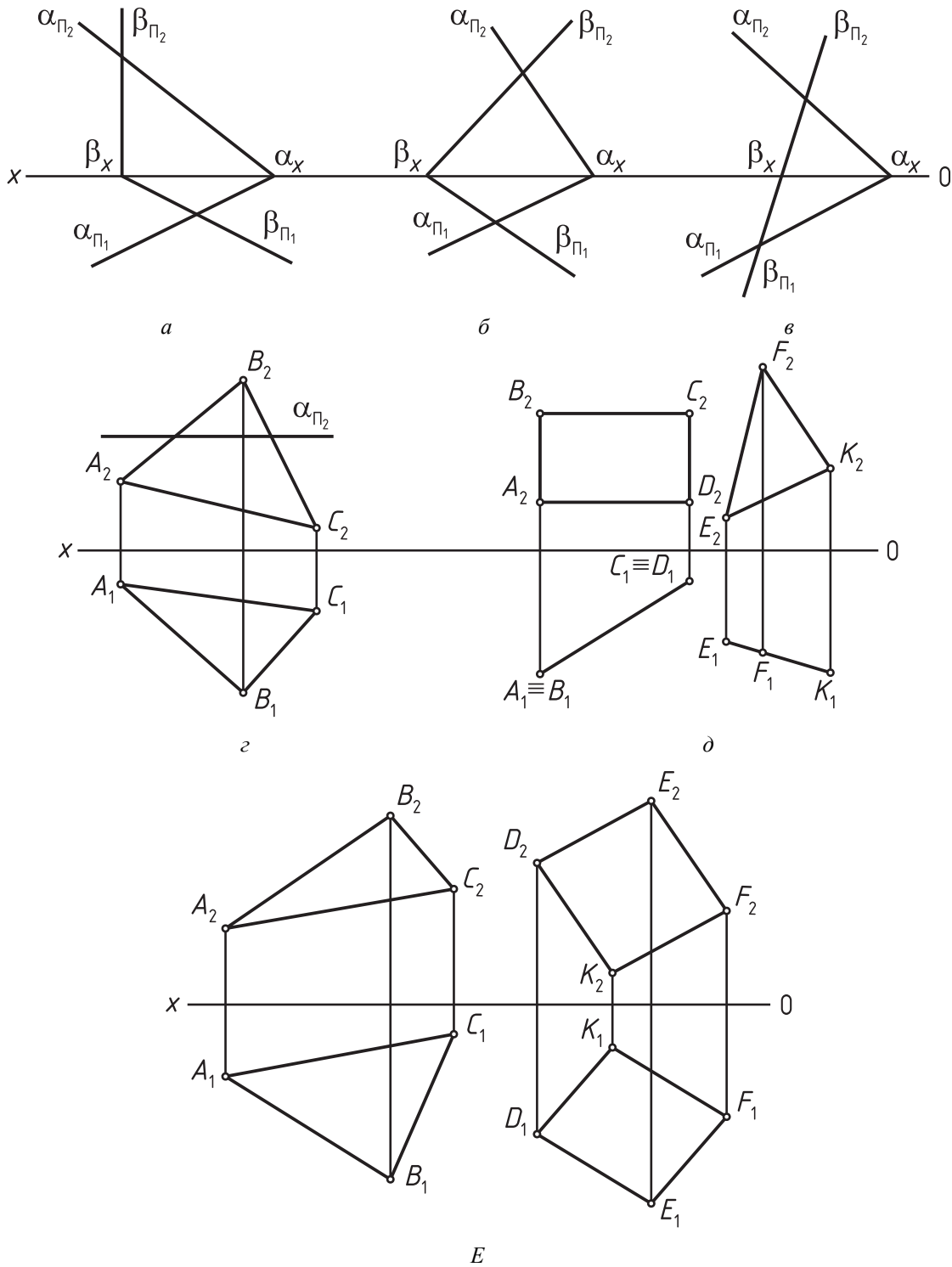


Рис. 55 (начало)

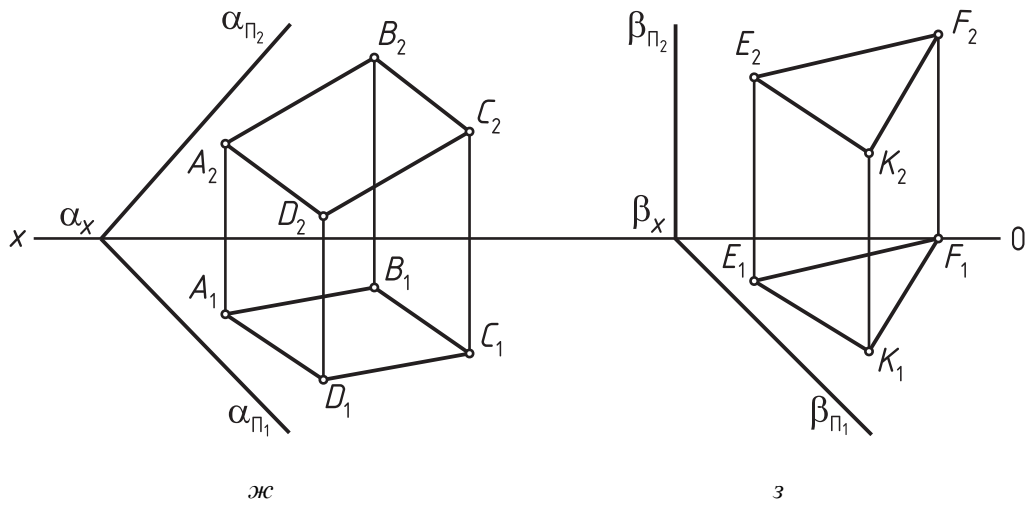


Рис. 55 (окончание)

38. Определить, параллельны ли прямая a и плоскость α (рис. 56).
 39. Достроить горизонтальную проекцию прямой b , параллельной плоскости β (рис. 57).

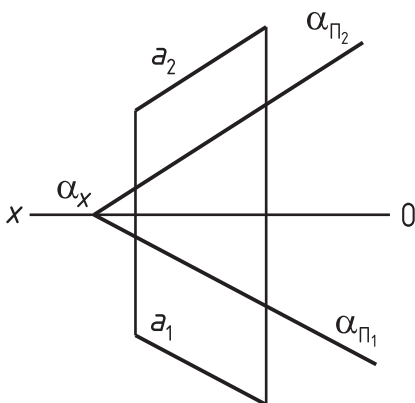


Рис. 56

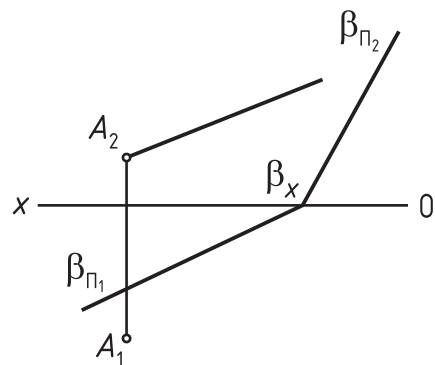


Рис. 57

40. Через точку K провести прямую, параллельную плоскости Π_2 и параллельную плоскости α ($c \parallel d$) (рис. 58).
 41. Через точку E провести прямую, параллельную плоскости β и плоскости γ ($\square ABCD$) (рис. 59).
 42. Через точку A провести прямую m , параллельную плоскости α , и прямую n , перпендикулярную плоскости α (рис. 60).

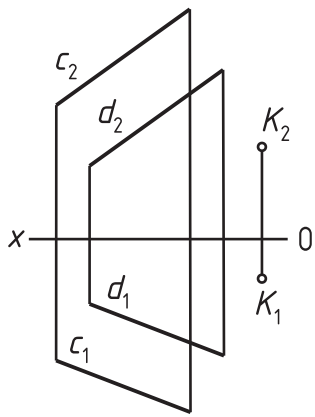


Рис. 58

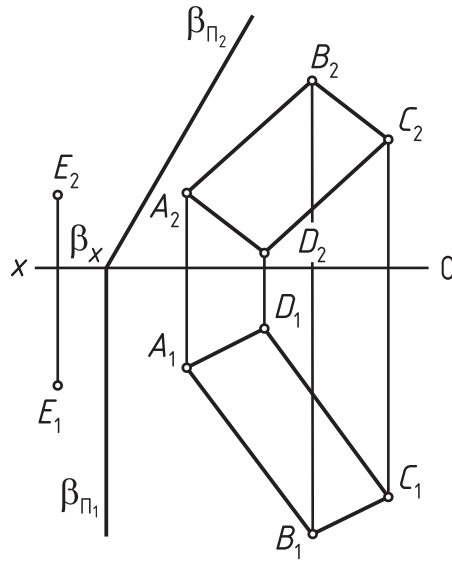


Рис. 59

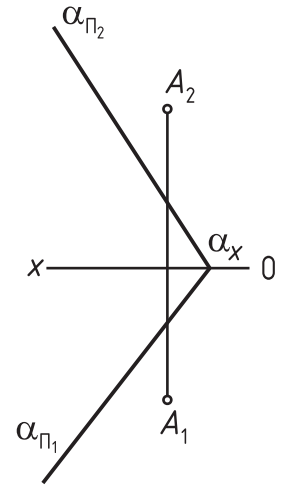


Рис. 60

43. Определить расстояние от точки K до заданной плоскости (рис. 61).

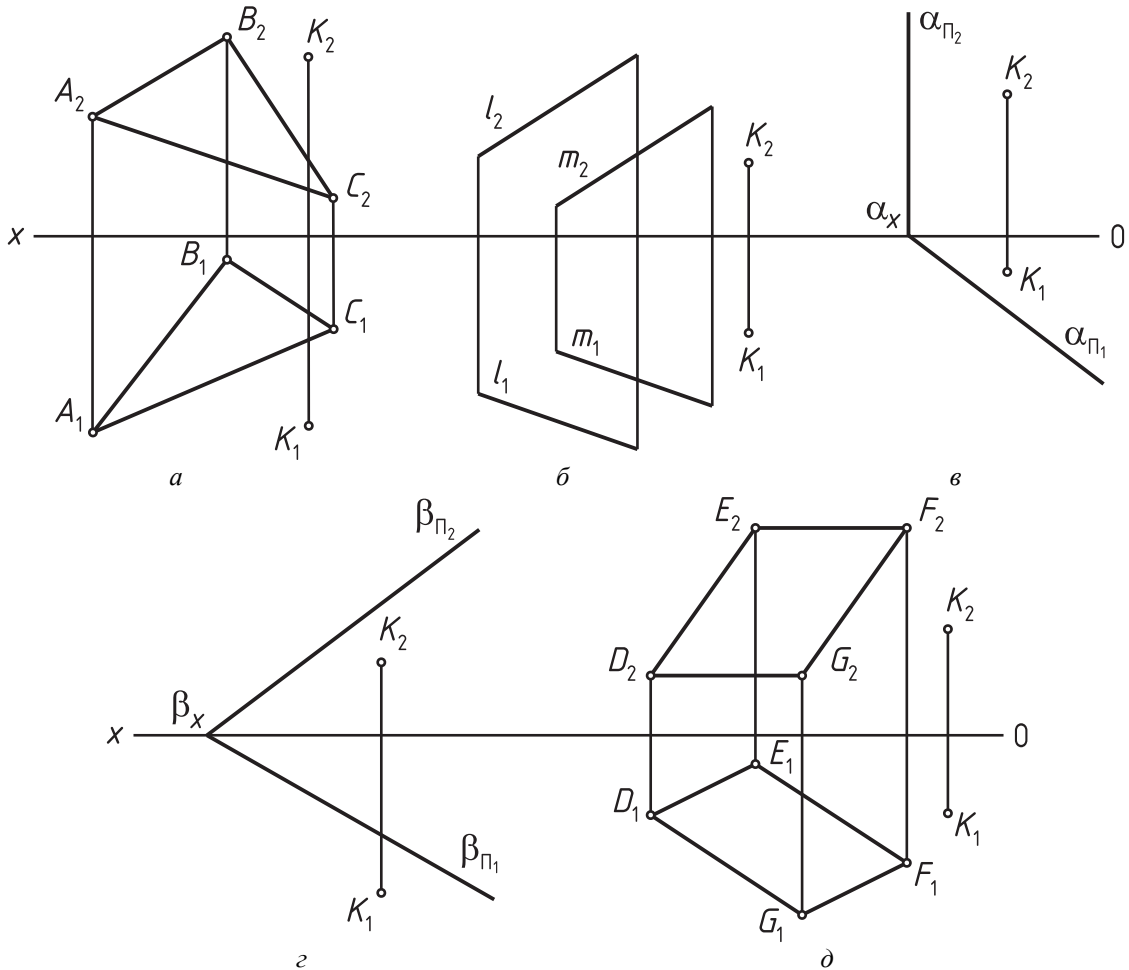


Рис. 61

44. Построить проекции прямой призмы высотой 25 мм с основанием ΔABC (рис. 62).

45. Из точки, принадлежащей плоскости, к заданной плоскости восстановить перпендикуляр длиной 20 мм (рис. 63).

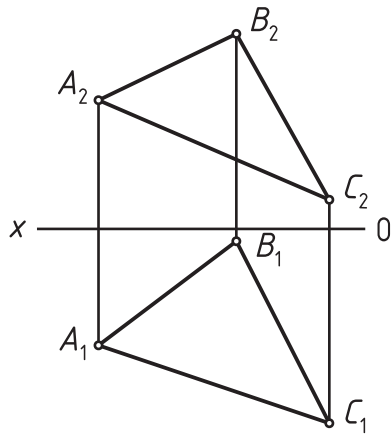


Рис. 62

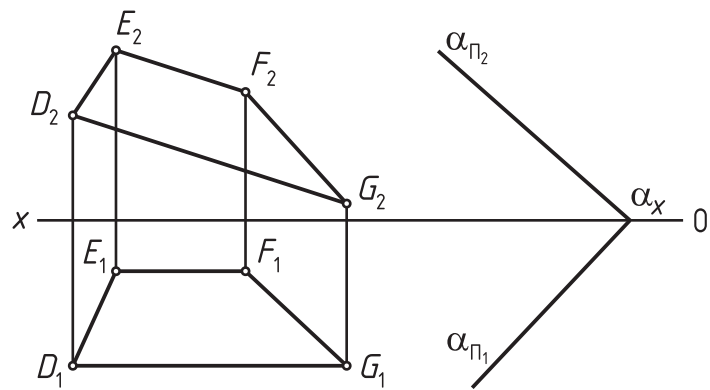


Рис. 63

46. Через точку K провести плоскость, параллельную заданной плоскости (рис. 64).

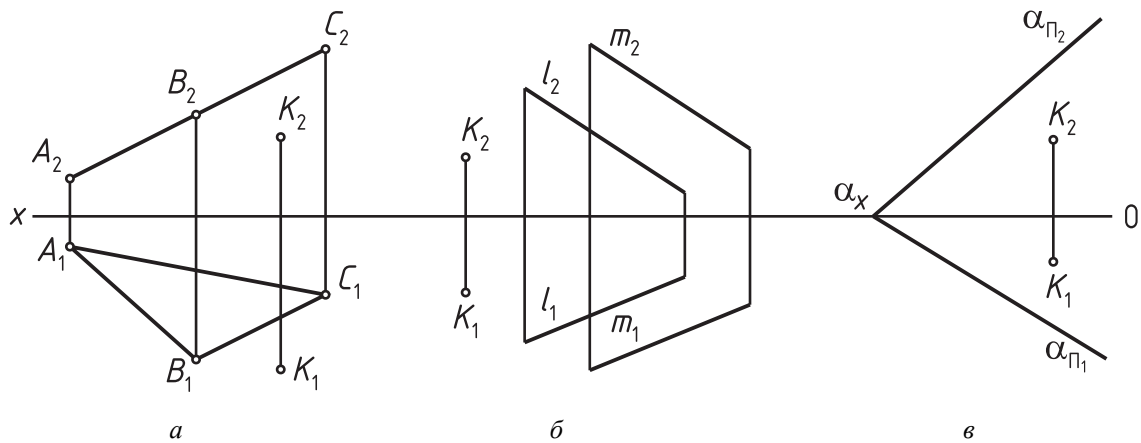


Рис. 64

47. Через прямую a провести плоскость, параллельную прямой b (рис. 65).

48. Через прямую l провести плоскость, параллельную плоскости α (рис. 66).

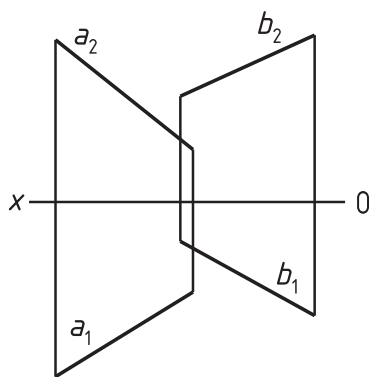


Рис. 65

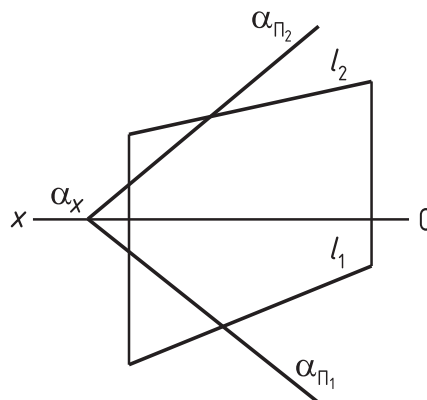


Рис. 66

49. Через точку A построить плоскость, перпендикулярную прямой c (рис. 67).

50. Через точку D провести плоскость, перпендикулярную заданной плоскости (рис. 68).

51. Через точку K провести плоскость, перпендикулярную двум заданным плоскостям (рис. 69).

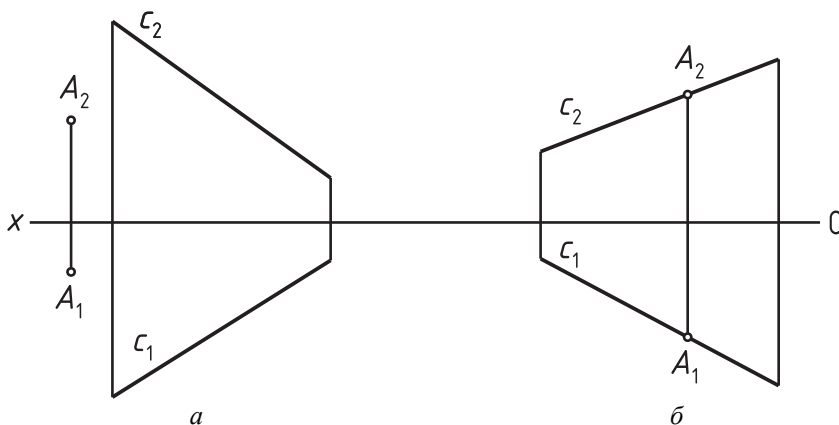


Рис. 67

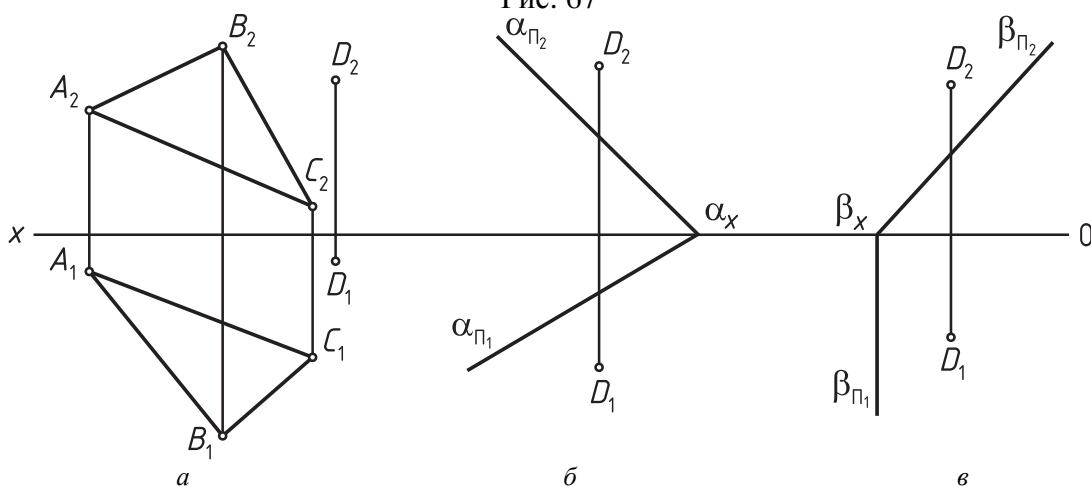


Рис. 68

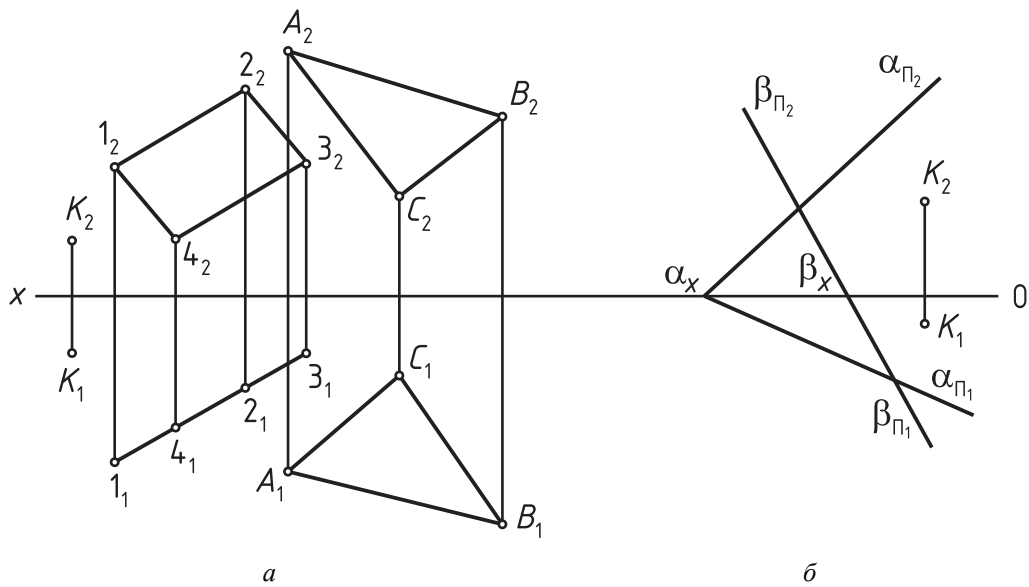


Рис. 69

58. Через прямую AB построить плоскость перпендикулярную заданной плоскости (рис. 70).

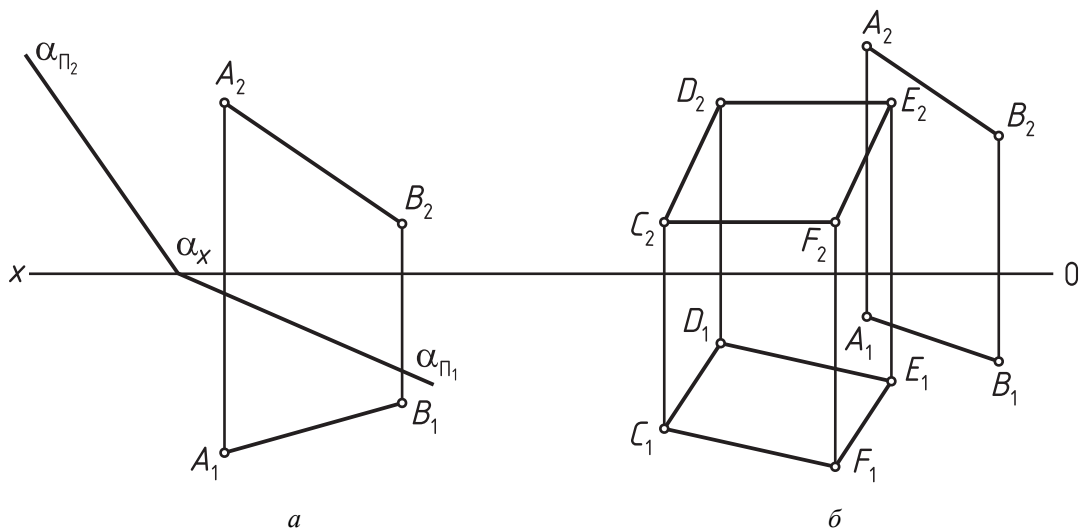


Рис. 70

59. Выяснить, параллельны ли плоскости α и β (ΔABC) (рис. 71).

60. Построить недостающие проекции треугольника DEF , плоскость которого параллельна заданной плоскости (рис. 72).

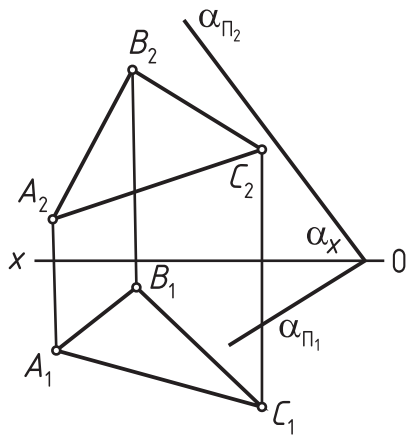


Рис. 71

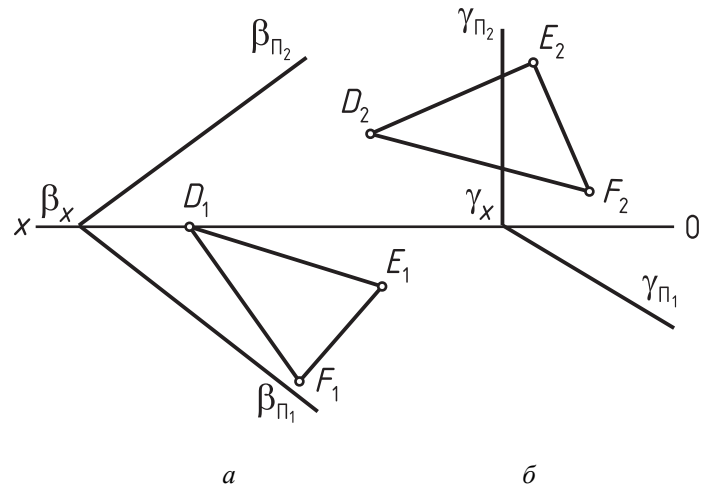


Рис. 72

61. Построить плоскость параллельно заданной плоскости, и отстоящей от нее на 30 мм (рис. 73).

62. Построить недостающий след плоскости γ , параллельной плоскости β (рис. 74).

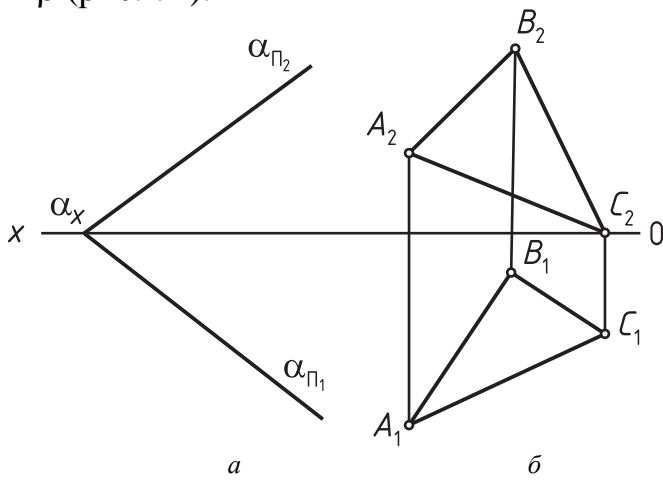


Рис. 73

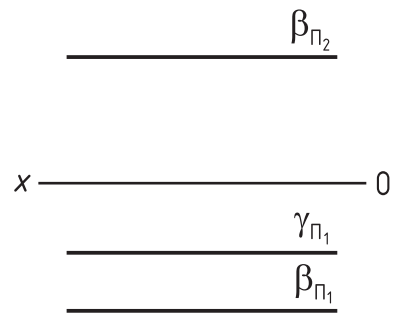


Рис. 74

Тема 4. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Способ замены плоскостей проекций. Способ вращения

Теоретические основы

Преобразовать чертеж — значит построить новые дополнительные проекции так, чтобы заданные геометрические фигуры оказались в более выгодном положении относительно плоскостей проекций, а именно в частном — проецирующем или параллельном.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному при ортогональном проецировании можно осуществить различными способами. При решении метрических задач преимущественно пользуются двумя способами преобразования проекций — способом замены плоскостей проекций и способом вращения.

В способе замены плоскостей проекций положение проецируемой геометрической фигуры остается неизменным относительно плоскостей проекций, изменяется только положение одной из плоскостей проекций. При этом, *расстояние от новой оси проекции до новой проекции точки равно расстоянию от заменяемой оси проекции до заменяемой проекции точки.*

В способе вращения вокруг проецирующих прямых положение плоскостей проекций остается неизменным, меняется положение геометрической фигуры относительно плоскостей проекций. *При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к какой-либо плоскости проекций, одна из проекций точки описывает окружность, другая ее проекция перемещается по прямой, параллельной оси x .*

В способе вращения вокруг прямых уровня при вращении точки вокруг оси, параллельной горизонтальной плоскости проекций Π_1 , горизонтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к горизонтальной проекции оси вращения. При вращении точки вокруг оси, параллельной фронтальной плоскости проекций Π_2 , фронтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: отрезок AB прямой общего положения и точка C (рис. 75).

Выполнить: определить расстояние от точки C до отрезка прямой AB способом замены плоскостей проекций.

Порядок выполнения:

1. Отрезок AB прямой общего положения преобразуют в отрезок прямой уровня, параллельный какой-либо плоскости проекций. Для этого новую плоскость проекций Π_4 ставят в положение, например, параллельное горизонтальной проекции отрезка прямой A_1B_1 , т. е. заменяют плоскость Π_2 на плоскость $\Pi_4 \perp \Pi_1$. В новой плоскости проекций Π_4 отрезок прямой проецируется в натуральную величину (проекция A_4B_4). Превышения проекций точек A_4 , B_4 и C_4 равны расстоянию от их фронтальных проекций до оси Ox (рис. 76).

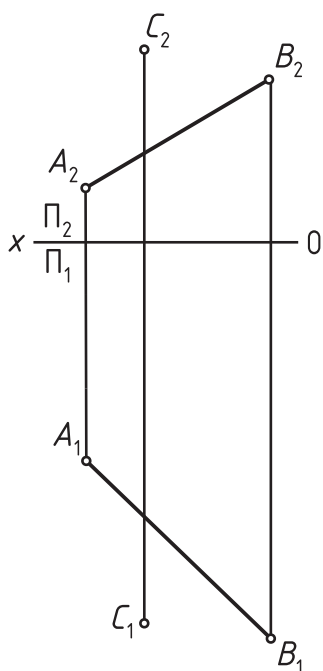


Рис. 75

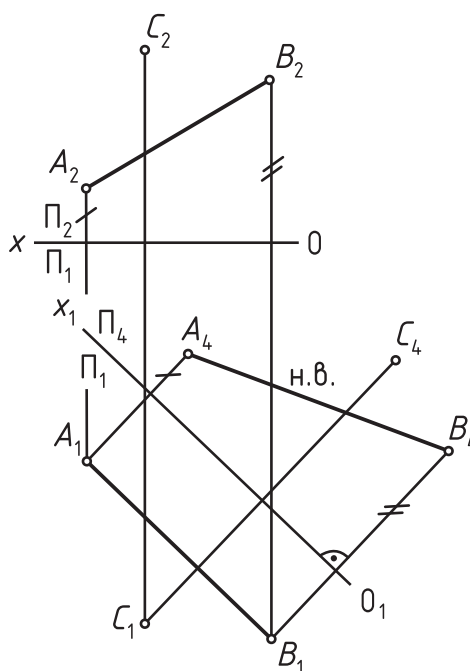


Рис. 76

2. Известно, что кратчайшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр. Проекция прямой A_4B_4 находится в натуральной величине. Следовательно, перпендикуляр C_4K_4 есть проекция искомого расстояния от точки C до отрезка прямой AB . Горизонтальную и фронтальную проекции точки K и перпендикуляра $СК$ выстраивают в обратной проекционной связи (рис. 77).

3. Определяют натуральную величину перпендикуляра $СК$. Для этого отрезок прямой уровня (проекция A_4B_4) преобразуют в отрезок проецирующей прямой, т. е. ставят в положение, перпендикулярное плоскости проекций. С этой целью заменяют плоскость проекций Π_1 на новую плоскость $\Pi_5 \perp \Pi_4$. В плоскости Π_5 отрезок прямой проецируется в точку (проекция $A_5 \equiv B_5 \equiv K_5$). Превышения проекций точек A_5, B_5, C_5 и K_5 равны расстоянию от их горизонтальных проекций до оси O_1x_1 . Расстояние между двумя точками в плоскости Π_5 является искомым (рис. 78).

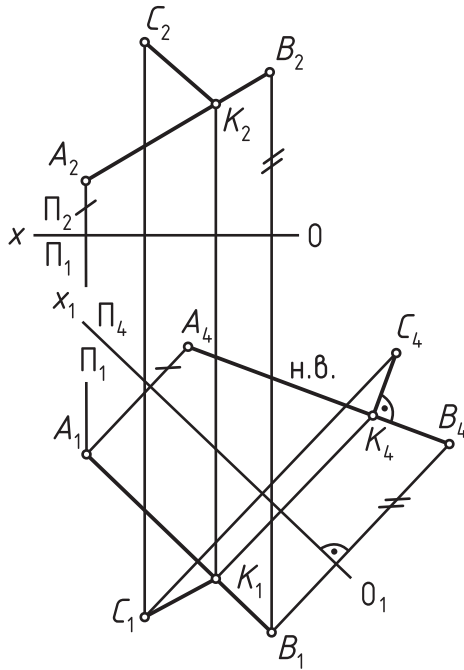


Рис. 77

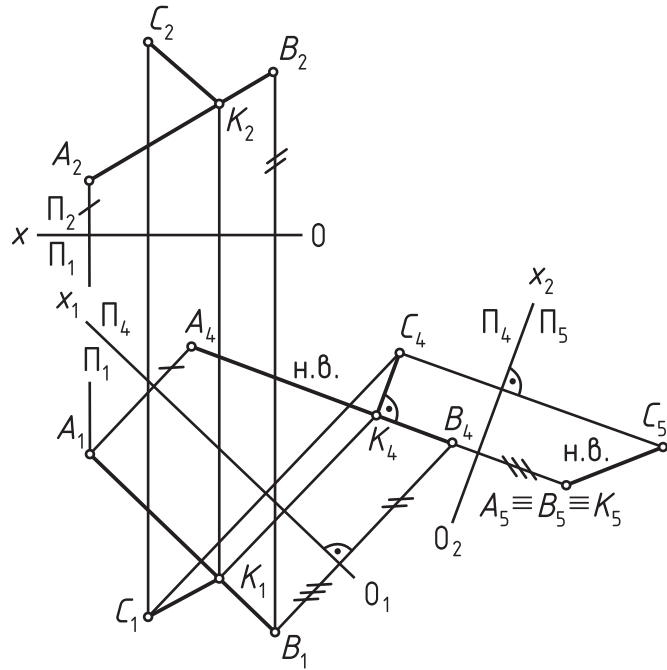


Рис. 78

Задача 2

Дано: плоскость общего положения α (ΔABC) и точка K (рис. 79).

Выполнить: найти расстояние от точки K до плоскости α (ΔABC) способом замены плоскостей проекций.

Порядок выполнения:

1. Плоскость общего положения α (ΔABC) преобразуют в плоскость частного положения, перпендикулярной какой-либо плоскости проекций, например, фронтальной плоскости проекций Π_2 . Для этого в заданной плоскости проводят горизонталь h , и определяют проекции горизонтали: фронтальную — h_2 и горизонтальную — h_1 . Затем перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 плоскости α (ΔABC) в любом месте проводят новую ось проекций O_1x_1 , т. е. заменяют плоскость Π_2 на плоскость $\Pi_4 \perp \Pi_1$ (рис. 80).

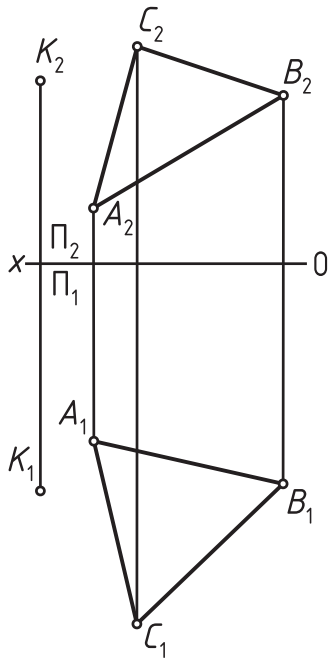


Рис. 79

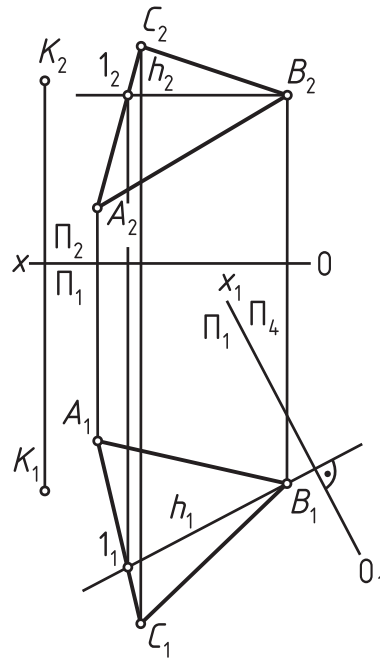


Рис. 80

2. В новой плоскости проекций Π_4 плоскость общего положения α (ΔABC) проецируется в прямую линию, заняв фронтально-проецирующее положение (проекция $A_4B_4C_4$), горизонталь при этом преобразуется в точку (проекция $B_4 \equiv h_4 \equiv 1_4$). В плоскость Π_4 проецируют и точку K (проекция K_4). Превышения проекций точек A_4, B_4, C_4 и K_4 равны расстоянию от их фронтальных проекций до оси $0x$ (рис. 81).

3. Определяют натуральную величину расстояния от точки K до плоскости α (ΔABC). Зная, что кратчайшим расстоянием от точки до плоскости является перпендикуляр, находят проекцию перпендикуляра K_4L_4 . Горизонтальную и фронтальную проекции точки L и перпендикуляра KL выстраивают в обратной проекционной связи. Так как проекция $A_4B_4C_4$ плоскости α (ΔABC) занимает частное положение, следовательно, проекция перпендикуляра K_4L_4 является искомой натуральной величиной. Горизонтальную проекцию перпендикуляра K_1L_1 выстраивают при этом параллельно оси 0_1x_1 (рис. 82).

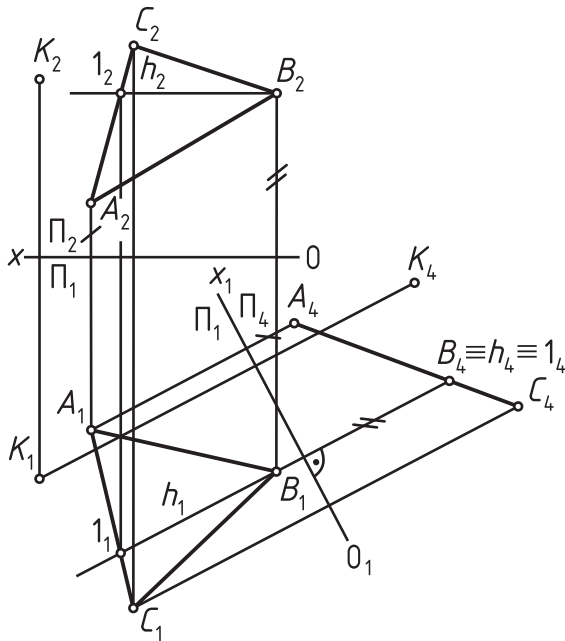


Рис. 81

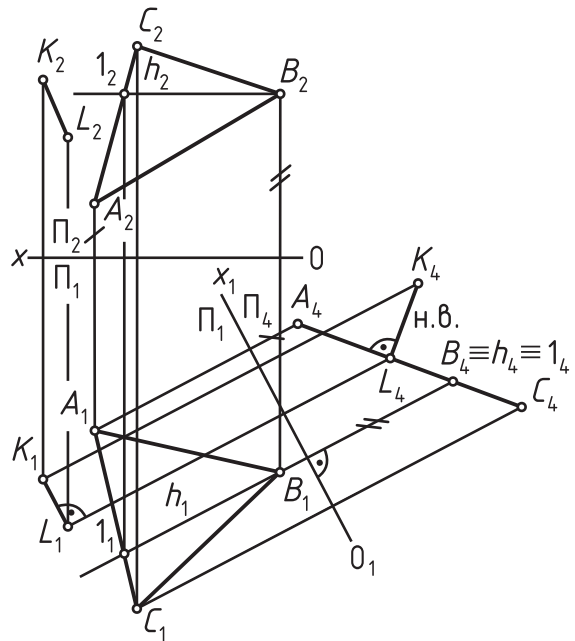


Рис. 82

Задача 3

Дано: плоскость общего положения α (ΔABC) (рис. 83).

Выполнить: определить натуральную величину плоскости α (ΔABC) способом вращения вокруг проецирующих прямых.

Порядок выполнения:

1. Вначале любую из сторон плоскости α (ΔABC) необходимо преобразовать в прямую уровня (горизонтальную или фронтальную). Например, отрезок AC преобразуют в горизонтальную прямую уровня. Для этого через одну из точек отрезка прямой AC , например A , проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$ и поворачивают фронтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций Ox (проекция A_2, C'_2). Горизонтальная проекция точки C_1 переместится в положение C'_1 . Изменение положения прямой AC влечет за собой и изменение положения прямой AB плоскости α (ΔABC). Фронтальная проекция точки B_2 переместится в положение B'_2 . При этом прямая BC своей величины не изменяет. Тогда горизонтальная проекция точки B_1 переместится в положение B'_1 . Соединяя одноименные проекции точек, получают фронтальную $A_2 B'_2 C'_2$ и горизонтальную $A_1 B'_1 C'_1$ проекции плоскости α (ΔABC) (рис. 84).

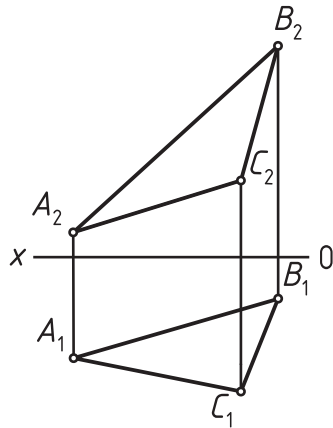


Рис. 83

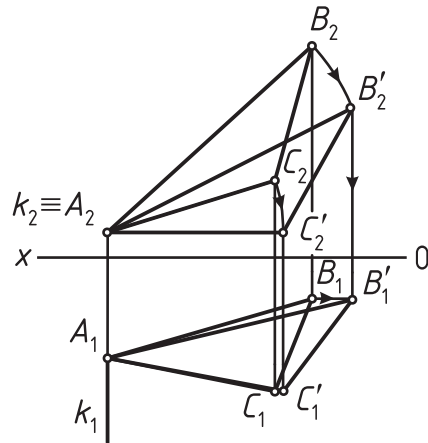


Рис. 84

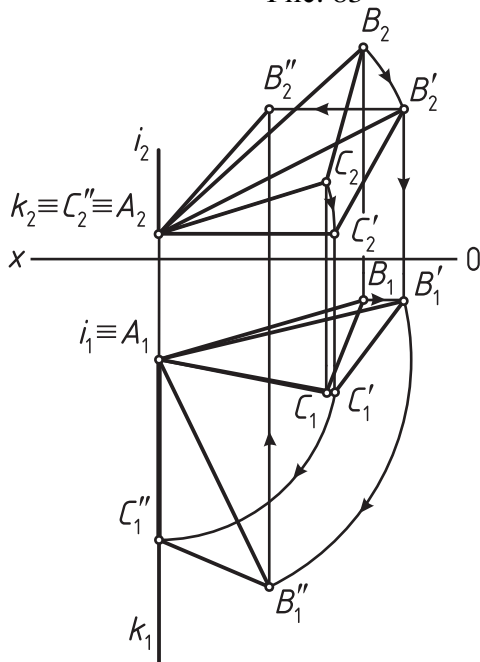


Рис. 85

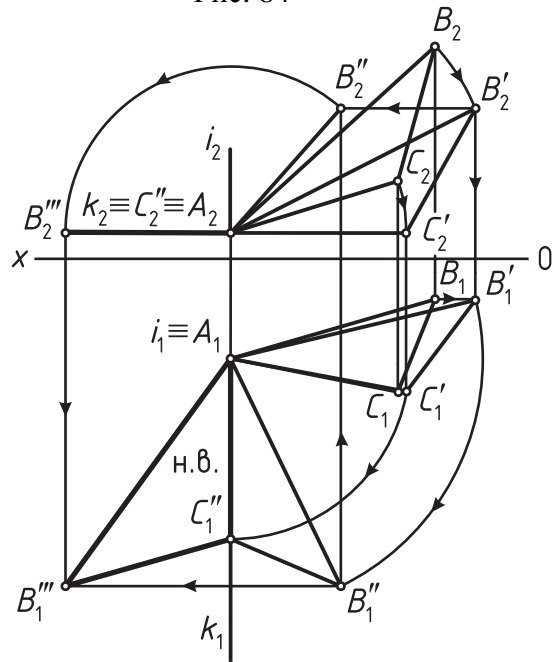


Рис. 86

2. Плоскость α (ΔABC) из общего положения преобразуют в частное положение — фронтально-проецирующее, т. е. перпендикулярное фронтальной плоскости проекций Π_2 . Для этого через точку A отрезка AC проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$ и поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, перпендикулярного оси проекций Ox (проекция A_1C_1''). Фронтальная проекция точки C_2 переместится в положение $A_2 \equiv C_2''$. Изменение положения отрезка AC повлекло за собой и изменение положения отрезка AB плоскости α (ΔABC). Горизонтальная проекция точки B_1' переместится в положение B_1'' . При этом отрезок AB своей величины не изменяет. Тогда фронтальная проекция точки B_2' перемес-

тится в положение B_2'' . Соединяя одноименные проекции точек, получают горизонтальную $A_1B_1''C_1''$ и фронтальную $A_2 \equiv C_2''B_2''$ проекции плоскости α (ΔABC). Таким образом, плоскость преобразуется, заняв фронтально-проецирующее положение (рис. 85).

3. Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость горизонтальную уровня, т. е. ставят в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций Π_1 . В этом случае вновь используют ось вращения $k \perp \Pi_2$, проходящую через точку A отрезка AC плоскости α (ΔABC). Поворачивают фронтальную проекцию плоскости α (ΔABC) до положения, параллельного оси проекций Ox (проекция $A_2 \equiv C_2''B_2'''$). Горизонтальная проекция точки B_1'' переместится в положение B_1''' . Соединяя горизонтальные проекции A_1 с B_1''' и C_1'' , получают натуральную величину плоскости α (ΔABC) (рис. 86).

Контрольные вопросы

1. С какой целью производят преобразование комплексного чертежа?
2. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
3. В чем заключается правило построения проекций точки в новой системе плоскостей проекций?
4. Какая координата точки сохраняет свое значение при замене плоскости проекций Π_1 ? Π_2 ?
5. Как выбрать новую ось проекций, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала плоскостью уровня?
6. Сколько замен надо произвести, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей прямой?
7. Как выбрать новую ось проекций, чтобы плоскость общего положения в новой системе плоскостей проекций стала проецирующей плоскостью?
8. Какова последовательность построений на эпюре при определении истинной величины плоской фигуры способом замены плоскостей проекций?
9. В чем сущность способа вращения вокруг проецирующих прямых?
10. Каким образом перемещаются проекции точки при ее вращении вокруг оси, перпендикулярной к какой-либо плоскости проекций?

Задачи

Способ замены плоскостей проекций

63. Определить натуральную величину отрезка прямой AB при замене плоскостей Π_1 и Π_2 (рис. 87).
64. Определить расстояние от точки C до прямой AB (рис. 88).

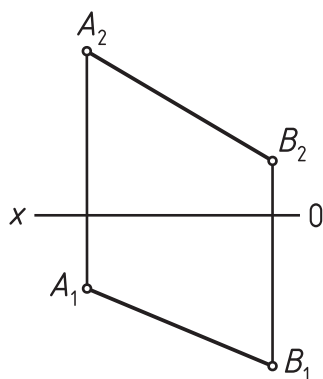


Рис. 87

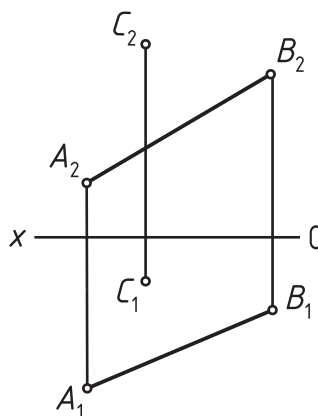


Рис. 88

65. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми AB и CD (рис. 89).

66. Определить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми EF и KL (рис. 90).

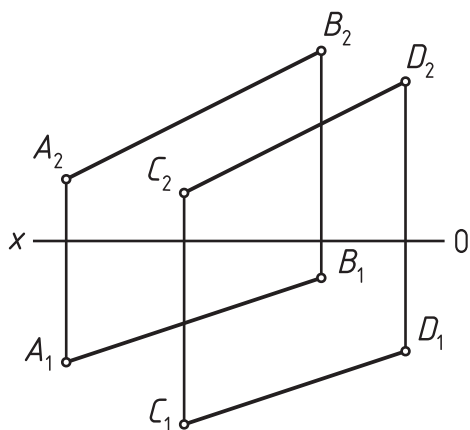


Рис. 89

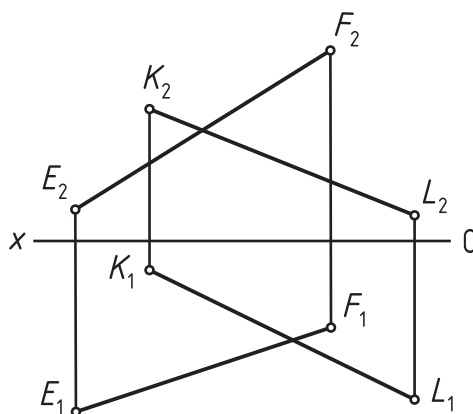


Рис. 90

67. Определить натуральную величину плоскостей α (ΔABC) и β ($\Delta DEFK$) (рис. 91).

68. Определить расстояние от точки A до заданной плоскости (рис. 92).

69. Определить натуральную величину двугранного угла при ребре AS пирамиды $ABCS$ (рис. 93).

70. Определить расстояние между параллельными плоскостями α и β , и углы наклона данных плоскостей к плоскостям проекций (рис. 94).

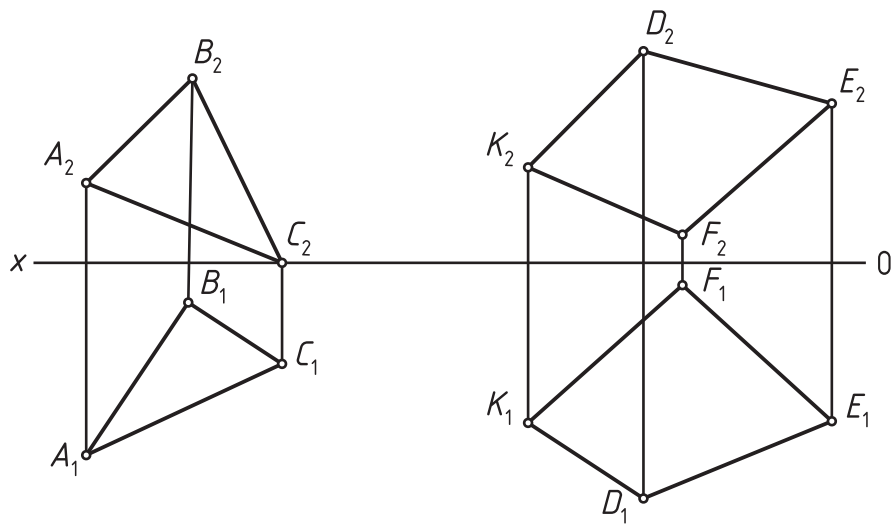


Рис. 91

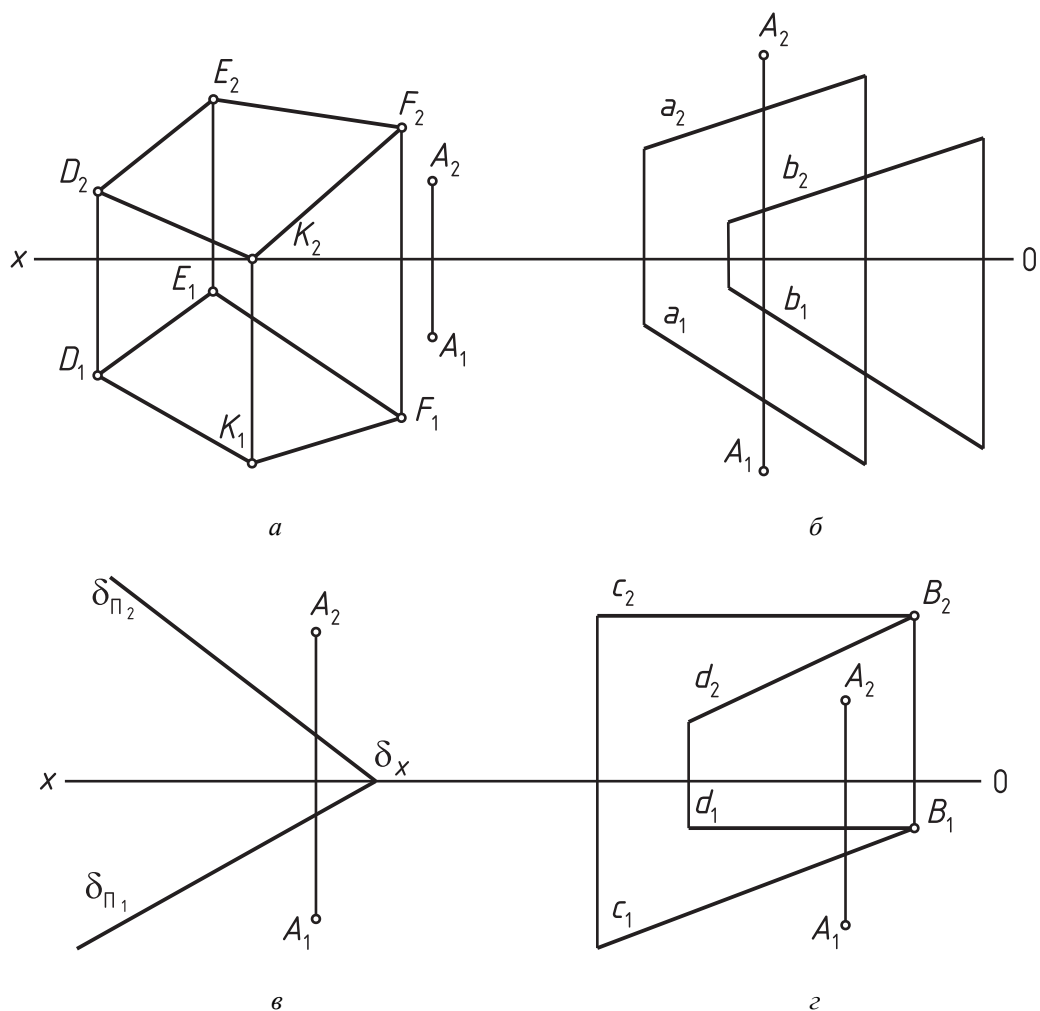


Рис. 92

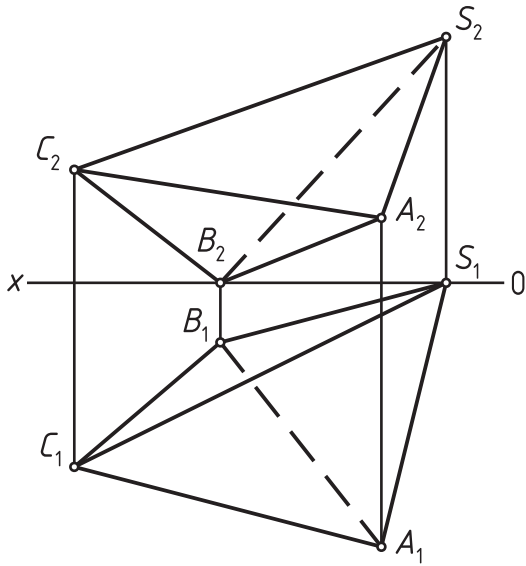


Рис. 93

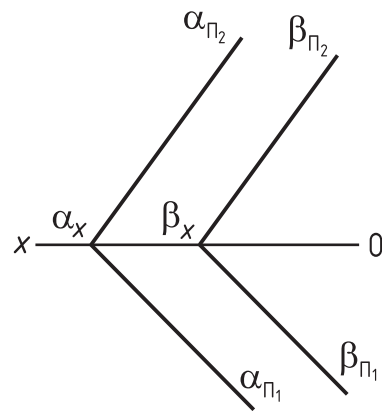


Рис. 94

Способ вращения

71. Определить натуральную величину прямой AB (рис. 95).
72. Определить натуральную величину плоскости α ($\triangle ABC$) (рис. 96).
73. Определить натуральную величину плоскости α ($\triangle ABC$) вращением вокруг горизонтали и фронтали плоскости (см. рис. 96).

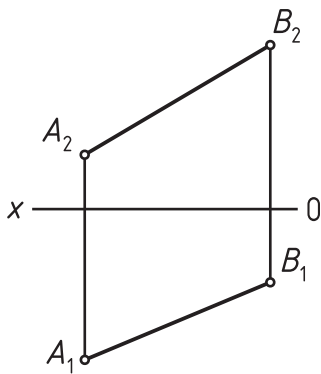


Рис. 95

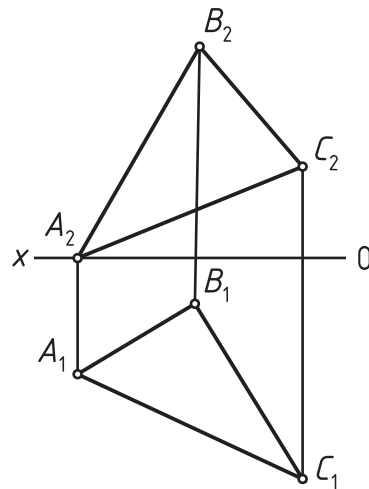


Рис. 96

Тема 5. ПОВЕРХНОСТИ

Точки на поверхности геометрических тел. Многогранники. Поверхности вращения. Геометрические тела с вырезом. Развертки геометрических поверхностей

Теоретические основы

Поверхность в начертательной геометрии определяется как *непрерывное множество последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону и называемой образующей поверхности*. Обязательным условием перемещения образующей в пространстве при образовании поверхности является пересечение ее с неподвижными линиями пространства, называемыми *направляющими поверхностями*.

Все поверхности в зависимости от вида направляющей, которая может быть ломаной, прямой или кривой линией, подразделяются на *гранные поверхности* и *кривые*. *Гранными* называют поверхности, в образовании которых участвуют правильные многоугольники. *Кривыми* называют поверхности, в образовании которых участвуют плоские кривые линии правильной формы. При этом если направляющей является окружность, то получают *поверхность вращения*.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *геометрическим телом*.

Многогранником называют геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники являются его гранями, а линии пересечения граней — его ребрами. Концы ребер многогранника называются его вершинами. Образующая гранной поверхности есть прямая, направляющая — ломаная линия. Из всего многообразия граничных поверхностей наиболее известными являются призматические и пирамидальные поверхности.

Поверхности вращения относятся к кривым поверхностям. Они образуются путем вращения любой линии (*образующей* поверхности вращения) вокруг другой неподвижной прямой линии (*оси вращения*). К этой группе поверхностей относят конические поверхности, цилиндрические, шаровые (сферические), торовые и т. д.

Проекция точки, принадлежащей поверхности, определяют исходя из принадлежности точки плоскости. Точка, принадлежащая плоскости, лежит на линии, принадлежащей также данной плоскости. Проекция точки, заданной на поверхности, определяют с помощью образующих и линий проекционной связи.

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности (или ее отсека) с плоскостью путем изгибания. *Свойства разверток поверхностей*: сохранение длин линий, углов между линиями и площади, ограниченной замкнутым контуром.

При построении развертки любой геометрической фигуры необходимо вначале определить натуральные величины оснований и ребер или образующих геометрического тела, используя способы преобразования плоскостей проекций.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: прямая пирамида $ABCS$ с вырезом (рис. 97).

- Выполнить*: 1) построить три проекции прямой пирамиды с вырезом;
2) построить развертку пирамиды с нанесением на ней линии выреза.

Порядок выполнения:

1. На фронтальной плоскости проекций Π_2 отмечают точки по контуру выреза в геометрическом теле:

очерковые (очерчивающие форму выреза): $1_2, 3_2 \equiv 4_2, 6_2$;

характерные (лежащие на ребрах геометрического тела): $1_2, 2_2, 5_2, 6_2$;

промежуточные или *дополнительные* (уточняющие характер выреза) в данном примере не требуются.

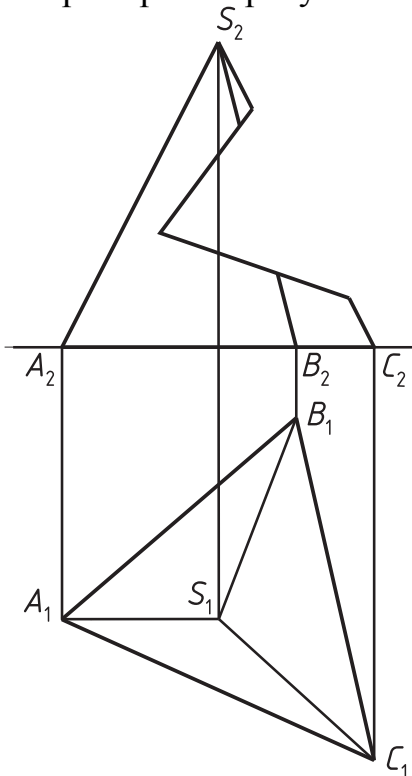


Рис. 97

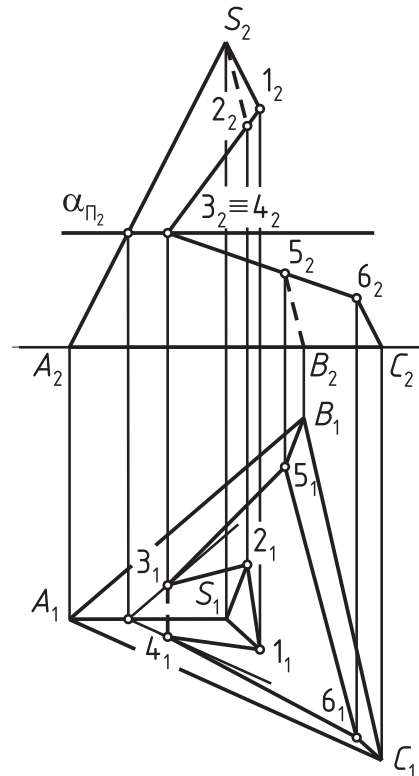


Рис. 98

2. Определяют горизонтальные проекции точек $1_1 \dots 6_1$, исходя из их принадлежности поверхности пирамиды. При этом проекции точек $1_1, 2_1, 5_1$ и 6_1 находят в проекционной связи на соответствующих проекциях ребер пирамиды: S_1B_1 и S_1C_1 , а проекции точек 3_1 и 4_1 — с помощью вспомогательной плоскости горизонтальной уровня α_{Π_2} . Соединяют точки между собой последовательно, линиями видимого контура, так как все точки, лежащие на поверхности прямой пирамиды, являются видимыми (рис. 98).

3. Выстраивают профильную проекцию пирамиды $ABCS$, используя знания построений безосного чертежа, и определяют профильные проекции точек $1_3 \dots 6_3$. Проекции точек $1_3, 2_3, 5_3$ и 6_3 определяют в проекционной связи исходя из принадлежности этих точек ребрам пирамиды (проекции S_3B_3 и S_3C_3), а проекции точек 3_3 и 4_3 — с помощью заложений данных точек, взятых с горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Соединяют точки между собой также последовательно с учетом видимости линий (рис. 99).

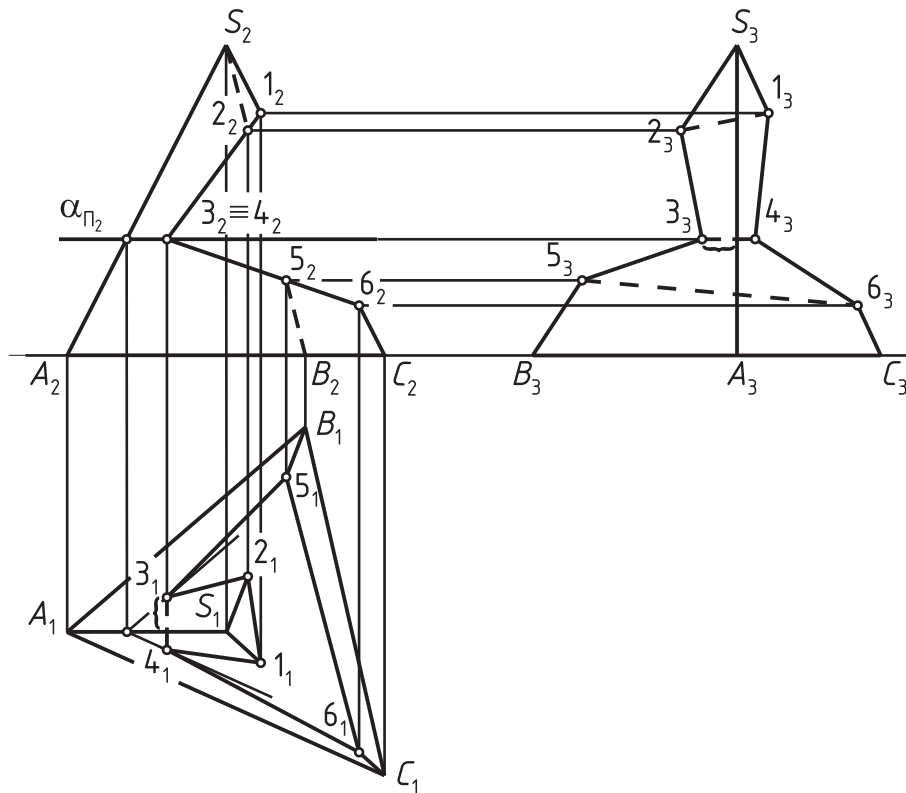


Рис. 99

4. Построение развертки прямой пирамиды начинают с определения натуральных величин ее основания и ребер. В данном примере основание пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций Π_1 , следовательно, проецируется на нее в натуральную величину. Грани

прямой пирамиды являются плоскостями общего положения. При этом, ребро SA пирамиды $ABCS$ является фронтальной прямой уровня и проецируется на фронтальную плоскость проекций Π_2 в натуральную величину (проекция S_2A_2). Ребра SB и SC пирамиды $ABCS$ являются прямыми общего положения и, следовательно, необходимо определить их натуральные величины. Для этого чаще всего применяют способы преобразования проекций, например, способ вращения вокруг проецирующих прямых, используемый в данной задаче. Через горизонтальную проекцию S_1 вершины пирамиды проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$ и поворачивают горизонтальную проекцию ребра S_1B_1 до положения, параллельного основанию пирамиды (проекция $S_1B'_1$).

Фронтальная проекция точки B_2 переместится в положение B'_2 . Проекция $S_2B'_2$ является натуральной величиной ребра SB . Аналогично определяют натуральную величину ребра SC (рис. 100).

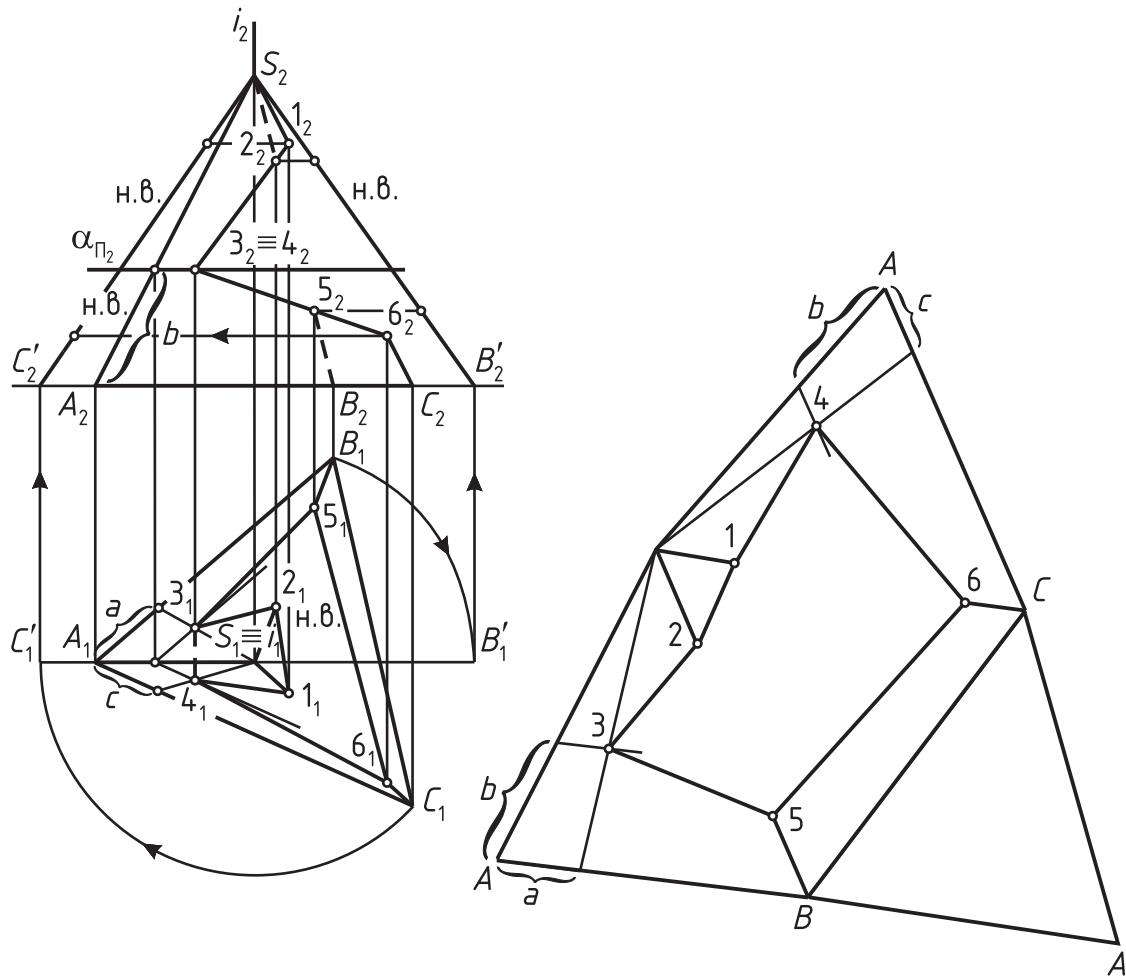


Рис. 100

5. Развертку прямой пирамиды производят методом треугольников (триангуляции). Положение точек выреза 1, 2, 5 и 6 берется с натуральной величины соответствующего ребра пирамиды. Положение точек линии выреза 3 и 4 определяется следующим образом: заложение каждой точки выреза (a и c) берется с горизонтальной проекции пирамиды, превышение точек выреза (b) – с натуральной величины ребра SA пирамиды $ABCS$. Соединение точек линии выреза производится последовательно отдельными прямыми линиями, так как форма выреза в геометрическом теле представляет собой многоугольник (см. рис. 100).

З а д а ч а 2

Дано: Прямой круговой цилиндр с вырезом (рис. 101).

Выполнить: 1) построить три проекции прямого кругового цилиндра с вырезом; 2) построить развертку цилиндра с нанесением на ней линии выреза.

Порядок выполнения:

1. На фронтальной плоскости проекций Π_2 отмечают точки по контуру выреза в геометрическом теле:

очерковые (очерчивающие форму выреза): $1_2, 4_2 \equiv 5_2, 6_2 \equiv 7_2, 14_2$;

характерные (лежащие на осях симметрии геометрического тела): $2_2 \equiv 3_2, 10_2 \equiv 11_2$;

промежуточные или *дополнительные* (уточняющие характер выреза): $8_2 \equiv 9_2, 12_2 \equiv 13_2$.

2. Определяют горизонтальные проекции точек $1_1 \dots 14_1$ в проекционной связи, исходя из их принадлежности поверхности цилиндра. Так как цилиндрическая поверхность является горизонтально-проецирующей, то все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на горизонтальную плоскость проекций Π_1 на ее очерк (рис. 102).

3. Выстраивают профильную проекцию прямого кругового цилиндра, используя знания построений безосного чертежа, и определяют профильные проекции точек $1_3 \dots 14_3$. Проекцию точек выстраивают в проекционной связи исходя из принадлежности этих точек образующим цилиндра. Кроме этого, проекции точек $4_3 \dots 9_3$ и $12_3, 13_3$ — с помощью заложений данных точек, взятых с горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Соединяют точки между собой последовательно с учетом видимости линий (рис. 103).

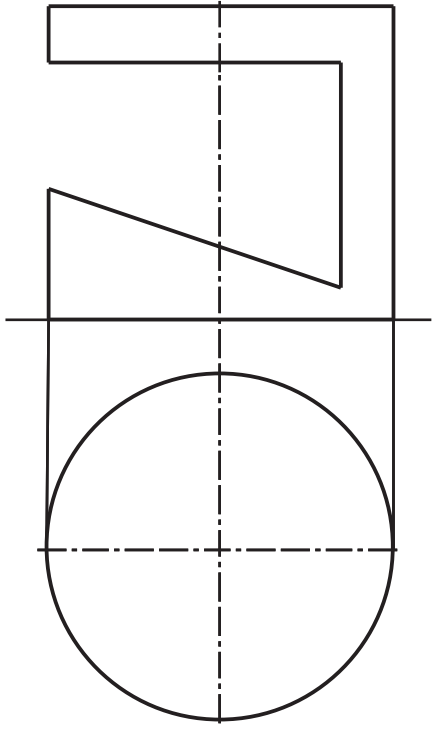


Рис. 101

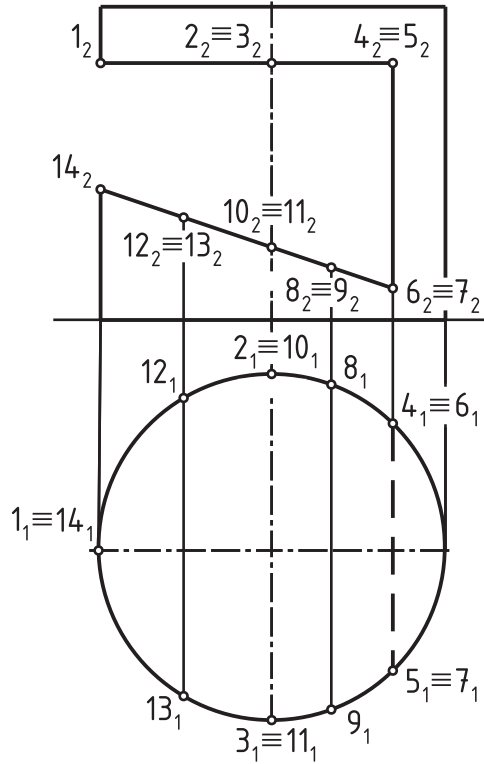


Рис. 102

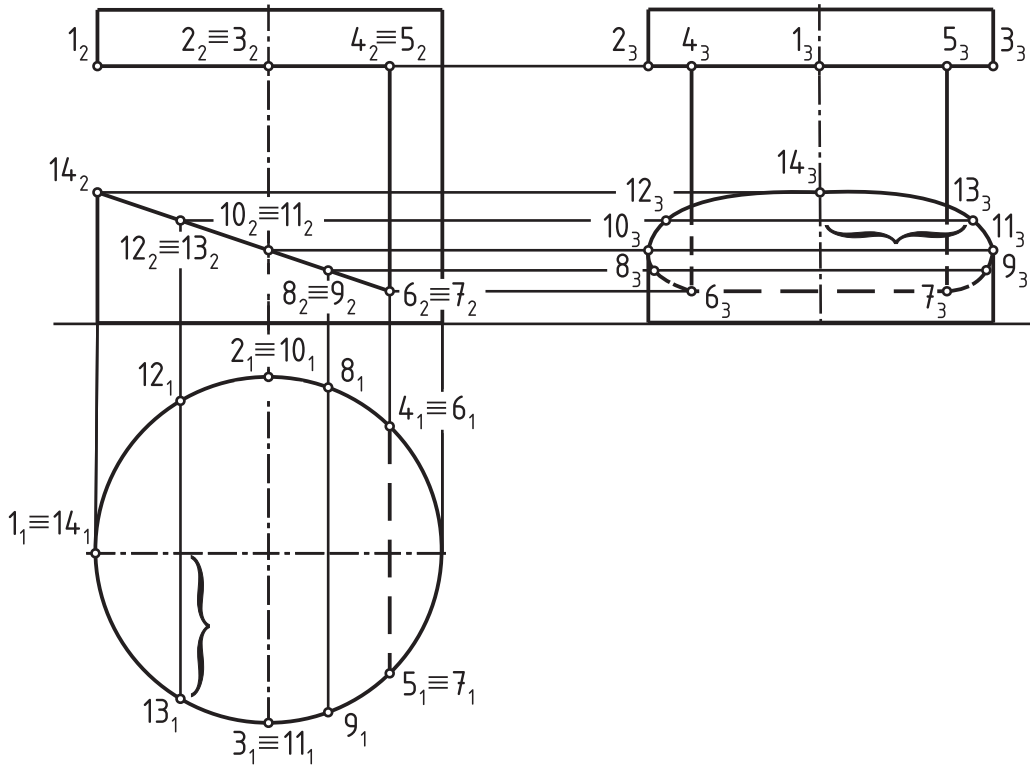


Рис. 103

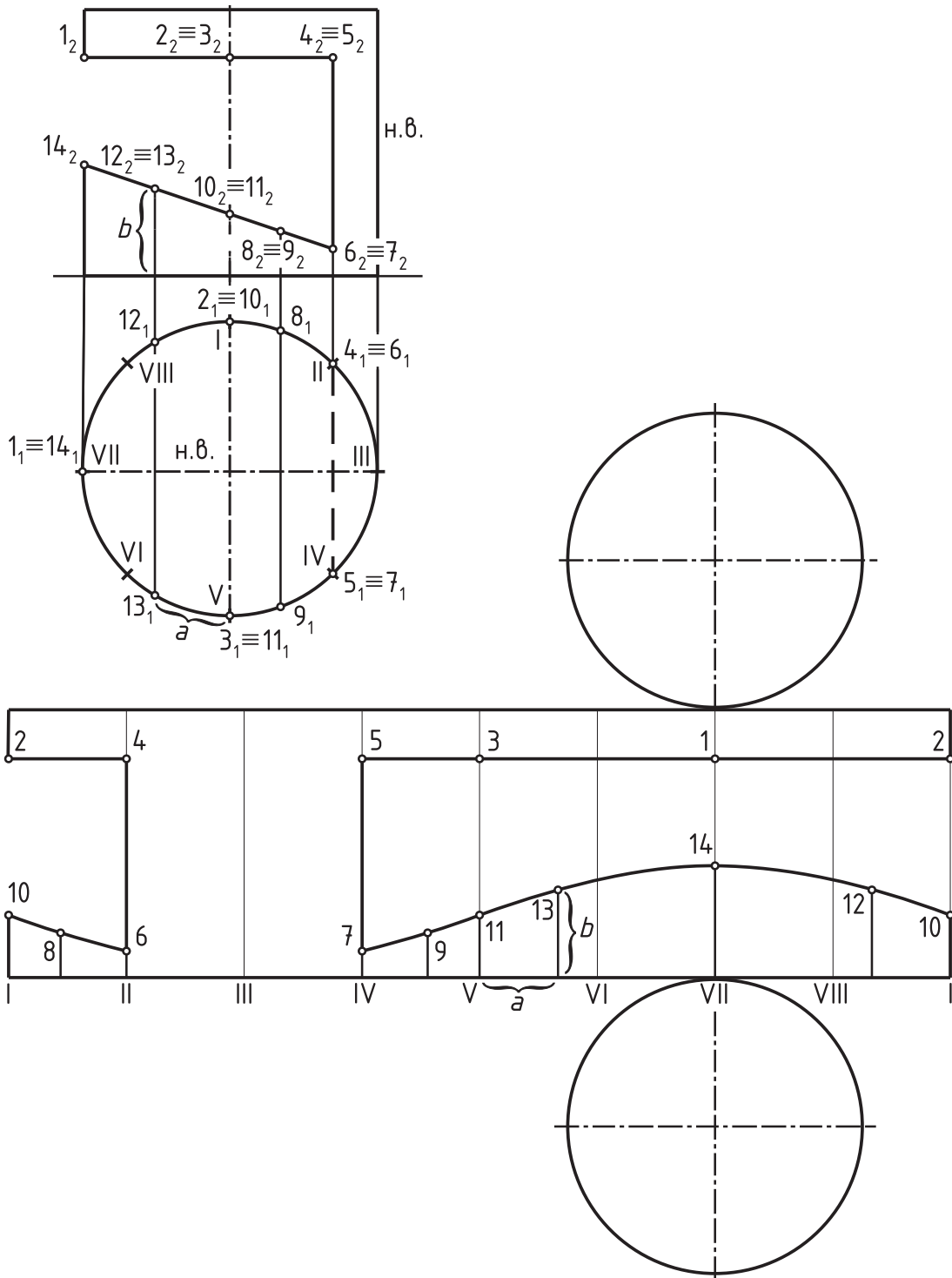


Рис. 104

4. Построение развёртки прямого кругового цилиндра начинают с определения натуральных величин ее оснований и образующих. В данном примере верхнее основание цилиндра является горизонтальной плоско-

стью уровня, а нижнее основание принадлежит плоскости проекций Π_1 , следовательно, оба основания цилиндра проецируются на эту плоскость в натуральную величину. Поверхность прямого цилиндра является горизонтально-проецирующей. Образующая такой поверхности — горизонтально проецирующая прямая, которая на фронтальную плоскость проекций Π_2 и профильную плоскость проекций Π_3 проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого кругового цилиндра никаких дополнительных построений не требуется. Развертка прямого цилиндра производится методом раскатки. Основание цилиндра (окружность) с помощью циркуля разбивается на восемь (двенадцать) равных частей (хорд). Прочерчивают две взаимно перпендикулярные прямые. На вертикальной прямой откладывают высоту цилиндра, на горизонтальной — величины, равные хордам основания, взятые с плоскости Π_1 . Соединяя по вертикали и по горизонтали полученные отрезки между собой прямыми линиями, получают развертку прямого цилиндра. Затем прочерчивают основания развертки цилиндра (окружности) и выстраивают точки линии выреза. При этом заложение (*a*) каждой точки линии выреза берется с горизонтальной проекции цилиндра, превышение (*b*) точек линии выреза — с фронтальной или профильной проекций цилиндра. Соединяют точки последовательно между собой отдельными прямыми и кривыми линиями (рис. 104).

Контрольные вопросы

1. Как определяется поверхность в начертательной геометрии?
2. Что такое образующая, направляющая, определитель, каркас, очерк поверхности?
3. Как образуется поверхность призматическая, цилиндрическая, коническая, пирамидальная, шаровая, торовая?
4. Когда поверхность считается заданной?
5. На какие классы можно разделить все поверхности?
6. Какие поверхности относят к линейчатым, нелinearчатым?
7. Какие поверхности являются развертываемыми, неразвертываемыми?
8. Какие поверхности называются гранными поверхностями? Какие поверхности к ним относят?
9. Какие поверхности называются кривыми поверхностями? Какие поверхности к ним относят?
10. Какие поверхности называются поверхностями вращения? Какие поверхности к ним относят?
11. Что называется геометрическим телом?
12. Что называется многогранником?

13. Как построить недостающую проекцию точки, принадлежащей поверхности а) пирамиды; б) призмы; в) цилиндра; г) конуса; д) сферы?

14. Что называется разверткой поверхности? Назовите свойства разверток поверхностей.

15. Назовите общие принципы построения разверток геометрических поверхностей.

16. В какие плоские фигуры разворачивается поверхность а) прямой призмы; б) пирамиды; в) прямого кругового цилиндра; г) прямого кругового конуса?

17. Какова последовательность действий при построении на развертке точки или линии, принадлежащей поверхности а) призмы; б) пирамиды; в) цилиндра; г) конуса?

Задачи

74. Построить недостающие проекции точек, принадлежащих поверхностям заданных геометрических тел (рис. 105).

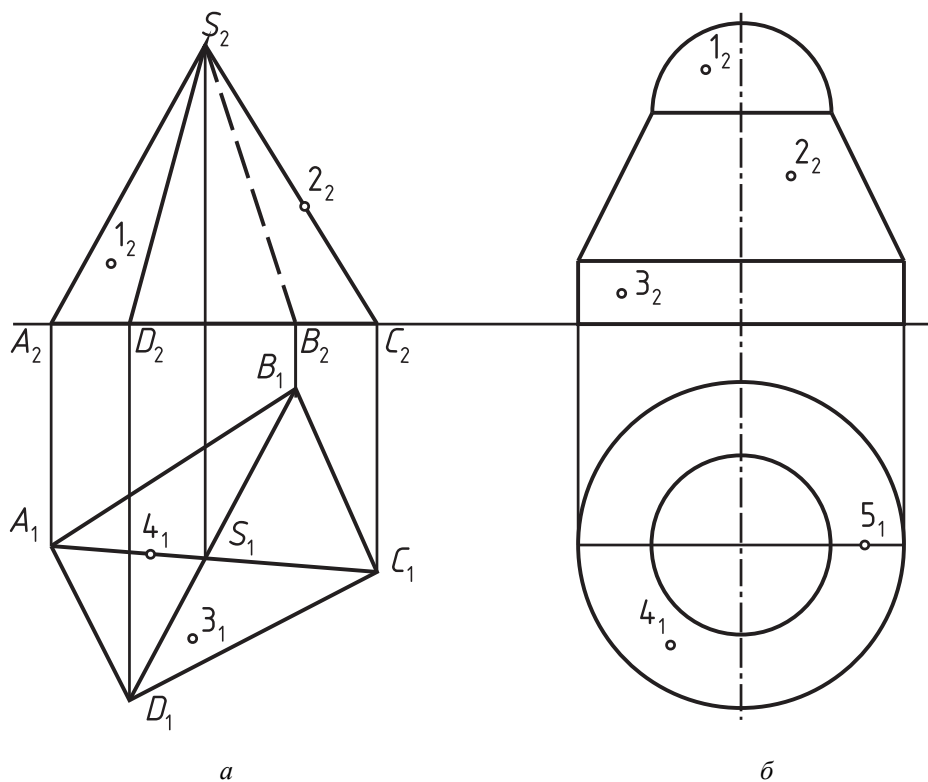


Рис. 105 (начало)

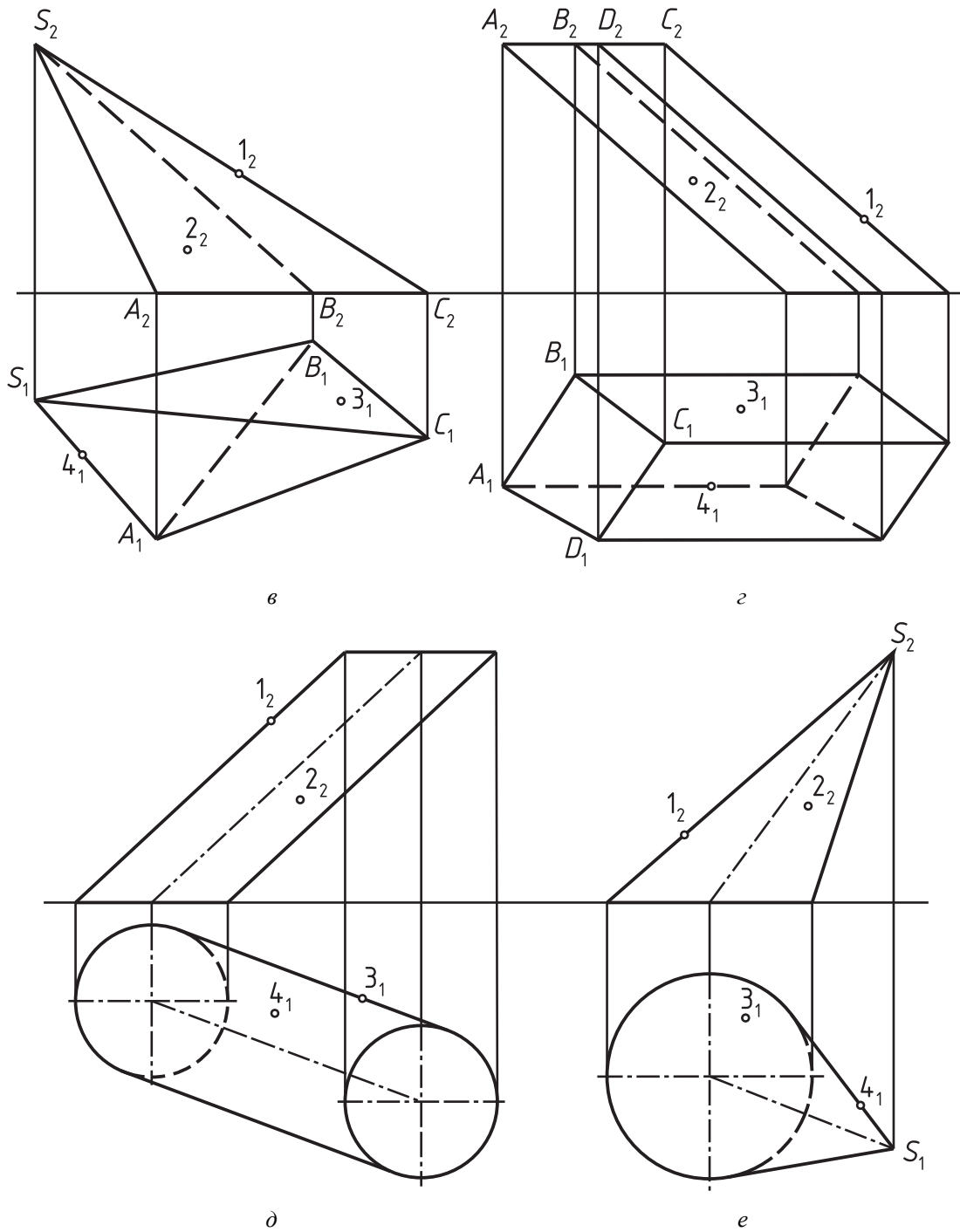


Рис. 105 (окончание)

75. Построить три проекции прямой призмы с вырезом. Построить развертку призмы с нанесением линии выреза (рис. 106).

76. Построить три проекции прямой пирамиды с вырезом. Построить развертку пирамиды с нанесением линии выреза (рис. 107).

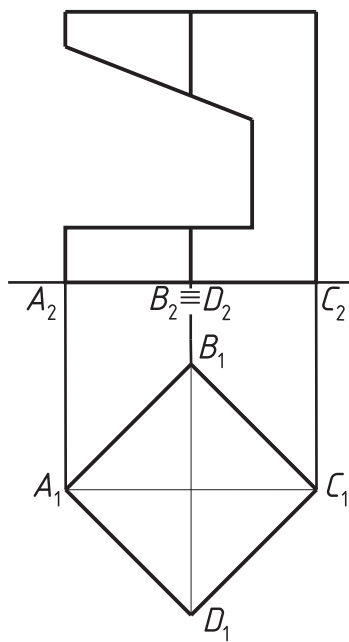


Рис. 106

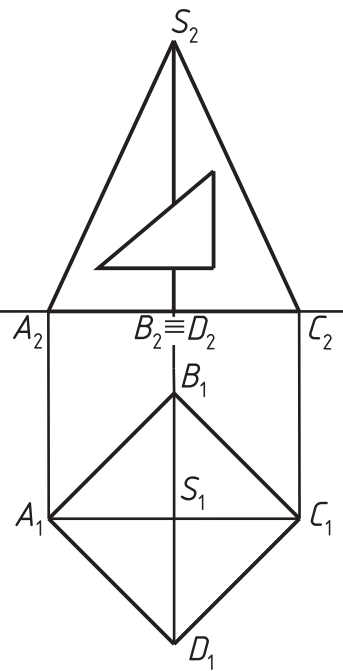


Рис. 107

77. Построить три проекции прямого кругового цилиндра с вырезом. Построить развертку цилиндра с нанесением линии выреза (рис. 108).

78. Построить три проекции прямого кругового конуса с вырезом. Построить развертку конуса с нанесением линии выреза (рис. 109).

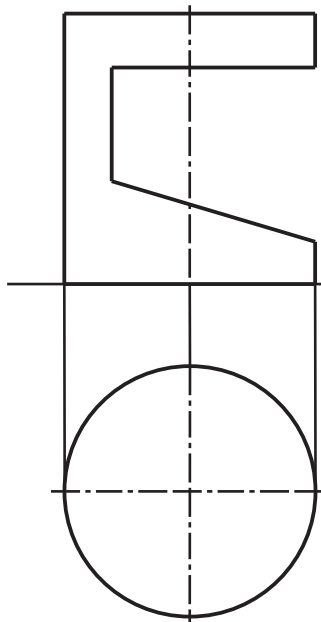


Рис. 108

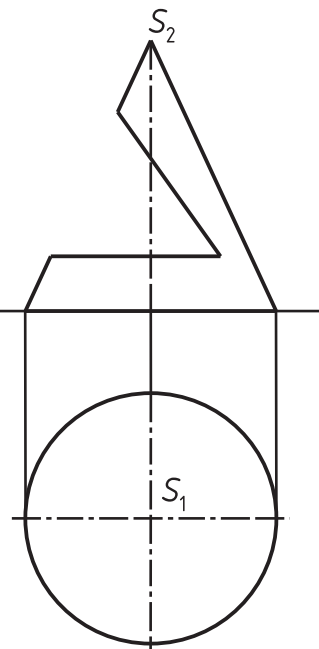


Рис. 109

79. Построить три проекции сферы с вырезом (рис. 110).

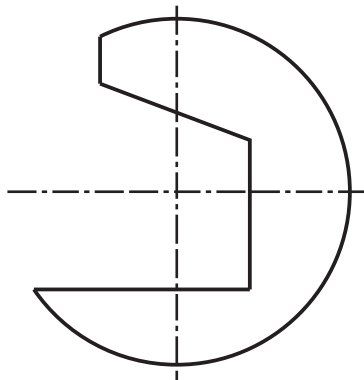


Рис. 110

Тема 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

Сечения многогранников и тел вращения плоскостями общего и частного положения. Определение натуральной величины сечения геометрических тел

Теоретические основы

Сечением называется плоская фигура, полученная в результате пересечения геометрического тела секущей плоскостью и содержащая точки, принадлежащие поверхности тела и плоскости.

Сечение ограничивается замкнутой ломаной линией, если плоскостью пересекается гранная поверхность, и замкнутой кривой линией, если плоскостью пересекается кривая поверхность.

Построение линии сечения в общем случае сводится к определению точек пересечения ребер многогранника или образующих кривой поверхности с секущей плоскостью. Следовательно, построение линии сечения сводится к множественной задаче определения точек пересечения прямой с плоскостью.

Сечением многогранника плоскостью является плоский многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам, а стороны — граням многогранника. В зависимости от вида гранной поверхности и положения секущей плоскости сечение может принимать различные геометрические фигуры: *многоугольники* различных конфигураций.

Сечением тел вращения плоскостью является плоская кривая линия. В зависимости от вида поверхности вращения и положения секущей плоскости сечение также может принимать различные геометрические фигуры. Так, например, при пересечении поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью возможно образование: *окружности*, если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра; *эллипса*, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает все его образующие; *усеченного эллипса*, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает одно или оба его основания; *прямоугольника*, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра. При пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостью возможно образование: *окружности*, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса; *треугольника*, если секущая плоскость пересекает конус через его вершину по двум образующим; *эллипса*, если секущая плоскость наклонена к оси конуса и пересекает все его образующие; *параболы*, если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса; *гиперболы*, если секущая плоскость параллельна оси конуса или параллельна двум его образующим.

Определение натуральной величины сечения поверхности плоскостью определяют любым известным способом, например, способом совмещения секущей плоскости с плоскостью проекций, способом вращения, способом замены плоскостей проекций и т. д.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: прямая четырехгранная призма и плоскость общего положения α (ΔABC) (рис. 111).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α (ΔABC) из общего положения в частное — проецирующее. Так как поверхность призмы является горизонтально-проецирующей, тогда в заданной плоскости проводят горизонталь h , и определяют проекции горизонтали: фронтальную — h_2 (проекция A_2B_2), и горизонтальную — h_1 (проекция A_1B_1). Затем перпендикулярно h_1 плоскости α (ΔABC) в любом месте проводят новую ось проекций 0_1x_1 , т. е. заменяют плоскость Π_2 на плоскость $\Pi_4 \perp \Pi_1$. В новой плоскости проекций Π_4 плоскость общего положения α (ΔABC) проецируется в прямую линию, заняв фронтально-проецирующее положение (проекция $A_4 \equiv B_4 \equiv h_4$), горизонталь при этом преобразуется в точку (проекция $A_4 \equiv B_4 \equiv h_4$). В плоскости проекций Π_4 выстраивают также и проекцию призмы (рис. 112).

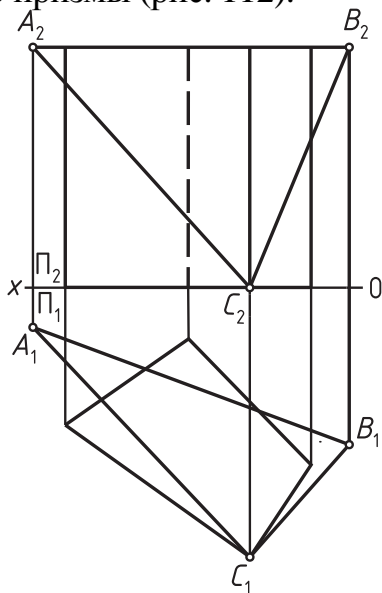


Рис. 111

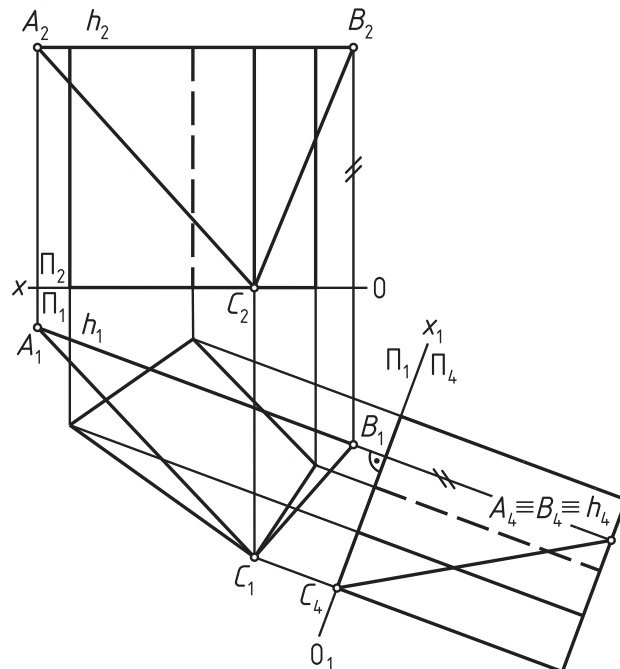


Рис. 112

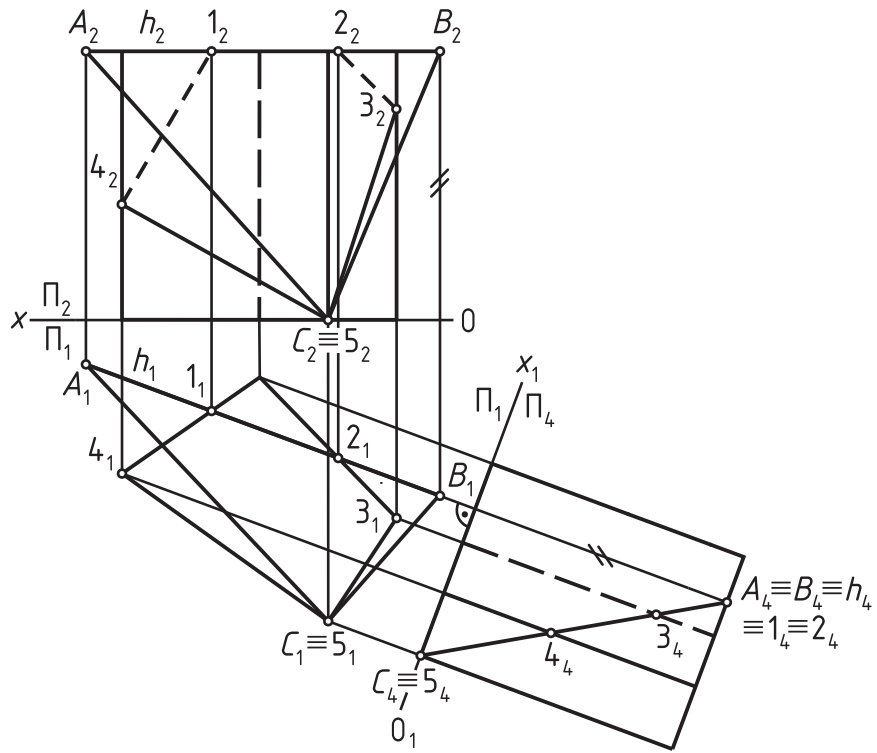


Рис. 113

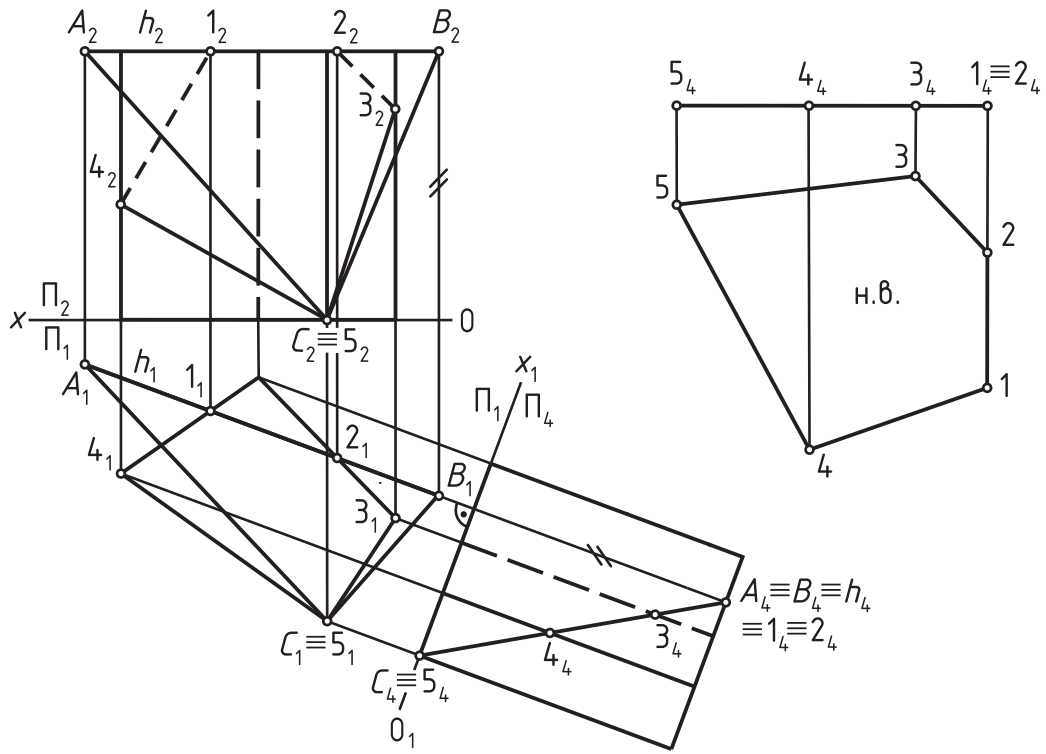


Рис. 114

2. Проекция $A_4 \equiv B_4, C_4$ плоскости α (ΔABC), являясь проецирующей, обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующей плоскости с ребрами призмы образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 \dots 5_4$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 3_1 5_1 4_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 3_2 5_2 4_2$) определяют в проекционной связи из условия принадлежности точек ребрам и граням призмы (рис. 113).

3. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций. Превышения точек $1 \dots 5$ берут с горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 114).

Задача 2

Дано: прямой круговой конус и плоскость общего положения α , заданная следами (рис. 115).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью α ; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее.

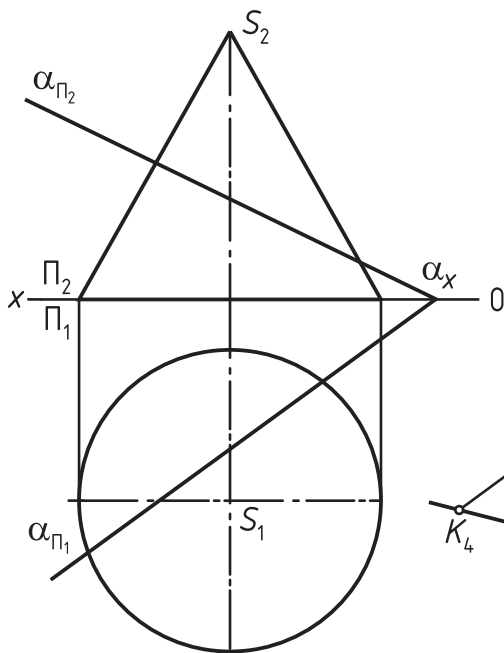


Рис. 115

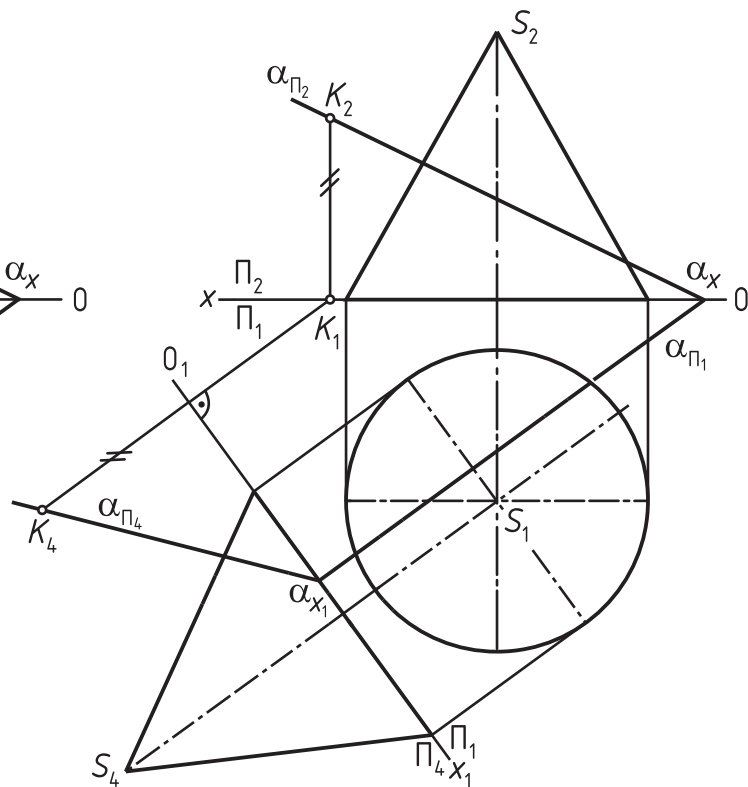


Рис. 116

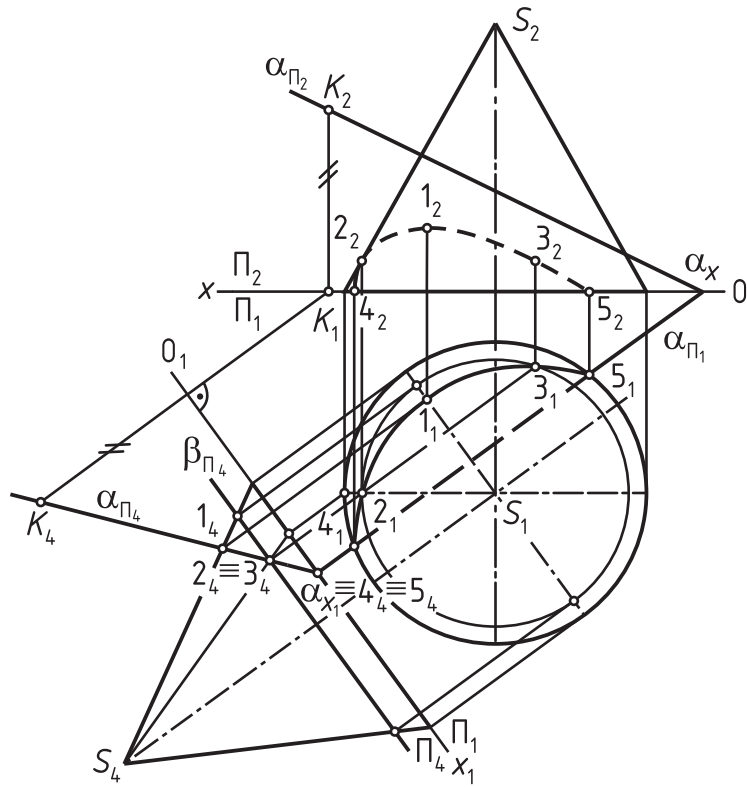


Рис. 117

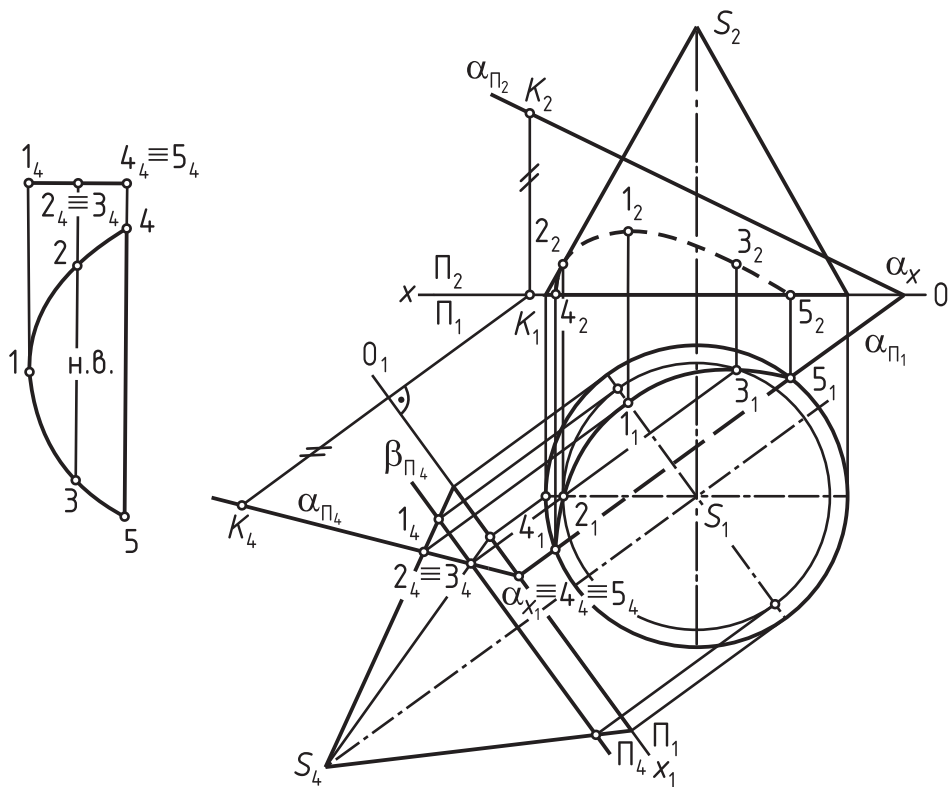


Рис. 118

Так как основание конуса является плоскостью горизонтальной уровня и проецируется на плоскость Π_1 в натуральную величину, тогда перпендикулярно горизонтальному следу плоскости α_{Π_1} в любом удобном месте проводят новую ось проекций O_1x_1 , т. е. заменяют плоскость Π_2 на плоскость $\Pi_4 \perp \Pi_1$. На фронтальном следе плоскости α_{Π_2} произвольно берут точку K и определяют ее проекции K_2 , K_1 и K_4 . Соединяя точку схода следов α_x с проекцией точки K_4 , выстраивают след плоскости α_{Π_4} . Таким образом, в новой плоскости проекций Π_4 плоскость общего положения α преобразуется в плоскость частного положения, заняв фронтально-проецирующее положение. В плоскости проекций Π_4 выстраивают также и проекцию конуса (рис. 116).

2. След плоскости α_{Π_4} обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение следа α_{Π_4} с поверхностью конуса образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — 1₄...5₄. Горизонтальную (1₁2₁4₁5₁3₁) и фронтальную (1₂2₂4₂5₂3₂) проекции сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой (образующей конуса) в проекционной связи с плоскости Π_4 сначала на соответствующую образующую конуса в плоскости Π_1 , а затем — в плоскости Π_2 . При этом превышение проекций точек в плоскости Π_2 должно соответствовать превышению проекций точек в плоскости Π_4 . Особое внимание следует обратить на точку 2. Эта точка изначально задается на образующей конуса и должна проецироваться на эту образующую, так как именно данная точка определяет видимость сечения конуса плоскостью в плоскости проекций Π_2 (рис. 117).

3. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций, но также допустимо применение любого другого известного способа. Превышения точек 1...5 берут с горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 118).

Контрольные вопросы

1. Что называется сечением? Какой линией ограничивается сечение, если плоскость пересекает гранную поверхность, пересекает кривую поверхность?
2. Какая задача решается при построении сечения геометрического тела плоскостью?
3. Что получается при пересечении многогранника (призмы, пирамиды) плоскостью?

4. Какие виды сечений прямого кругового цилиндра вы знаете? При каком положении секущей плоскости получается каждый вид?

5. Какие виды сечений прямого кругового конуса вы знаете? При каком положении секущей плоскости получается каждый вид?

6. Что образуется в сечении сферы плоскостью?

7. Какие способы применяют при определении натуральной величины сечения геометрической поверхности плоскостью?

Задачи

80. Определить натуральную величину сечения прямой призмы плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 119).

81. Определить натуральную величину сечения прямой призмы плоскостью общего положения α (ΔDEF) (рис. 120).

82. Определить натуральную величину сечения прямой призмы плоскостью общего положения α ($a \parallel b$) (рис. 121).

83. Определить натуральную величину сечения прямой пирамиды плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 122).

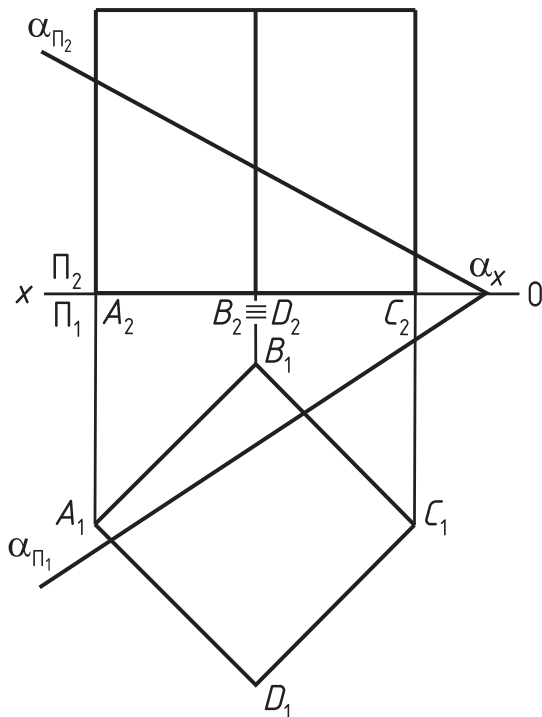


Рис. 119

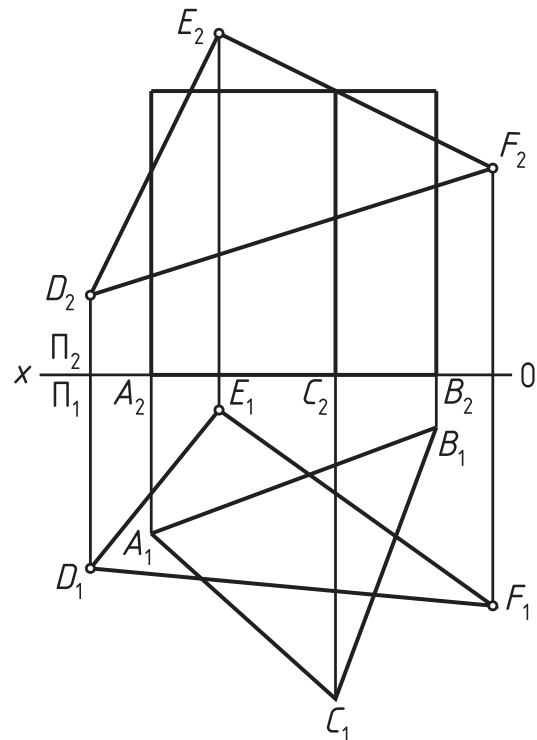


Рис. 120

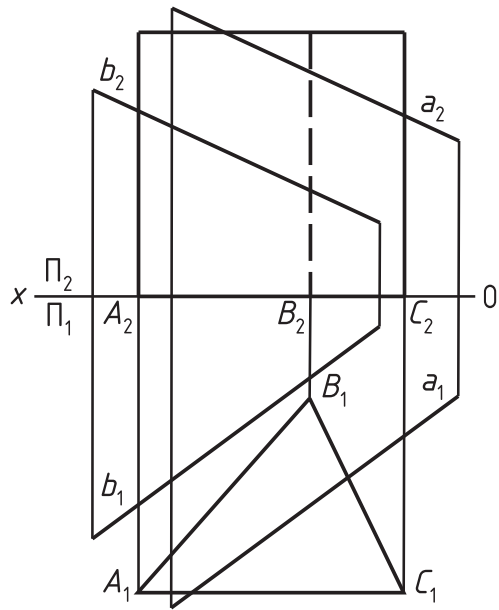


Рис. 121

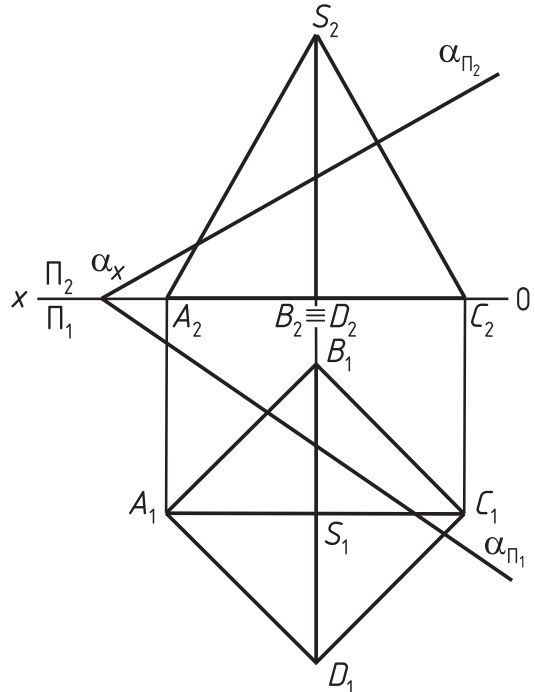


Рис. 122

84. Определить натуральную величину сечения прямой пирамиды плоскостью общего положения α ($c \parallel d$) (рис. 123).

85. Определить натуральную величину сечения прямой пирамиды плоскостью общего положения α (ΔEFK) (рис. 124).

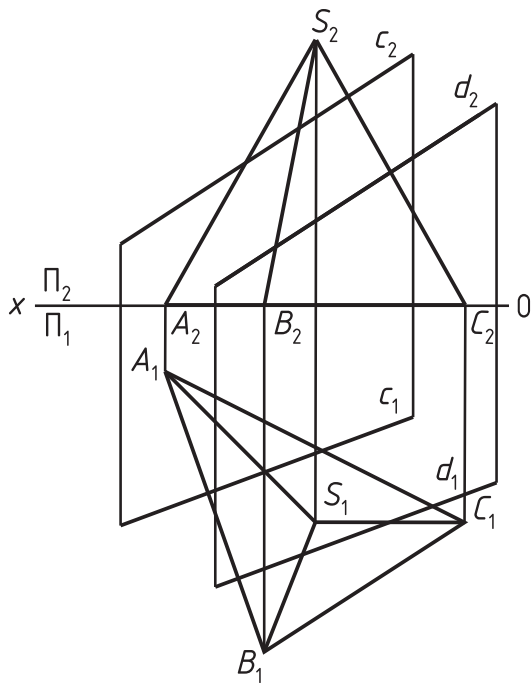


Рис. 123

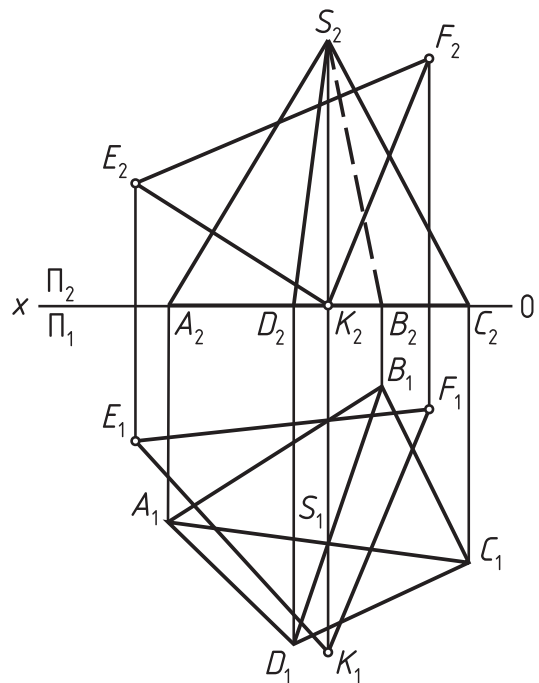


Рис. 124

86. Определить натуральную величину сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения α ($m \cap n$) (рис. 125).

87. Определить натуральную величину сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения α (ΔABC) (рис. 126).

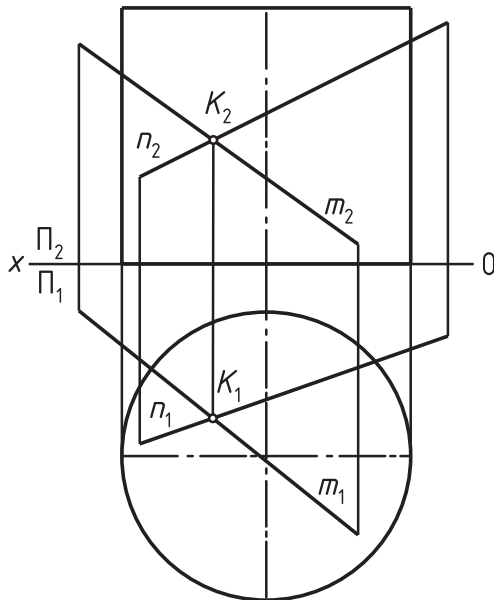


Рис. 125

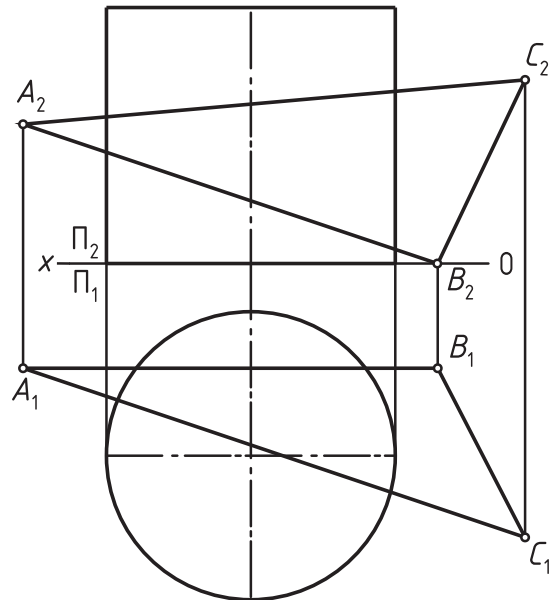


Рис. 126

88. Определить натуральную величину сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 127).

89. Определить натуральную величину сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения α ($\square DEFK$) (рис. 128).

90. Определить натуральную величину сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 129).

91. Определить натуральную величину сечения прямого кругового конуса плоскостью общего положения α ($e \cap l$) (рис. 130).

92. Определить натуральную величину сечения наклонной призмы плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 131).

93. Определить натуральную величину сечения наклонной пирамиды плоскостью общего положения α , заданной следами (рис. 132).

94. Определить натуральную величину сечения наклонного цилиндра плоскостью общего положения α ($a \cap b$) (рис. 133).

95. Определить натуральную величину сечения наклонного конуса плоскостью общего положения α (ΔABC) (рис. 134).

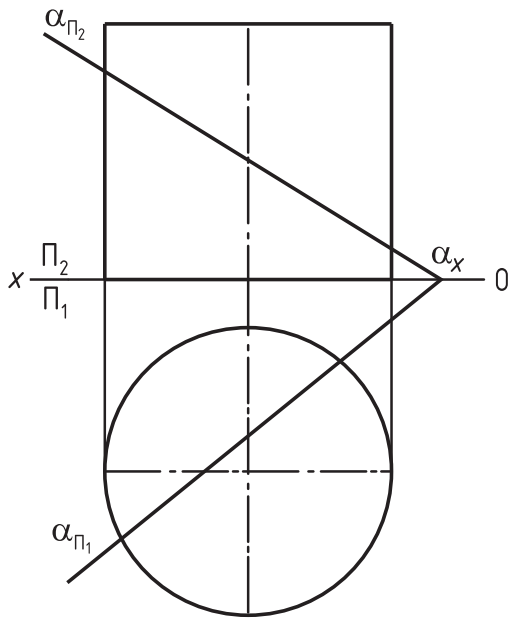


Рис. 127

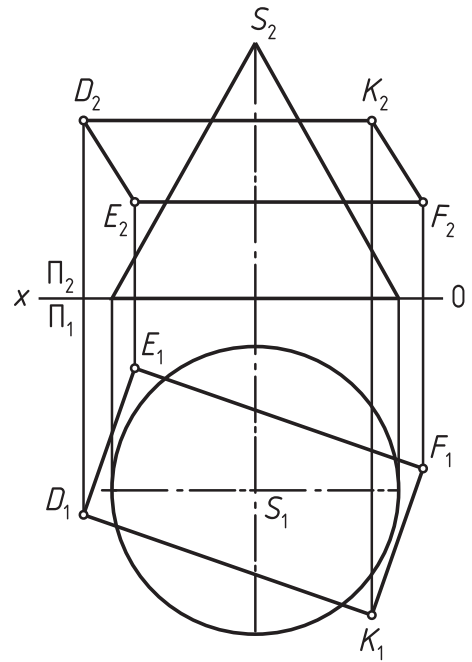


Рис. 128

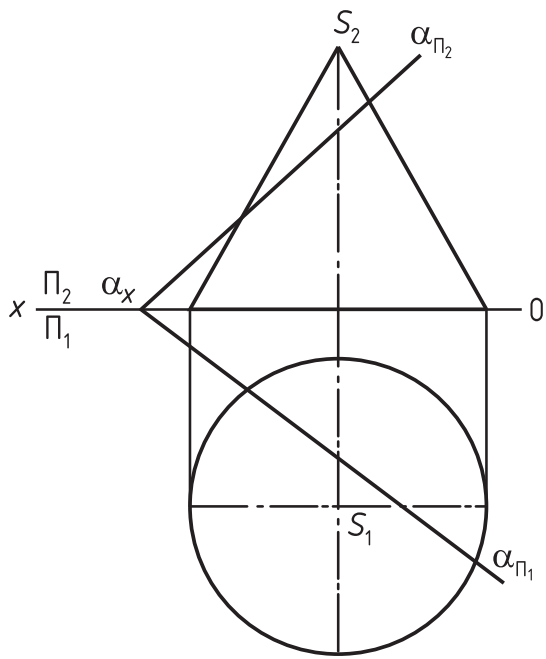


Рис. 129

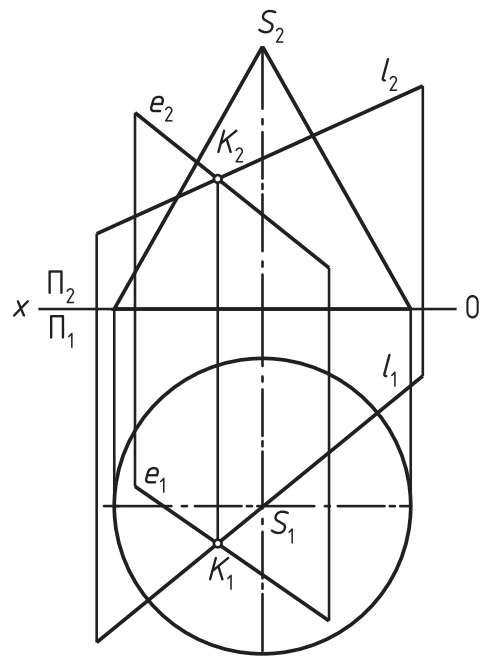


Рис. 130

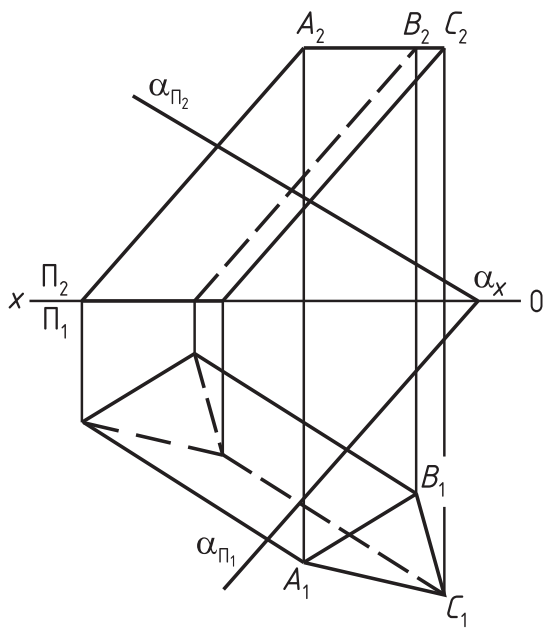


Рис. 131

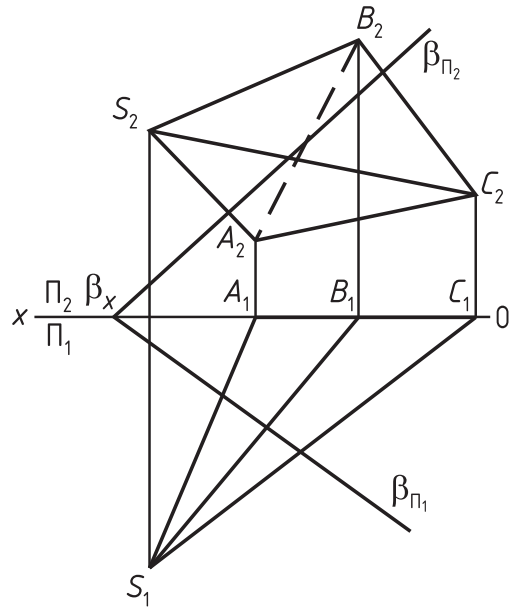


Рис. 132

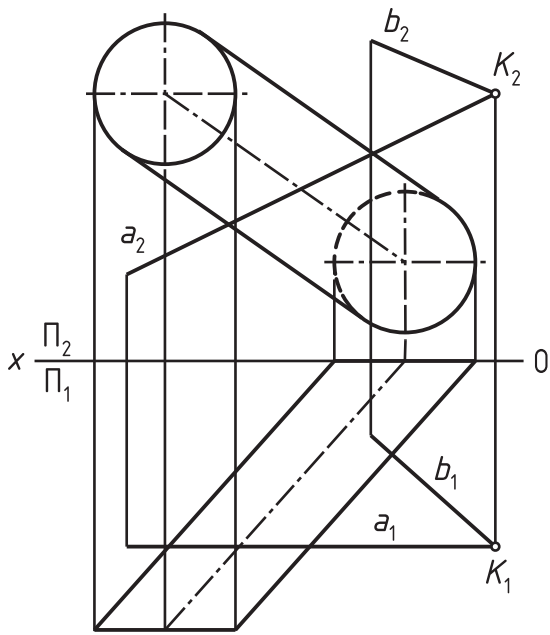


Рис. 133

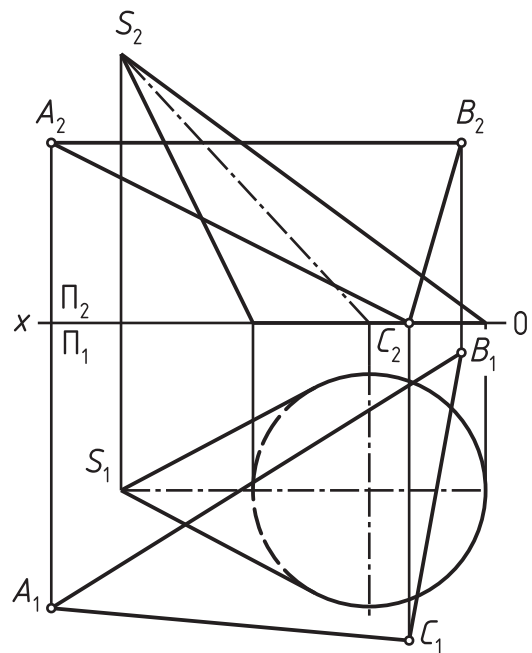


Рис. 134

Тема 7. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пересечение прямой линии с поверхностью. Полное и частичное пересечение поверхностей. Способ вспомогательных секущих плоскостей. Способ вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер)

Теоретические основы

Пересечение прямой с поверхностью называется *проницанием*. Построение точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел в общем случае сводится к следующему алгоритму:

- 1) заключить прямую во вспомогательную плоскость-посредник;
- 2) построить линию пересечения плоскости-посредника с поверхностью заданного геометрического тела;
- 3) определить точки пересечения линии сечения с данной прямой, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью.

Линия пересечения поверхностей — это замкнутая ломаная или кривая линия, принадлежащая обоим пересекающимся поверхностям. При пересечении поверхностей образующие или ребра этих поверхностей пересекаются. Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо решить множественную задачу на определение точек пересечения прямой с поверхностью. Соединение этих точек в определенной последовательности и определяет линию пересечения поверхностей.

При пересечении поверхностей различают:

- полное пересечение поверхностей*, при котором все ребра или образующие одной поверхности пересекаются с другой поверхностью;
- частичное (неполное) пересечение поверхностей*, при котором у обеих поверхностей есть ребра или образующие, не участвующие в пересечении.

Линия пересечения поверхностей может быть определена двумя основными способами:

- 1) вспомогательных секущих плоскостей;
- 2) вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер).

Вспомогательные плоскости и поверхности, участвующие в пересечении поверхностей, называют *посредниками*.

При построении линии пересечения поверхностей чаще используют способ вспомогательных секущих плоскостей. Способ вспомогательных шаровых поверхностей или способ сфер применяется, если:

- 1) обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения;

- 2) оси вращения обеих поверхностей пересекаются в одной точке;
- 3) оси вращения обеих поверхностей параллельны какой-либо плоскости проекций.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: прямая четырехгранная пирамида $ABCD S$ с вершиной в точке S и прямая трехгранная призма EFK (рис. 135).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей;
2) определить видимость ребер и граней пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей. В этом случае фронтальные проекции точек $1_2 \dots 10_2$, определяющих линию пересечения призмы и пирамиды, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел. При этом горизонтальные проекции точек $1_1, 2_1, 3_1, 6_1, 7_1$ и 10_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой (соответствующему ребру пирамиды) (рис. 136).

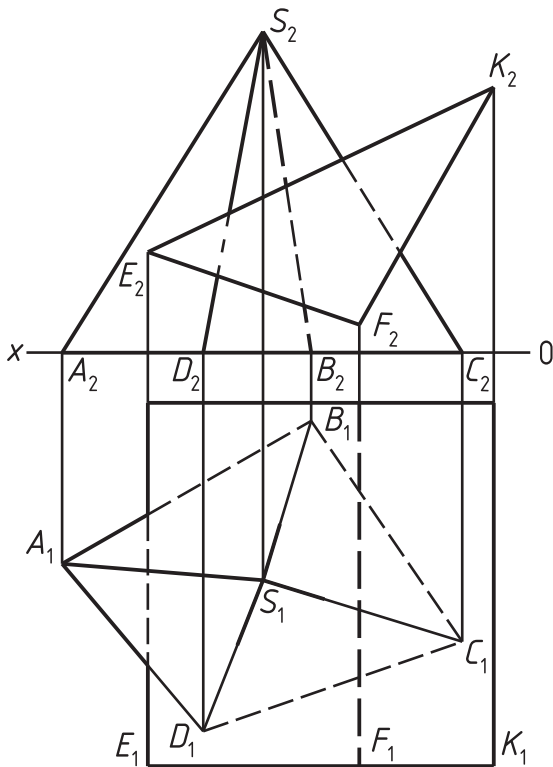


Рис. 135

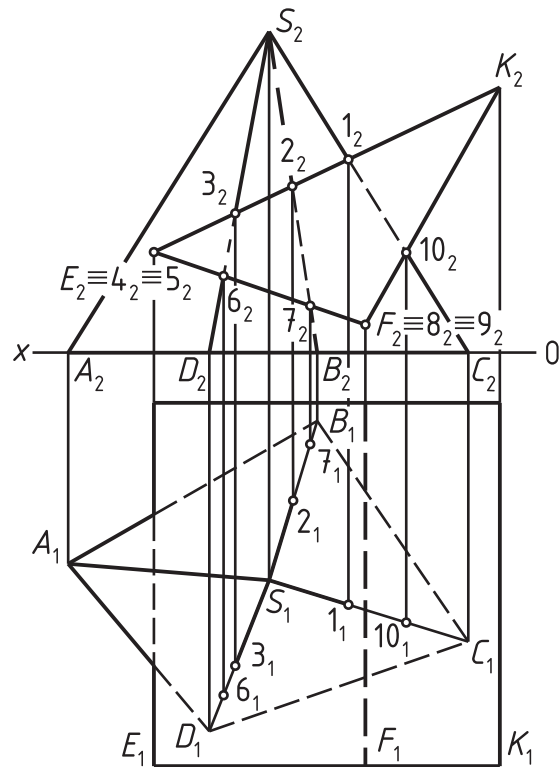


Рис. 136

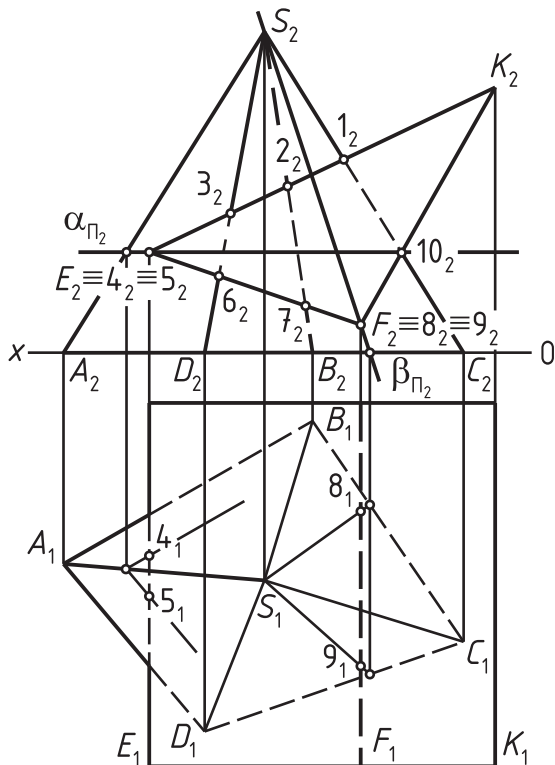


Рис. 137

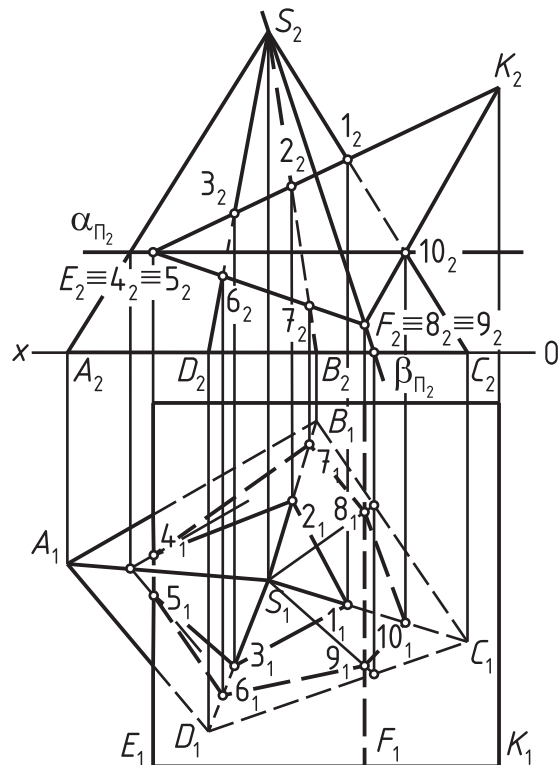


Рис. 138

2. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $4_2 \equiv 5_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность пирамиды, образуя фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью. Горизонтальные проекции сечений геометрических тел плоскостью α определяют с помощью линий проекционной связи. Пересечение полученных проекций сечений и определяет горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1 .

Горизонтальные проекции точек 8_1 и 9_1 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника β — фронтально-проецирующей, фронтальный след которой β_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след данной плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $8_2 \equiv 9_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность пирамиды, образуя фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью. Горизонтальные

проекция сечений геометрических тел плоскостью β определяют с помощью линий проекционной связи. Пересечение полученных проекций сечений и определяет горизонтальные проекции точек 8_1 и 9_1 (рис. 137).

3. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей в горизонтальной плоскости проекций, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и призмы (рис. 138).

Задача 2

Дано: два прямых круговых цилиндра (рис. 139).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют точку K пересечения осей вращения заданных поверхностей: фронтальную K_2 и горизонтальную K_1 проекции. Затем определяют точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 2_2 , определяющих линию пересечения поверхностей цилиндров, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел, а горизонтальные проекции точек 1_1 и 2_1 — в проекционной связи.

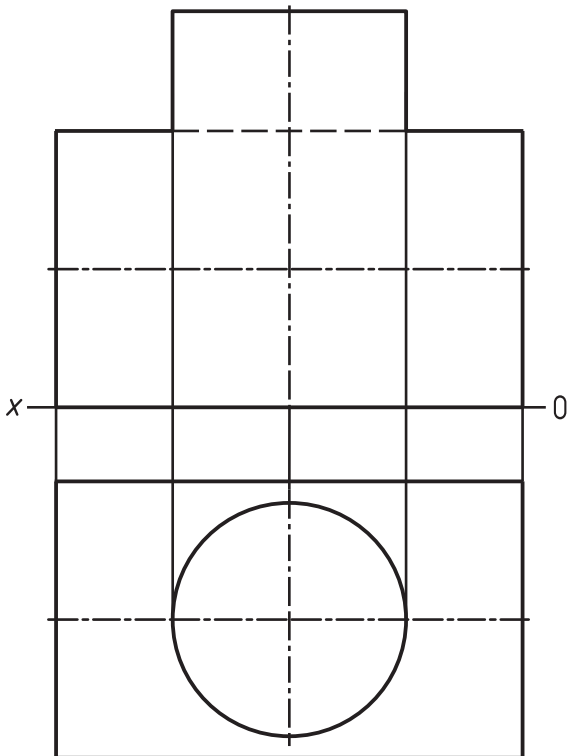


Рис. 139

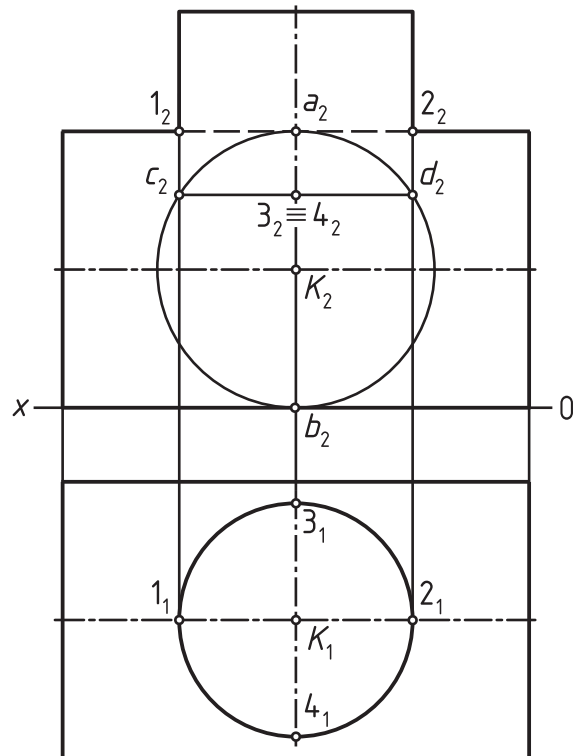


Рис. 140

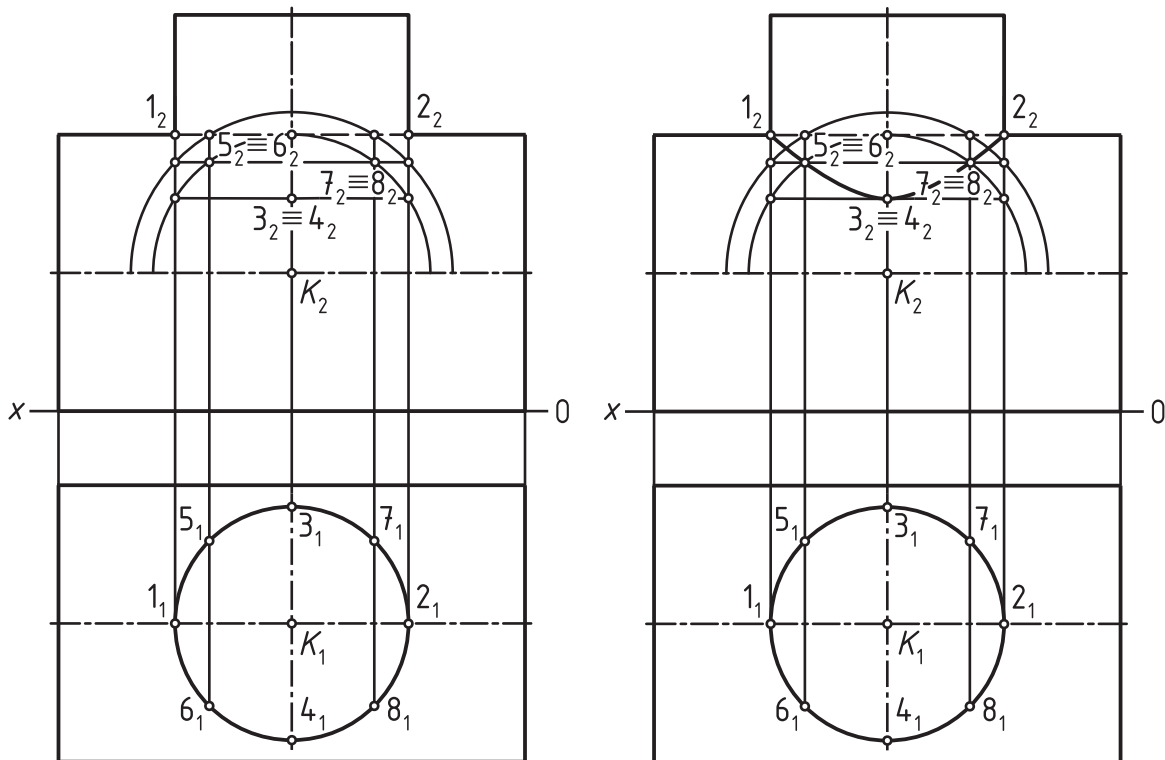


Рис. 141

Рис. 142

Далее проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке K пересечения осей вращения поверхностей (проекция точки K_2). Радиус данной сферы является минимальным и служит перпендикуляром к образующей цилиндра, поверхность которого профильно-проецирующая. Выстраивают линии пересечения сферы с заданными поверхностями — это окружности, которые проецируются на фронтальную плоскость проекций Π_2 в прямые линии — $a_2 b_2$ и $c_2 d_2$. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей цилиндров. Таким образом, определяют фронтальные проекции точек 3_2 и 4_2 . Горизонтальные проекции точек 3_2 и 4_2 находят в проекционной связи (рис. 140).

2. Определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения. Для более точного построения данной линии пересечения поверхностей в нашей задаче необходимо найти несколько дополнительных точек. С этой целью проводят еще одну вспомогательную секущую сферу радиусом немного большим радиуса предыдущей сферы и определяют фронтальные ($5_2 \dots 8_2$) и горизонтальные ($5_1 \dots 8_1$) проекции точек вышеописанным способом (рис. 141).

3. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих цилиндров (рис. 142).

Контрольные вопросы

1. Как называется пересечение прямой с геометрической поверхностью и каков алгоритм определения точек пересечения прямой с поверхностью?
2. Что является результатом взаимного пересечения: а) двух многогранников; б) двух поверхностей вращения; в) многогранника и поверхности вращения?
3. Что является результатом пересечения двух соосных поверхностей вращения?
4. В каких случаях задача на построение линии взаимного пересечения поверхностей упрощается и почему?
5. Какова последовательность действий при построении линии взаимного пересечения: а) двух многогранников; б) многогранника и поверхности вращения?
6. В чем сущность способов вспомогательных секущих плоскостей и вспомогательных шаровых поверхностей, применяемых при построении линии взаимного пересечения поверхностей?

Задачи

96. Найти точки пересечения прямых с заданной поверхностью. Определить видимость прямых (рис. 143).

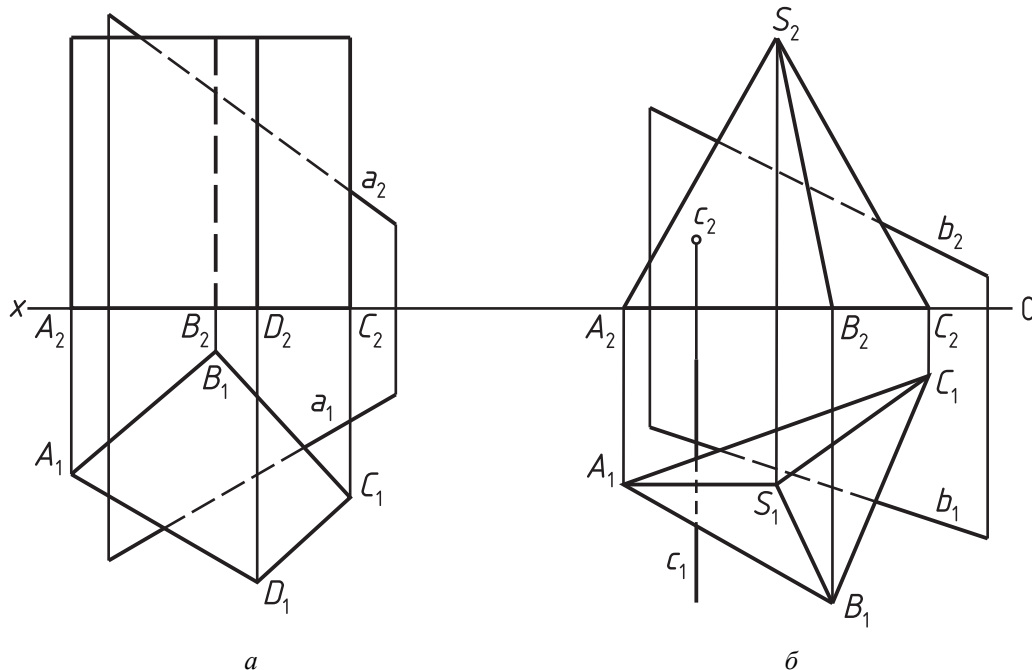


Рис. 143 (начало)

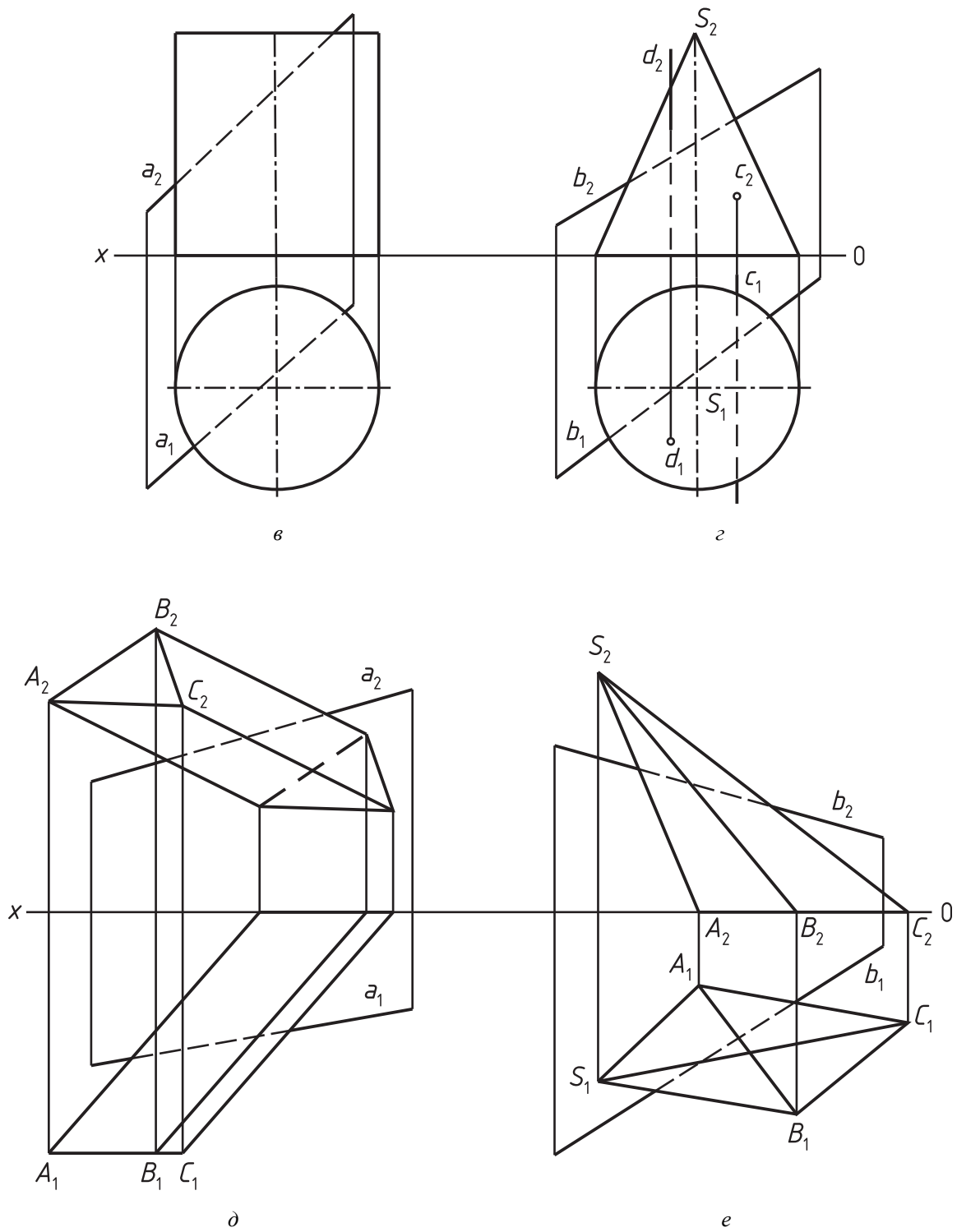


Рис. 143 (продолжение)

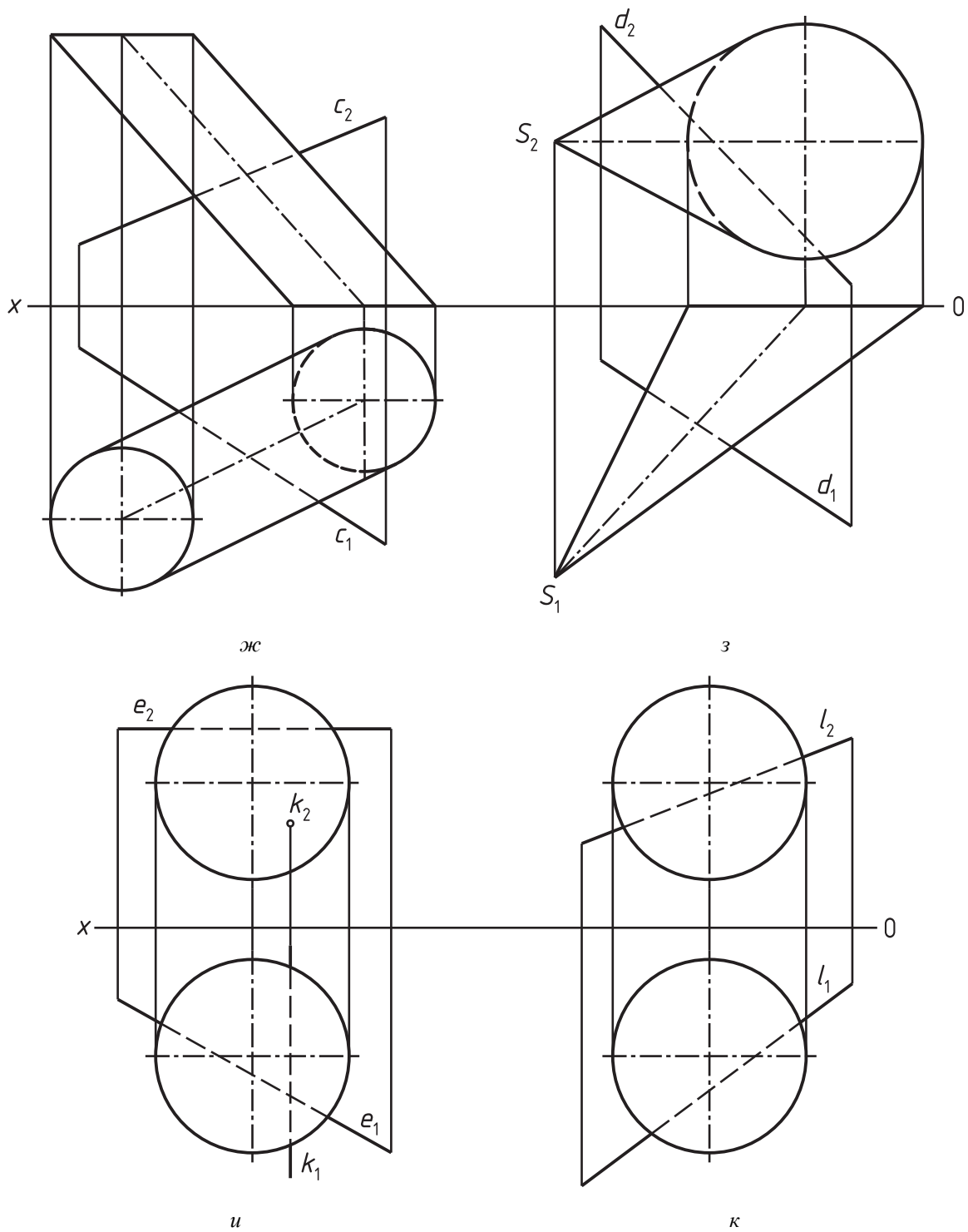


Рис. 143 (окончание)

97. Построить линию пересечения заданных поверхностей (рис. 144).

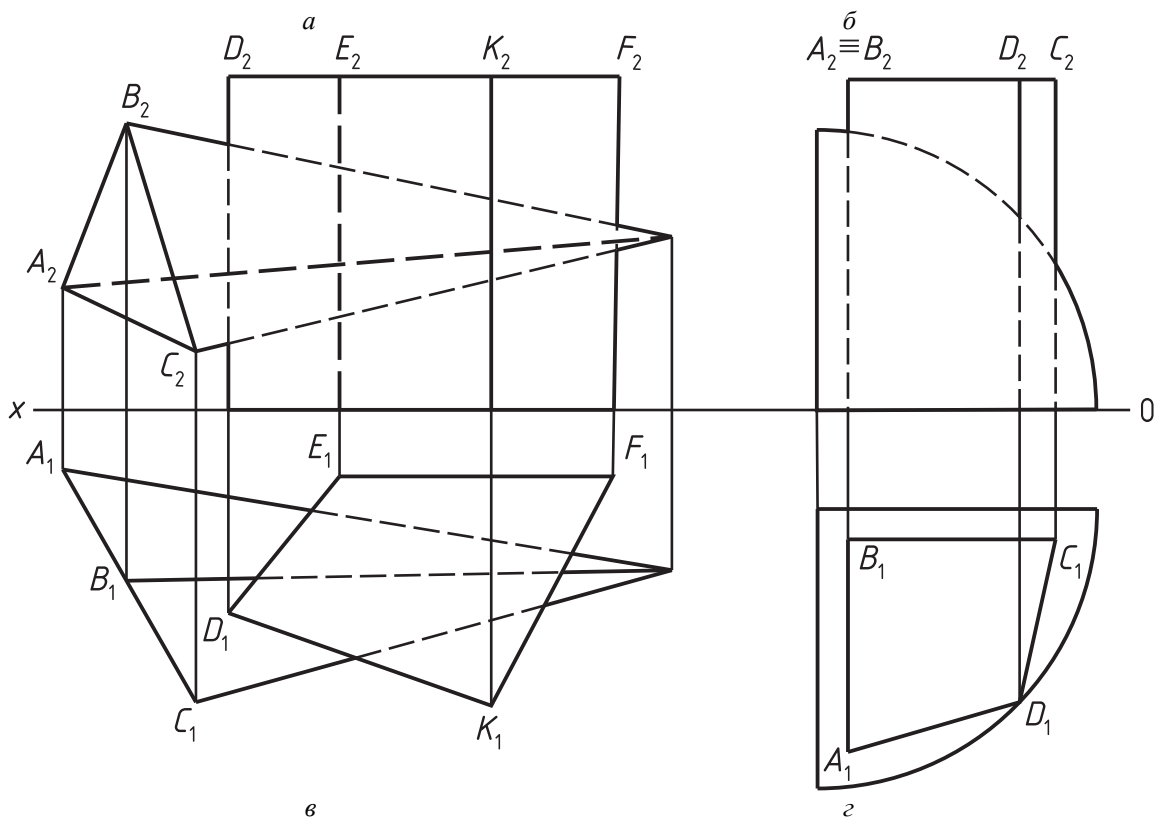
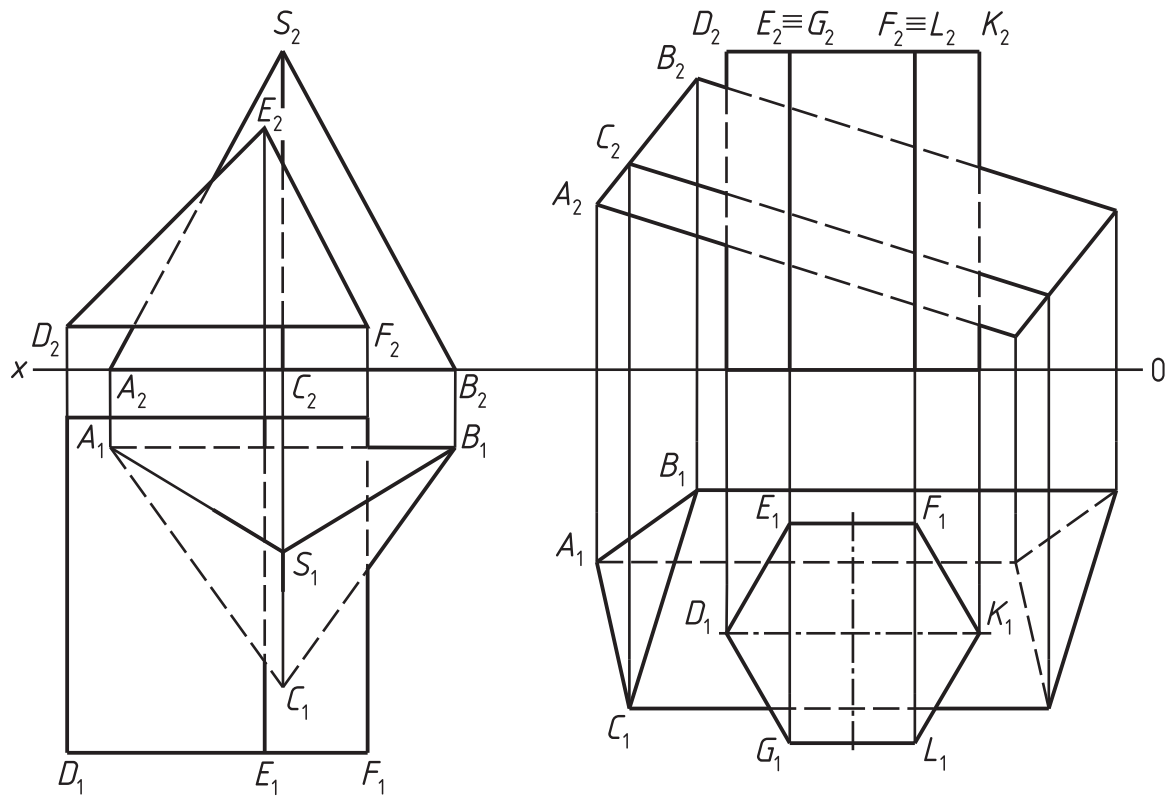


Рис. 144 (начало)

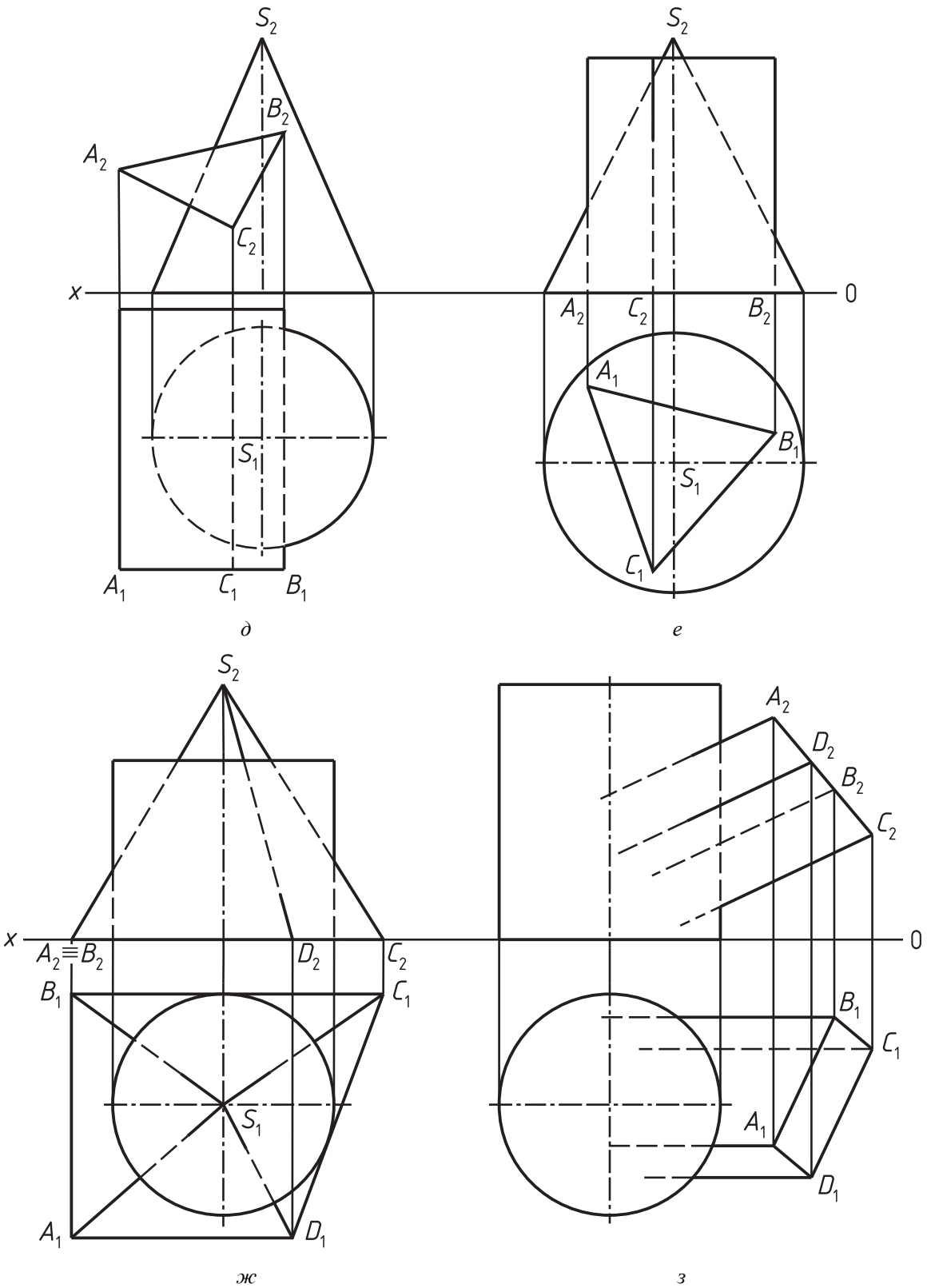


Рис. 144 (продолжение)

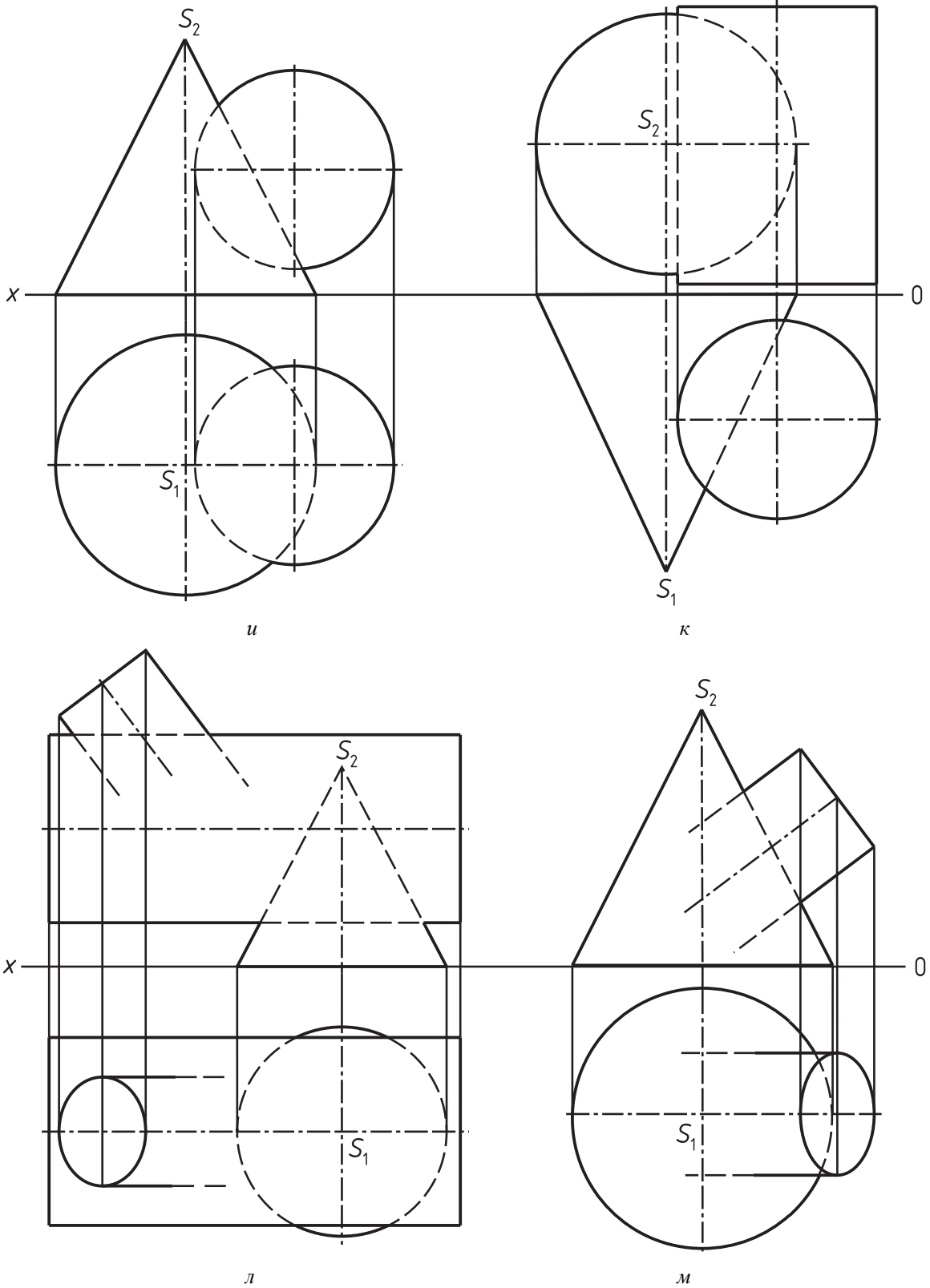


Рис. 144 (окончание)

Тема 8. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

Точка, прямая, плоскость в проекциях с числовыми отметками. Плоскость, заданная масштабом уклона. Поверхность в проекциях с числовыми отметками. Топографическая поверхность. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью

Теоретические основы

В проекциях с числовыми отметками предмет ортогонально проецируется только на одну плоскость проекций, как правило, горизонтальную, называемую плоскостью нулевого уровня Π_0 . Так как одна проекция не определяет положение предмета в пространстве, то фронтальную проекцию заменяют числами (отметками), которые ставятся около проецируемых точек. Эти отметки (обычно в метрах) указывают превышение точек над плоскостью нулевого уровня Π_0 .

Длина горизонтальной проекции отрезка прямой в проекциях с числовыми отметками называется *заложением отрезка прямой*. Разность высотных отметок концов отрезка прямой называют *превышением* или *подъемом отрезка прямой*. Отношение превышения концов отрезка прямой к его заложению называют *уклоном отрезка прямой*. Заложение отрезка прямой при разности высотных отметок его концов, равной единице, называют *интервалом*. Интервал прямой используют для определения на ней точек с целочисленными высотными отметками. Эта операция называется *градуированием*. Отсюда, проградировать прямую — значит определить на ней точки, имеющие высотные отметки, выраженные целыми числами.

В проекциях с числовыми отметками прямые пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны, пересекаться и скрещиваться.

1. Если прямые пространства параллельны, то их проекции параллельны, интервалы равны и отметки возрастают в одном направлении.

2. Если прямые пространства пересекаются, то их проекции пересекаются и отметки в точке пересечения проекций прямых одинаковые.

3. Если прямые пространства скрещиваются, то их отметки в точке пересечения проекций прямых различны.

Наиболее рациональным в проекциях с числовыми отметками считается (кроме уже известных способов) задание плоскости масштабом уклонов. *Масштабом уклона плоскости* называется проградированная горизонтальная проекция линии наибольшего ската плоскости. Масштаб

уклона обозначается двумя параллельными линиями — тонкой и толстой, отстоящих друг от друга на расстоянии 1 мм. Высотные отметки точек ставятся на тонкой линии. Угол наклона плоскости к плоскости нулевого уровня Π_0 называется *углом падения плоскости*. Угол падения плоскости измеряется между линией наибольшего ската и ее горизонтальной проекцией.

Проекции горизонталей плоскости и масштаб уклона плоскости взаимно перпендикулярны.

В проекциях с числовыми отметками плоскости пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны и пересекаться.

1. Если плоскости параллельны, то их масштабы уклонов параллельны, интервалы равны и возрастают в одном направлении.

2. Если плоскости пересекаются, то линия их пересечения проходит через точки пересечения горизонталей с одинаковыми отметками.

В проекциях с числовыми отметками широко применяются геометрические и графические поверхности при проектировании различных инженерных сооружений. К *геометрическим* относят поверхности закономерные, подчиняющиеся определенным геометрическим законам. Наибольшее применение в проекциях с числовыми отметками имеют конические поверхности и поверхности постоянного ската. *Графической* является поверхность, закон образования которой неизвестен, например, земная поверхность, называемая топографической.

Линия наибольшего ската поверхности есть непрерывное множество наименьших интервалов этой поверхности.

Поверхностью постоянного (одинакового) ската или равного уклона образуется, например, на криволинейном участке автомобильной дороги с одновременным подъемом (спуском) в откосах насыпей или выемок и имеет по своей протяженности постоянно заданный уклон. Поверхность одинакового ската есть линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой составляют с горизонтальной плоскостью одинаковый угол наклона.

Топографическая поверхность в плане местности показывается с помощью горизонталей — линий различной кривизны, соединяющих точки земной поверхности с одинаковыми высотными отметками. Разность высотных отметок между двумя соседними горизонталями принимают, как правило, равной 1 м. Расстояние между соседними горизонталями — интервал — определяет уклон топографической поверхности.

В практической деятельности для решения целого ряда инженерных задач пользуются вертикальным разрезом топографической поверхности. Линия пересечения топографической поверхности с вертикальной секущей плоскостью называется *профилем*. Профиль может быть совмещенным с топографической поверхностью или вынесенным за ее пределы.

При решении задач, связанных с построением линии пересечения плоскости, заданной масштабом уклонов, с топографической поверхностью достаточно отметить точки пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей и соединить их ломаной линией. Для определения точки пересечения прямой с топографической поверхностью или плоскостью прямую градуируют и заключают во вспомогательную плоскость-посредник, проектные горизонталю которой в пределах чертежа пересекаются с соответствующими (одноименными) горизонталями заданной поверхности или плоскости.

Примеры поэтапного решения типовых задач

Задача 1

Дано: отрезок прямой AB и плоскость α_i , заданная масштабом уклона (рис. 145).

Выполнить: 1) определить точку пересечения прямой с плоскостью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Пересечение отрезка прямой AB с плоскостью α_i в проекциях с числовыми отметками сводится к нахождению точки, общей для прямой и плоскости. Для определения точки пересечения отрезка прямой AB и плоскости α_i прямую заключают во вспомогательную плоскость-посредник β_i . Проектные горизонталю плоскости-посредника должны пересекаться в пределах чертежа с соответствующими (одноименными) проектными горизонталями заданной плоскости α_i (рис. 146).

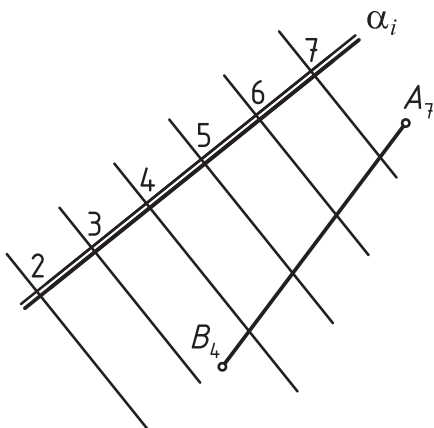


Рис. 145

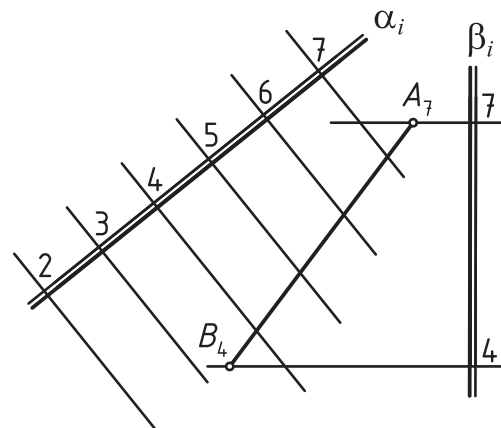


Рис. 146

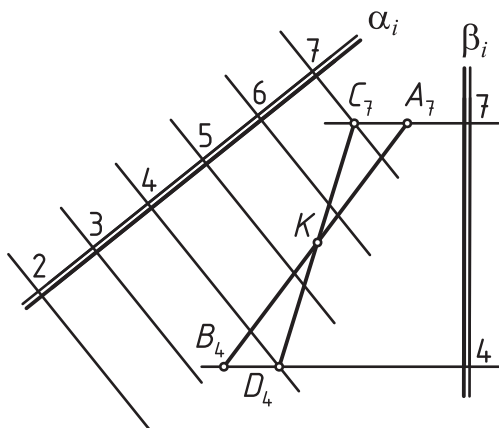


Рис. 147

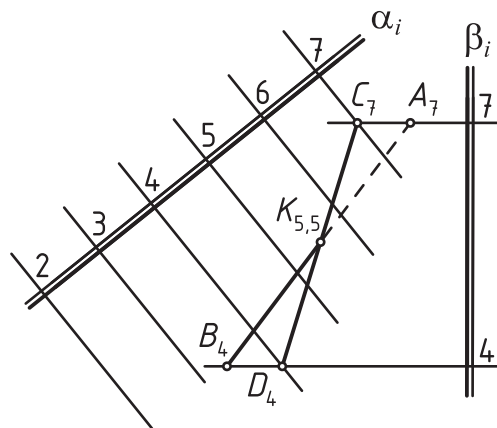


Рис. 148

2. Выстраивают линию пересечения вспомогательной плоскости β_i и заданной плоскости α_i — отрезок прямой CD . Там, где линия пересечения плоскостей (отрезок CD) пересечет заданную прямую (отрезок AB), и будет точка K пересечения прямой с плоскостью α_i (рис. 147).

3. Определяют высотную отметку точки K и затем из условия превышения концов отрезка прямой A и B по отношению к плоскости α_i определяют видимость отрезка прямой AB (рис. 148).

З а д а ч а 2

Дано: отрезок прямой AB и топографическая поверхность (рис. 149).

Выполнить: 1) определить точку пересечения прямой с топографической поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Пересечение прямой с топографической поверхностью в проекциях с числовыми отметками сводится к нахождению точки, общей для прямой и поверхности. Для определения точки пересечения отрезка прямой AB с топографической поверхностью прямую в начале градуируют. С этой целью из точки A , имеющей меньшую высотную отметку, проводят под произвольным углом вспомогательную прямую, на которой в заданном масштабе отмечают целочисленные отметки точек. Концы отрезков соединяют прямой, а через точки деления проводят параллельные прямые, определяющие на отрезке прямой AB точки с целочисленными отметками и величину интервала прямой (рис. 150).

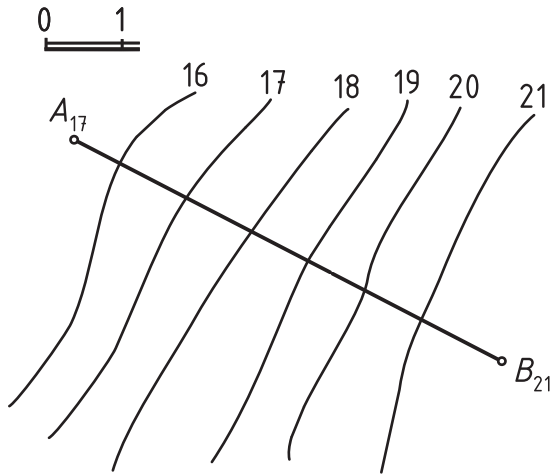


Рис. 149

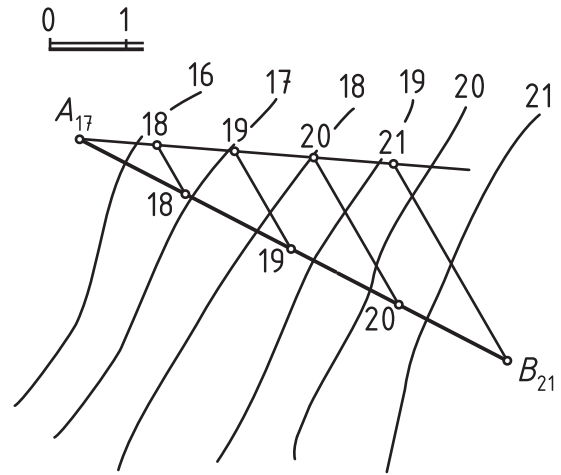


Рис. 150

2. Проградуированную прямую заключают во вспомогательную плоскость-посредник α_i . Проектные горизонталы плоскости-посредника должны пересекаться в пределах чертежа с соответствующими (одноименными) топографическими горизонталями заданной поверхности. Выстраивают линию пересечения вспомогательной плоскости-посредника α_i и топографической поверхности — ломаная линия, проходящая через точки пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей (рис. 151).

3. Определяют точку K пересечения прямой с топографической поверхностью в том месте, где линия пересечения плоскости α_i и топографической поверхности пересечет заданную прямую. Далее определяют высотную отметку точки K и затем из условия превышения концов A и B отрезка прямой по отношению к поверхности определяют видимость отрезка прямой AB (рис. 152).

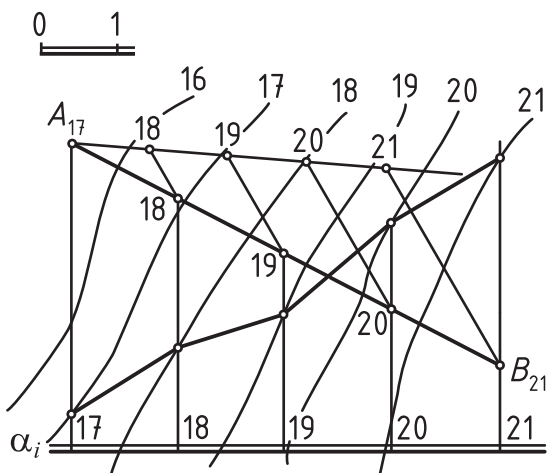


Рис. 151

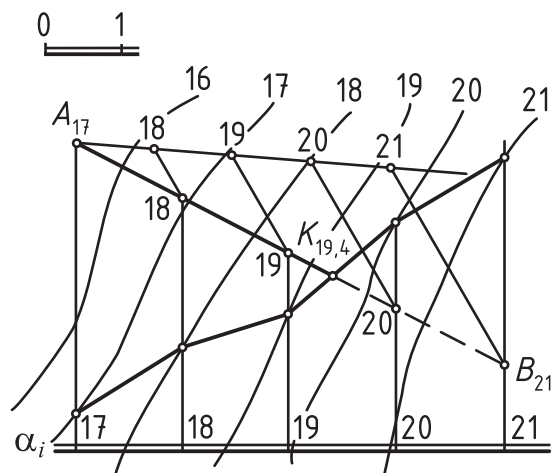


Рис. 152

Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность способа проекций с числовыми отметками?
2. Что называется заложением отрезка прямой?
3. Что называется превышением или подъемом отрезка прямой?
4. Что является уклоном отрезка прямой и интервалом?
5. Что называется градуированием прямой?
6. Когда прямые пространства в проекциях с числовыми отметками: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются?
7. Что называется масштабом уклона и углом падения плоскости?
8. Когда плоскости пространства в проекциях с числовыми отметками: а) параллельны; б) пересекаются?
9. Какие поверхности с числовыми отметками являются: а) геометрическими; б) графическими? Приведите примеры наиболее известных поверхностей.
10. Что является линией наибольшего ската поверхности?
11. Какая поверхность является поверхностью постоянного (одинакового) ската или равного уклона и как она образуется?
12. Как показывается топографическая поверхность в плане местности?
13. Что называется профилем?
14. Какой алгоритм используют при решении задач на построение линии пересечения плоскости, заданной масштабом уклонов, с топографической поверхностью?
15. Какой алгоритм используют при решении задач на определение точки пересечения прямой с топографической поверхностью или плоскостью?

Задачи

98. Проградуировать отрезок прямой AB (рис. 153).
99. Определить взаимное положение отрезков прямых пространства AB и CD (рис. 154).

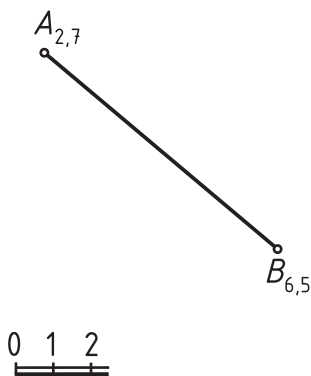


Рис. 153

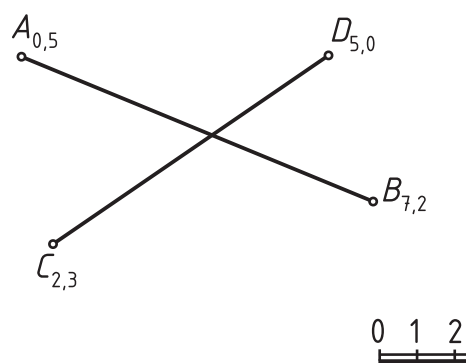


Рис. 154

100. Через точку C провести прямую параллельную отрезку прямой AB (рис. 155).

101. От плоскости, заданной отрезком прямой CD и точкой K , перейти к плоскости, заданной масштабом уклонов (рис. 156).

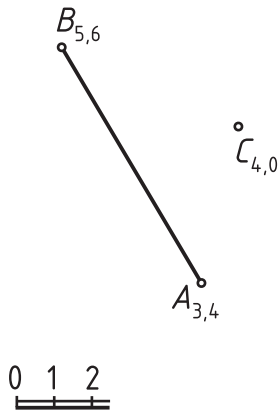


Рис. 155

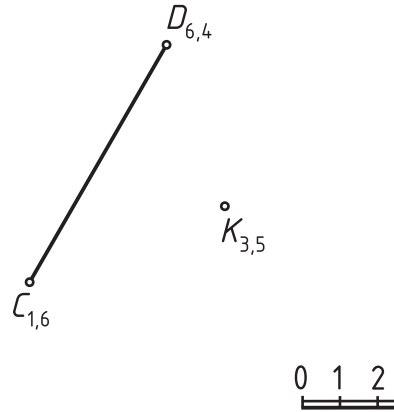


Рис. 156

102. Построить линию пересечения заданных плоскостей (рис. 157).

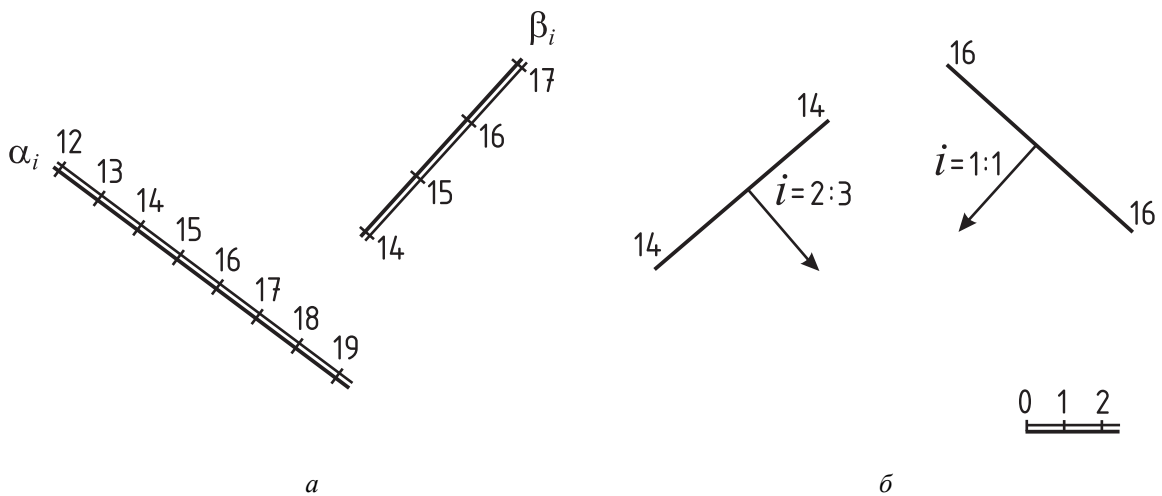


Рис. 157

103. Построить линию пересечения плоскости с конической поверхностью (рис. 158).

104. Найти точку пересечения отрезка прямой AB с заданной плоскостью (рис. 159).

105. Построить линию пересечения заданных плоскостей и плоскости α_i с конической поверхностью (рис. 160).

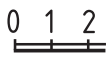
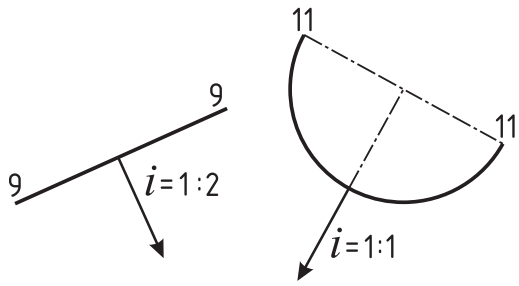


Рис. 158

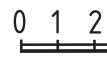
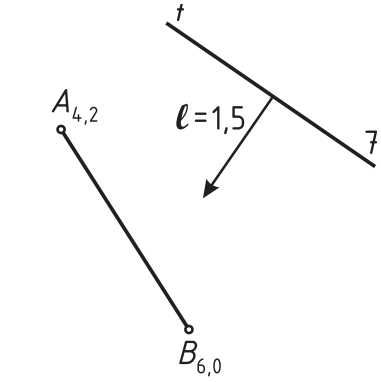


Рис. 159

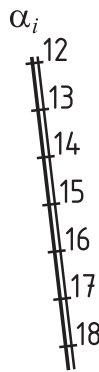
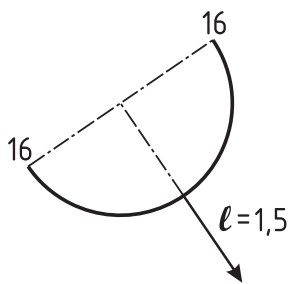
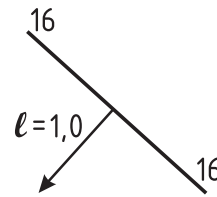


Рис. 160



106. Построить линию пересечения плоскости с топографической поверхностью (рис. 161).

107. Найти точку пересечения отрезка прямой AB с топографической поверхностью (рис. 162).

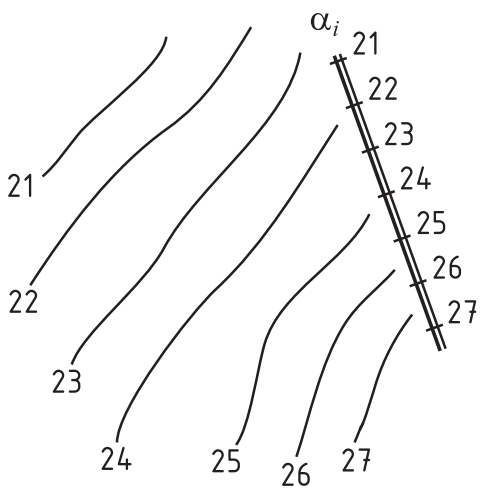


Рис. 161

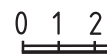
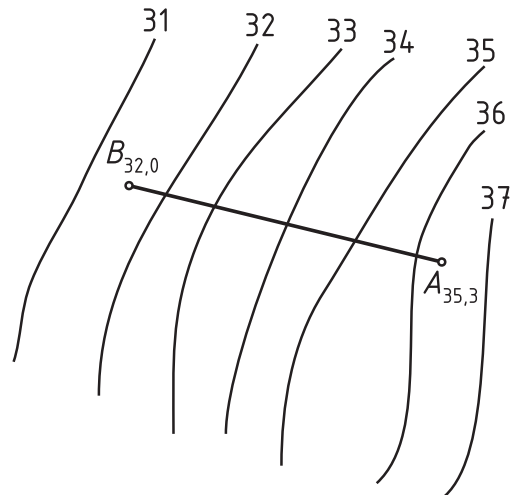


Рис. 162

108. Найти точки пересечения отрезка прямой AB с топографической поверхностью способом профиля (рис. 163).

109. Построить откосы плотины и определить границу земляных работ. Построить профиль топографической поверхности и искусственной поверхности (плотины) по плоскости сечения $A - A$ (рис. 164).

110. Построить откосы прямолинейного участка дороги и определить границу земляных работ. Уклон откосов: $i = 1:1$; $M 1: 200$ (рис. 165).

111. Построить откосы криволинейного участка дороги и определить границу земляных работ. Радиус кривой выбрать произвольно. Уклон откосов: $i = 3:2$, уклон аппарели дороги: $i_a = 1:3$. $M 1: 200$ (рис. 166).

112. Построить откосы горизонтальной площадки на заданной отметке и определить границу земляных работ. Уклоны насыпи и выемки грунта даны. $M 1: 200$ (рис. 167).

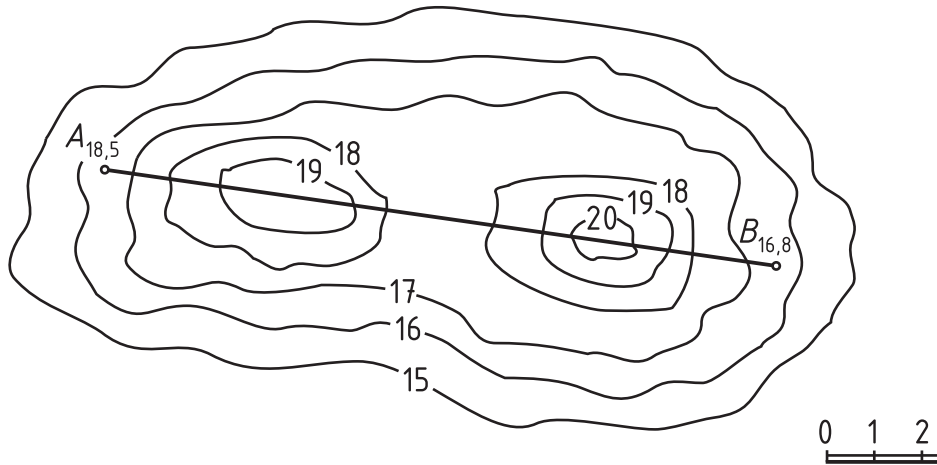


Рис. 163

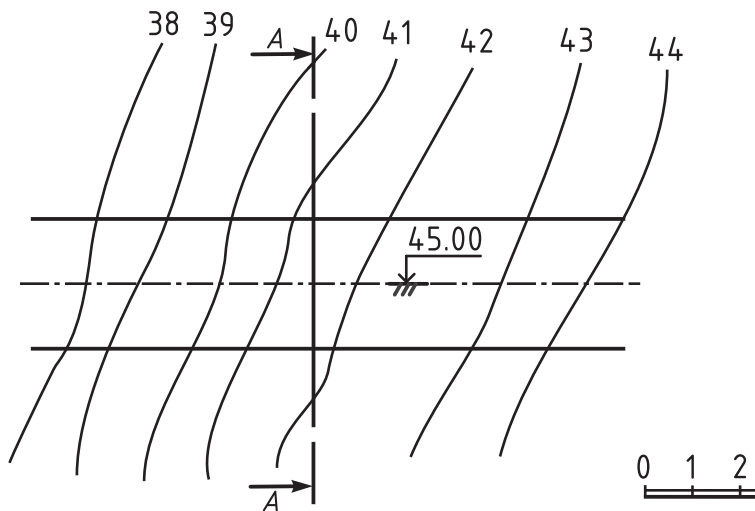


Рис. 164

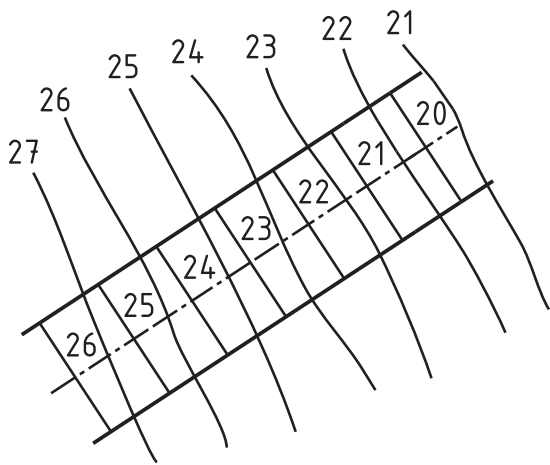


Рис. 165

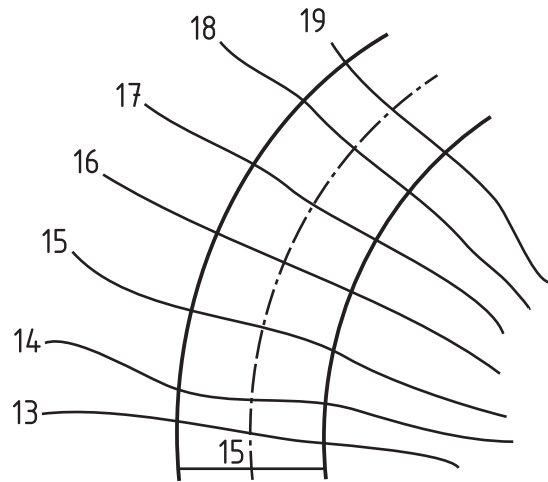


Рис. 166

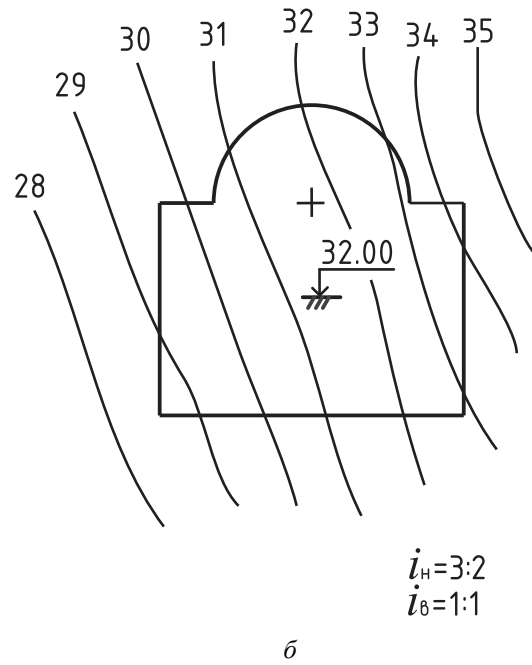
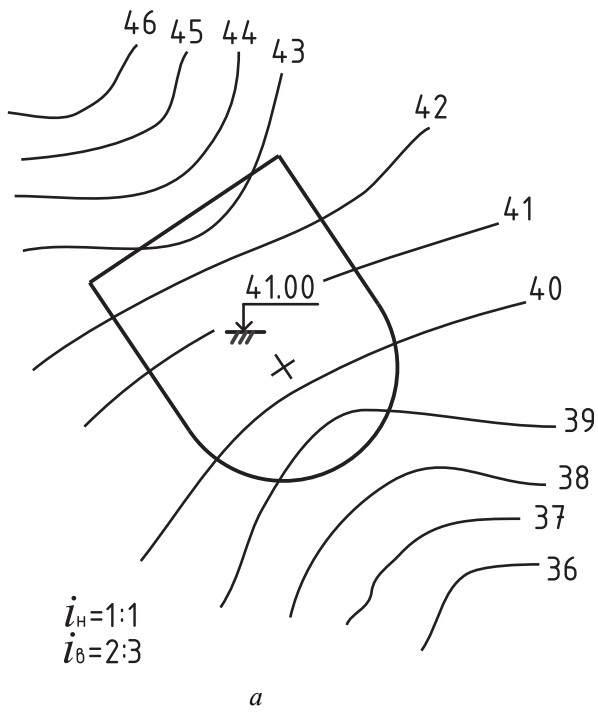


Рис. 167

Тема 9. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Точка, прямая, плоская фигура и многогранники в аксонометрии. Окружность в аксонометрии. Аксонометрические проекции геометрических тел

Теоретические основы

Аксонометрическую проекцию или сокращенно *аксонометрию* относят к наглядным изображениям предметов на комплексном чертеже. В переводе с греческого языка *аксонометрия* означает «измерение по осям».

Различают аксонометрическое проецирование *центральное* и *параллельное*. Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что геометрическую фигуру относят к некоторой системе прямоугольных координат и затем проецируют параллельными лучами на картинную плоскость вместе с координатной системой.

Проекция точки A на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией* или *аксонометрией точки A* и обозначается A' . Проекция пространственных координатных осей x , y и z на картинную плоскость K называются *аксонометрическими осями* или *осями аксонометрических координат* и обозначаются x' , y' и z' . Горизонтальная проекция точки A_1 на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией точки A_1* или *вторичной горизонтальной проекцией точки A* и обозначается A'_1 . Аналогично могут быть получены вторичные фронтальная и профильная проекции точки A .

Проекции пространственных координат точки A на картинную плоскость K называются *аксонометрическими координатами точки A* и обозначаются $X'_A = O'A'_x$; $Y'_A = O'A'_y$; $Z'_A = O'A'_z$.

На пространственных координатных осях x , y и z откладываются равные отрезки $b = b_x = b_y = b_z$. Величина отрезка b принимается за единицу длины и называется *натуральным масштабом*. Проекция натурального масштаба на картинную плоскость K называются *аксонометрическими масштабами* и обозначаются b'_x , b'_y и b'_z .

Координаты точки A при произвольном положении пространственной системы координат относительно картинной плоскости K будут проецироваться на последнюю с искажениями. Отношения аксонометрических координат точки A к ее натуральным (пространственным) координатам называются *показателями* или *коэффициентами искажения по осям*: $k_1 = x'_A/x_A$; $k_2 = y'_A/y_A$; $k_3 = z'_A/z_A$.

Величину коэффициентов искажения можно также определить как отношение соответствующего аксонометрического масштаба к натуральному: $k_1 = b'_x/b_x$; $k_2 = b'_y/b_y$; $k_3 = b'_z/b_z$.

Коэффициенты искажения являются отвлеченными числами, показывающими, в каком отношении меняются размеры геометрических образов при проецировании их на плоскость аксонометрических проекций.

По направлению проецирования на плоскость различают:

прямоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций прямой угол;

косоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи образуют с плоскостью проекций острый угол.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения по осям аксонометрические проекции делятся на следующие виды:

изометрические (изометрия) — коэффициенты искажения равны по всем трем осям ($k_1 = k_2 = k_3$);

диметрические (диметрия) — коэффициенты искажения равны по каким-либо двум осям ($k_1 = k_2$ или $k_1 = k_3$ или $k_2 = k_3$);

триметрические (триметрия) — коэффициенты искажения различны по всем трем осям ($k_1 \neq k_2 \neq k_3$).

Все виды аксонометрических проекций характеризуются двумя параметрами — направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по этим осям.

ГОСТ 2.317—69 устанавливает аксонометрические проекции, применяемые в чертежах всех отраслей промышленности и строительства. Наиболее часто применяемые в техническом черчении виды аксонометрических проекций:

1. *Прямоугольная изометрия*. Коэффициент искажения по осям x' , y' и z' равен 0,82. В целях упрощения изометрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x' , y' и z' , приняв коэффициент искажения равным 1.

2. *Прямоугольная диметрия*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 0,94, а по оси y' равен 0,47. В целях упрощения диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x' и z' и с коэффициентом искажения по оси y' , равным 0,5.

3. *Косоугольная фронтальная диметрия*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 1, по оси y' равен 0,5.

Выбор аксонометрических проекций для построения изображений различных объектов определяется в основном их формой и устройством и подчиняется определенным требованиям, главными из которых явля-

ются наглядность и простота построения. Задав систему аксонометрических осей и коэффициенты искажения по ним, можно построить аксонометрические изображения любой геометрической фигуры по ее ортогональным проекциям.

Для построения аксонометрической проекции точки A при заданном направлении аксонометрических осей необходимо отложить на координатных осях пространственные координаты этой точки, учитывая коэффициенты искажения по осям. Используя данную систему построения аксонометрической проекции точки, можно выстраивать аксонометрические проекции любого геометрического образа (отрезка, плоской фигуры, многогранника, поверхности и т. д.) в любом виде аксонометрии. Построение аксонометрических проекций многогранника сводится к определению аксонометрических проекций его вершин и соединению их между собой отрезками прямых линий. Построение аксонометрических проекций предметов, форма которых имеет поверхность вращения, невозможно без изображения аксонометрической проекции окружности. Аксонометрическая проекция окружности представляет собой замкнутую кривую линию в виде эллипса, который иногда заменяют овалом. *Овалом* называется кривая линия, по начертанию похожая на эллипс, но выстроенная с помощью циркуля.

Построение аксонометрических проекций геометрических тел рекомендуется начинать с построения аксонометрических проекций их оснований, к которым выстраивают изображение других элементов геометрических тел (ребер, граней, оснований, образующих).

Примеры поэтапного решения типовых задач

З а д а ч а 1

Дано: многоугольник $ABCDE$ (рис. 168).

Выполнить: построить горизонтальную вторичную и аксонометрическую проекции многоугольника в прямоугольной изометрии.

Порядок выполнения:

1. Задают систему аксонометрических осей x' , y' и z' и коэффициенты искажения по осям. В прямоугольной изометрии углы между координатными осями равны 120° , а коэффициенты искажения по координатным осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Выстраивают горизонтальную вторичную проекцию многоугольника $ABCDE$. Для этого по ортогональным проекциям любой точки, например A , определяют ее пространственные координаты: $X_A = OA_x$; $Y_A = OA_y$; $Z_A = OA_z$. Затем, учитывая коэффициенты ис-

кажения по координатным осям, находят аксонометрические координаты данной точки: $X'_A = k_1 X_A$; $Y'_A = k_2 Y_A$; $Z'_A = k_3 Z_A$. Так как коэффициенты искажения по осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, то $X'_A = X_A$; $Y'_A = Y_A$; $Z'_A = Z_A$. Определив таким образом аксонометрические координаты точки A и ее проекции на осях x' и y' (проекция A'_x и A'_y), в пересечении проекционных связей выстраивают горизонтальную вторичную проекцию точки: A'_1 (рис. 169).

2. Используя систему построения горизонтальной вторичной проекции точки A , выстраивают горизонтальные вторичные проекции точек B , C , D и E : B'_1 , C'_1 , D'_1 , E'_1 . Соединяют между собой одноименные горизонтальные вторичные проекции точек и выстраивают горизонтальную вторичную проекцию многоугольника: $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1 E'_1$ (рис. 170).

3. Выстраивают аксонометрическую проекцию многоугольника. Для этого в заданной системе аксонометрических осей задают аксонометрическую координату Z'_A точки A параллельно оси z' (проекция A'_z) и выстраивают аксонометрическую проекцию точки A : $A' \equiv A'_z$ (рис. 171). По аналогии выстраивают аксонометрические проекции точек B , C , D и E : B' , C' , D' , E' . Соединяют между собой одноименные аксонометрические проекции точек и выстраивают аксонометрическую проекцию многоугольника: $A' B' C' D' E'$ (рис. 172).

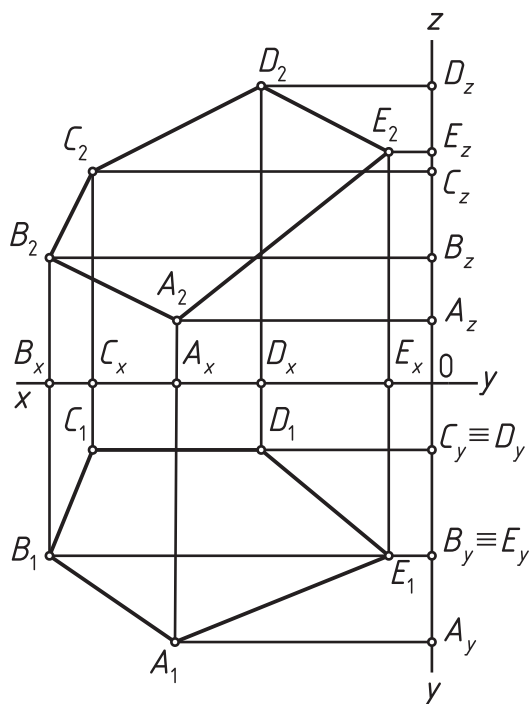


Рис. 168

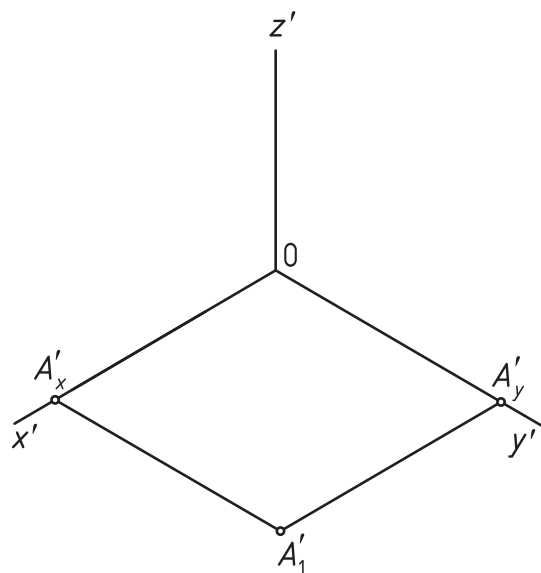


Рис. 169

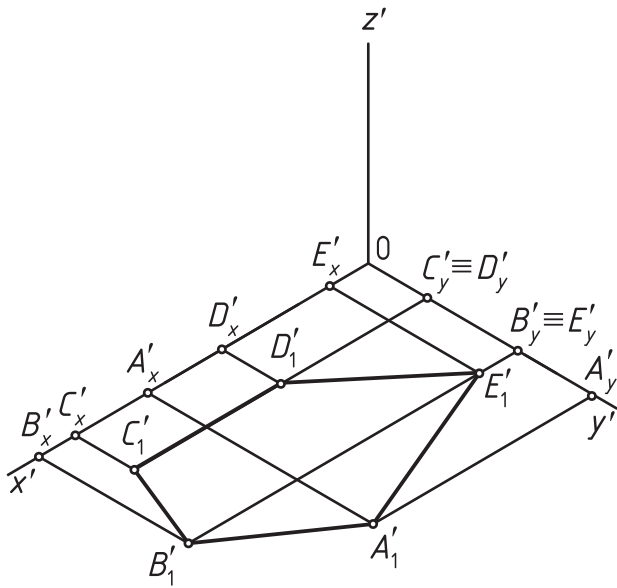


Рис. 170

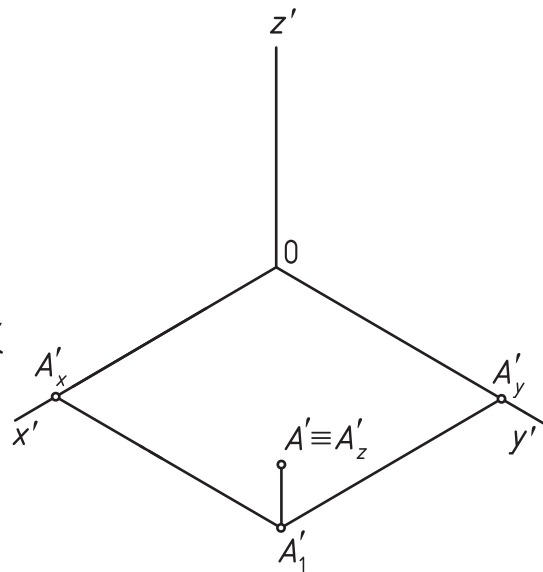


Рис. 171

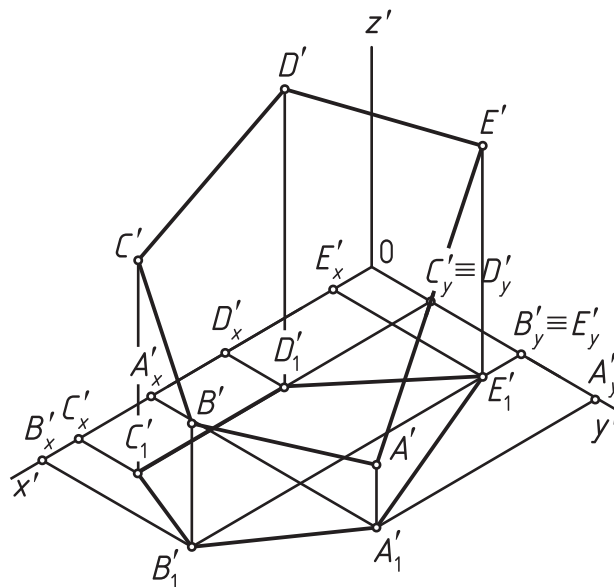


Рис. 172

Контрольные вопросы

1. Какие виды аксонометрического проецирования вы знаете?
2. В чем заключается сущность метода параллельного аксонометрического проецирования?
3. Что называется аксонометрической проекцией или аксонометрией точки и как она обозначается?
4. Что называется аксонометрическими осями или осями аксонометрических координат и как они обозначаются?

5. Что называется вторичной горизонтальной вторичной проекцией точки и как она обозначается?

6. Что называется аксонометрическими координатами точки и как они обозначаются?

7. Что называется натуральным масштабом и аксонометрическими масштабами?

8. Что называется показателями или коэффициентами искажения по осям и как они обозначаются?

9. Какими параметрами характеризуются все виды аксонометрических проекций?

10. Какие виды стандартных аксонометрических проекций вам известны? Каковы углы между аксонометрическими осями и коэффициенты искажения по осям?

11. Какова последовательность действий при построении аксонометрических проекций точки, прямой, плоской фигуры (треугольника, прямоугольника, многоугольника), окружности по их изображениям на эюре?

12. Какова последовательность действий при построении аксонометрических проекций геометрических тел (призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, комбинированных фигур) по их изображениям на эюре?

Задачи

113. Построить горизонтальную вторичную и аксонометрическую проекции пирамиды $ABCS$: а) в прямоугольной изометрии; б) в прямоугольной фронтальной диметрии; в) в косоугольной фронтальной диметрии (рис. 173).

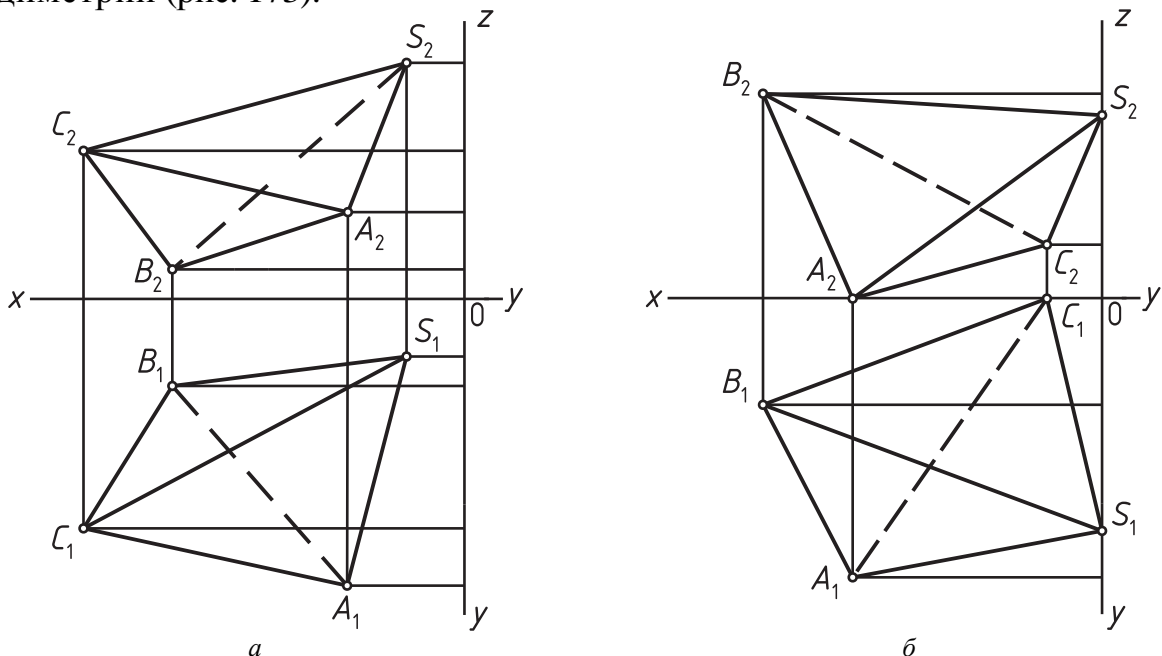


Рис. 173

114. Построить изображения геометрических тел в прямоугольной изометрии (рис. 174).

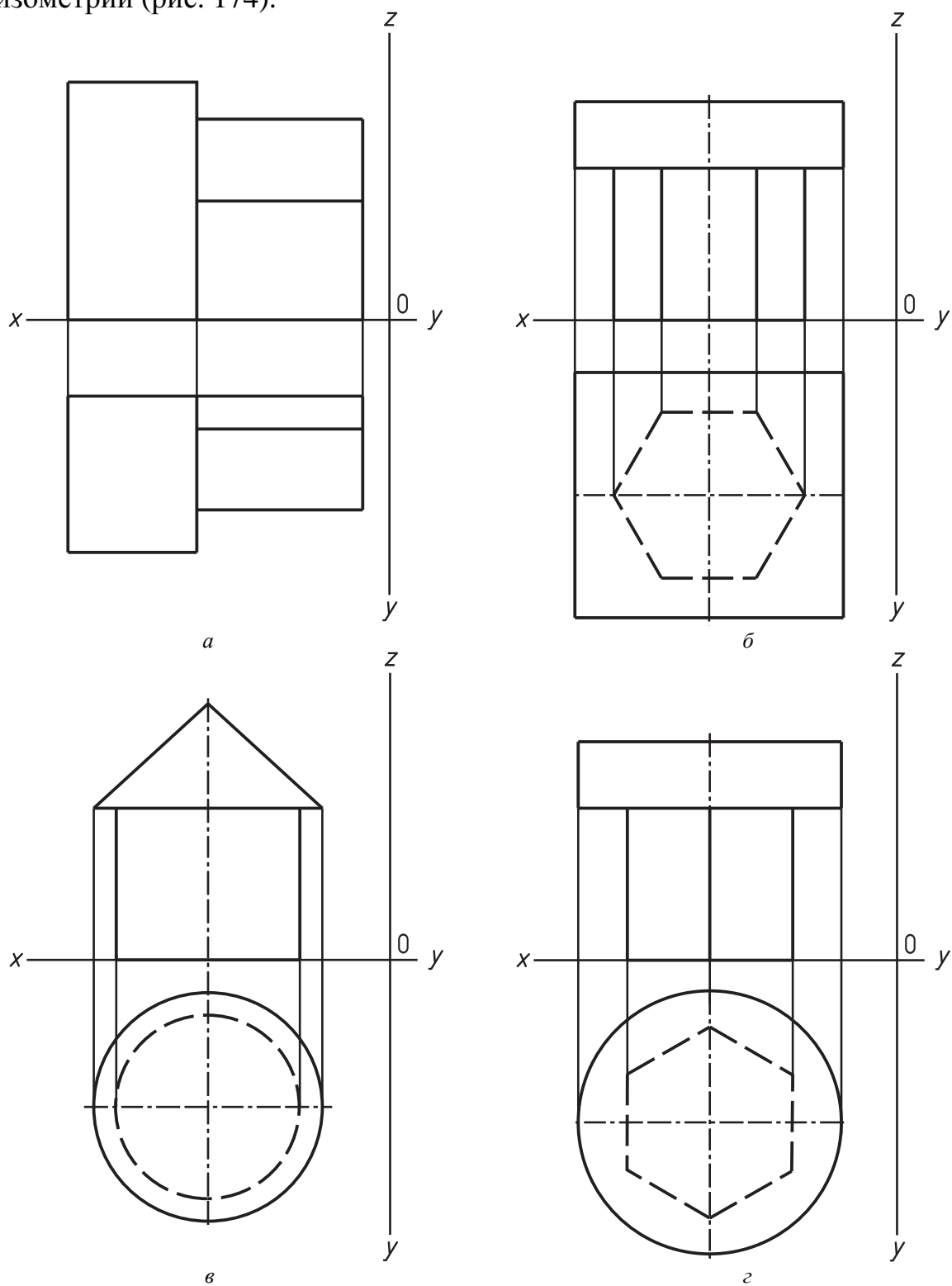


Рис. 174

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе инженерной профессии лежат различные виды человеческой деятельности: исследование, проектирование, конструирование, производство, реализация. Каждый из этих этапов связан с разработкой и выполнением различных графических документов и соответственно, владением профессионально-ориентированным языком инженерной культуры — языком графики. Любая визуализация информации в любой области человеческих знаний осуществляется средствами графического языка, алфавитом которого является ряд простейших геометрических фигур — точек, прямых и кривых линий. Поэтому, качественное инженерное образование невозможно без высокого уровня графической подготовки студентов. «Инженер, не умеющий чертить, подобен писателю, не умеющему писать», — отмечал талантливый ученый, инженер-конструктор А.Н. Туполев.

Начертательная геометрия занимает особое место в системе профессионального образования бакалавров архитектурно-строительного профиля. Являясь одной из основных фундаментальных дисциплин общетехнического цикла, начертательная геометрия дает будущему бакалавру необходимую геометро-графическую подготовку для изучения других дисциплин вуза, так как графические способы исследований предметов, изучаемые данной дисциплиной, широко используются в ряде технических и иных наук. Например, при решении задач специальных инженерных дисциплин, таких как механика, основы архитектуры и строительных конструкций, инженерные системы зданий и сооружений, инженерное обеспечение строительства, применение AutoCAD в курсовом и дипломном проектировании и т. д.

Начертательная геометрия является теоретической основой построения технических чертежей, которые представляют собой полные графические модели конкретных инженерных изделий, конструкций, объектов и сооружений.

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения для специальностей направления подготовки 270800.62 «Строительство» (бакалавриат) в процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует общепрофессиональные компетенции, такие как владение основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, которые необходимы ему для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления

конструкторской документации и деталей. При изучении этой дисциплины также активно формируется пространственное воображение и проективное видение личности, проявляющиеся в создании визуальных (зрительных) образов окружающего мира и построении новых.

Формирование общепрофессиональных и вместе с ними специальных графических компетенций, развитие графической культуры является целью графического образования будущих инженеров и необходимым условием для их дальнейшей успешной профессиональной деятельности и карьерного роста.

Список рекомендуемой литературы

1. *Дузенко, К.* Начертательная геометрия: как ее изучать? // Строительные вести. № 9 —10 (58—59). 1 сентября 2002 г. Сайт Sv.intbel.ru. <http://sv.intbel.ru/N58/pg27-01/> (дата обращения : 30.04.2013).
2. *Ермилова, Н. Ю.* Начертательная геометрия: основы курса и примеры решения задач : учебное пособие / Н. Ю. Ермилова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — 174 с.
3. *Ермилова, Н. Ю.* Способы преобразования чертежа : методические указания / Н. Ю. Ермилова.— Волгоград : ВолгГАСУ, 2003. — 37 с.
4. *Ермилова, Н. Ю.* Пересечение геометрических тел плоскостью. Развертки наклонных поверхностей : методические указания / Н. Ю. Ермилова, О. В. Богдалова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012.
5. *Королев, Ю. И.* Начертательная геометрия : учеб. для вузов / Ю. И. Королев. — 2-е изд. — М. : Питер, 2009 г. — 256 с.
6. *Локтев, О. В.* Задачник по начертательной геометрии : учебное пособие для втузов / О. В. Локтев, П. А. Числов. — 4-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2002. — 104 с.
7. Начертательная геометрия : учеб. для втузов / Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев / под ред. Н. Н. Крылова. — 9-е изд., стер. — М. : Высшая школа, 2006. — 224 с.
8. *Фролов, С. А.* Начертательная геометрия : учеб. / С. А. Фролов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2010. — 285 с.
9. *Фролов, С. А.* Начертательная геометрия: сборник задач : учебное пособие для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / С. А. Фролов.— 3-е изд., испр. — М. : ИНФРА-М, 2008. — 172 с.
10. *Чекмарев, А. А.* Начертательная геометрия и черчение : учеб. / А. А. Чекмарев — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшее образование, 2011. — 471 с.
11. *Шевченко, О. Н.* О познавательном интересе, начертательной геометрии и многом другом : учебное пособие / О. Н. Шевченко. — Оренбург : ГОУ ВПО ОГУ, 2003. — 154 с.

Учебное издание

Ермилова Наталья Юрьевна

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ:
РУКОВОДСТВО К ИЗУЧЕНИЮ КУРСА
И РЕШЕНИЮ ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *И. Б. Чижикова*
Компьютерная правка и верстка *Н. А. Каширина*

Подписано в свет 22.05.2013. Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 17,5. Объем данных 1,57 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
<http://www.vgasu.ru>, info@vgasu.ru