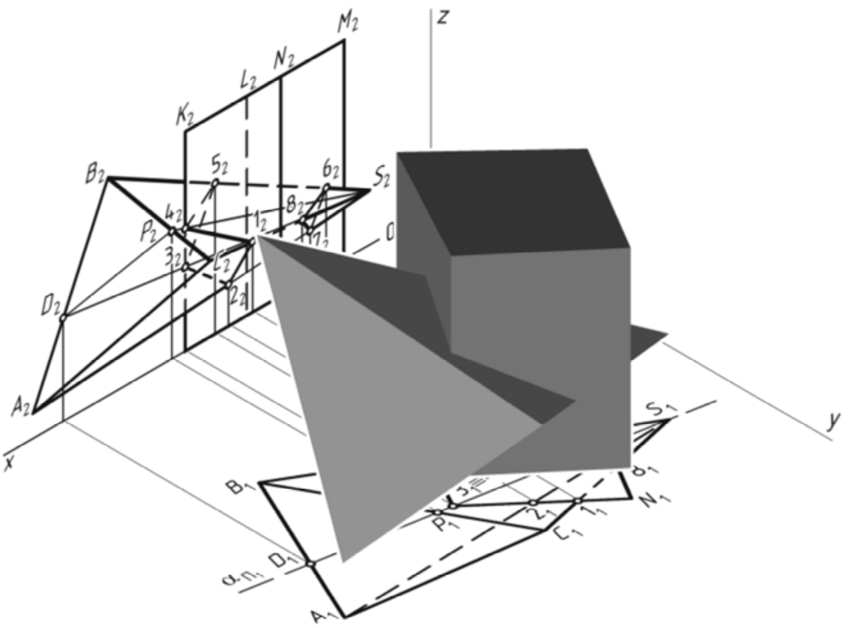
Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Н. Ю. Ермилова

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

2-е издание, исправленное и дополненное



Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.34я73
Е732

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат технических наук *Е. Н. Асеева*, доцент кафедры начертательной геометрии и компьютерной графики Волгоградского государственного технического университета;
кандидат технических наук *М. В. Цыганов*, доцент кафедры инженерной графики, стандартизации и метрологии Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Ермилова, Н. Ю.

Е732 Начертательная геометрия [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Изд. 2-е, испр. и доп. / Н. Ю. Ермилова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (5,46 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-561-1

Представлен учебный материал, содержащий теоретические основы курса начертательной геометрии и примеры решения задач, предназначенный для самостоятельного освоения дисциплины. Даны варианты заданий к контрольным работам, а также методические указания и рекомендации по их выполнению.

Для студентов направления 270800 «Строительство» (бакалавриат) заочной и сокращенной форм обучения. Может быть также полезно студентам других направлений (специальностей), изучающих дисциплину «Начертательная геометрия».

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

Имеется печатный аналог (Начертательная геометрия : учебное пособие. — Изд. 2-е, испр. и доп. / Н. Ю. Ермилова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — 178, [2] с.).

Первое издание вышло в 2009 г. под названием «Начертательная геометрия: учебно-методический комплекс».

УДК 514.18 (075.8)
ББК 22.151.34я73

ISBN 978-5-98276-561-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие адресовано студентам направления подготовки 270800 «Строительство» (бакалавриат) заочной формы обучения при изучении теоретических основ и выполнении контрольных заданий по начертательной геометрии в соответствии с ФГОС ВПО и рабочей программой дисциплины «Инженерная графика».

Переиздание пособия связано, прежде всего, с введением нового образовательного стандарта по направлению подготовки специалистов и уменьшению в связи с этим объема аудиторных часов и увеличения доли самостоятельной работы студентов. За тот короткий промежуток времени, который отводится преподавателю на чтение лекций и ведение практических занятий, невозможно на должном уровне изложить весь учебный материал, необходимый для изучения графической дисциплины. В связи с этим, внесение в новое издание комплекса изменений и дополнений позволяет оказать студентам заочной формы обучения существенную помощь в освоении учебного плана.

При разработке пособия автор стремилась к тому, чтобы изложение учебного материала отличалось достаточной простотой, последовательностью, полнотой и ясностью освещения рассматриваемых вопросов, грамотно и правильно подобранными и выполненными чертежами, четкостью и доступностью в понимании решаемых задач и приведенных примеров.

Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит основные разделы курса начертательной геометрии и примеры решения задач. Во второй части пособия даны контрольные задания, методические указания и рекомендации по их выполнению. Практика работы со студентами заочной формы обучения показала, что для закрепления теоретического материала и выполнения контрольных работ наиболее приемлемыми и эффективными являются задачи, предложенные В. Н. Семеновым, В. В. Константиновой, О. В. Георгиевским и В. П. Абарыковым в коллективном труде «Начертательная геометрия и черчение : методические указания и контрольные задания для студентов-заочников строительных специальностей вузов» (М. : Высш. шк., 1988). В настоящем издании приводятся отдельные задания из вышеназванной работы.

По адресу http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ доступно также электронное издание данного учебного пособия комплекса.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки в пространстве обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D,… или арабскими цифрами: 1, 2, 3, 4,…

Прямые и кривые линии в пространстве — строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, d,…, а также проекциями точек, определяющих линию. Например, AB — прямая, проходящая через точки A и B.

Плоскости — строчными буквами греческого алфавита: α, β, δ, γ,…

Поверхности — прописными буквами греческого алфавита: Φ, Θ, Λ,…

2. Способ задания геометрического образа указывается в скобках рядом с обозначением геометрического образа. Например: a (A, B) — прямая a задана двумя точками A и B; β $(a \cap b)$ — плоскость β задана двумя пересекающимися прямыми a и b; α (ΔABC) — плоскость α задана треугольником ABC.

3. Расстояние между геометрическими образами обозначается двумя вертикальными отрезками. Например: $|AB|$ — расстояние между точками A и B (длина отрезка AB).

4. Плоскости проекций обозначаются прописной буквой греческого алфавита П. Например, горизонтальная плоскость проекций — Π_1; фронтальная плоскость проекций — Π_2; профильная плоскость проекций — Π_3.

Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций — буквой П с добавлением подстрочного индекса: Π_4, Π_5, Π_6,…

5. Оси проекций — x, y, z, где x — ось абсцисс; y — ось ординат; z — ось аппликат. Начало координат — цифрой 0.

При замене плоскостей проекций оси проекций обозначают: x_1, x_2, а начало координат — цифрами 0_1, 0_2.

6. Проекции точек, прямых и плоскостей обозначаются соответствующей буквой с добавлением подстрочного индекса, указывающего плоскость проекций: на плоскости Π_1 — A_1, a_1, $A_1B_1C_1$; на плоскости Π_2 — A_2, a_2, $A_2B_2C_2$; на плоскости Π_3 — A_3, a_3, $A_3B_3C_3$.

7. Углы наклона прямой или плоскости к плоскостям проекций обозначаются строчной буквой греческого алфавита φ. Например, угол наклона к плоскости Π_1 — φ_1; угол наклона к плоскости Π_2 — φ_2; угол наклона к плоскости Π_3 — φ_3.

Угол с вершиной в точке обозначается $\angle$. Например, $\angle ABC$ — угол с вершиной в точке B.

Прямой угол обозначается символом: полукруг с точкой внутри сектора.

8. Особые прямые имеют постоянные обозначения:

а) линии уровня: горизонталь — h, фронталь — f;

б) следы плоскости обозначаются той же буквой, что и плоскость, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего плоскости проекций, например α_{Π_1} — горизонтальный след плоскости; α_{Π_2} — фронтальный след плоскости; α_{Π_3} — профильный след плоскости. Точки α_x, α_y, α_z — точки схода следов плоскости;

в) следы прямых обозначаются прописными буквами латинского алфавита M, N и P, где M — горизонтальный след прямой, N — фронтальный след прямой, P — профильный след прямой;

г) оси вращения — i, k, n.

9. Плоскость проекций в проекциях с числовыми отметками — $П_0$.

Проекции точек на чертежах с числовыми отметками — той же буквой, что и натура, с добавлением числа, определяющего расстояние от точки до плоскости проекций: A_4, B_{-3}.

10. Аксонометрические оси проекций — x', y', z'. Аксонометрические проекции точек, прямых, плоской фигуры — буквами, соответствующими натуре, с добавлением значка «штрих»: A', $A'B'$, $A'B'C'$. Вторичные проекции — с добавлением подстрочного индекса: A_1', $A_1'B_1'$, $A_1'B_1'C_1'$.

11. Основные операции:

а) совпадение геометрических образов $\equiv$, например, $A_1 \equiv B_1$ — горизонтальные проекции точек A и B совпадают;

б) подобие геометрических образов $\sim$, например, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ — треугольники ABC и DEF подобны;

в) конгруэнтность геометрических образов $\cong$, например, $\angle ABC \cong \angle DEF$ — угол ABC конгруэнтен углу DEF;

г) параллельность геометрических образов $||$, например, $a || b$ — прямая a параллельна прямой b;

д) перпендикулярность геометрических образов $\perp$, например, $b \perp h$ — прямая b перпендикулярна горизонтали h;

е) взаимная принадлежность геометрических образов $\in$, например, $A \in b$ — точка A принадлежит прямой b (точка A лежит на прямой b);

ж) включение (содержание) геометрического образа $\subset$, например, $AB \subset \alpha$ — прямая AB принадлежит плоскости α;

з) пересечение двух геометрических образов $\cap$, например, $\alpha \cap \beta$ — плоскости α и β пересекаются;

и) результат геометрической операции $=$, например, $K = a \cap \beta$ — точка K является точкой пересечения прямой a и плоскости β;

к) импликация — логическое следствие $\Rightarrow$, например, $K \in AB \Rightarrow K_1 \in A_1B_1$ — если точка K принадлежит прямой пространства AB, то проекция этой точки K_1 также принадлежит проекции прямой A_1B_1.

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия является фундаментальной дисциплиной в профессиональной подготовке специалистов в области техники и технологий и одной из основных дисциплин общеинженерного цикла. Как математическая наука, представляющая один из разделов геометрии, начертательная геометрия изучает пространственные образы и их геометрические закономерности в виде графических изображений, построенных на плоскости по определенным законам и правилам. Сегодня достаточно сложно назвать такой вид человеческой деятельности, в которой не приходилось бы прибегать к выполнению различных изображений. Умение изображать планы, объекты, модели, графики от руки или при помощи чертежных инструментов помогает людям разных профессий, но в наибольшей степени графические умения необходимы инженеру, архитектору, дизайнеру и другим специалистам, чья деятельность требует владения приемами графического выражения замысла. В современных условиях такой специалист должен уметь работать с различной по виду и содержанию графической информацией, знать основы графического представления информации, методы графического моделирования геометрических объектов, правила разработки и оформления конструкторской документации, графических моделей, явлений и процессов. Каждый специалист в области техники и технологий независимо от профиля профессиональной подготовки должен уметь работать с любой по назначению и виду графической информацией: от традиционного чертежа и текстового документа до современных проектов, выполненных средствами компьютерной графики.

Графические изображения являются одним из главных средств познания окружающего нас мира, инструментом творческого и пространственного мышления личности. Их значимость определяется тем, что графика — это общепринятый и общепризнанный язык техники, средство осознания трехмерного пространства, существующих в нем объектов и отражения их на плоскости, это «…язык, необходимый инженеру, создающему какой-либо проект, а также всем тем, кто должен руководить его осуществлением» [*Монж Г.* Начертательная геометрия. Л. : Изд-во АН СССР, 1947. С. 10]. Отсюда, знание начертательной геометрии является фундаментом, на котором базируется инженерная деятельность и инженерное творчество, и это знание необходимо «…мастерам своего дела не меньше, чем чтение, письмо или арифметика» [Там же. С. 132].

Значение и особенность начертательной геометрии в техническом образовании состоит и в том, что эта дисциплина, как никакая другая, развивает пространственное воображение — уникальную способность человека мысленно представлять объект объемно, в трехмерном измерении, не только его внешнее, но и внутреннее устройство. Воображение также неразрывно связано с окружающим миром, с практикой, именно эта связь способствует возникновению творческой идеи, замысла, служит побудительной силой в создании нового. Известный ученый, профессор Петербургского института путей сообщения В. И. Курдюмов, определяя начертательную геометрию как грамматику языка техники, отмечал, что «изучение начертательной геометрии…является лучшим средством развития нашего воображения; а без достаточно развитого воображения немыслимо никакое серьезное техническое творчество» [*Николаенко Н. С.* Из истории развития начертательной геометрии. URL: http://elib.altstu.ru:8080/Books/Files/1999-03/HTML/14/pap_14.html / (дата обращения: 25.11.2012 г.). С. 74].

Изучение начертательной геометрии формирует систему общепрофессиональных компетенций, способность к инженерной инновационной деятельности и ее конструированию, оказывает значительное влияние на профессиональное и личностное развитие будущих специалистов. В последние годы значительно расширилась область задач, решаемых методами начертательной геометрии, которые нашли широкое применение при проектировании и разработке технических систем и сооружений, при конструировании поверхностей сложных форм и сочетаний в различных сферах профессиональной деятельности.

Развитие пространственного воображения и проективного видения, логики и конструктивно-геометрического мышления, готовности к анализу и синтезу пространственных форм и отношений между ними на основе их геометрических моделей и графических изображений — именно эти умения и навыки необходимы современному инженеру в его конструкторской практике и изобретательской деятельности на пути от возникновения технической идеи до ее реализации и создания новых технических объектов и сооружений.

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Тема 1. Метод проекций

1.1. Предмет начертательной геометрии. 1.2. История развития начертательной геометрии. 1.3. Методы проецирования

1.1. Предмет начертательной геометрии

Начертательная геометрия по своему содержанию и методам занимает особое положение среди других наук. Наделяя точные науки выразительностью, наглядностью, простотой и доступностью решения задач, начертательная геометрия является важным инструментом для инженера, строителя, архитектора, дизайнера, а также для скульптора, художника, декоратора.

В основе начертательной геометрии лежит чертеж — графическое изображение предметов реального мира, построенное на плоскости по определенным законам и позволяющее судить о форме предметов и их взаимном расположении в пространстве, определять их действительные размеры и изучать геометрические свойства. Отсюда, основной целью начертательной геометрии является умение изображать на плоскости различные сочетания геометрических образов, а также производить их исследования и измерения, допуская преобразования графических изображений.

Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование методов построения графических изображений пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм. Являясь геометрической основой черчения и инженерной графики, начертательная геометрия дает будущему специалисту необходимую геометрическую подготовку для изучения общетехнических и специальных дисциплин вуза, так как графические способы исследований предметов, изучаемые данной дисциплиной, широко используются в ряде технических и других наук. Например, при решении задач специальных инженерных дисциплин: механики, архитектуры и строительства, картографии, инженерной геодезии и геологии, кристаллографии, инструментоведения, химии, физики и др. Особенно большое практическое применение это находит в техническом конструировании и изобретательстве.

Основным методом графического изображения пространственных геометрических фигур на плоскости, изучаемым в начертательной геометрии, является метод *ортогонального* или прямоугольного *проецирования*, позволяющий получать изображения, сохраняющие некоторые метрические характеристики оригинала. Наряду с этим методом в начертательной геометрии изучаются методы *аксонометрических проекций*, *проекций с числовыми отметками*, *перспективные проекции*.

Методы начертательной геометрии находят широкое применение при проектировании и изображении различных инженерных конструкций и объектов. Например, *проекции с числовыми отметками* используются при изыскании, проектировании и изображении инженерных сооружений и транспортных систем, расположенных на топографической (земной) поверхности: аэродромов, автомобильных и железных дорог, строительных площадок и карьеров, плотин, дамб, эстакад, путепроводов, мостов и других искусственных сооружений. *Перспективные проекции* применяются при построении изображений архитектурных сооружений и строительных объектов жилого и общественного назначения: зданий домов, помещений, вокзалов, станций метро, пассажирских залов и т. д., а также транспортных систем, например автомобильных дорог, для выяснения условий безопасности дорожного движения. *Аксонометрические проекции* находят применение в машиностроении, строительстве и архитектуре как изображения, отличающиеся достаточно высокой наглядностью и простотой выполнения. Методы начертательной геометрии используются также при конструировании различных сложных геометрических поверхностей технических форм и сооружений в авиационной, автомобильной, автотранспортной и судостроительной промышленности. Поэтому важнейшей задачей начертательной геометрии как науки является создание оптимальных геометрических форм объектов машиностроения, архитектуры и строительства, дальнейшая разработка теории графического отображения объектов и процессов.

Начертательная геометрия наиболее эффективно и целенаправленно помогает развивать креативное мышление будущего инженера, занимающее значительное место в различных творческих процессах. При освоении этой дисциплины активно формируется пространственное воображение и проективное видение личности, проявляющиеся в создании визуальных (зрительных) образов окружающего мира и построении новых. Часто новое решение совершенно неожиданно появляется перед глазами инженера в виде рисунков, картин, схем, моделей, еще не до конца осознанное, продуманное, но выстраданное и реальное. Ощущение, восприятие, представление, воображение, а порой и инсайт (озарение, внезапная догадка), задействованные в графической деятельности, носят универсальный характер и могут быть использованы в других видах деятельности. Таким образом, освоение дисциплины способствует созданию пространственных представлений различной степени сложности, обобщенности и схематичности, при этом одновременно активно развиваются креативные способности личности. Так инженер в своей практической деятельности не может обойтись без знания этой науки. Она нужна ему при проектировании и создании по выполненному проекту того или иного технического сооружения, здания, объекта и т. д. Художнику и архитектору она нужна для построения перспективы предметов, т. е. для изображения предметов такими, какими они представляются в действительности нашему глазу. Скульптору она нужна для определения очертаний произведений ваяния, которые создаются из бесформенного куска камня, дерева, глины и других материалов.

Методы построения графических изображений, изучаемые в начертательной геометрии, дают возможность представить не только существующие, переставшие существовать, но и воображаемые объекты, их форму, размеры, детали, внешнее и внутреннее устройство, расположение в пространстве, представить впечатления, воспринимаемые от окружающего нас мира и сохранить их в памяти. Из всех видов графических изображений наиболее применимыми в практической деятельности человека являются линейные изображения: рисунки и чертежи.

Рисунок — это графическое изображение предмета, выполненное от руки на глаз с относительными размерами и положениями отдельных его элементов, которое дает нам представление только о внешнем виде предмета и не дает информации о внутреннем его устройстве и размерах.

Чертеж — это графическое изображение предмета, выполненное при помощи специальных чертежных инструментов по особым правилам построения изображений в точной зависимости от размеров и положения предмета в пространстве, которое дает нам полное представление о внешнем и внутреннем устройстве предмета и о его размерах. Чертеж как основа начертательной геометрии является более точным выразителем наших представлений о каком-либо предмете, чем рисунок, так как в чертеже отражаются геометрические свойства изображаемого объекта. В технике чертежи являются единственным и незаменимым средством выражения человеческих идей и мыслей. Они необходимы в самых разнообразных проявлениях многосторонней деятельности челов. и должны не только определять форму и размеры предметов, но и быть достаточно простыми и точными в графическом исполнении, решать вопросы всестороннего исследования отдельных частей предмета. Эти требования к чертежам и привели к созданию теории изображений, составляющей основу начертательной геометрии.

1.2. История развития начертательной геометрии

Основы графических изображений закладывались на ранних ступенях развития человеческого общества. Еще в глубокой древности человек рисовал на скалах, камнях и предметах домашнего обихода изображения вещей, деревьев, животных и людей. Точное время возникновения этих пещерных росписей до сих пор не выяснено. По мнению ученых, многие из них были созданы примерно двадцать — тридцать тысяч лет назад. Рисунками выражались мысли в начале зарождения письменности. Это так называемое рисуночное письмо, или пиктография («пиктус» (лат.) — рисованный, «графо» (греч.) — пишу). Пиктография постепенно вытеснялась идеографией, обширной системой знаков, обозначающих не только название, но и действия предметов. Появившись на заре человеческой культуры в виде первобытного рисунка, картинное письмо развилось в письмо буквенное. В ходе дальнейшей практической деятельности человека оно стало фигурировать в виде изобразительного письма, которое служит нам и сейчас в качестве технических чертежей.

Время и место возникновения геометрии как науки не установлено. Потребность в построении изображений по законам геометрии (проекционных чертежей, «projecere» — бросать вперед) возникла из практических задач строительства жилья, крепостных укреплений, дамб, земляных валов и т. д., а на более позднем этапе — из запросов развития общества, производства и техники.

Огромный вклад в развитие мировой культуры и архитектуры внесло прекрасное искусство Древнего Египта. Шедевры древнеегипетского строительства — пирамиды — и сегодня потрясают воображение своими размерами, геометрической точностью и пропорциональностью. Относительно точные сведения об уровне геометрических знаний в Древнем Египте сообщает папирус Ахмеса об измерении земельных участков и вычислении пирамид. Но самое большое влияние на последующие поколения оказало искусство Древней Греции. Его спокойная и величественная красота, гармония и ясность служили образцом и источником вдохновения для более поздних эпох истории культуры. Греческую древность называют античностью, к античности также относят Древний Рим. Величайшим достижением греческого строительного искусства были храмы. Римский архитектор Витрувий еще в I в. до н. э. применял три проекции — план, фасад и профиль. В своем труде «Десять книг об архитектуре» Витрувий упоминал, что еще в V в. до н. э. Агафарх, Демокрит и Анаксагор пользовались элементами перспективы при создании декораций для театра, когда исполнялись «Прикованный Прометей» и другие трагедии великого древнегреческого драматурга Эсхила (525—456 гг. до н. э.). Основателем геометрии в Греции считают финикиянина Фалеса Милетского (ок. 625—547 гг. до н. э.), получившего образование в Египте. Он основал школу геометров, которая положила начало научной геометрии. Ученику Фалеса Пифагору Самосскому (ок. 580—500 гг. до н. э.) принадлежат первые открытия в геометрии: теория несоизмеримости некоторых отрезков, теория правильных тел, теорема о квадрате гипотенузы прямоугольного треугольника. Преемник Пифагора Платон (427—347 гг. до н. э.) ввел в геометрию аналитический метод, учение о геометрических местах и конические сечения. Систематизировал основы геометрии, восполнил ее пробелы великий александрийский ученый Евклид (III в. до н. э.) в своем замечательном труде. «Начала» Евклида — первый серьезный учебник, по которому в течение двух тысячелетий учились геометрии. Современные учебники элементарной геометрии представляют собой переработку «Начал». «Золотым веком» греческой геометрии называют эпоху, когда жили и творили математики Архимед (287—195 гг. до н. э.), Эрастофен (275—195 гг. до н. э.), Аполлоний Пергский (250—190 гг. до н. э.). Измерение криволинейных образов связано с именем Архимеда. Он указал методы измерения длины окружности, площади круга, сегмента параболы и спирали, объемов и поверхностей шара, других тел вращения. Это были главные дополнения к «Началам» Евклида. Трактатом о конических сечениях обессмертил свое имя Аполлоний. Его трудами, можно сказать, завершается классическая геометрия.

Расцвет классической культуры в средние в. сменился застоем. Рисунки, планы, чертежи эпохи Средневековья не указывают на какое-либо заметное развитие существовавших способов изображений. В изобразительном искусстве не используются применявшиеся в древности сведения о перспективе. Однако есть основания утверждать, что в этот период зарождался архитектурный чертеж. И только с возрождением строительства и искусств в эпоху Ренессанса в истории начертательной геометрии начинается новый период развития. В связи с развернувшимся строительством различных сооружений возродилось и расширилось применение употреблявшихся в античном мире элементов проекционных изображений. Наиболее бурно в это время развивались архитектура, скульптура и живопись в Италии, Нидерландах, Германии, что поставило художников и архитекторов этих стран перед необходимостью начать разработку учения о живописной перспективе на геометрической основе. В эпоху Возрождения открывались законы перспективы, закладывались практические основы отображения технической информации графическими способами. Появились новые понятия: центр проецирования, картинная плоскость, линия горизонта, главные точки и т. д. Весомый вклад в развитие методов перспективных изображений внесли: итальянский зодчий Лоренцо Гиберти (1378—1455 гг.), перенесший принципы живописной перспективы на пластическое изображение в виде рельефа в церковных сооружениях; итальянский теоретик искусств Леон Баттиста Альберти (1404—1472 гг.), обогативший художественно-технический опыт теоретической разработкой основ перспективы, а также впервые упоминавший о построении теней; Пиетра-делла-Франческа (1406—1492 гг.), рассматривавший вопросы линейной перспективы; гениальный итальянский художник, ученый и инженер Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), обладавший в совершенстве знаниями линейной перспективы, дополнивший ее построением на цилиндрических сводах и положивший начало панорамной перспективе. В его «Трактате о живописи» (опубликован в 1651 г.) имеются многочисленные указания о практических применениях перспективных изображений, в частности о «наблюдательной» перспективе. Великим Леонардо да Винчи в наследство потомкам были оставлены графические изображения летательного аппарата, метательных машин, выполненные способом линейной перспективы, который в настоящее время широко используется в архитектуре, дизайне, живописи. В развитие перспективы большой вклад внес немецкий ученый и гравер Альбрехт Дюрер (1471—1528 гг.). В своей книге «Наставление» он разработал основы рисования, предложил графические способы построения большого числа плоских и некоторых пространственных кривых, оригинальные способы построения перспективы и тени предмета, а также метод ортогонального изображения конических сечений. Кроме этого, в своем труде «Руководство к измерению...» (1525 г.) А. Дюрер предложил способ построения перспективы по горизонтальной и фронтальной проекциям объекта. Основателем теоретической перспективы по праву может считаться итальянский ученый Гвидо Убальди (1545—1607 гг.). Работа Убальди «Шесть книг по перспективе» содержит решение почти всех основных задач перспективы.

Зарождение аналитической геометрии связано с появлением метода координат. Французские математики Ферма (1601—1665 гг.) и Рене Декарт (1596—1650 гг.) дали общие схемы аналитической функциональной зависимости геометрических соотношений и общие схемы изучения этой зависимости средствами алгебры и анализа. Французский архитектор и математик Дезарг (1593—1662 гг.) в 1636 г. в сочинении «Общий метод изображения предметов в перспективе» впервые применил для построения перспективы метод координат Декарта, что послужило появлению нового аксонометрического метода в начертательной геометрии. Выдающийся труд Исаака Ньютона (1642—1727 гг.) в области бесконечно малых единиц создал новую ветвь геометрии — дифференциальную. Появилась и еще одна ветвь геометрии — проективная, в основу которой положен метод проектирования, где нет понятий о числе и величине. Творцами нового направления следует считать французских математиков Понселе, Шаля, Мебиуса. Основу этой науки заложил Дезарг. Он указал, что изображение предмета в ортогональных проекциях и линейной перспективе родственны с геометрической точки зрения. Развитию «вольной перспективы» посвятил свои работы английский математик Тейлор (1685—1731 гг.), разработавший способы решения основных позиционных задач и определения свойств оригинала по его перспективному изображению. Немецкий геометр Ламберт (1728—1777 гг.) применил метод перспективы к графическому решению задач элементарной геометрии, используя свойства аффинного соответствия (аффинная геометрия). Ламберт решал и обратную задачу — реконструирование объекта по его чертежу, выполненному в центральной проекции. Французский инженер А. Фрезье (1682—1773 гг.) объединил работы предшественников в труде «Теория и практика разрезки камней и деревянных конструкций» (1738—39 гг.), им были решены задачи построения конических сечений по усложненным данным. Однако строгой теории к представленному собранию отдельных приемов решения задач Фрезье не подвел. Кроме этого, А. Фрезье внес большой вклад в развитие ортогональных проекций. Он впервые рассмотрел проецирование объекта на две плоскости — горизонтальную и фронтальную.

Творцом ортогональных проекций и основоположником начертательной геометрии является французский геометр Гаспар Монж (1746—1818 гг.). Знания, накопленные по теории и практике о методах изображения пространственных фигур на плоскости, он систематизировал, обобщил и создал единую математическую науку об ортогональном проецировании — начертательную геометрию. Французский математик М. Шаль так оценил новую науку: «После почти вековой остановки чистая геометрия обогатилась новым учением — начертательной геометрией, которая представляет необходимое дополнение аналитической геометрии Декарта и которая, подобно ей, должна была принести неисчислимые результаты и отметить новую эпоху в истории геометрии. Этой наукой обязаны творческому гению Монжа».

«…Нужно приучить пользоваться начертательной геометрией», — говорил Г. Монж. Новая наука имела, по его словам, две главные цели: «Первая — точное представление на чертеже, имеющем только два измерения, объектов трехмерных, которые могут быть точно заданы. Вторая цель — выводить из точного описания тел все, что неизбежно следует из их формы и взаимного расположения. В данном смысле — это средство искать истину; она дает бесконечные примеры перехода от известного к неизвестному». Методы Монжа не были противоположны математическому анализу, а были его дополнением, связанным с практическими потребностями инженерного дела. Труд Гаспара Монжа «Начертательная геометрия», опубликованный в 1795 г., лег в основу проекционного черчения, которое широко используется в современной технике и науке. В своей книге Монж разработал метод ортогонального проектирования пространственных фигур на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций («метод Монжа»), при котором получается двойное изображение оригинала — на горизонтальной и вертикальной плоскостях. Это дает возможность решить и обратную задачу: восстановление пространственной фигуры или изучение ее геометрических свойств по заданным (горизонтальному и вертикальному) изображениям, а также решение различных задач, касающихся пространственных фигур, с помощью их плоских изображений. В работе Г. Монжа «Начертательная геометрия» решались задачи на применение теории геометрических преобразований, рассмотрение некоторых вопросов теории проекций с числовыми отметками, проводилось подробное исследование кривых линий и поверхностей, в частности применение вспомогательных секущих плоскостей и вспомогательных шаровых поверхностей (метод сфер) при построении линии пересечения поверхностей. Недостатком метода Монжа является малая наглядность. Наиболее наглядное изображение пространственных фигур на плоскости дает центральная проекция — перспектива, требующая, однако, дополнительных условий для решения обратной задачи, о которой говорилось выше. Существуют и другие способы изображения пространственных фигур (аксонометрические проекции, проекции с числовыми отметками и т. д.).

Дальнейшее развитие начертательная геометрия получила в трудах многих ученых. Наиболее полное изложение идей Монжа по ортогональным проекциям дал Г. Шрейбер (1799—1871 гг.), написавший «Учебник по начертательной геометрии» (по Монжу). Он обогатил начертательную геометрию изложением ее на проективной основе, применив идеи Шаля, Штаудта, Рейе, Штейнера и других, разработал теорию теней и сечений кривых поверхностей. Заметны также труды ученых немецкой школы. Геометр Вильгельм Фидлер в книге «Начертательная геометрия», изданной в 1871 г., в органической связи с проективной геометрией представил первый обширный курс дисциплины, стоящий на уровне современных требований. Прогрессивными в преподавании были лекции Эмиля Мюллера, продолжившего научное направление Фидлера. В работах А. Манигейма (1880 г.) исследованы вопросы кинематического образования кривых линий и поверхностей в ортогональных проекциях. Обоснование теории аксонометрии дал Вейсбах, технические примеры применения аксонометрии показали братья Мейер. Развивая теорию аксонометрии, профессор Академии изобразительных искусств и Строительной академии в Берлине Карл Польке (1810—1876 гг.) в 1853 г. открыл основную теорему аксонометрии. Доказательство этой теоремы в 1864 г. вывел немецкий геометр Г. А. Шварц. Обобщенная теорема аксонометрии стала называться теоремой Польке — Шварца. Привлекают работы австрийского геометра Эрвина Круппа, получившие развитие в трудах русских ученых Н. А. Глаголева, Н. Ф. Четверухина.

В середине XIX в. зарождается и получает развитие начертательная геометрия многих измерений — многомерная геометрия. Итальянский математик Веронезе и голландский ученый Скаутте дают начало этому новому направлению.

В России многомерная начертательная геометрия развивалась в связи с проблемами физико-химического анализа многокомпонентных структур (сплавов, растворов), состоящих из большого числа элементов. Вместо точек за основные элементы принимаются различные геометрические образы, и строится бесчисленное множество плоских геометрических систем (системы параллельных отрезков, векторов, окружностей и т. д.). К началу XX в. относится зарождение векторно-моторного метода в начертательной геометрии, применяющегося в строительной механике, машиностроении. Этот метод разработан Б. Майором, Р. Мизесом, Б. Н. Горбуновым.

Развитие способов графических изображений на Руси происходило по собственному пути. Основным техническим документом, с помощью которого строили различные сооружения, долгое время был рисунок. Так, например, знаменитый своей архитектурой Софийский собор в Киеве (XI в.) был воздвигнут по рисункам. В Древней Руси по рисункам были построены новгородские и московские храмы и многие другие замечательные памятники старины. Со временем перспективные рисунки преобразовались в особый вид графического изображения — технические рисунки. На миниатюрах XV—XVI вв. мы можем увидеть изображения, которые напоминают современные аксонометрические изображения и технические рисунки, используемые в настоящее время в технической графике, например перспективное изображение г. Пскова, выполненное в 1518 г. В России применялись чертежи, содержащие совмещенные в одной плоскости изображения нескольких видов. Дошедшие до нас памятники материальной культуры свидетельствуют о том, что в Древней

Руси были известны самобытные приемы изображения сооружений, которые с течением времени совершенствовались. Такие, например, сооружения как Троицкий (1422—1425 гг.) и Успенский (1539—1566 гг.) соборы, являются замечательными памятниками архитектуры того времени и, безусловно, не могли быть построены без заранее составленных проектов. Русские строители, руководившие возведением различных сооружений во Владимире, Суздале, Киеве и других городах, выполняли и использовали сложные строительные чертежи. Так, архитекторы М. Земцев (1688—1743 гг.), Ф. Л. Аргунов (1716—1768 гг.), Н. А. Львов (1751—1804 гг.), В. И. Баженов (1737—1799 гг.), М. Ф. Казаков (1738—1812 гг.) и другие были прекрасными графиками. На их чертежах показаны фасады, планы и общие виды.

В начале XVIII в. в период правления Петра I в России бурно развивается кораблестроение, горнорудная промышленность, строятся машины и заводские силовые установки. Все это требовало умелого выполнения чертежей. В связи с этим по приказу Петра I вводится преподавание черчения в специальных учебных заведениях, что послужило причиной появления в 1708 г. первых учебников по черчению: «Приемы циркуля и линейки» и «Практические геометрии». Русские чертежники и сам царь Петр I выполняли чертежи методом, который позже будет назван методом прямоугольных проекций. В XVIII и XIX столетиях появляются строительные чертежи с изображением разрезов и планов сооружений, выполненных в проекционной связи друг с другом и напоминающих современные чертежи. Примером являются проекты паркового павильона архитектора Н. А. Львова, первой в России (1748 г.) химической лаборатории М. В. Ломоносова. Во второй половине XVIII в. встречаются чертежи, выполненные в наглядном изображении. Это уже зарождение будущей аксонометрии. Примером может служить чертеж К. Д. Фролова «Рудоподъемная машина». Талантливым механиком-изобретателем, внесшим вклад в совершенствование чертежа, был И. П. Кулибин. В его проекте однопролетного арочного моста через реку Неву были чертежи поперечного разреза моста, отдельных конструкций, а также вид сверху и сбоку. Вся история развития техники неразрывно связана с графическими изображениями, предшествующими внедрению в практику не только простых, но и самых гениальных замыслов. Подтверждением тому являются чертежи первого в мире самолета, спроектированного в 1881 г. и построенного в 1883 г. А. Ф. Можайским, чертежи ракеты К. Э. Циолковского, опубликованные в 1915 г., а также космических поездов (станций), работающих на околоземной орбите.

Впервые курс начертательной геометрии в России был прочитан в 1810 г. в Петербургском институте корпуса инженеров путей сообщения французским инженером К. И. Потье, а с 1830 г. начертательную геометрию стали преподавать во всех высших учебных заведениях России. Перевел курс К. И. Потье на русский язык его помощник по институту Я. А. Севастьянов (1796—1849 гг.), с именем которого связано появление первого оригинального труда под названием «Основания начертательной геометрии» (1821 г.), в основном посвященного изложению метода Монжа. Дело Я. А. Севастьянова продолжали развивать и совершенствовать такие ученые как П. К. Галактионов, А. Х. Редер, Н. П. Дуров, И. И. Сомов. Неоценимый вклад в развитие начертательной геометрии как науки внес В. И. Курдюмов (1853—1904 гг.) — автор классического русского учебника по начертательной геометрии. Он написал 14 научных работ, в которых дал новое направление начертательной геометрии, показав ее применение в технических чертежах. Очень много сделали для отечественной технической графики такие ученые, как Н. И. Макаров, Е. С. Федоров, Н. А. Рынин, А. К. Власов, Н. А. Глаголев, Д. И. Каргин, А. И. Добряков и многие др. Они заложили основу графической науки и создали учебно-методическую по инженерной графике.

Если начертательная геометрия как предмет возникла из нужд практики и в середине XIX в. она расширила свои разделы, то к началу XX в. аналитические методы, применяемые в начертательной геометрии, вышли на первый план, точность графических методов не удовлетворялась и начертательная геометрия пошла на убыль. Последними книгами были книги Н. А. Рынина (1877—1942 гг.) и В. О. Гордона. С появлением трудов Н. Ф. Четверухина (1891—1973 гг.) начертательная геометрия была выведена из застоя. Н. Ф. Четверухин стал рассматривать начертательную геометрию как самостоятельную науку, не связанную с черчением. Он первый увидел, что методами начертательной геометрии можно решать сложные конструктивные задачи. Появилась «Прикладная геометрия» и начался ее расцвет. За период с конца 40-х годов XX в. начертательная геометрия развивалась и расширялась. В науке большая роль принадлежит И. И. Котову (1905—1975 гг.) и его ученикам. После смерти Н. Ф. Четверухина начался процесс сокращения в вузах учебных часов по начертательной геометрии и произошел застой. Но вскоре данный вопрос был решен положительно и предмет восстановлен.

Развитие компьютерной графики и технологий в конце XX — начале XXI вв. совершило настоящий прорыв в области автоматизированного проектирования инженерных объектов и сооружений. В связи с этим значительно уменьшилось количество практических задач, решаемых с использованием традиционных методов начертательной геометрии. Вместе с тем интерес к науке не ослабевает, и тематика исследовательских работ по начертательной геометрии за последнее время стала разнообразнее и богаче. Появляются научные работы, двигающие вперед разработку теории методов изображений, рассматривающие вопросы применения графики (работы прикладного характера), а также исследования, имеющие оборонное и промышленное значение.

Итак, начертательная геометрия — раздел геометрии, в котором пространственные образы изучаются при помощи построения их графических изображений на плоскости, а также рассматриваются способы и методы решения и исследования на плоскости пространственных геометрических задач. Правила построения графических изображений, излагаемые в начертательной геометрии, основаны на методе проекций.

1.3. Методы проецирования

С точки зрения начертательной геометрии геометрическое пространство как точечное множество отображается на плоскость по закону проецирования.

Проецированием называется процесс построения изображения объекта (точки, прямой, плоской фигуры и т. д.) на плоскости с помощью проецирующих лучей. Полученное изображение объекта на плоскости является *проекцией* этого объекта. Плоскость, на которой получают проекцию, называют *плоскостью проекций.*

Проекцией любой точки пространства на плоскость или поверхность называют точку пересечения проецирующего луча, проходящего через точку пространства, с данной плоскостью (поверхностью).

По направлению проецирующих лучей различают проецирование центральное и параллельное.

Метод центрального (конического) проецирования заключается в том, что все проецирующие лучи, проходящие через точки пространства, исходят из одной точки S — центра проецирования (рис. 1).

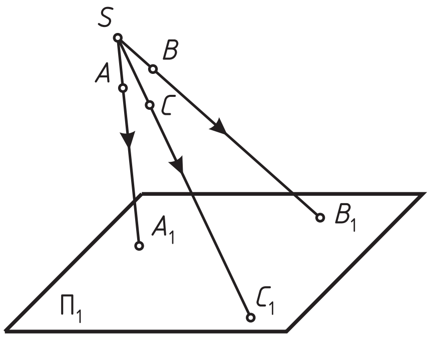


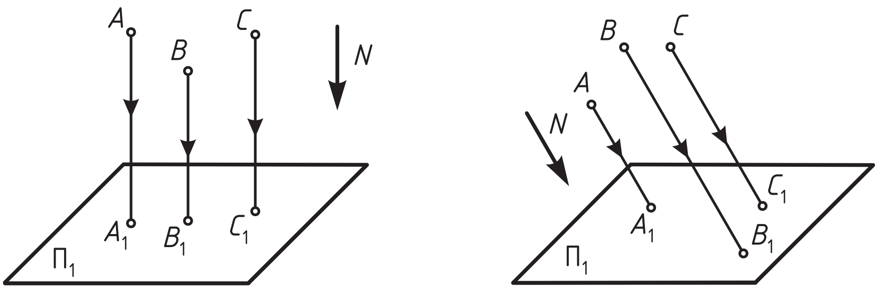
Рис. 1. Метод центрального проецирования

Метод параллельного проецирования основан на том, что центр проецирования S удален на бесконечно большое расстояние от плоскости проекций, и проецирующие лучи становятся параллельны между собой и некоторому заданному направлению проецирования N.

При параллельном проецировании различают:

ортогональное (прямоугольное) проецирование, когда проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций (рис. 2, *а*);

косоугольное проецирование, когда проецирующие лучи не перпендикулярны плоскости проекций (рис. 2, *б*).



а *б*

Рис. 2. Метод параллельного проецирования

Рассмотрим некоторые свойства параллельных проекций.

1. *Проекция точки есть точка*. Это очевидно из самого определения проекции точки как точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

2. *Проекция прямой в общем случае прямая*. Действительно, для построения проекции прямой AB необходимо через каждую принадлежащую этой прямой точку провести проецирующий луч. Все проецирующие лучи, проходящие через точки прямой AB, параллельны заданному направлению проецирования N. Совокупность этих лучей образует проецирующую или лучевую плоскость α, которая при пересечении с плоскостью проекций Π_1 определяет проекцию прямой A_1B_1:

$$|A_1B_1| = \alpha \cap \Pi_1, \ |AB| \subset \alpha.$$

В частном случае проекция прямой CD есть точка $C_1 \equiv D_1$ (рис. 3).

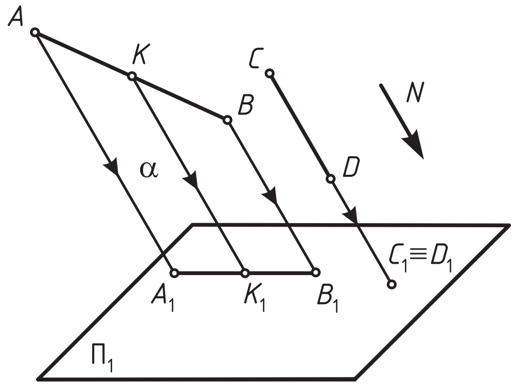


Рис. 3. Проекции прямых

3. *Если точка пространства принадлежит прямой, то и проекция этой точки принадлежит проекции прямой* (рис. 3). Это свойство следует непосредственно из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех принадлежащих ей точек. Если точка K принадлежит прямой AB и плоскости α, то и проецирующий

луч, исходящий из точки K, принадлежит плоскости α. Следовательно, этот луч пересечет плоскость проекций Π_1 в линии пересечения плоскостей α и Π_1, т. е. в точке K_1, принадлежащей проекции прямой A_1B_1:

$K \in |AB| \Rightarrow K_1 \in |A_1B_1|$.

4. *Отношение отрезков прямой пространства равно отношению их проекций* (рис. 3). Если точка K делит отрезок прямой пространства AB в отношении $m : n$, то и проекция этой точки K_1 делит в таком же отношении проекцию этого отрезка прямой A_1B_1:

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|A_1K_1|}{|K_1B_1|} = \frac{m}{n}.$$

В начертательной геометрии рассматривают следующие основные *виды проекций*:

ортогональные;
перспективные;
аксонометрические;
проекции с числовыми отметками.

При *ортогональном проецировании* каждой точке пространства соответствует *одна и только одна* проекция точки (рис. 4, *а*). Вместе с тем, каждой проекции точки соответствует *множество* точек пространства, расположенных на одном проецирующем луче (рис. 4, *б*). Следовательно, *одна проекция точки не определяет положения этой точки в пространстве*. Для определения положения точки в пространстве необходимо иметь две ее проекции, полученные при двух различных направлениях проецирования.

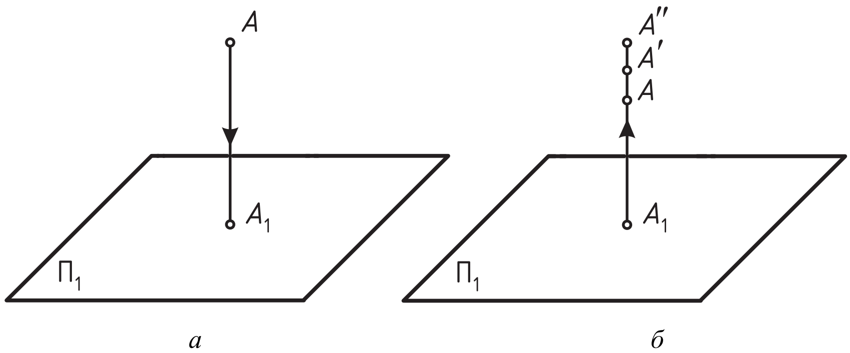


Рис. 4. Проецирование точки

В 1799 г. французский ученый Гаспар Монж предложил метод проецирования объекта (точки, прямой, плоской фигуры и т. д.) на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

Тема 2. Проекции точки

2.1. Проекции точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже. 2.2. Метод конкурирующих точек

2.1. Проекции точки на три плоскости проекций. Координатный способ задания объекта на чертеже

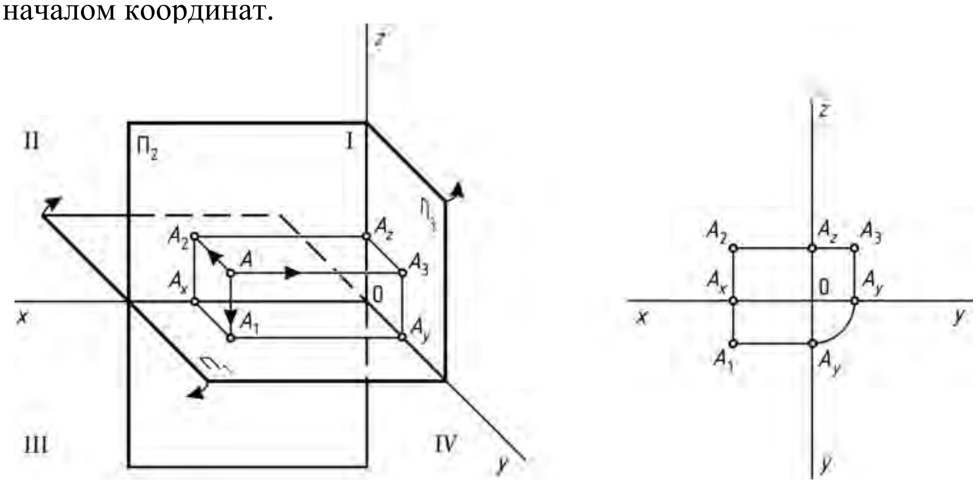
Все пространственные геометрические фигуры в начертательной геометрии ориентированы относительно декартовой прямоугольной системы координат — системы трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 5):

$П_1$ — горизонтальная плоскость проекций;

$П_2$ — фронтальная плоскость проекций;

$П_3$ — профильная плоскость проекций.

Линии пересечения этих плоскостей проекций образуют координатные оси *x*, *y*, *z*. Точка пересечения координатных осей 0 называется началом координат.



а *б*

Рис. 5. Проекции точки на три плоскости проекций

На рис. 5, *а* представлена часть пространства — четыре пространственных угла или четверти I, II, III, IV. Рассмотрим проецирование точки пространства *A* на три плоскости проекций. Точка *A* расположена в I четверти. Для того чтобы построить проекции точки *A*, необходимо через данную точку пространства провести проецирующие лучи перпендикулярно каждой плоскости проекций. При пересечении проецирующего луча с горизонтальной плоскостью проекций $П_1$ получают горизонтальную проекцию точки A_1: $A_1 = |AA_1| \cap П_1$. При пересечении проецирующего луча с фронтальной плоскостью проекций $П_2$ получают фронтальную проекцию точки A_2: $A_2 = |AA_2| \cap П_2$. При пересечении проецирующего луча с профильной плоскостью проекций $П_3$ получают профильную проекцию точки A_3: $A_3 = |AA_3| \cap П_3$. При этом A_x — проекция точки *A* на ось *x*; A_y — проекция точки *A* на ось *y*; A_z — проекция точки *A* на ось *z*.

Положение любой точки в пространстве определяется расстояниями от точки пространства до плоскостей проекций. Расстояние от точки пространства до плоскости проекций называется *координатой*. Следовательно, положение точки в пространстве определяется тремя координатами: $A\ (x, y, z)$.

Координату x называют *абсциссой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости $П_3$: $|AA_3| = |A_x0| = x$.

Координату y называют *ординатой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости $П_2$: $|AA_2| = |A_y0| = y$.

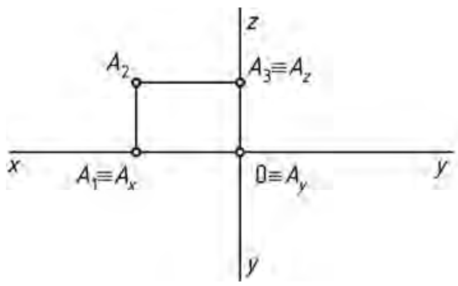
Координату z называют *аппликатой*, она определяет расстояние от точки пространства A до плоскости $П_1$: $|AA_1| = |A_z0| = z$.

Каждую проекцию точки пространства A характеризуют две координаты: $A_1\ (x, y)$; $A_2\ (x, z)$; $A_3\ (y, z)$.

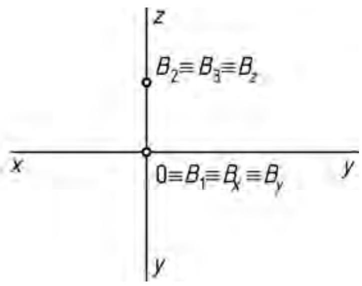
Чтобы получить плоскую (двухмерную) модель пространственных координатных плоскостей проекций, горизонтальную плоскость проекций $П_1$ и профильную плоскость проекций $П_3$ совмещают с фронтальной $П_2$ как показано на рис. 5, *а*. Плоская модель любой пространственной геометрической фигуры называется эпюром Монжа. В результате построений на плоском чертеже (эпюре) получают три проекции точки A: горизонтальную проекцию A_1, фронтальную проекцию A_2 и профильную проекцию A_3 (рис. 5, *б*).

Две проекции точки соответствуют только одному положению точки в пространстве. По двум заданным проекциям точки всегда можно определить третью ее проекцию, так как все проекции точки связаны между собой проекционными связями, перпендикулярными плоскостям проекций (на эпюре — координатным осям).

При решении графических задач координаты точек задают числами в каком-либо масштабе, например, A (20, 10, 15) — см. рис. 5, *б*. Координаты точки могут равняться нулю. Если нулю равна одна координата, то точка принадлежит одной из плоскостей проекций. Например, A (20, 0, 15), $A_y = 0 \Rightarrow A \in П_2$ (рис. 6, *а*). Если две координаты равны нулю, то точка принадлежит одной из координатных осей. Например, B (0, 0, 15), $B_x = B_y = 0 \Rightarrow B \in 0z$ (рис. 6, *б*).



а



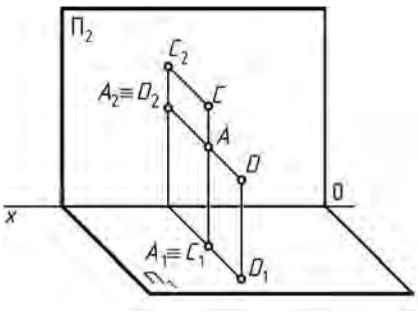
б

Рис. 6. Проекции точек

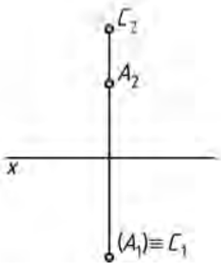
2.2. Метод конкурирующих точек

Точки, расположенные на одном проецирующем луче по отношению к плоскости проекций, называются *конкурирующими* (рис. 7, *а*).

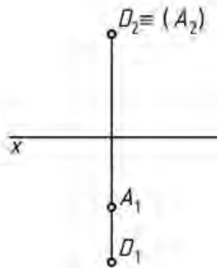
Из двух конкурирующих точек пространства A и C на горизонтальной плоскости проекций видимой будет та точка, фронтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_1 (на эпюре — от оси x) (рис. 7, *б*). Из двух конкурирующих точек пространства A и D на фронтальной плоскости проекций видимой будет та точка, горизонтальная проекция которой наиболее удалена от плоскости Π_2 (на эпюре — от оси x) (рис. 7, *в*).



а



б



в

Рис. 7. Конкурирующие точки

Тема 3. Проекции прямой

3.1. Линии. Кривая линия. Комплексный чертеж прямой. 3.2. Прямые общего и частного положения. 3.3. Следы прямой. 3.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций. 3.5. Относительное расположение прямых линий

3.1. Линии. Кривая линия. Комплексный чертеж прямой

Линии занимают особое положение в начертательной геометрии, так как дают возможность создавать наглядные модели многих процессов, устанавливать и исследовать зависимость между ними. Линия в начертательной геометрии рассматривается как траектория перемещения точки на плоскости или в пространстве, и это позволяет определить линию как *непрерывное множество принадлежащих ей точек*.

Различают:

плоские линии, все точки которых принадлежат одной плоскости;

пространственные линии (линии двоякой кривизны), все точки которых не принадлежат одной плоскости.

Кривая линия в начертательной геометрии рассматривается как траектория, описанная движущейся точкой; как совокупность точек, удовлетворяющих определенному уравнению; а также как линия пересечения двух поверхностей или поверхности с плоскостью. Кривая определяется положением составляющих ее точек. Точки кривой определяются их координатами. Кривые линии подразделяются на *алгебраические*, если в прямоугольной системе координат они определяются алгебраическими уравнениями, и *трансцендентные*, если они описываются трансцендентными уравнениями. Примерами плоских кривых линий являются: окружность, эллипс, парабола, гипербола, циклоид и др. К пространственным кривым линиям относятся: винтовая линия, линия пересечения боковых поверхностей прямых круговых цилиндра и конуса, оси которых не пересекаются и др.

Для построения проекций кривой (пространственной или плоской) необходимо построить проекции ряда принадлежащих ей точек и соединить между собой одноименные проекции в той же последовательности, в какой они располагались на оригинале (рис. 8). Пространственная кривая проецируется в виде плоской линии, плоская кривая — в виде плоской или в виде прямой линии, если кривая находится в проецирующей плоскости.

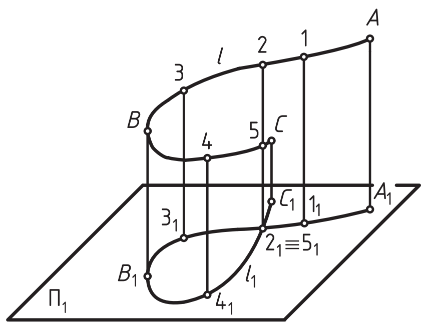
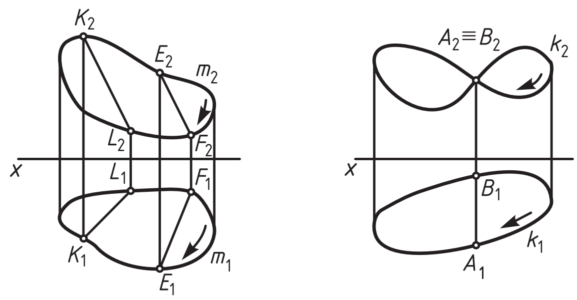


Рис. 8. Построение проекции кривой линии

По чертежу кривой линии в общем случае можно без дополнительных построений определить плоская она или пространственная. Так на рис. 9, *а* показана пространственная кривая m, так как фронтальные проекции отрезков прямых KL и EF параллельны ($|K_2L_2| \,||\, |E_2F_2|$), а горизонтальные проекции K_1L_1 и E_1F_1 не параллельны. На рис. 9, *б* также дана пространственная кривая k, имеющая конкурирующие точки A и B.



а *б*

Рис. 9. Проекции пространственных кривых линий

Простейшей линией является прямая линия. Она определяется в пространстве двумя точками, принадлежащими ей (рис. 10). На комплексном чертеже проекции прямой задаются проекциями этих точек.

Пусть заданы проекции точек пространства A и B: A_1 — горизонтальная проекция точки A; A_2 — фронтальная проекция точки A; B_1 — горизонтальная проекция точки B; B_2 — фронтальная проекция точки B. Соединив одноименные проекции точек A и B, получают проекции отрезка прямой AB: A_1B_1 — горизонтальная проекция отрезка прямой AB и A_2B_2 — фронтальная проекция отрезка прямой AB. Для определения положения прямой в пространстве достаточно двух ее проекций. Третью проекцию, например, профильную A_3B_3, всегда можно определить по двум заданным (см. рис. 10).

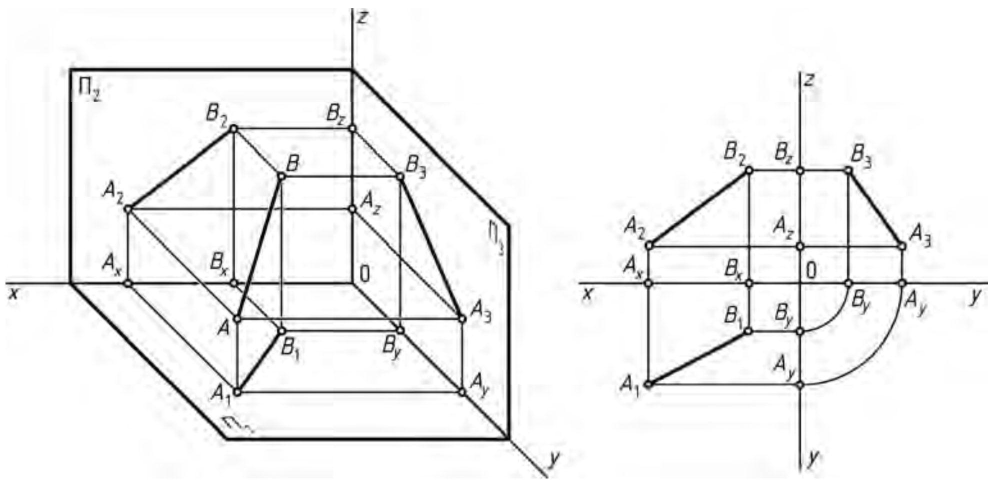


Рис. 10. Проекции прямой линии

3.2. Прямые общего и частного положения

Прямая линия может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций.

Прямая, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *прямой общего положения* (см. рис. 10). Проекции прямой общего положения произвольно наклонены к осям проекций и на эпюре Монжа составляют с координатными осями произвольные углы наклона.

Прямые, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называются *прямыми частного положения.*

Различают:

прямые уровня — прямые, параллельные одной какой-либо плоскости проекций;

проецирующие прямые (дважды параллельные) — прямые, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций и параллельные двум другим плоскостям проекций одновременно.

Прямые уровня.

1. *Горизонтальная прямая уровня* — прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 11, *а*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_2 к фронтальной плоскости проекций Π_2 и φ_3 к профильной плоскости проекций Π_3.

2. *Фронтальная прямая уровня* — прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 11, *б*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_1 к горизонтальной плоскости проекций Π_1 и φ_3 к профильной плоскости проекций Π_3.

3. *Профильная прямая уровня* — прямая, параллельная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 11, *в*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в натуральную величину и составляет углы наклона φ_1 к горизонтальной плоскости проекций Π_1 и φ_2 к фронтальной плоскости проекций Π_2.

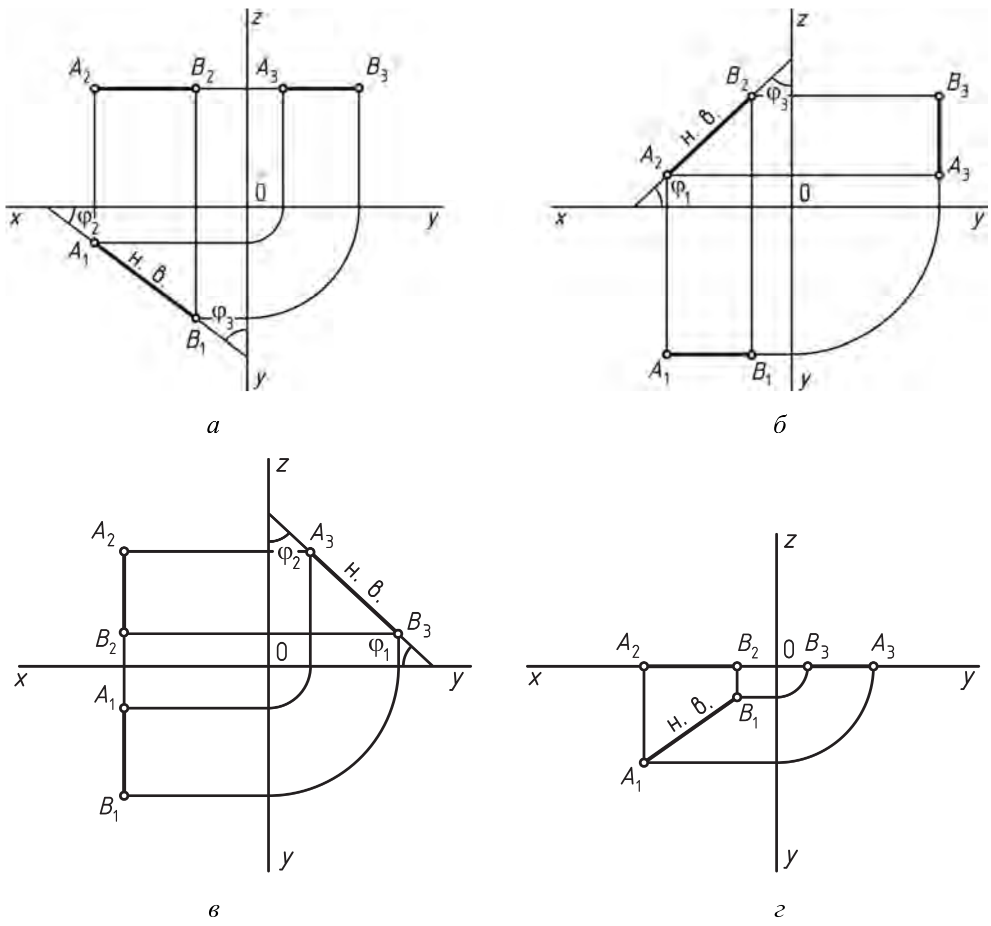


Рис. 11. Проекции прямых уровня

Следует также отметить, что прямая может принадлежать плоскости проекций. В этом случае две ее проекции будут проецироваться на оси проекций, например, $|AB| \in \Pi_1$, то A_1B_1 — н. в. (рис. 11, *г*).

Проецирующие прямые (дважды параллельные).

1. *Горизонтально-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 12, *а*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_2 и Π_3 прямая проецируется в натуральную величину.

2. *Фронтально-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 12, *б*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_1 и Π_3 прямая проецируется в натуральную величину.

3. *Профильно-проецирующая прямая* — прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 12, *в*). На данную плоскость проекций прямая проецируется в точку, в плоскостях Π_1 и Π_2 прямая проецируется в натуральную величину.

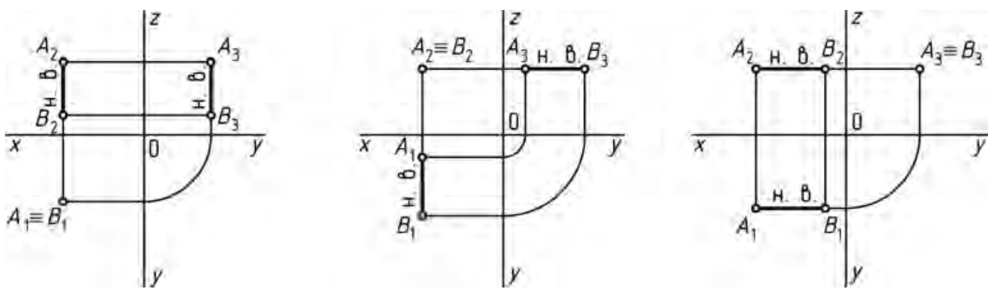


Рис. 12. Проекции проецирующих прямых

3.3. Следы прямой

Следом прямой называют точку пересечения прямой с плоскостью проекций.

Различают:

1. *Горизонтальный след прямой* — точка пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 (рис. 13).

Обозначается M: $M = |AB| \cap \Pi_1$.

Проекции следа: M_1 — горизонтальная проекция горизонтального следа M; M_2 — фронтальная проекция горизонтального следа M.

2. *Фронтальный след прямой* — точка пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций Π_2 (см. рис. 13).

Обозначается N: $N = |AB| \cap \Pi_2$.

Проекции следа: N_1 — горизонтальная проекция фронтального следа N; N_2 — фронтальная проекция фронтального следа N.

3. *Профильный след прямой* — точка пересечения прямой с профильной плоскостью проекций Π_3. Обозначается P: $P = |AB| \cap \Pi_3$.

Для того чтобы найти горизонтальный след прямой M, необходимо фронтальную проекцию прямой продолжить до пересечения с осью x (определяют положение фронтальной проекции следа M_2). Из этой точки проводят перпендикуляр к оси x до пересечения его с горизонтальной проекцией прямой (определяют положение горизонтальной проекции следа $M \equiv M_1$) (см. рис. 13).

Для того чтобы найти фронтальный след прямой N, необходимо горизонтальную проекцию прямой продолжить до пересечения с осью x (определяют положение горизонтальной проекции следа N_1). Из этой точки проводят перпендикуляр к оси x до пересечения его с фронтальной проекцией прямой (определяют положение фронтальной проекции следа $N \equiv N_2$) (см. рис. 13).

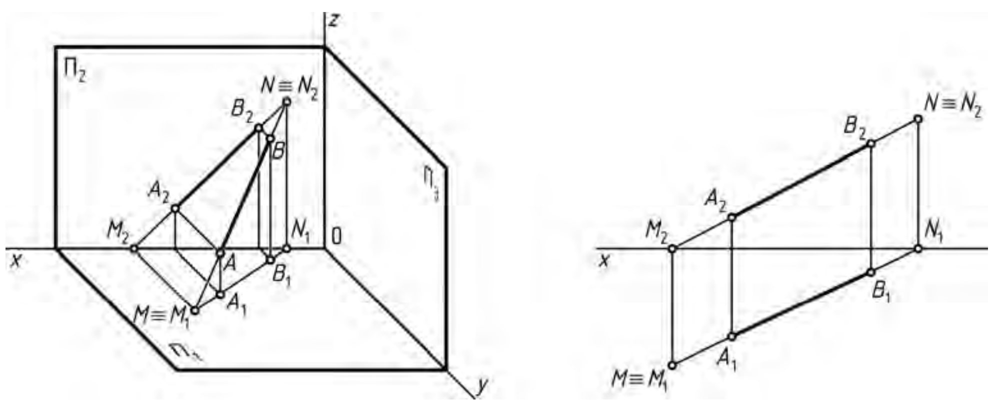


Рис. 13. Следы прямой

3.4. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций

Дан отрезок прямой AB общего положения и горизонтальная плоскость проекций Π_1 (рис. 14). Продолжим отрезок прямой AB до пересечения его с плоскостью Π_1 и определим положение горизонтального следа прямой AB и его горизонтальной проекции $M \equiv M_1$. Затем построим горизонтальную проекцию отрезка прямой A_1B_1 и из точки A проведем прямую AB' параллельную горизонтальной проекции прямой A_1B_1. В результате построений имеем прямоугольный треугольник ABB', где $\angle AB'B = 90°$. Из этого треугольника видно, что *натуральная величина отрезка прямой AB* есть гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на плоскость ($|AB'| = |A_1B_1|$), а другой катет — разности расстояний концов отрезка до этой плоскости ($\Delta z = z_B - z_A$) (см. рис. 14).

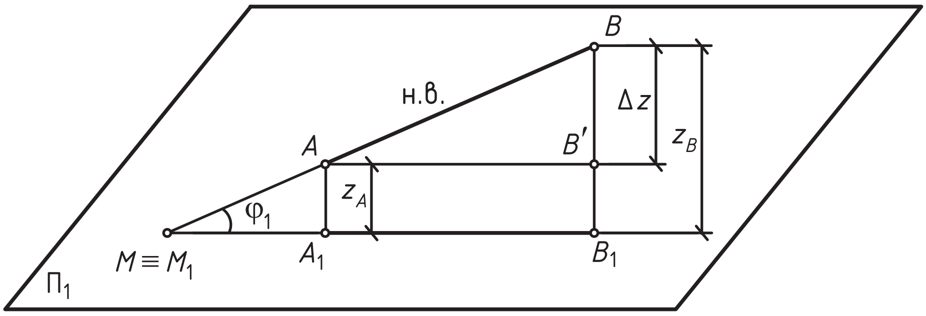


Рис. 14. Метод прямоугольного треугольника

Рассмотрим определение натуральной величины отрезка прямой *методом прямоугольного треугольника* на комплексном чертеже.

Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на горизонтальной плоскости проекций $П_1$, необходимо из любого конца горизонтальной проекции этого отрезка, например из B_1, восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δz, взятую с фронтальной плоскости проекций $П_2$: $\Delta z = z_B - z_A$. Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на фронтальной плоскости проекций $П_2$, необходимо из любого конца фронтальной проекции этого отрезка, например из A_2, восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δy, взятую с горизонтальной плоскости проекций $П_1$: $\Delta y = y_A - y_B$ (рис. 15).

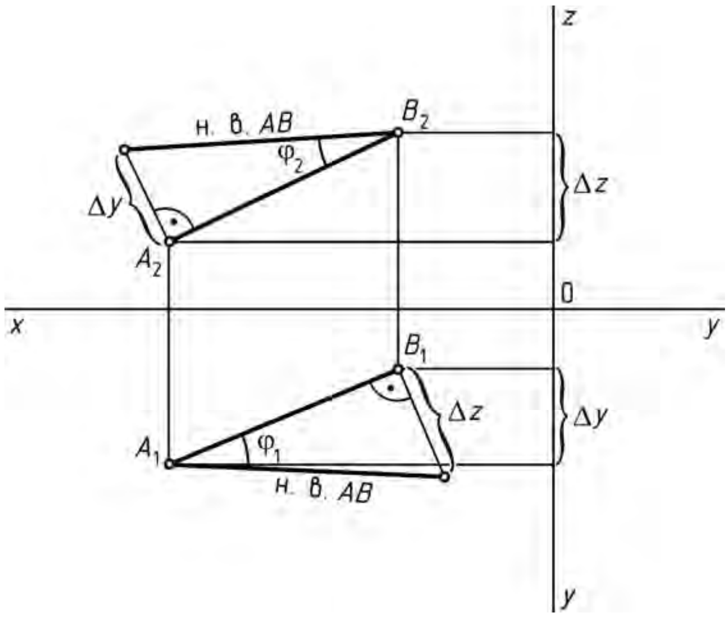


Рис. 15. Определение натуральной величины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций

Для того чтобы определить натуральную величину отрезка прямой на профильной плоскости проекций $П_3$, необходимо также из любого конца профильной проекции этого отрезка восстановить перпендикуляр, на котором отложить разницу превышений концов отрезка прямой Δx, взятую с фронтальной или горизонтальной плоскостей проекций ($П_1$ или $П_2$): $\Delta x = x_A - x_B$.

Угол, заключенный между натуральной величиной отрезка прямой и его проекцией на эту плоскость, есть *угол наклона отрезка прямой к данной плоскости проекций*. Например, угол φ_1 есть угол наклона прямой AB к горизонтальной плоскости проекций $П_1$, а угол φ_2 — угол наклона прямой AB к фронтальной плоскости проекций $П_2$ (см. рис. 15).

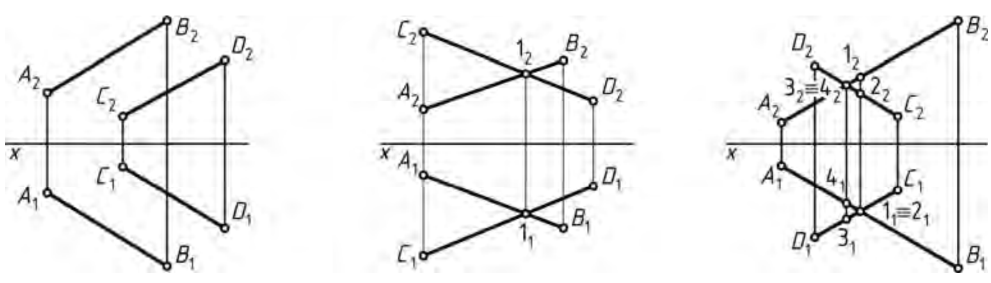
3.5. Относительное расположение прямых линий

Прямые пространства относительно друг друга могут занимать различные положения: быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися.

Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общую точку, называются *параллельными*. Если прямые пространства параллельны, то их одноименные проекции будут также параллельны (рис. 16, *а*).

Прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку, называются *пересекающимися*. Если прямые в пространстве пересекаются, то их одноименные проекции также пересекаются, и проекции их точек пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси проекций (рис. 16, *б*).

Прямые, не лежащие в одной плоскости и не имеющие одну общую точку, называются *скрещивающимися*. Если прямые в пространстве скрещиваются, то их одноименные проекции пересекаются, и проекции их точек пересечения не лежат на одном перпендикуляре к оси проекций (рис. 16, *в*). В этом случае, пользуясь методом конкурирующих точек, можно определить, какая из прямых пространства расположена ближе к какой-либо плоскости проекций.



а *б* *в*

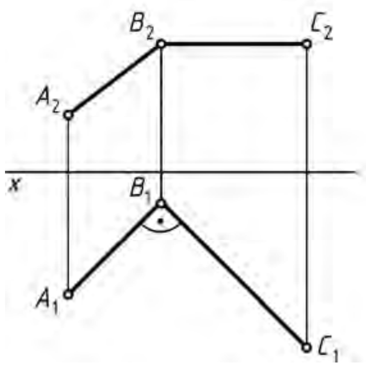
Рис. 16. Относительное расположение прямых

Частным случаем пересечения прямых в пространстве может быть их *перпендикулярность*, т. е. когда прямые перпендикулярны друг другу и образуют прямой угол.

Т е о р е м а *о проецировании прямого плоского угла*: если две прямые в пространстве образуют прямой угол и одна из прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения, т. е. в натуральную величину.

Если $|AB| \perp |BC|$, а $|BC| \,||\, \Pi_1, \Rightarrow |A_1B_1| \perp |B_1C_1|$ (рис. 17, *а*).

Если $|AB| \perp |BC|$, а $|AB| \,||\, \Pi_2, \Rightarrow |A_2B_2| \perp |B_2C_2|$ (рис. 17, *б*).



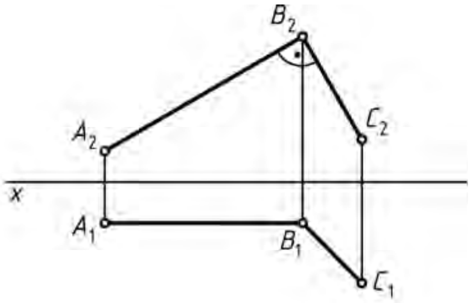


Рис. 17. Проецирование прямого плоского угла

Тема 4. Проекции плоскости

4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже. 4.2. Следы плоскости. 4.3. Плоскости общего и частного положения. 4.4. Принадлежность точки и прямой плоскости. 4.5. Главные линии плоскости. 4.6. Относительное расположение плоскостей. 4.7. Относительное расположение прямой и плоскости

4.1. Способы задания плоскости на комплексном чертеже

Плоскость в начертательной геометрии может быть задана:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 18, *а*);

2) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой (рис. 18, *б*);

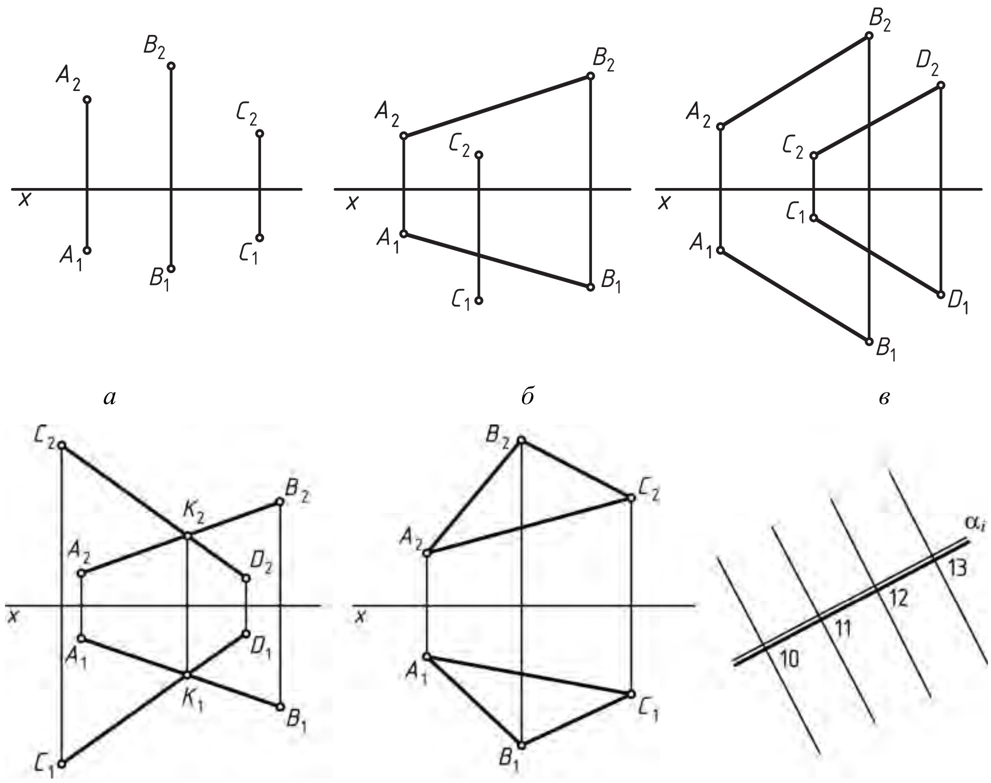
3) двумя параллельными прямыми (рис. 18, *в*);

4) двумя пересекающимися прямыми (рис. 18, *г*);

5) плоской фигурой (рис. 18, *д*);

6) масштабом уклонов (рис. 18, *е*).

Каждый из перечисленных способов задания плоскости допускает переход к любому другому.



а *б* *в*

г *д* *е*

Рис. 18. Способы задания плоскости на чертеже

В некоторых случаях плоскость на комплексном чертеже целесообразно задать следами.

4.2. Следы плоскости

Следом плоскости называют линию пересечения данной плоскости с какой-либо плоскостью проекций (рис. 19).

Различают:

горизонтальный след плоскости: $\alpha_{\Pi_1} = \alpha \cap \Pi_1$;

фронтальный след плоскости: $\alpha_{\Pi_2} = \alpha \cap \Pi_2$;

профильный след плоскости: $\alpha_{\Pi_3} = \alpha \cap \Pi_3$.

Точки α_x, α_y, α_z называются точками схода следов.

Задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими способами задания плоскостей. Прежде всего, сохраняется наглядность изображения, что позволяет легче представить себе положение плоскости в пространстве. При задании плоскости следами достаточно указать два следа — горизонтальный α_{Π_1} и фронтальный α_{Π_2}. Третий след плоскости, профильный α_{Π_3}, при необходимости всегда можно построить по двум заданным.

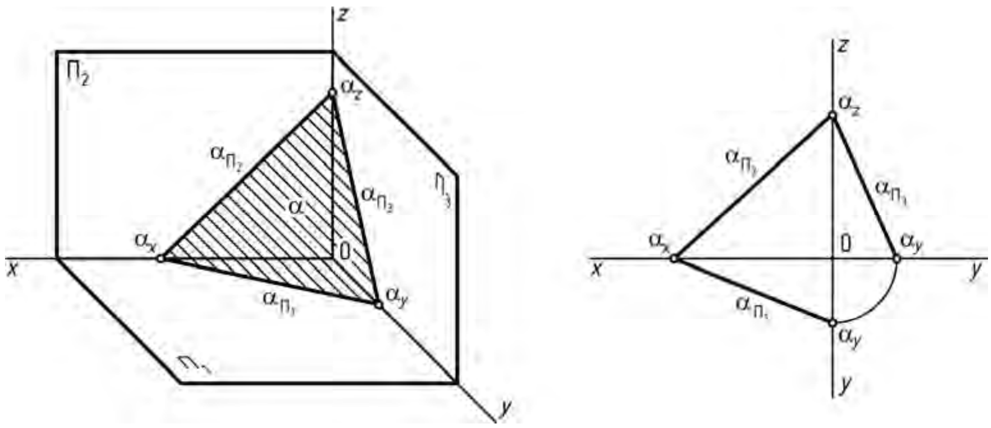


Рис. 19. Плоскость, заданная следами

4.3. Плоскости общего и частного положения

Плоскость может занимать произвольное положение относительно плоскостей проекций.

Плоскость, непараллельная и неперпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью общего положения*. Эта плоскость произвольно наклонена к осям проекций и на эпюре Монжа ее следы составляют с координатными осями произвольные углы наклона (см. рис. 19). На рис. 20 даны проекции плоскости общего положения, заданной плоской фигурой Δ *ABC*.

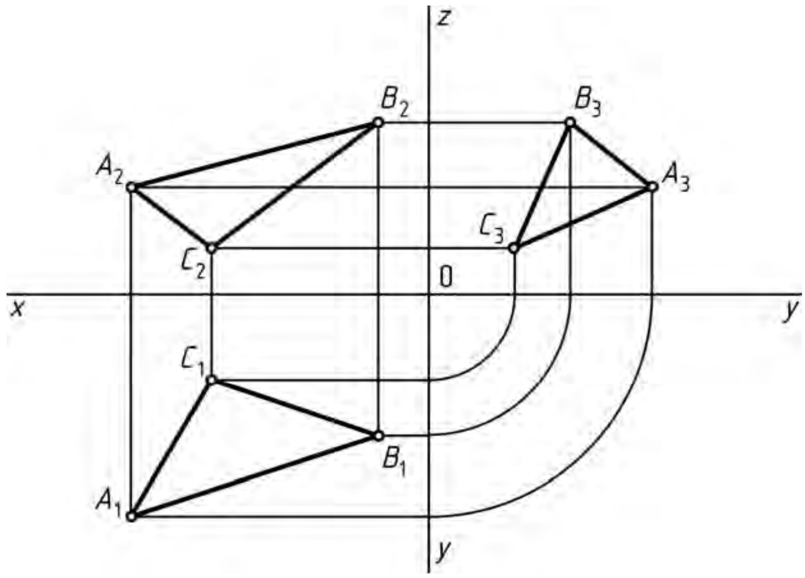


Рис. 20. Плоскость, заданная плоской фигурой Δ *ABC*

Плоскости, параллельные или перпендикулярные каким-либо плоскостям проекций, называют *плоскостями частного положения*.

Различают:

плоскости уровня (дважды проецирующие) — плоскости, параллельные одной какой-либо плоскости проекций и перпендикулярные к двум другим плоскостям проекций одновременно;

проецирующие плоскости — плоскости, перпендикулярные одной какой-либо плоскости проекций.

Плоскости уровня (дважды проецирующие).

1. *Горизонтальная плоскость уровня* — плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1: $\alpha\ (\Delta\, ABC) \parallel \Pi_1$ (рис. 21).

Любая геометрическая фигура, принадлежащая горизонтальной плоскости уровня, на плоскость проекций Π_1 проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

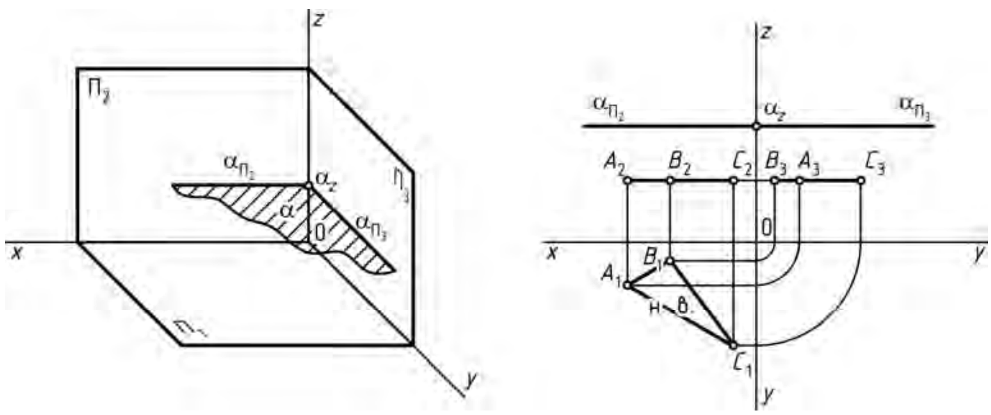


Рис. 21. Горизонтальная плоскость уровня

2. *Фронтальная плоскость уровня* — плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2: $\alpha\ (\Delta\, ABC) \parallel \Pi_2$ (рис. 22).

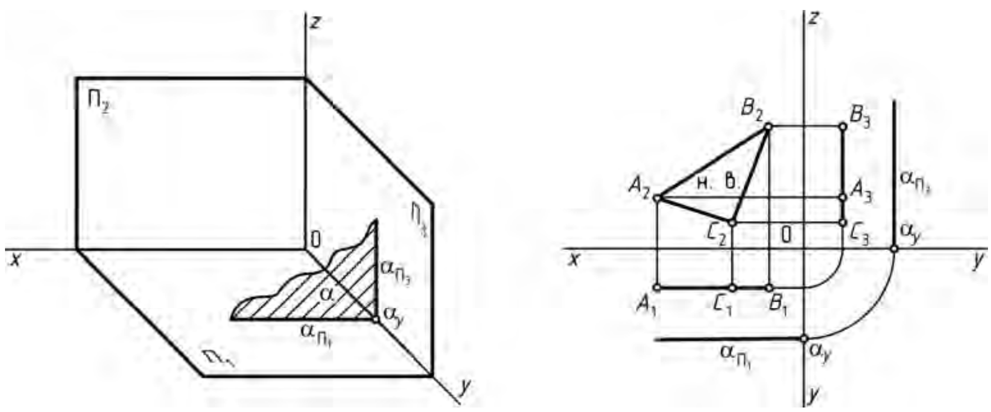


Рис. 22. Фронтальная плоскость уровня

Любая геометрическая фигура, принадлежащая фронтальной плоскости уровня, на плоскость проекций $П_2$ проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

3. *Профильная плоскость уровня* — плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$: α (Δ ABC)$||$$П_3$ (рис. 23).

Любая геометрическая фигура, принадлежащая профильной плоскости уровня, на плоскость проекций $П_3$ проецируется в натуральную величину, на две другие плоскости проекций — в прямые линии, совпадающие со следами плоскости уровня.

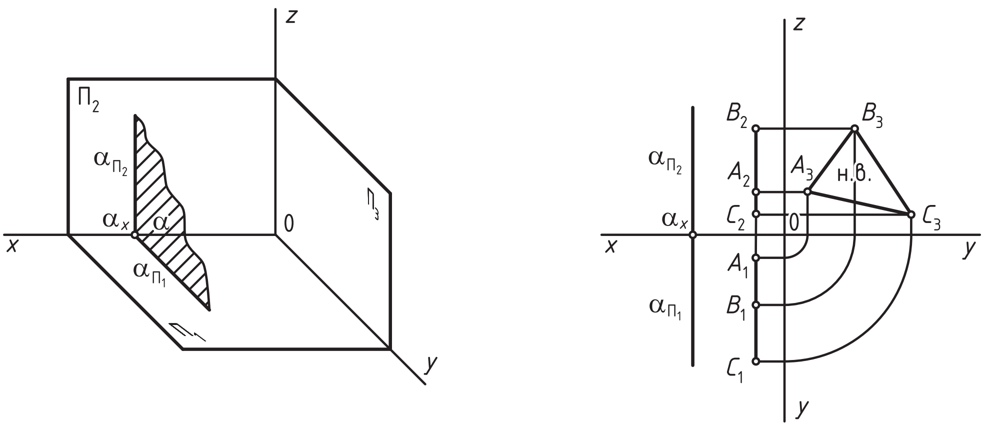


Рис. 23. Профильная плоскость уровня

Проецирующие плоскости.

1. *Горизонтально-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$: α (ΔABC) $\perp$ $П_1$ (рис. 24). Горизонтальная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает с горизонтальным следом плоскости $\alpha_{П_1}$.

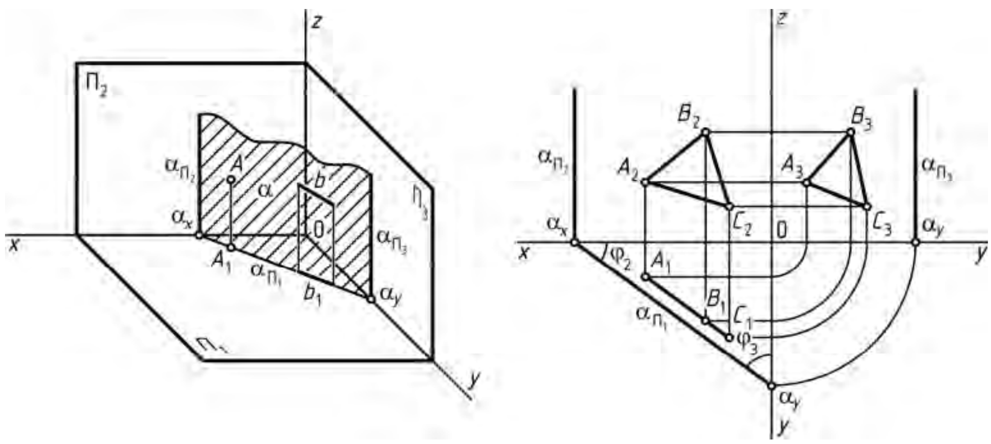


Рис. 24. Горизонтально-проецирующая плоскость

Горизонтальный след $\alpha_{П_1}$ горизонтально-проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий горизонтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее горизонтальный след. Горизонтально-проецирующая плоскость с фронтальной плоскостью проекций $П_2$ составляет угол φ_2, который измеряется между горизонтальным следом плоскости $\alpha_{П_1}$ и осью x. С профильной плоскостью проекций $П_3$ горизонтально-проецирующая плоскость составляет угол φ_3, который измеряется между горизонтальным следом плоскости $\alpha_{П_1}$ и осью y.

2. *Фронтально-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$: α (ΔABC) $\perp$ $П_2$ (рис. 25). Фронтальная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает с фронтальным следом плоскости $\alpha_{П_2}$. Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ фронтально-проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее фронтальный след. Фронтально-проецирующая плоскость с горизонтальной плоскостью проекций $П_1$ составляет угол φ_1, который измеряется между фронтальным следом плоскости $\alpha_{П_2}$ и осью x. С профильной плоскостью проекций $П_3$ фронтально-проецирующая плоскость составляет угол φ_3, который измеряется между фронтальным следом плоскости $\alpha_{П_2}$ и осью z.

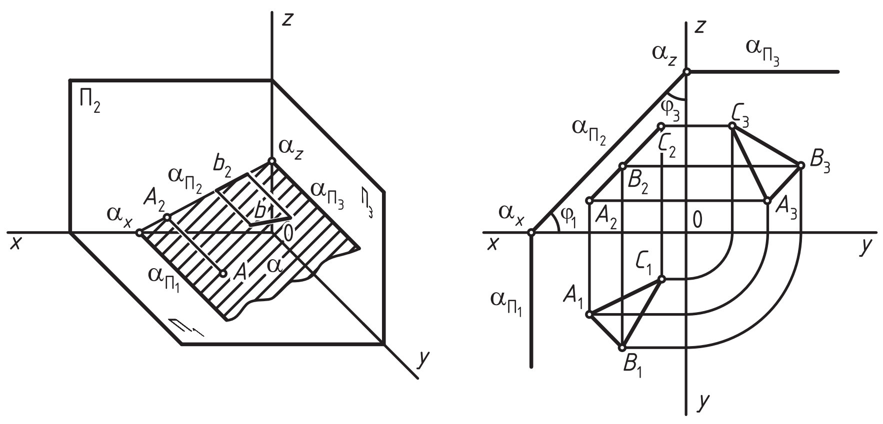


Рис. 25. Фронтально-проецирующая плоскость

3. *Профильно-проецирующая плоскость* — плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций $П_3$: α (ΔABC) $\perp$ $П_3$ (рис. 26). Профильная проекция такой плоскости есть прямая, которая совпадает

с профильным следом плоскости α_{Π_3}. Профильный след α_{Π_3} профильно-проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*: любой геометрический элемент (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), принадлежащий профильно-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее профильный след.

Профильно-проецирующая плоскость с горизонтальной плоскостью Π_1 составляет угол φ_1, который измеряется между профильным следом плоскости α_{Π_3} и осью y. С фронтальной плоскостью проекций Π_2 профильно-проецирующая плоскость составляет угол φ_2, который измеряется между профильным следом плоскости α_{Π_3} и осью z.

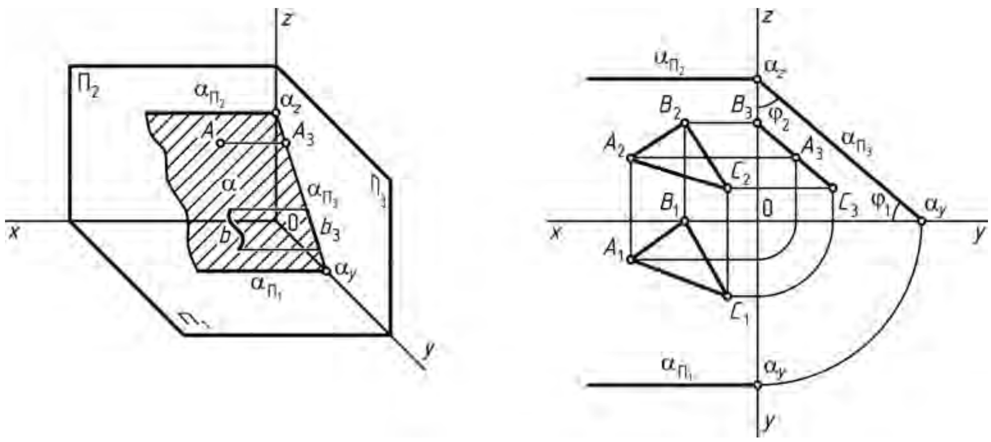


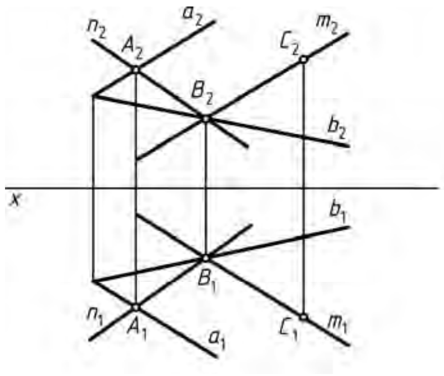
Рис. 26. Профильно-проецирующая плоскость

4.4. Принадлежность точки и прямой плоскости

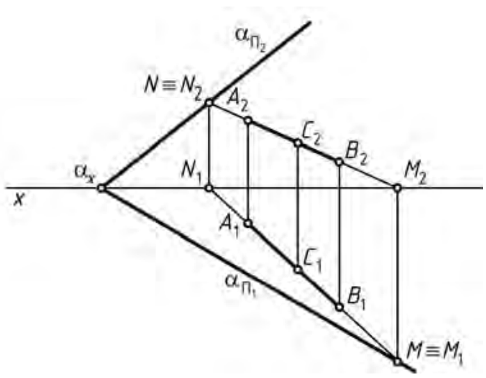
1. *Прямая принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости.* На рис. 27, *а* плоскость α задана двумя пересекающимися прямыми a и b. Прямая n принадлежит данной плоскости, так как имеет с ней две общие точки A и B: $n \subset \alpha\ (a \cap b)$.

2. *Прямая принадлежит плоскости, заданной следами, если она проходит через две точки, расположенные на следах этой плоскости.* Эти две точки являются следами этой прямой.

Если прямая лежит в плоскости, то ее следы должны лежать на одноименных следах плоскости, так как горизонтальный след прямой M одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости проекций Π_1 ($M \equiv M_1 \in \alpha_{\Pi_1}$), а фронтальный след прямой N одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости проекций Π_2 ($N \equiv N_2 \in \alpha_{\Pi_2}$) (рис. 27, *б*).



а



б

Рис. 27. Принадлежность точки и прямой плоскости

Используя свойство п. 2, можно перейти от любого способа задания плоскости к заданию ее следами. Для этого необходимо определить следы прямых, например *AB* и *BC*, принадлежащих заданной плоскости $\Delta\, ABC$, и через них построить следы плоскости α (рис. 28).

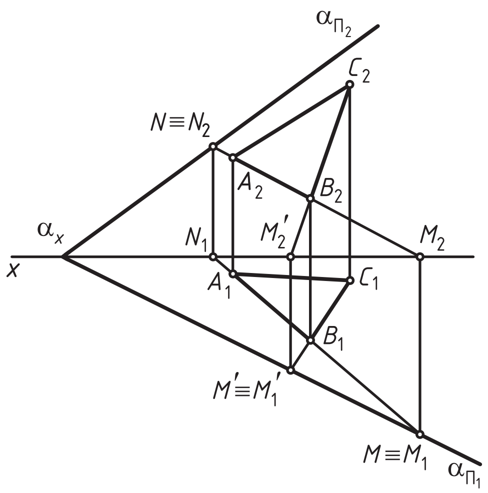


Рис. 28. Задание плоскости $\Delta\, ABC$ следами

3. *Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней одну общую точку и параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Прямая *m* на рис. 27, *а* принадлежит плоскости α, так как имеет с ней одну общую точку *B* и параллельна прямой *a*, принадлежащей плоскости α: $m \subset \alpha\ (a \cap b)$.

4. *Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.* Точка *C* на рис. 27, *а* принадлежит плоскости α, так как она принадлежит прямой *m*, лежащей в этой плоскости: $C \in m$. Если точка принадлежит плоскости, то через нее можно провести бесчисленное множество прямых, принадлежащих этой плоскости.

4.5. Главные линии плоскости

Главные линии плоскости — это особые прямые, принадлежащие плоскости и позволяющие более точно выявить ориентацию плоскости в пространстве и упростить решение многих графических задач. К главным линиям плоскости относят линии уровня плоскости и линии наклона плоскости к плоскостям проекций (линии наибольшего ската).

Линии уровня плоскости. *Горизонталь* — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 29, *а*). Обозначается h.

Проекции горизонтали: h_1 — горизонтальная; h_2 — фронтальная.

Построение горизонтали плоскости h надо начинать с ее фронтальной проекции h_2, так как $h || \Pi_1 \Rightarrow h_2 || x$, h_1 — н. в.

Фронталь — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 29, *а*). Обозначается f.

Проекции фронтали: f_1 — горизонтальная; f_2 — фронтальная.

Построение фронтали плоскости f надо начинать с ее горизонтальной проекции f_1, так как $f || \Pi_2 \Rightarrow f_1 || x$, f_2 — н. в.

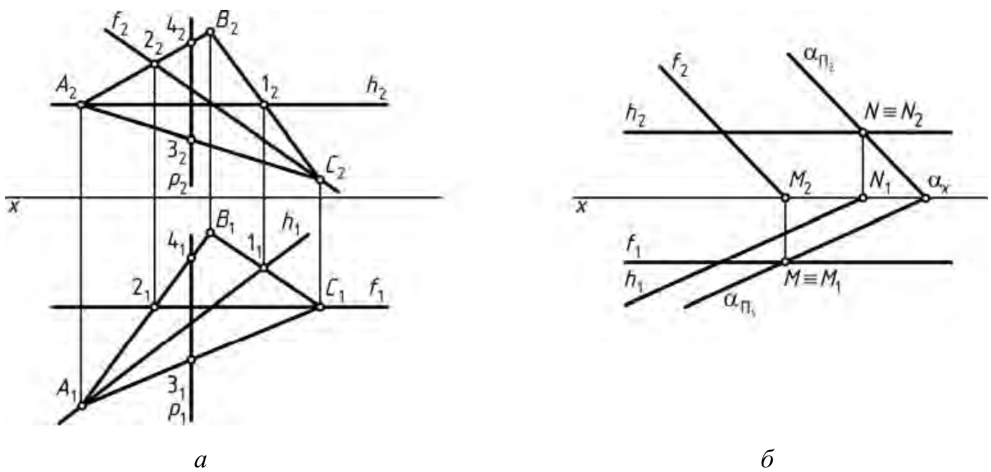


Рис. 29. Главные линии плоскости

Профильная прямая — это прямая, которая принадлежит заданной плоскости α (ΔABC) и параллельна профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 29, *а*). Обозначается p.

Проекции профильной прямой: p_1 — горизонтальная; p_2 — фронтальная.

Построение профильной прямой плоскости p надо начинать или с ее горизонтальной проекции p_1, или с ее фронтальной проекции p_2, так как $p || \Pi_3 \Rightarrow p_1 || x$ и $p_2 || z$, p_3 — н. в.

Рассмотрим плоскость α, заданную следами. Построим в этой плоскости горизонталь и фронталь. Следует отметить, что следы плоскости можно отнести к главным линиям плоскости. Так, расстояние от горизонтали до плоскости проекций Π_1 равно значению z, а от фронтали до плоскости проекций Π_2 равно значению y. Отсюда, горизонтальный след плоскости — это нулевая горизонталь плоскости ($\alpha_{\Pi_1} \equiv h_0$), а фронтальный след плоскости — это нулевая фронталь плоскости ($\alpha_{\Pi_2} \equiv f_0$). Итак, если $h \subset \alpha$, $h \,||\, \Pi_1$ и $h_2 \,||\, 0x$, то фронтальный след горизонтали $N \equiv N_2 \in \alpha_{\Pi_2}$, а проекция горизонтали $h_1 \,||\, \alpha_{\Pi_1}$ (рис. 29, *б*). Аналогично, если $f \subset \alpha$, $f \,||\, \Pi_2$ и $f_1 \,||\, 0x$, то горизонтальный след фронтали $M \equiv M_1 \in \alpha_{\Pi_1}$, а проекция фронтали $f_2 \,||\, \alpha_{\Pi_2}$ (рис. 29, *б*).

Отметим также, что если одна из проекций точки принадлежит следу плоскости, то другая ее проекция будет лежать на оси x. Верно и обратное утверждение.

Линии наклона плоскости к плоскостям проекций (линии наибольшего ската). *Линией наклона плоскости к плоскостям проекций* называют прямую, принадлежащую заданной плоскости α (ΔABC) и перпендикулярную или горизонтали, или фронтали плоскости.

Главным свойством линий наибольшего ската является то, что они образуют с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 и с фронтальной плоскостью проекций Π_2 углы φ_1 и φ_2, равные углам наклона заданной плоскости к плоскостям проекций (рис. 30). Докажем это.

Пусть n — линия наибольшего ската, перпендикулярная горизонтали плоскости α (ΔABC): $n \perp h$, а m — линия наибольшего ската, перпендикулярная фронтали плоскости α (ΔABC): $m \perp f$. Тогда, применяя теорему о проецировании прямого плоского угла, получаем: если $n \perp h$, а $h \,||\, \Pi_1 \Rightarrow n_1 \perp h_1$; если $m \perp f$, а $f \,||\, \Pi_2 \Rightarrow m_2 \perp f_2$. Выстраиваем оставшиеся проекции n_2 и m_1. Методом прямоугольного треугольника определяем натуральные величины прямых n и m. Угол, заключенный между натуральной величиной линии наибольшего ската n и ее проекцией n_1, есть угол наклона φ_1 плоскости α (ΔABC) к горизонтальной плоскости проекций Π_1. Угол, заключенный между натуральной величиной линии наибольшего ската m и ее проекцией m_2, есть угол наклона φ_2 плоскости α (ΔABC) к фронтальной плоскости проекций Π_2.

На любой плоскости можно провести бесконечное множество главных линий. Главные линии всех направлений образуют плоские пучки параллельных прямых, т. е. все горизонтали плоскости параллельны между собой, все фронтали плоскости параллельны между собой и т. д.

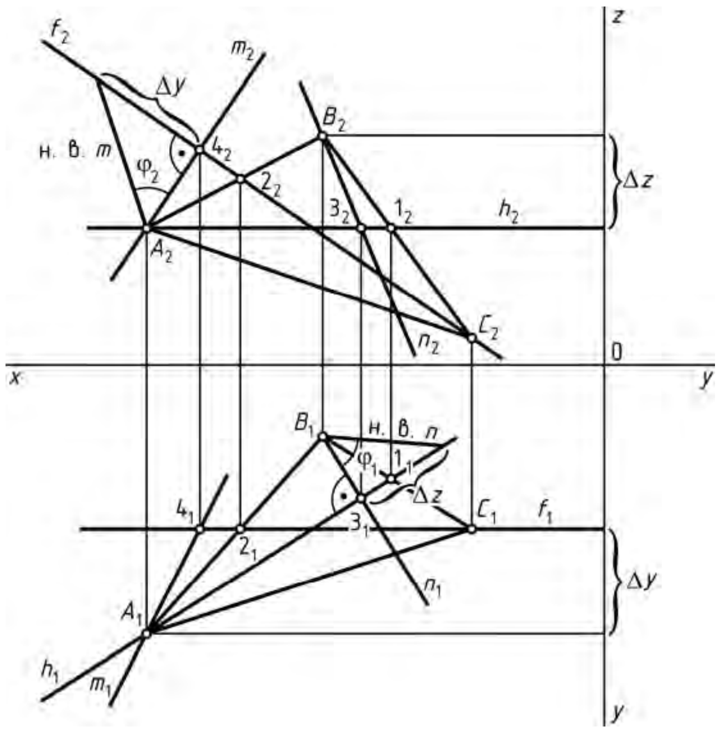


Рис. 30. Определение углов наклона плоскости к плоскостям проекций

4.6. Относительное расположение плоскостей

Плоскости относительно друг друга могут быть параллельны и пересекаться.

Плоскости параллельны. *Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости* (рис. 31).

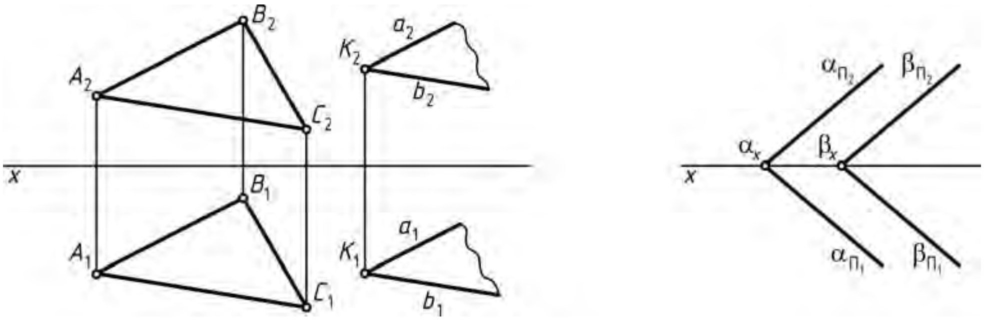


Рис. 31. Параллельные плоскости

У параллельных плоскостей главные линии (горизонтали, фронтали, профильные прямые и линии наибольшего ската) также параллельны. Одноименные следы параллельных плоскостей будут также параллельны.

Плоскости пересекаются. Линией пересечения двух плоскостей является прямая. Для построения этой прямой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям.

Рассмотрим примеры.

1. Плоскость общего положения пересекается с плоскостью частного положения (рис. 32). Плоскость α (□*DEFK*) — горизонтально-проецирующая плоскость, горизонтальная проекция которой обладает собирательным свойством. Плоскость β (Δ*ABC*) — плоскость общего положения. Горизонтальная проекция a_1 линии пересечения плоскостей α (□*DEFK*) и β (Δ*ABC*) определяется без дополнительных построений. Фронтальная проекция a_2 линии пересечения плоскостей определяется исходя из принадлежности прямой *a* плоскости β (Δ*ABC*). Видимость плоскостей определяется методом конкурирующих точек.

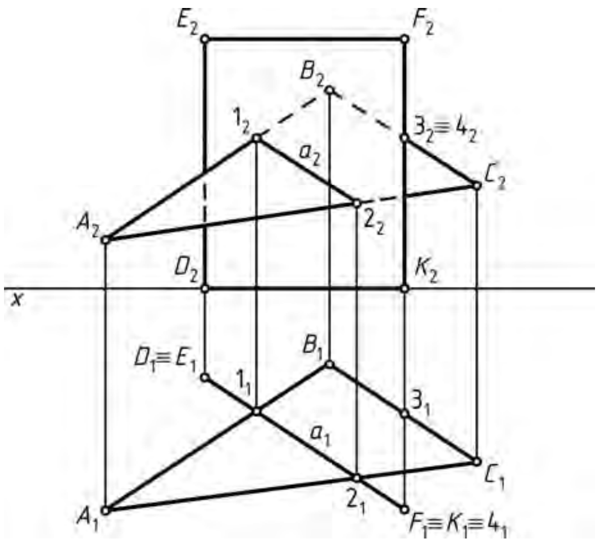


Рис. 32. Пересечение плоскостей общего и частного положения

2. Плоскость общего положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 33). Для построения линии пересечения двух плоскостей общего положения применяют *метод посредника*:

1) последовательно вводят плоскости-посредники частного положения, например горизонтальные уровня, γ и ε;

2) выстраивают линии пересечения α ($a \| b$) и γ, а также β ($c \cap d$) и γ, и затем линии пересечения α ($a \| b$) и ε, а также β ($c \cap d$) и ε;

3) при пересечении одноименных проекций линий пересечения плоскостей определяют точки пересечения *K* и *L*, общие для плоскостей α ($a \| b$) и β ($c \cap d$);

4) соединив одноименные проекции точек *K* и *L*, получают проекции линии пересечения плоскостей α ($a \| b$) и β ($c \cap d$).

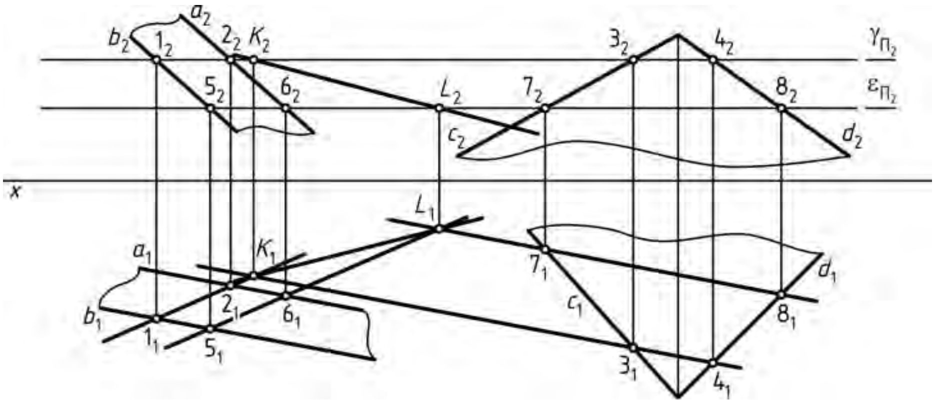


Рис. 33. Пересечение плоскостей общего положения

Для построения линии пересечения плоскостей α и β, заданных следами, отмечают точки пересечения одноименных следов плоскостей, через которые пройдет искомая прямая линия (рис. 34).

Точки M и N — горизонтальный и фронтальный следы линии пересечения l плоскостей α и β.

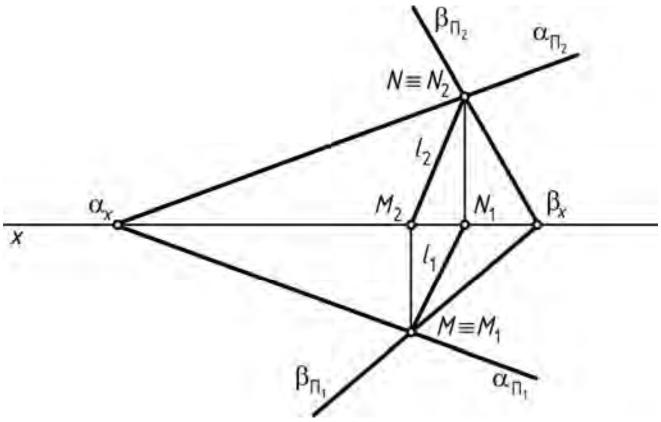


Рис. 34. Пересечение плоскостей общего положения, заданных следами

Перпендикулярность плоскостей. Частным случаем пересечения плоскостей является их перпендикулярность.

Плоскости *взаимно перпендикулярны*, если одна из них, например, плоскость β ($a \cap b$), проходит через перпендикуляр к другой плоскости (см. рис. 37, *а*). Любая плоскость, проходящая через прямую c, будет перпендикулярна плоскости α, так как прямая c является перпендикуляром к плоскости α (см. рис. 37, *б*).

4.7. Относительное расположение прямой и плоскости

Прямая относительно плоскости может занимать различные положения:

1) *прямая принадлежит плоскости* (рассмотрено выше);

2) *прямая параллельна плоскости*, если она параллельна любой прямой, принадлежащей этой плоскости: $a \parallel |AC| \subset \alpha\ (\Delta ABC) \Rightarrow a \parallel \alpha$ (ΔABC) (рис. 35). Совокупность таких прямых образует в пространстве плоскость, параллельную заданной плоскости;

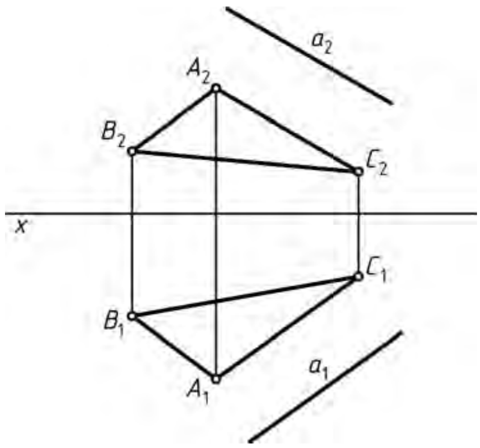


Рис. 35. Прямая, параллельная плоскости

3) *прямая пересекается с плоскостью*. Прямая пересекается с плоскостью в точке. Построить точку пересечения прямой с плоскостью — значит найти точку, принадлежащую одновременно заданной прямой и плоскости.

Рассмотрим примеры.

1. Прямая общего положения пересекается с плоскостью частного положения (рис. 36, *а*).

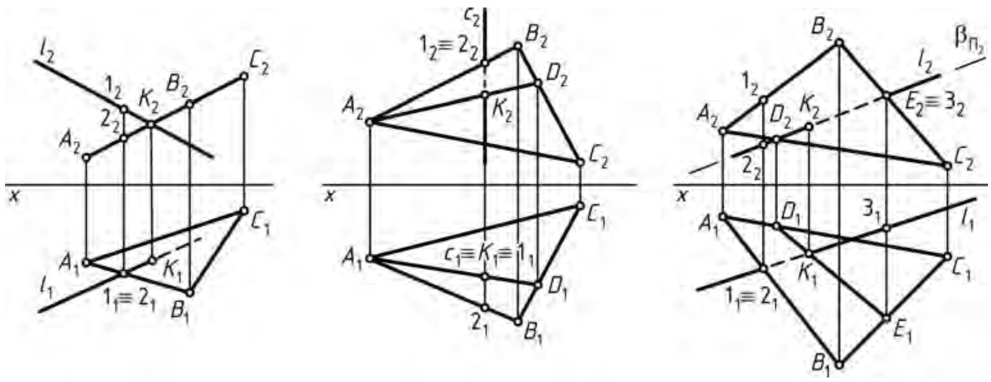
Плоскость $\alpha\ (\Delta ABC)$ — фронтально-проецирующая плоскость, фронтальная проекция которой обладает собирательным свойством. Следовательно, $K \in \alpha\ (\Delta ABC) \perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 \in \alpha_{\Pi_2}\ (\Delta A_2B_2C_2)$. Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.

2. Прямая частного положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 36, *б*).

Прямая c — горизонтально-проецирующая прямая. Следовательно, $K \in c \perp \Pi_1 \Rightarrow K_1 \equiv c_1$. Для определения фронтальной проекции точки K_2 необходимо через горизонтальную проекцию точки K_1 провести проекцию любой прямой, принадлежащей плоскости $\alpha\ (\Delta ABC)$, например, A_1D_1. Тогда $|A_2D_2| \cap c_2 = K_2$. Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.

3. Прямая общего положения пересекается с плоскостью общего положения (рис. 36, *в*).

Для определения точки пересечения прямой l с плоскостью $\alpha\ (\Delta ABC)$ применяют метод посредника, т. е. вводят вспомогательную секущую (проецирующую) плоскость. Например, прямую l заключают в плоскость частного положения β — фронтально-проецирующую. Определяют проекции линии пересечения двух плоскостей α (ΔABC) и β: фронтальную — D_2E_2, и горизонтальную — D_1E_1. Там, где горизонтальная проекция D_1E_1 пересечет горизонтальную проекцию прямой l_1, и будет точка K — точка пересечения прямой l и плоскости α (ΔABC). Видимость прямой определяется методом конкурирующих точек.



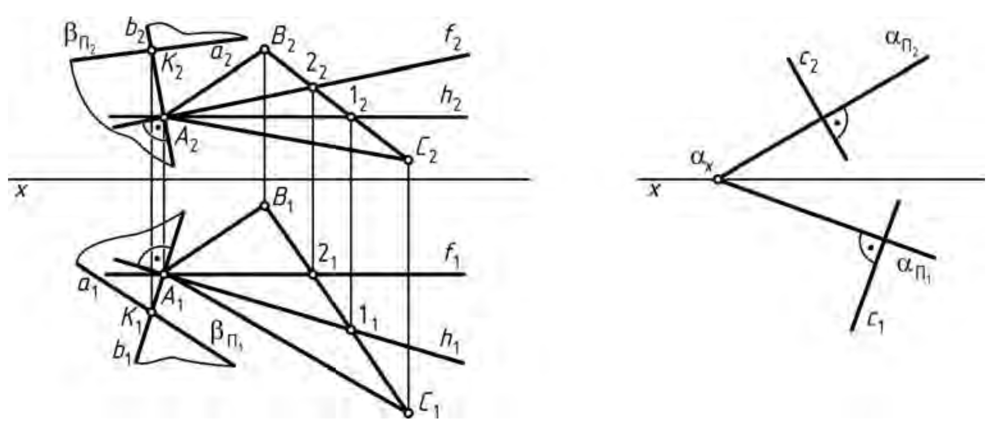
а *б* *в*

Рис. 36. Пересечение прямой с плоскостью

Частным случаем пересечения прямой и плоскости является перпендикулярность этой прямой заданной плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости (рис. 37, *а*). В качестве пересекающихся прямых, принадлежащих плоскости, используют горизонталь и фронталь данной плоскости.

Прямая перпендикулярна плоскости, заданной следами, если ее проекции перпендикулярны одноименным следам этой плоскости (рис. 37, *б*).



а *б*

Рис. 37. Прямая, перпендикулярная плоскости

Опираясь на теорему о проецировании прямого плоского угла, сформулируем т е о р е м у *о перпендикулярности прямой плоскости*: если прямая перпендикулярна плоскости, то горизонтальная проекция прямой будет перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой будет перпендикулярна фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

Итак, если $b \perp h \Rightarrow b_1 \perp h_1$ и $b \perp f \Rightarrow b_2 \perp f_2$.

Если $b \perp \alpha$ (ΔABC), то $b_1 \perp h_1^{\alpha}$ и $b_2 \perp f_2^{\alpha}$ (см. рис. 37, *а*).

Тема 5. Способы преобразования проекций

5.1. Общие сведения. 5.2. Способ замены плоскостей проекций. 5.3. Способ вращения

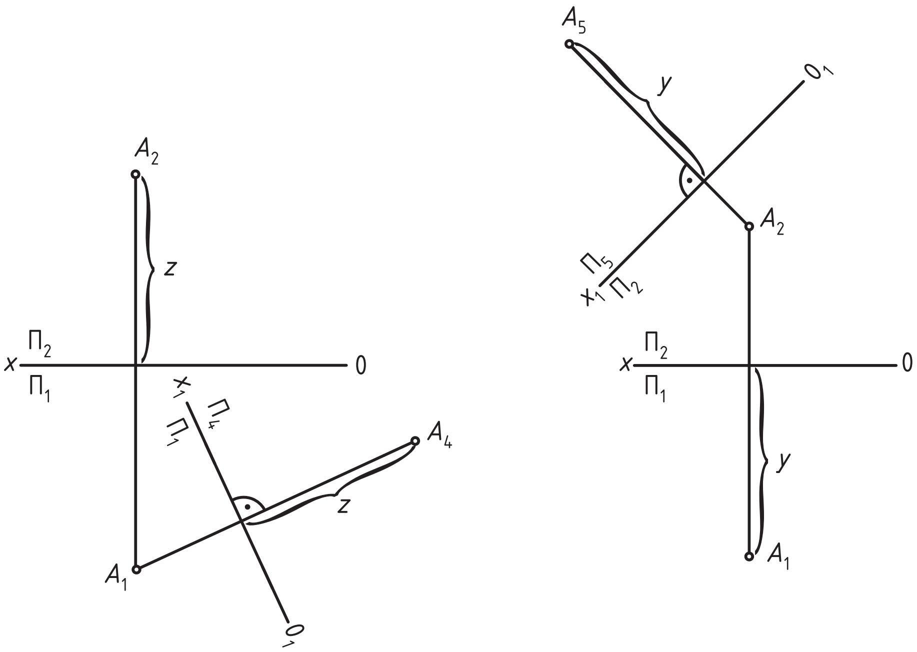
5.1. Общие сведения

Определение натуральных величин геометрических фигур (длины отрезка, величины угла, размеров плоских фигур и т. д.), построение их проекций и разверток поверхностей осуществляется в метрических задачах начертательной геометрии. Решение таких задач зависит как от их условия и способа задания, так и от положения заданных геометрических образов относительно плоскостей проекций. Известно, что в тех случаях, когда заданные геометрические образы являются, например, проецирующими, решение многих задач значительно упрощается. В связи с этим возникает необходимость преобразовать чертеж (т. е. построить новые дополнительные проекции) так, чтобы заданные геометрические фигуры оказались в более выгодном положении относительно плоскостей проекций, а именно в частном — проецирующем или параллельном.

Переход от общего положения геометрической фигуры к частному при ортогональном проецировании можно осуществить различными способами. При решении метрических задач преимущественно пользуются двумя способами преобразования проекций — способом замены плоскостей проекций и способом вращения.

5.2. Способ замены плоскостей проекций

В этом способе положение проецируемой геометрической фигуры остается неизменным относительно плоскостей проекций, изменяется только положение одной из плоскостей проекций. Ее выбирают таким образом, чтобы она занимала частное положение относительно заданной геометрической фигуры, оставаясь при этом перпендикулярной к другой незаменяемой плоскости проекций. Координата на новой плоскости проекций остается неизмененной. Таким образом, при замене фронтальной плоскости проекций Π_2 на Π_4 новая плоскость должна быть перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций $П_1$. Координата z при этом не изменяется, т. е. точка A не изменит своего расстояния от горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 38, *а*). При замене горизонтальной плоскости проекций $П_1$ на новую плоскость $П_5$ последняя должна быть перпендикулярна фронтальной плоскости проекций $П_2$. Координата y при этом остается прежней, т. е. точка A не изменит своего расстояния от фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 38, *б*).



а *б*

Рис. 38. Проекции точки в способе замены плоскостей проекций

В приведенных примерах в новой системе плоскостей рассматриваются проекция точки, оставшаяся без изменения, и новая проекция точки на новой плоскости проекций. Чтобы выполнить построения, на любом расстоянии от проекции точки, по отношению к которой производится замена, проводится ось 0_1x_1 новой заменяемой плоскости (рис. 38, *а*, *б*), и из этой проекции восстанавливается перпендикуляр к новой оси. При замене плоскости $П_2$ на $П_4$ от новой оси откладывается расстояние z, равное расстоянию от точки A до горизонтальной плоскости проекций $П_1$. При замене плоскости $П_1$ на $П_5$ от новой оси откладывается расстояние y, равное расстоянию от точки A до фронтальной плоскости проекций $П_2$.

Расстояние от новой оси проекции до новой проекции точки равно расстоянию от заменяемой оси проекции до заменяемой проекции точки.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.

З а д а ч а 1

Дано: прямая *AB* общего положения (рис. 39, *а*, *б*).

Выполнить: определить натуральную длину прямой *AB*.

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *прямая проецируется на какую-либо плоскость проекций в натуральную величину, если она параллельная этой плоскости проекций. Такая прямая называется прямой уровня*. Следовательно, для решения данной задачи прямую общего положения необходимо преобразовать в прямую частного положения — прямую уровня, параллельную одной из плоскостей проекций. Тогда новую плоскость ставят в положение, параллельное прямой *AB*, т. е. заменяют, например, плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$ (рис. 39, *а*).

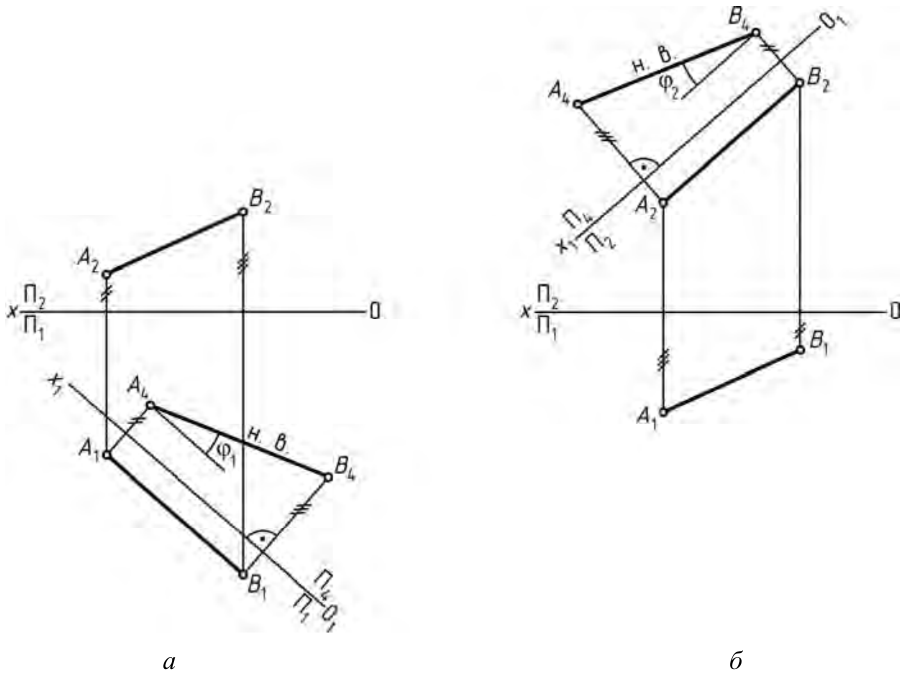


Рис. 39. Определение натуральной длины прямой

В этом случае:

1) параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1;

2) от горизонтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций точек A_2 и B_2 (координаты *z*). Новая проекция A_4B_4 будет являться натуральной длиной прямой *AB*, а угол φ_1, заключенный между натуральной величиной прямой и ее проекцией на плоскость Π_1, есть угол наклона прямой к данной плоскости проекций.

Эту же задачу можно решить, заменяя горизонтальную плоскость проекций Π_1 на $\Pi_4 \perp \Pi_2$ (рис. 39, *б*). В этом случае:

1) параллельно фронтальной проекции прямой A_2B_2 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1;

2) от фронтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до горизонтальных проекций точек A_1 и B_1 (координаты y). Новая проекция A_4B_4 будет являться натуральной длиной прямой AB, а угол φ_2, заключенный между натуральной величиной прямой и ее проекцией на плоскость Π_2, есть угол наклона прямой к данной плоскости проекций.

Задача 2

Дано: прямая AB общего положения (рис. 40).

Выполнить: преобразовать прямую AB в проецирующую.

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *проецирующей называется прямая, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. На эту плоскость прямая проецируется в точку*. Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в прямую проецирующую, производят две замены.

I. Прямую общего положения преобразуют в прямую частного положения (прямую уровня), параллельную какой-либо плоскости проекций. Для этого новую плоскость ставят в положение, параллельное прямой AB, т. е. заменяют, например плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

В этом случае:

1) параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_1x_1;

2) от горизонтальной проекции прямой проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций точек A_2 и B_2 (координаты z). Новая проекция A_4B_4 будет являться прямой уровня и проецироваться на плоскость Π_4 в натуральную величину.

II. Прямую уровня A_4B_4 преобразуют в проецирующую, т. е. ставят в положение, перпендикулярное плоскости проекций. С этой целью заменяют плоскость Π_1 на $\Pi_5 \perp \Pi_4$.

В этом случае:

1) перпендикулярно проекции прямой A_4B_4 и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_2x_2;

2) от проекции прямой A_4B_4 проводят проекционную связь, перпендикулярную новой оси проекций, и на ней откладывают расстояния от оси проекций 0_1x_1 до горизонтальных проекций точек A_1 и B_1 (координаты y). Тогда прямая AB становится перпендикулярной относительно плоскости Π_5 и спроецируется на нее в виде точки $A_5 \equiv B_5$.

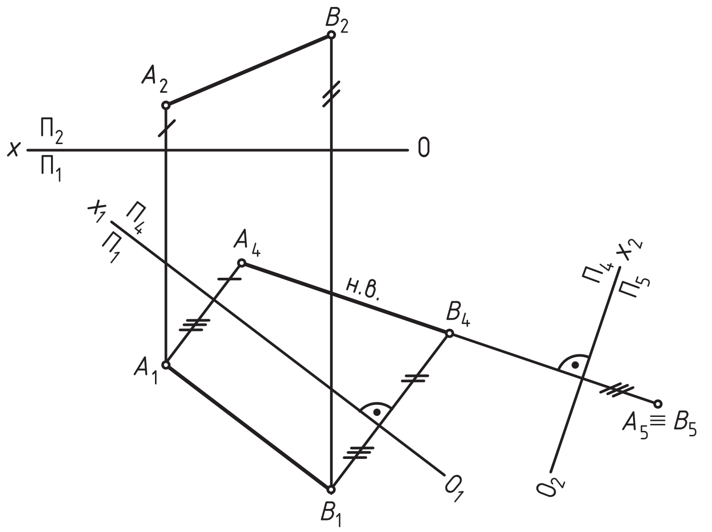


Рис. 40. Преобразование прямой из общего положения в проецирующее

З а д а ч а 3

Дано: плоскость α (Δ*ABC)* общего положения (рис. 41).

Выполнить: определить натуральную величину плоскости α (Δ*ABC)*.

Порядок выполнения:

Напоминаем, что *плоскость, параллельная какой-либо плоскости проекций, проецируется на нее в натуральную величину. Такая плоскость называется плоскостью уровня*. Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня и определить таким образом ее натуральную величину, производят две замены.

I. Плоскость общего положения преобразуют в плоскость частного положения — проецирующую. Напоминаем, что *проецирующей называется плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. На эту плоскость проекций заданная плоскость проецируется в прямую линию*. Если хотят получить горизонтально-проецирующую плоскость ($\alpha \perp \Pi_1$), то в заданной плоскости строят фронталь *f*, и новую плоскость проекций ставят перпендикулярно к ней. Если хотят получить фронтально-проецирующую плоскость ($\alpha \perp \Pi_2$), то в заданной плоскости проводят горизонталь *h*, и новую плоскость проекций ставят перпендикулярно к ней. Например, проводят в заданной плоскости α *(*Δ*ABC*) проекции горизонтали: горизонтальную — h_1 и фронтальную — h_2. Заменяют плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

В этом случае:

1) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 плоскости α *(*Δ*ABC)* в любом месте проводят новую ось проекций 0_1x_1;

2) от горизонтальной проекции плоскости α (Δ*ABC*) проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от старой оси проекций до фронтальных проекций

точек A_2, B_2 и C_2 (координаты z). Сохраняя координаты z, горизонталь преобразуется на плоскости $П_4$ в точку, а плоскость α в прямую линию $A_4B_4C_4$, заняв проецирующее положение.

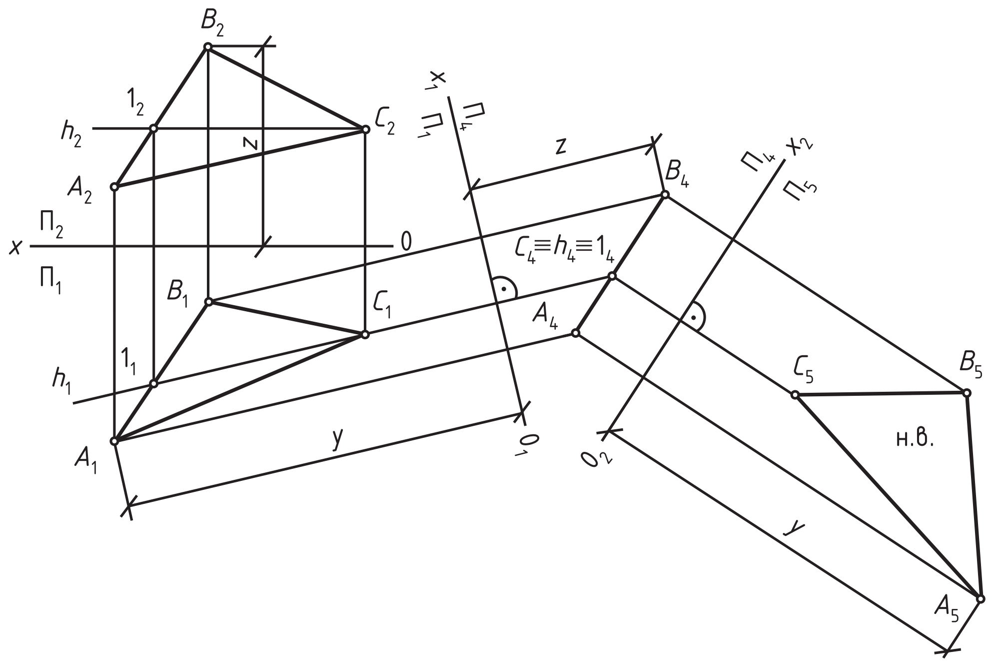


Рис. 41. Определение натуральной величины плоскости α (ΔABC)

II. Проекцию плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) преобразуют в плоскость уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций. Заменяют плоскость $П_1$ на $П_5 \perp П_4$. В этом случае:

1) параллельно проекции плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) и на любом расстоянии от нее проводят новую ось проекций 0_2x_2;

2) от проекции плоскости α ($\Delta A_4B_4C_4$) проводят проекционные связи, перпендикулярные новой оси проекций, и на них откладывают расстояния от оси проекций 0_1x_1 до горизонтальных проекций точек A_1, B_1 и C_1 (координаты y). Новая проекция $A_5B_5C_5$ будет являться натуральной величиной плоскости α (ΔABC).

З а д а ч а 4

Дано: плоскость α ($\square BCDE$) общего положения и точка A (рис. 42).

Выполнить: определить расстояние от точки A до плоскости α ($\square BCDE$).

Порядок выполнения:

Для того чтобы определить расстояние от точки A до плоскости α ($\square BCDE$), необходимо плоскость α из общего положения преобразовать в проецирующую плоскость. С этой целью в заданной плоскости α ($\square BCDE$) определяют проекции горизонтали: горизонтальную — h_1

и фронтальную — h_2. Перпендикулярно h_1 вводят новую плоскость, т. е. заменяют плоскость Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Плоскость α преобразуется в прямую линию — проекцию $B_4C_4D_4E_4$. Проекция A_4 точки A определяют, как показано на рис. 38, *а*. Перпендикуляр A_4K_4, проведенный в плоскости Π_4 из проекции точки A_4 на проекцию плоскости $B_4C_4D_4E_4$, является искомым расстоянием, так как $|A_1K_1| \,||\, \Pi_4 \Rightarrow |A_4K_4|$ — н. в.

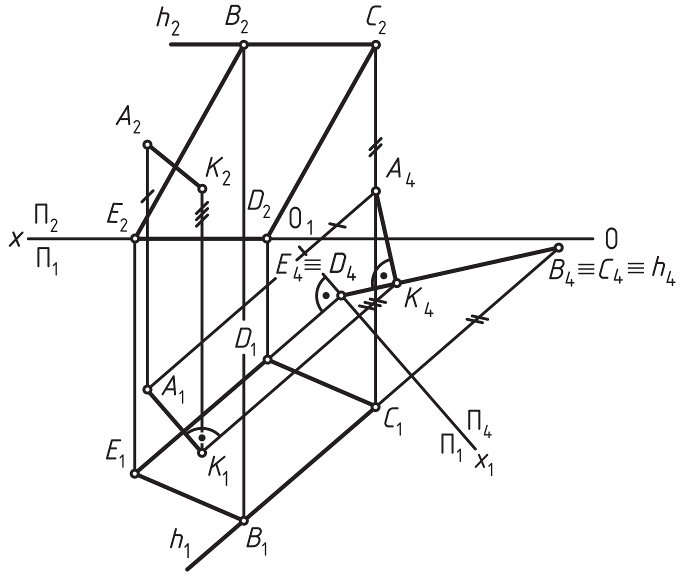


Рис. 42. Определение расстояния от точки A до плоскости α ($\square BCDE$)

З а д а ч а 5

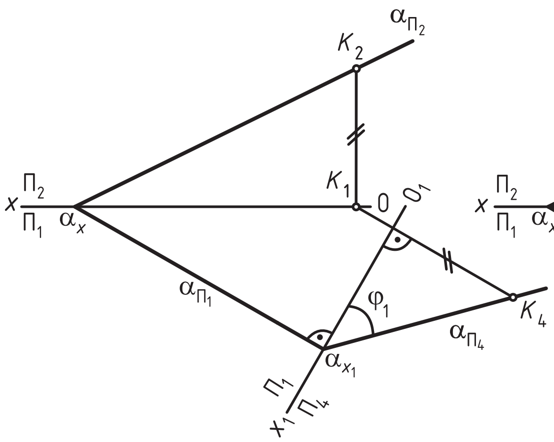
Дано: плоскость α общего положения, заданная следами.

Выполнить: определить углы наклона плоскости α к плоскостям проекций Π_1 и Π_2.

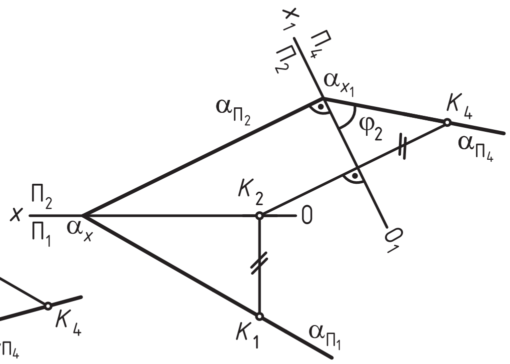
Порядок выполнения:

Для того чтобы определить углы наклона плоскости α к плоскостям проекций Π_1 и Π_2, необходимо плоскость α из общего положения преобразовать в проецирующую плоскость, перпендикулярную плоскости проекций. С этой целью на следе плоскости, например фронтальном α_{Π_2}, берут произвольную точку K и определяют ее проекции: фронтальную — K_2 и горизонтальную — K_1. Производят замену плоскости Π_2 на $\Pi_4 \perp \Pi_1$. Новую плоскость проекций Π_4 выстраивают перпендикулярно горизонтальному следу α_{Π_1} плоскости α. В проекционной связи определяют проекцию K_4 точки K, соединяют ее с точкой схода следов и выстраивают след плоскости α_{Π_4}. Угол φ_1, заключенный между следом плоскости α_{Π_4} и осью проекций 0_1x_1, есть угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (рис. 43, *а*).

Для определения угла наклона плоскости α к плоскости проекций Π_2 необходимо на горизонтальном следе плоскости α_{Π_1}, взять произвольную точку K и определить ее проекции: горизонтальную — K_1 и фронтальную — K_2. Затем произвести замену плоскости Π_1 на $\Pi_4 \perp \Pi_2$. Новую плоскость проекций Π_4 выстраивают перпендикулярно фронтальному следу α_{Π_2} плоскости α. В проекционной связи определяют проекцию K_4 точки K, соединяют ее с точкой схода следов и выстраивают след плоскости α_{Π_4}. Угол φ_2, заключенный между следом плоскости α_{Π_4} и осью проекций 0_1x_1, есть угол наклона плоскости α к фронтальной плоскости проекций Π_2 (рис. 43, *б*).



а



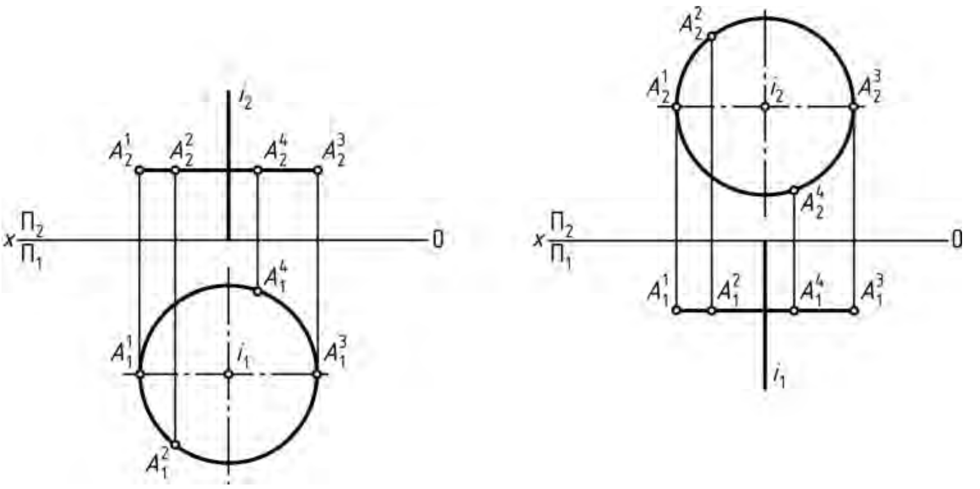
б

Рис. 43. Определение углов наклона плоскости α к плоскостям проекций Π_1 и Π_2

5.3. Способ вращения

Способ вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций. При этом способе положение плоскостей проекций остается неизменным, меняется положение геометрической фигуры относительно плоскостей проекций путем вращения ее вокруг оси, перпендикулярной к одной из плоскостей проекций. Например, при вращении точки A вокруг оси i, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций Π_1, горизонтальная проекция точки A_1 перемещается по окружности, а фронтальная ее проекция A_2 — по прямой, параллельной оси x (рис. 44, *а*).

При вращении точки A вокруг оси i, перпендикулярной к фронтальной плоскости проекций Π_2, фронтальная проекция точки A_2 перемещается по окружности, а горизонтальная ее проекция A_1 — по прямой, параллельной оси x (рис. 44, *б*).



а *б*

Рис. 44. Проекции точки в способе вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций

При вращении точки вокруг оси, перпендикулярной к какой-либо плоскости проекций, одна из проекций точки описывает окружность, другая ее проекция перемещается по прямой, параллельной оси x.

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые способом вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций.

З а д а ч а 6

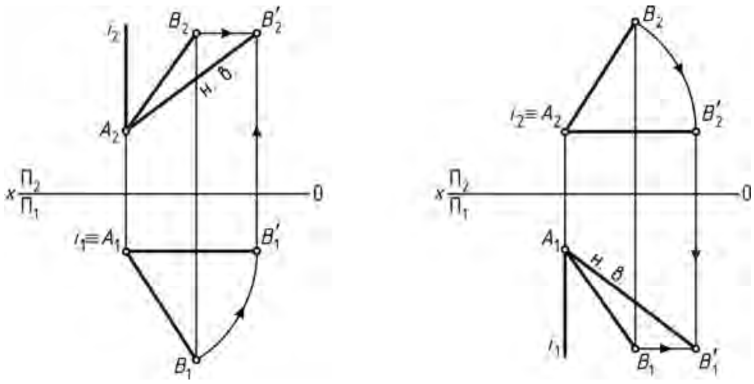
Дано: прямая *AB* общего положения (рис. 45, *а* и *б*).

Выполнить: определить натуральную длину прямой *AB*.

Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом — ось вращения $i \perp \Pi_1$ (рис. 45, *а*). Для определения натуральной длины прямой *AB* через одну из точек прямой, например, через точку *A*, проводят ось вращения *i*, перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций Π_1. Отрезок прямой *AB* проецируется в натуральную длину, когда он параллелен плоскости проекций. С этой целью поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций 0*x* (положение A_1B_1'). Горизонтальная проекция точки B_1, описав окружность, переместилась в положение B_1'. Тогда фронтальная проекция B_2 точки *B* переместится в положение B_2'. Соединяя фронтальную проекцию A_2 с B_2', получают натуральную длину отрезка прямой *AB*.

Во втором примере ось вращения $i \perp \Pi_2$ (рис. 45, *б*). Для определения натуральной длины прямой *AB* через одну из точек прямой, например, через точку *A*, проводят ось вращения *i*, перпендикулярную фронтальной плоскости проекций Π_2. Затем поворачивают фронтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций 0*x* (положение A_1B_1'). Фронтальная проекция точки B_2, описав окружность, переместилась в положение B_2'. Тогда горизонтальная проекция B_1 точки B переместится в положение B_1'. Соединяя горизонтальную проекцию A_1 с B_1', получают натуральную длину отрезка прямой AB.



а *б*

Рис. 45. Определение натуральной длины прямой

З а д а ч а 7

Дано: прямая AB общего положения (рис. 46).

Выполнить: преобразовать прямую AB в проецирующую.

Порядок выполнения:

Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в прямую проецирующую, необходимо выполнить следующее:

I. Прямую общего положения преобразуют в прямую частного положения, параллельную какой-либо плоскости проекций (прямую уровня). Для этого через одну из точек прямой, например через точку B, проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$. Затем поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_1'B_1$). Горизонтальная проекция A_1 точки A, описав окружность, переместилась в положение A_1'. Тогда фронтальная проекция A_2 точки A переместится в положение A_2'. Соединяя фронтальные проекции точек A_2' и B_2, получают натуральную длину отрезка прямой AB.

II. Прямую уровня ($A_2'B_2$) преобразуют в горизонтально проецирующую, т. е. ставят в положение, перпендикулярное плоскости проекций Π_1. С этой целью через точку A проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$. Затем поворачивают фронтальную проекцию отрезка до положения, перпендикулярного оси проекций $0x$ (положение $A_2'B_2'$). Фронтальная проекция B_2 точки B, описав окружность, переместилась в положение B_2'. Тогда горизонтальная проекция B_1 точки B переместится в положение $A_1' \equiv B_1'$, т. е. прямая AB стала проецирующей.

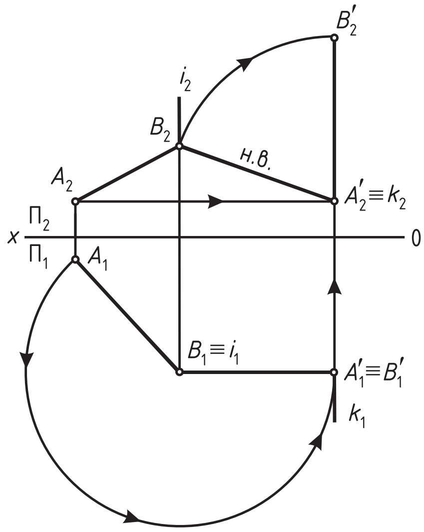


Рис. 46. Преобразование прямой *AB* из общего положения в проецирующее

З а д а ч а 8

Дано: плоскость ΔABC общего положения (рис. 47).

Выполнить: определить натуральную величину плоскости ΔABC.

Порядок выполнения:

Для решения задачи требуется выполнить два преобразования.

I. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую. В заданной плоскости ΔABC прямая AC является ее горизонталью. В этом случае: 1) через одну из точек прямой AC, например, A, проводят ось вращения $i \perp П_1$; 2) поворачивают горизонтальную проекцию отрезка до положения, перпендикулярного оси проекций $0x$ (положение $A_1 C_1'$). Фронтальная проекция точки C_2 переместится в положение $A_2 \equiv C_2'$; 3) изменение положения прямой AC повлекло за собой и изменение положения прямой AB плоскости ΔABC. Горизонтальная проекция B_1 переместилась в положение B_1'. При этом прямая BC своей величины не изменяет. Тогда фронтальная проекция точки B_2 переместится в положение B_2'. Соединяя горизонтальные проекции точек A_1, C_1' и B_1', получают горизонтальную проекцию плоскости ΔACB. Соединяя фронтальную проекцию $A_2 \equiv C_2'$ с B_2', получают прямую — фронтальную проекцию плоскости α. Таким образом, плоскость ΔABC преобразуется, заняв фронтально-проецирующее положение.

II. Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость горизонтальную уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций $П_1$. В этом случае через точку A проводят ось вращения $k \perp П_2$. Затем поворачивают фронтальную проекцию плоскости ΔABC до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_2 \equiv C_2''$, B_2''). Горизонтальная проекция точки B_1' переместится в положение B_1''. Соединяя горизонтальные проекции A_1 с B_1'' и C_1'', получают натуральную величину плоскости ΔABC.

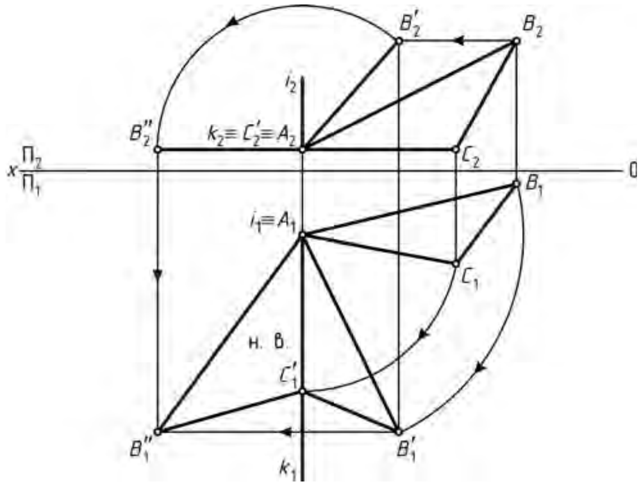


Рис. 47. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 1)

В предложенной задаче одна из сторон плоскости ΔABC — прямая AC — является ее горизонталью. При отсутствии такого условия вначале необходимо любую из сторон плоскости ΔABC, в нашем примере AC, преобразовать в прямую уровня (горизонталь или фронталь) и затем повторить описанные выше действия (рис. 48).

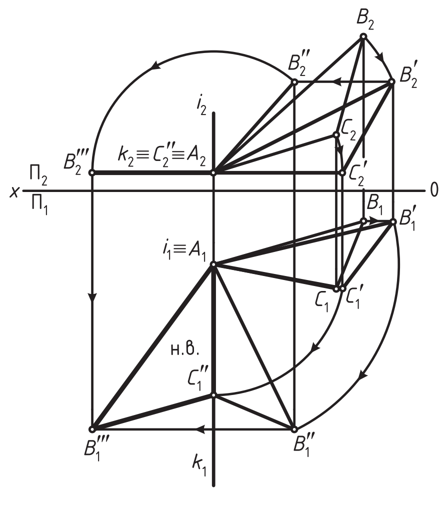


Рис. 48. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 2)

Задачу 8 можно решить и несколько иначе (рис. 49). Для определения натуральной величины плоскости вначале ее преобразуют из общего положения в частное — проецирующее, например, во фронтально проецирующую плоскость. Известно, что отличительным признаком такой плоскости является перпендикулярность ее горизонтальной проекции горизонтали h_1 к оси проекций $0x$. В связи с этим в плоскости ΔABC проводят горизонталь BD, которая вращением вокруг оси $i \perp \Pi_1$ преобразует плоскость во фронтально проецирующее положение ($A_2'B_2'C_2'$). Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость горизонтальную уровня, т. е. ставят в положение, параллельное плоскости проекций Π_1. С этой целью через точку C проводят ось вращения $k \perp \Pi_2$. Затем поворачивают проекцию $A_2'B_2'C_2'$ плоскости до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение $A_2''B_2'C_2'$). В плоскости проекций Π_1, соединяя проекции точек A_1'', B_1' и C_1', получают натуральную величину плоскости ΔABC.

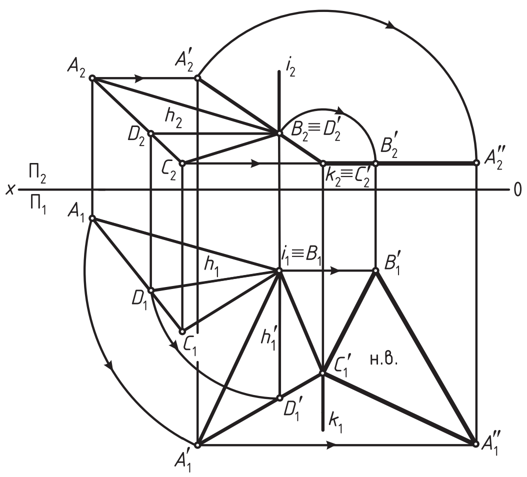


Рис. 49. Определение натуральной величины плоскости ΔABC (вариант 3)

З а д а ч а 9

Дано: прямая пирамида $ABCS$ (рис. 50).

Выполнить: определить натуральную длину ребер пирамида $ABCS$.

Порядок выполнения:

Через вершину S пирамиды $ABCS$ проводят ось вращения $i \perp \Pi_1$. Отрезок прямой AS проецируется на плоскость Π_2 в натуральную длину, так как $|AS| \parallel \Pi_2$. Отрезки прямых BS и CS — общего положения. Для определения натуральных величин отрезков прямых BS и CS необходимо их горизонтальные проекции повернуть до положения, параллельного оси проекций $0x$ (положение S_1B_1' и S_1C_1'). Горизонтальная проекция точки B_1, описав окружность, переместилась в положение B_1'. Тогда фронтальная проекция B_2 переместится в положение B_2'. Соединяя фронтальную проекцию S_2 с B_2', получают натуральную длину ребра BS. Аналогично определяют и натуральную длину ребра CS.

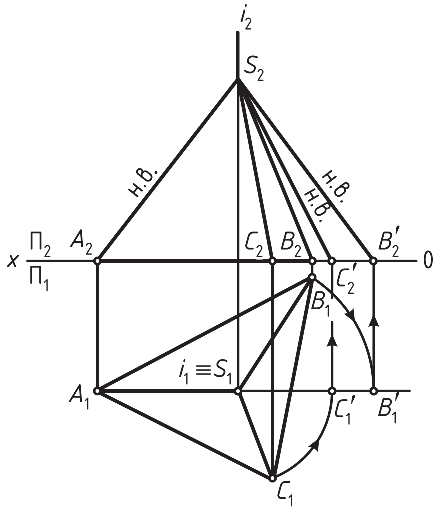
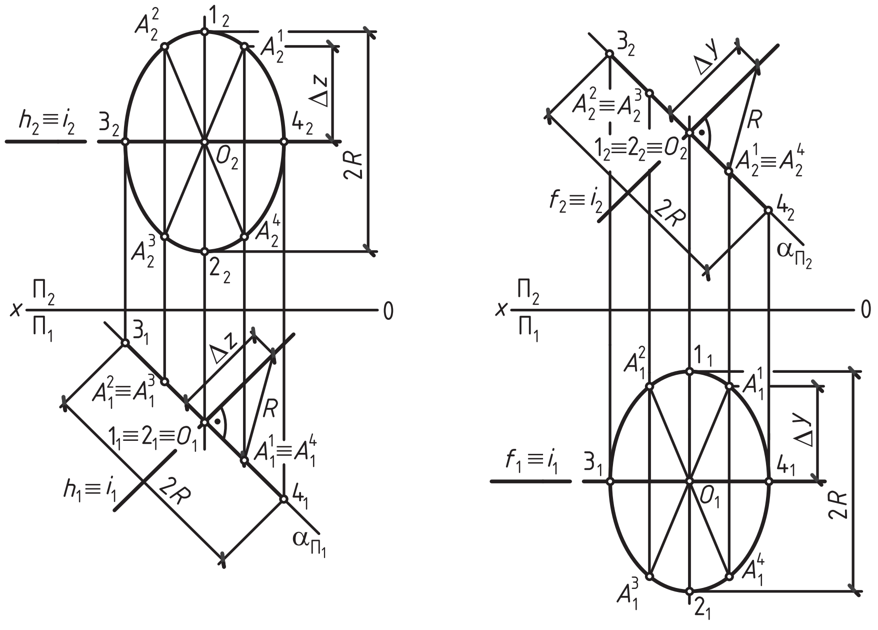


Рис. 50. Определение натуральной длины ребер пирамиды

Способ вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций (вращение вокруг линии уровня). Данный способ является более эффективным и значительно упрощает решение задач, связанных с определением метрических характеристик плоских фигур. С помощью такого вращения можно плоскость, которой принадлежит рассматриваемый геометрический объект (точка, прямая, плоская фигура и т. д.), повернуть в положение, параллельное плоскости проекций. В этом случае ортогональная проекция принадлежащего плоскости объекта будет конгруэнтна оригиналу, что позволит определить метрические характеристики проецируемой фигуры без дополнительных построений непосредственно по ее проекции. Так, вращая плоскость вокруг горизонтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости проекций Π_1, и получить неискаженный вид горизонтальной проекции. Вращая плоскость вокруг фронтали, можно перевести ее в положение, параллельное плоскости проекций Π_2, и получить неискаженный вид фронтальной проекции.

Любая точка плоскости при ее вращении вокруг горизонтали или фронтали перемещается по окружности, принадлежащей данной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Центр окружности будет находиться на оси вращения, а величина радиуса вращения равна расстоянию от точки до оси вращения. Если за ось вращения взята горизонталь, то окружность (как траектория движения точки) будет проецироваться на плоскость Π_1 в отрезок прямой, перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали h_1. На плоскость Π_2 окружность проецируется в эллипс, построение которого выполнять не требуется. Точка пересечения горизонтальных проекций горизонтали и окружности определяет горизонтальную проекцию центра вращения O_1 (рис. 51, *а*). По аналогии, если за ось вращения взята фронталь, то окружность, представляющая траекторию перемещения точки, будет проецироваться на плоскость $П_2$ в отрезок прямой, перпендикулярной фронтальной проекции фронтали f_2. Фронтальная проекция центра вращения O_2 определяется пересечением фронтальных проекций горизонтали и окружности (рис. 51, *б*).

При вращении точки вокруг оси, параллельной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к горизонтальной проекции оси вращения. При вращении точки вокруг оси, параллельной фронтальной плоскости проекций $П_2$, фронтальная проекция вращающейся точки перемещается по прямой, перпендикулярной к фронтальной проекции оси вращения.



а *б*

Рис. 51. Проекции точки в способе вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций

Рассмотрим некоторые задачи, решаемые данным способом.

З а д а ч а 10

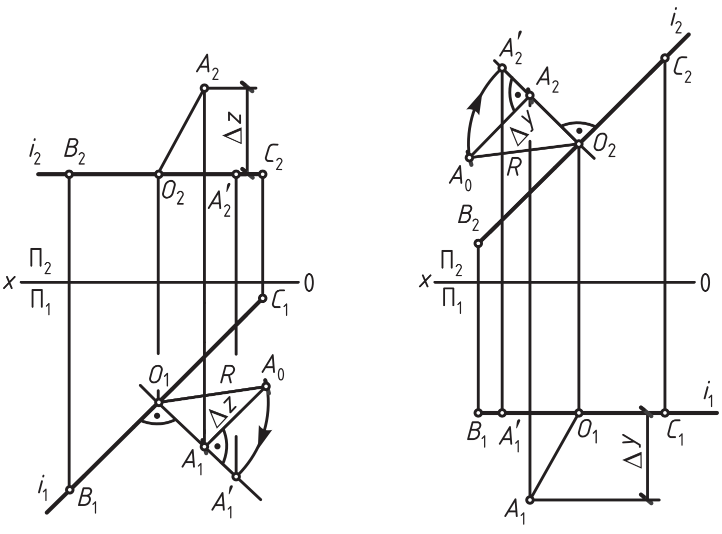
Дано: точка A и прямая частного положения BC.

Выполнить: определить расстояние от точки A до прямой BC.

Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом в качестве прямой частного положения взята горизонтальная прямая уровня: $|BC| \parallel П_1$ (рис. 52, *а*). Точка A при вращении вокруг прямой BC будет перемещаться по окружности, плоскость которой перпендикулярна оси вращения $i \equiv |BC|$.

Чтобы поместить точку в новое положение путем поворота ее вокруг оси вращения, необходимо найти положение центра вращения и определить натуральную величину радиуса вращения. Для определения горизонтальной проекции центра вращения O_1 через горизонтальную проекцию точки A_1 проводим перпендикуляр к горизонтальной проекции оси вращения $i_1 \equiv |B_1C_1|$. Фронтальную проекцию центра вращения O_2 находим в проекционной связи. Натуральную величину радиуса вращения R определяем методом прямоугольного треугольника, один катет которого есть горизонтальная проекция радиуса вращения A_1O_1, а другой катет равен Δz — разности аппликат концов отрезка AO. Следовательно, $|A_0O_1|$ — н. в. R. Новое положение A'_1 точки A таким образом определяет искомое расстояние от точки A до прямой BC: $|A'_1O_1|$ — н. в. расстояния.



а *б*

Рис. 52. Определение расстояния от точки до прямой

Во втором примере в качестве прямой частного положения взята фронтальная прямая уровня: $|BC| \parallel \Pi_2$ (рис. 52, *б*). Для определения фронтальной проекции центра вращения O_2 через фронтальную проекцию точки A_2 проводим перпендикуляр к фронтальной проекции оси вращения $i_2 \equiv |B_2C_2|$. Горизонтальную проекцию центра вращения O_1 находим в проекционной связи. Натуральную величину радиуса вращения R также определяем методом прямоугольного треугольника, один катет которого есть фронтальная проекция радиуса вращения A_2O_2, а другой катет равен Δy — разности ординат концов отрезка AO. Следовательно, $|A_0O_2|$ — н. в. R. Новое положение A_2' точки A таким образом определяет искомое расстояние от точки A до прямой BC: $|A_2'O_2|$ — н. в. расстояния.

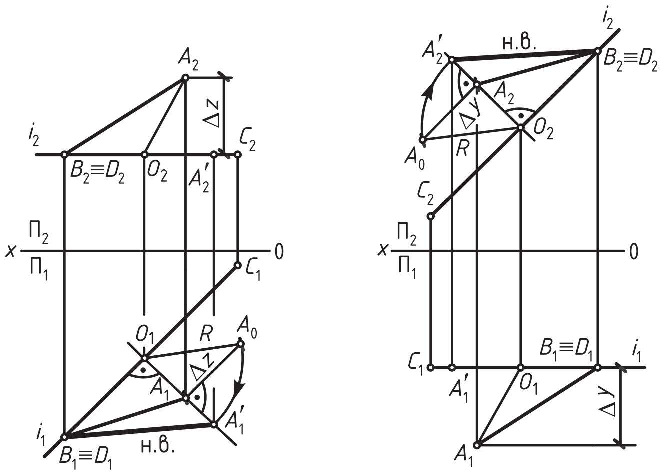
З а д а ч а 11

Дано: прямая AB общего положения и прямая уровня CD.

Выполнить: определить натуральную длину прямой AB вращением вокруг прямой CD.

Порядок выполнения:

Рассмотрим два примера. В первом прямая CD является горизонтальной прямой уровня: $|CD| \parallel \Pi_1$ (рис. 53, *а*). Все построения по определению нового положения точки A путем поворота ее вокруг оси вращения аналогичны предыдущей задаче (см. рис. 52, *а*). Соединяя горизонтальные проекции точек A_1' и B_1, получают натуральную длину прямой AB. Фронтальная проекция прямой $A_2'B_2$ преобразуется в прямую параллельную плоскости проекций Π_1 и совпадет с фронтальной проекцией прямой C_2D_2. Во втором примере прямая CD — фронтальная прямая уровня: $|CD| \parallel \Pi_2$ (рис. 53, *б*). Все построения по определению нового положения точки A путем поворота ее вокруг оси вращения также аналогичны предыдущей задаче (см. рис. 53, *б*). Соединяя фронтальные проекции точек A_2' и B_2, получают натуральную длину прямой AB. Горизонтальная проекция прямой $A_1'B_1$ преобразуется в прямую параллельную плоскости проекций Π_2 и совпадет с горизонтальной проекцией прямой C_1D_1.



а *б*

Рис. 53. Определение натуральной длины прямой

З а д а ч а 12

Дано: плоскость ΔABC общего положения.

Выполнить: определить натуральную величину плоскости ΔABC вращением вокруг горизонтали и фронтали плоскости.

Порядок выполнения:

Для того чтобы определить натуральную величину плоскости общего положения, необходимо преобразовать ее в плоскость уровня, параллельную какой-либо плоскости проекций. Отметим главное в построении: как только плоскость ΔABC станет параллельной, например плоскости проекций Π_1, то горизонтальные проекции каждой из перемещающихся вершин плоскости окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки. Если плоскость ΔABC становится параллельной плоскости проекций Π_2, то фронтальные проекции каждой из перемещающихся вершин плоскости окажутся удаленными от оси вращения на расстояние, равное радиусу вращения данной точки.

Рассмотрим два примера. В первом примере натуральную величину плоскости ΔABC определим вращением вокруг горизонтали плоскости (рис. 54).

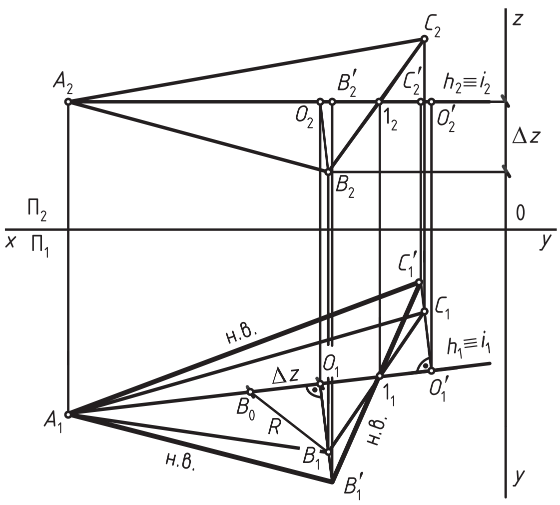


Рис. 54. Определение натуральной величины плоскости ΔABC вращением вокруг горизонтали

В этом случае:

1) выстраиваем в плоскости ΔABC горизонталь $h \equiv i$. Из горизонтальных проекций точек C_1 и B_1 проводим перпендикуляры к горизонтальной проекции оси вращения $h_1 \equiv i_1$, по которым будут перемещаться горизонтальные проекции точек, и определяем центры вращения O_1 и O'_1;

2) строим проекции радиуса вращения одной из точек, например B. Это будут отрезки B_1O_1 и B_2O_2;

3) методом прямоугольного треугольника определяем натуральную величину радиуса вращения R точки B. Отрезок $|B_1B_0| = R$ откладываем от точки O_1 вдоль прямой, по которой перемещается горизонтальная проекция B_1 точки B;

4) через полученную проекцию точки B_1' и неподвижную, зафиксированную горизонталью, проекцию точки 1_1, проводим прямую до пересечения с прямой, по которой перемещается горизонтальная проекция C_1 точки C;

5) соединяя найденные проекции точек B_1' и C_1' между собой и с неподвижной вершиной A_1, получаем новую горизонтальную проекцию плоскости ΔABC, которая и определяет ее натуральную величину. Следует знать, что фронтальная проекция плоскости ΔABC при таком вращении будет преобразована в прямую, которая на плоскости Π_2 совпадет с прямой $A_2 B_2' C_2'$.

Во втором примере натуральную величину плоскости ΔABC определим вращением вокруг фронтали плоскости (рис. 55). Все построения аналогичны, как и при вращении плоскости вокруг горизонтали (см. рис. 54). Натуральную величину радиуса вращения R точки C определяем способом вращения вокруг оси $n \perp \Pi_1$. Вращением вокруг оси $k \perp \Pi_2$ определяем проекцию C_2'' точки C. Через полученную проекцию точки C_2'' и неподвижную проекцию точки 1_2, проводим прямую до пересечения с прямой, по которой перемещается фронтальная проекция B_2 точки B. Соединяя найденные проекции точек B_2' и C_2'' между собой и с неподвижной вершиной A_2, получаем новую фронтальную проекцию плоскости ΔABC, которая и определяет ее натуральную величину. Горизонтальная проекция плоскости ΔABC при таком вращении будет преобразована в прямую, которая на плоскости Π_1 совпадет с прямой $A_1 B_1' C_1''$.

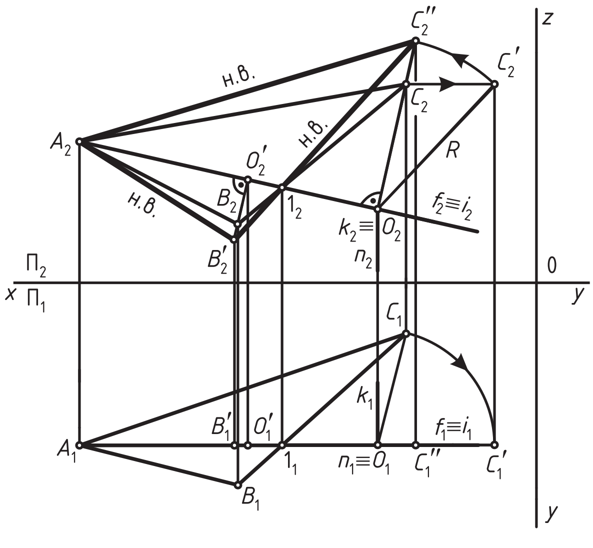


Рис. 55. Определение натуральной величины плоскости ΔABC вращением вокруг фронтали

Тема 6. Поверхности

6.1. Поверхности в технике и строительстве. Образование поверхности и ее задание на чертеже. 6.2. Классификация поверхностей. 6.3. Многогранники. Образование поверхностей некоторых многогранников. Точки на поверхности гранных геометрических тел. Общие принципы построения разверток гранных поверхностей. 6.4. Поверхности вращения. Образование некоторых поверхностей вращения. Точки на поверхности геометрических тел вращения. Общие принципы построения разверток поверхностей вращения

6.1. Поверхности в технике и строительстве. Образование поверхности и ее задание на чертеже

Мир поверхностей многогранен и безграничен. Он простирается от элементарных, простых до сложнейших, причудливых форм поверхностей и их сочетаний. По разнообразию форм и свойств, по той роли, которую они играют в науке, технике, строительстве, архитектуре, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических образов.

С точки зрения начертательной геометрии многое из того, что нас окружает — это линии и поверхности простых и сложных форм, и все, что создается человеком (конструкции, объекты, сооружения и т. д.), ограничивается этими поверхностями.

Поверхность в начертательной геометрии определяется как *непрерывное множество последовательных положений некоторой линии, перемещающейся в пространстве по определенному закону и называемой образующей поверхности.*

Обязательным условием перемещения образующей в пространстве при образовании поверхности является пересечение ее с неподвижными линиями пространства, называемыми *направляющими поверхности*. Кроме этого должен быть указан характер движения образующей по направляющим. На рис. 56 показан процесс образования некоторой поверхности. В качестве образующей взята плоская кривая линия m, которая скользит по двум направляющим n_1 и n_2, оставаясь, все время параллельной плоскости β. Точка A, принадлежащая образующей m, перемещается по кривой n_1. Такой способ образования поверхности называется кинематическим, и он позволяет задать любую поверхность Ф определителем. *Определителем поверхности* называется необходимая и достаточная совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно задают (определяют) поверхность Ф.

Определитель поверхности Ф может быть записан в виде структурной формы: Ф (Г), [А], где (Г) — геометрическая часть определителя, т. е. перечисление геометрических фигур, которые образуют поверхность; [А] — алгоритмическая часть определителя, устанавливающая связь между этими фигурами. Для того чтобы определитель относился к конкретному виду поверхности, каждая часть определителя должна иметь конкретное содержание.

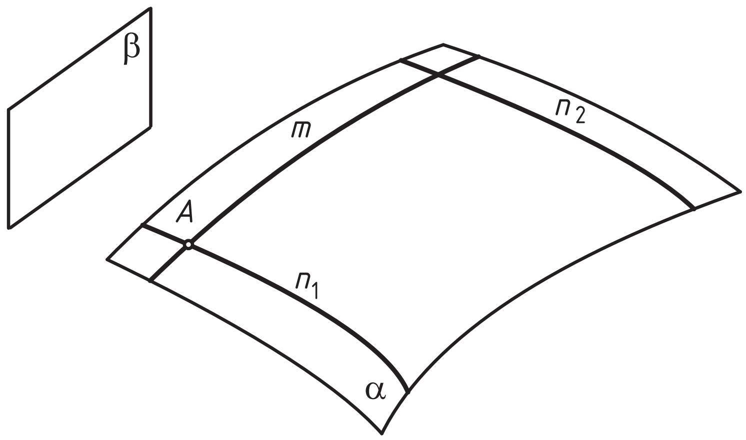


Рис. 56. Кинематический способ образования поверхности

На рис. 57 показано образование некоторых поверхностей в начертательной геометрии кинематическим способом:

призматической поверхности — прямая образующая m перемещается по ломанной направляющей n, сохраняя параллельность заданному направлению S (рис. 57, *а*);

цилиндрической поверхности — прямая образующая m перемещается по кривой направляющей n, сохраняя параллельность заданному направлению S (рис. 57, *б*);

пирамидальной поверхности — прямая образующая m перемещается по ломанной направляющей n, проходя через постоянную точку (вершину) S (рис. 57, *в*);

конической поверхности — прямая образующая m перемещается по кривой направляющей n, проходя через постоянную точку (вершину) S (рис. 57, *г*).

На чертеже поверхность может быть задана:

определителем поверхности (например, проекциями образующих и направляющих);

каркасом — упорядоченное множество точек или линий, принадлежащих поверхности. Каркас может быть точечным и линейным. *Точечным каркасом* называют совокупность точек на поверхности, достаточно точно определяющих эту поверхность. *Линейным каркасом* называют совокупность линий, имеющих единый закон образования и связанных между собой определенной зависимостью. Для получения линейного каркаса поверхность пересекается параллельными плоскостями, линии пересечения которых с поверхностью и образуют ее каркас;

очерком — след на плоскости проекции проецирующей цилиндрической поверхности, огибающей данную поверхность. Задание поверхности очерком обеспечивает наглядность изображения поверхности и облегчает чтение чертежа.

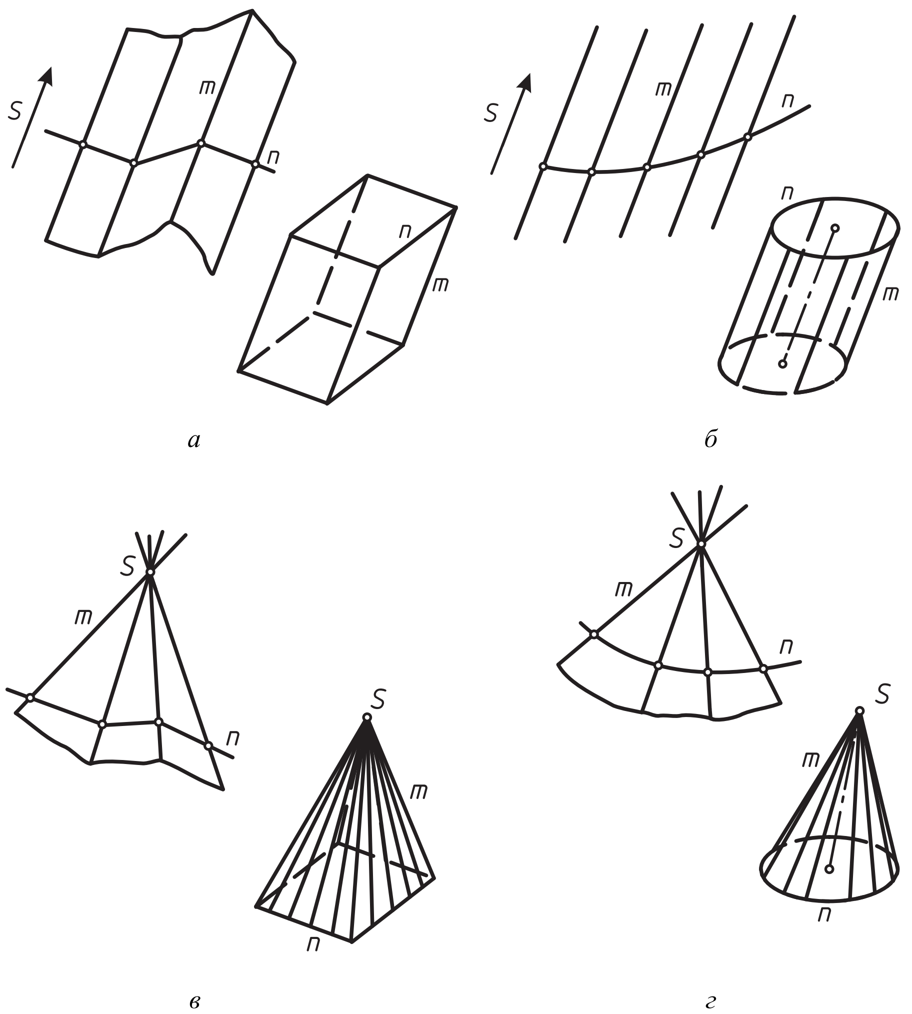


Рис. 57. Образование некоторых поверхностей

Поверхность считается заданной, если относительно любой точки пространства можно решить задачи о принадлежности ее данной поверхности.

6.2. Классификация поверхностей

Классификация поверхностей на протяжении длительного периода времени является предметом научных исследований. Это связано с тем, что за ее основу можно взять разные критерии, например характер образующей, признак развертывания и др. В основу классификации поверхностей может быть также положен и их определитель.

Принимая во внимание геометрическую часть определителя — вид линии, определяющей поверхность, все поверхности можно разделить на два класса: линейчатые и нелинейчатые.

Линейчатые — это поверхности, образующая которых прямая линия. *Нелинейчатыми* или *криволинейными* называются поверхности, образующая которых является кривой линией.

I. Линейчатые поверхности подразделяются:

на развертываемые (торсовые) поверхности, которые можно совместить с плоскостью без складок и разрывов. К ним относят конические (образующие пересекаются в одной точке); цилиндрические (образующие параллельны между собой и оси́ вращения); поверхности с ребром возврата (образующие — множество касательных линий к заданной пространственной кривой, называемой ребром возврата);

неразвертываемые поверхности, которые невозможно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Они подразделяются на поверхности с плоскостью параллелизма (все образующие параллельны какой-либо плоскости) и поверхности без плоскости параллелизма.

Разверткой называется плоская фигура, полученная при совмещении поверхности (или ее отсека) с плоскостью путем изгибания.

Свойства разверток поверхностей: сохранение длин линий, углов между линиями и площади, ограниченной замкнутым контуром.

В зависимости от формы направляющих и их расположения в пространстве можно получить различные поверхности, относящиеся к классу линейчатых поверхностей:

1. Линейчатые поверхности с тремя направляющими:

поверхность общего вида (косой цилиндр с тремя направляющими);

поверхность дважды косого цилиндроида;

поверхность дважды косого коноида;

поверхность однополостного гиперболоида.

2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма (поверхности Каталана):

поверхность прямого цилиндроида;

поверхность прямого коноида;

косая плоскость.

Линейчатые поверхности с двумя направляющими и без плоскости параллелизма:

поверхность косого цилиндроида;

поверхность косого коноида;

дважды косая плоскость.

3. Линейчатые поверхности с одной направляющей — торсы:

поверхность с ребром возврата;

коническая поверхность;

цилиндрическая поверхность;

плоскость.

II. Нелинейчатые поверхности подразделяются:

1. На нелинейчатые поверхности с постоянной образующей:

поверхность общего вида;

трубчатая поверхность.

2. Нелинейчатые поверхности с переменной образующей:

поверхность общего вида;

каналовая поверхность;

циклическая поверхность.

Согласно алгоритмической части определителя, характеризующей закон движения образующей, линейчатые и нелинейчатые поверхности можно разделить на три подкласса:

поверхности параллельного переноса, образованные поступательным перемещением образующей;

поверхности вращения, образованные вращением образующей;

поверхности винтовые, образованные винтовым перемещением образующей.

Поверхности вращения в зависимости от вида образующей подразделяются на несколько групп:

сфера, *тор*, *глобоид* (образующая — окружность);

эллипсоид вращения (образующая — эллипс);

гиперболоид вращения (образующая — гипербола);

параболоид вращения (образующая — парабола);

поверхность вращения общего вида (образующая — произвольная кривая линия).

Все поверхности в зависимости от вида направляющей, которая может быть ломаной, прямой или кривой линией, подразделяются на гранные поверхности и кривые.

Гранными называют поверхности, в образовании которых участвуют правильные многоугольники. *Кривыми* называют поверхности, в образовании которых участвуют плоские кривые линии правильной формы. При этом если направляющей является окружность, то получают *поверхность вращения*.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется *геометрическим телом*.

6.3. Многогранники. Образование поверхностей некоторых многогранников. Точки на поверхности гранных геометрических тел. Общие принципы построения разверток гранных поверхностей

Многогранники относят к гранным поверхностям. Эти поверхности являются закономерными (т. е. образующая такой поверхности перемещается по определенному закону), линейчатыми и развертываемыми.

Многогранником называют геометрическое тело, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники являются его гранями, а линии пересечения граней — его ребрами. Концы ребер многогранника называются его вершинами. Образующая гранной поверхности есть прямая, направляющая — ломаная линия.

На ортогональном чертеже многогранник задается проекциями его вершин (точками), ребер (отрезками прямых) и граней (плоскими фигурами). На рис. 58 показан пример изображения многогранника на ортогональном чертеже. Вершины многогранника заданы точками *A*, *B*, *C* и *S*, ребра — отрезками прямых *AB*, *AC*, *BC*, *AS*, *BS* и *CS*, а грани — треугольниками *ABC*, *ABS*, *BCS* и *ACS*. Проекции ребер многогранника, образующих его внешний контур, на ортогональном чертеже всегда видимы. Видимость остальных ребер многогранника определяется методом конкурирующих точек (см. тему 2).

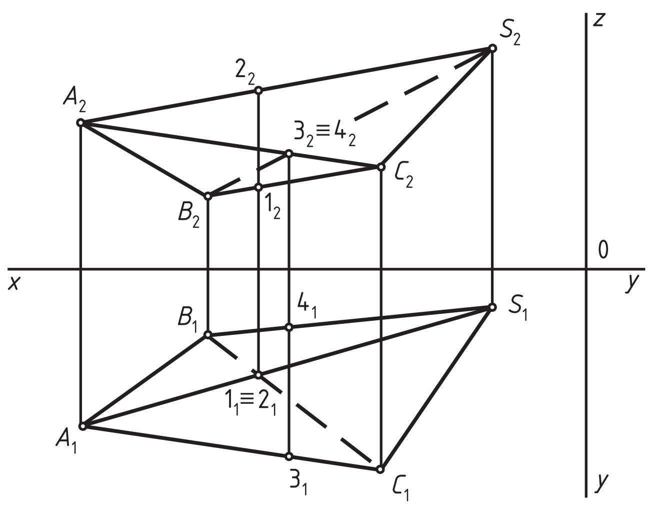


Рис. 58. Проекции многогранника *ABCS*

Многогранники и многогранные поверхности нашли широкое применение в технике, строительстве и архитектуре: пирамиды, башни, крепости, крыши домов, мостовые опоры, перекрытия и т. д. Из всего многообразия гранных поверхностей рассмотрим наиболее известные: призматическую и пирамидальную поверхности.

Призматической называется поверхность, образующая которой, перемещаясь в пространстве, остается параллельной самой себе.

Призмой называется многогранник, две грани которого конгруэнтны, а остальные пересекаются по параллельным прямым.

По числу боковых граней различают призмы трехгранные, четырехгранные и т. д. Призма, все боковые грани которой являются прямоугольниками, т. е. ребра перпендикулярны основанию призмы, называется *прямой*. Призма является *правильной*, если ее основаниями служат правильные многоугольники, и высота проходит через ее центр. У правильных многогранников все грани являются равными правильными многоугольниками и все двугранные углы их конгруэнтны.

Проецирование прямой призмы начинают с горизонтальной проекции (рис. 59). Основания призмы будут проецироваться на горизонтальную плоскость проекций $П_1$ в натуральную величину, так как они расположены параллельно плоскости $П_1$. На фронтальную и профильную плоскости проекций основания призмы проецируются в виде прямых, параллельных оси проекций. Грани призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций. На фронтальной и профильной плоскостях проекций они будут выполняться в виде прямоугольников различной величины. Сечением прямой призмы плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, является многогранник.

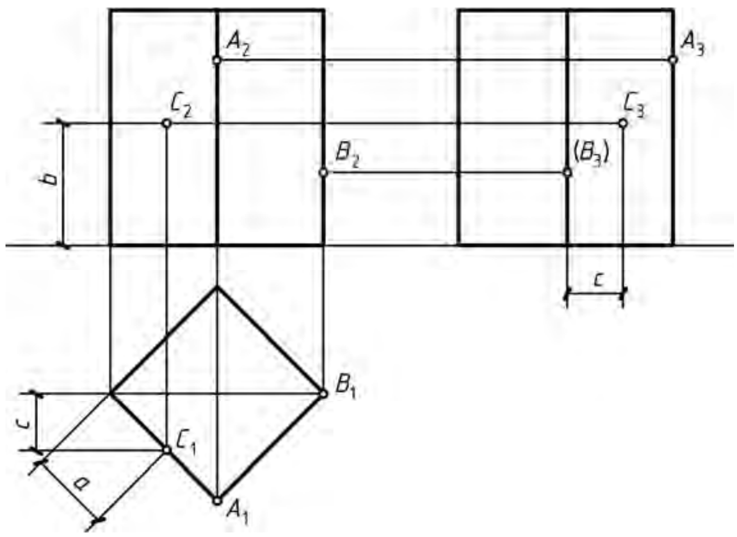


Рис. 59. Проекции точек на поверхности прямой призмы

Каждая грань призмы представляет собой плоскость и, следовательно, проекции точки, принадлежащей поверхности, определяют исходя из принадлежности точки плоскости. Точка, принадлежащая плоскости, лежит на линии, принадлежащей также данной плоскости. Проекции точки, заданной на поверхности призмы, определяют с помощью образующих и линий проекционной связи. При этом помнят, что призматическая поверхность является проецирующей и все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на плоскость $П_1$ на ее очерк. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 59).

При построении развертки любой геометрической фигуры необходимо вначале определить натуральные величины оснований и ребер или образующих геометрического тела, используя способы преобразования плоскостей проекций.

При построении развертки прямой призмы ее основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Грани прямой призмы являются горизонтально-проецирующими плоскостями, ребра призмы — горизонтально-проецирующими прямыми, которые на плоскость $П_1$ проецируются в точки, а на плоскости $П_2$ и $П_3$ — в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой призмы никаких дополнительных построений не требуется.

Развертка прямой призмы производится методом раскатки (рис. 60). Положение точек, принадлежащих поверхности призмы, определяется следующим образом: заложение a каждой точки берется с горизонтальной проекции призмы, превышение b точек — с фронтальной или профильной проекций призмы (см. рис. 59).

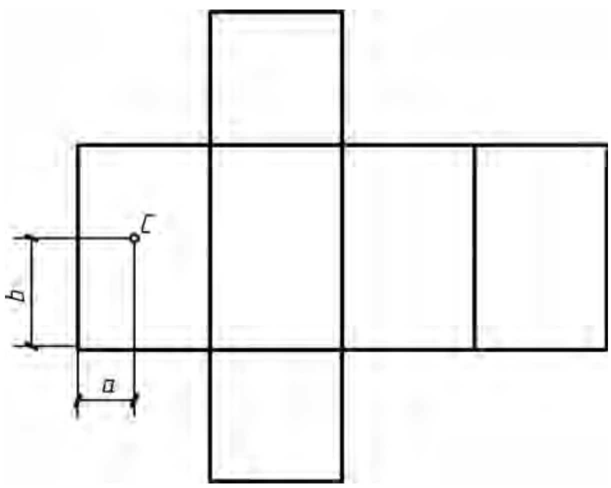


Рис. 60. Развертка прямой призмы

Пирамидальной называется поверхность, образующая которой при перемещении проходит через одну и ту же точку пространства.

Пирамидой называется многогранник, одна грань которого (основание) представляет собой многоугольник, остальные грани являются треугольниками с общей вершиной S.

По числу углов многоугольника основания различают пирамиды треугольные, четырехугольные и т. д. Если вершина пирамиды S проецируется ортогонально (перпендикулярно) в центр тяжести ее основания, то такая пирамида называется *прямой*. Прямая пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной* пирамидой.

Проецирование прямой пирамиды начинают с горизонтальной проекции (рис. 61). Основание пирамиды будет проецироваться на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину, так как оно расположено параллельно плоскости Π_1. На фронтальную и профильную плоскости проекций основание пирамиды проецируется в виде прямой, параллельной оси проекций. Грани пирамиды в зависимости от их количества могут занимать общее и частное положение по отношению к плоскостям проекций и проецируются на них в виде треугольников различной величины.

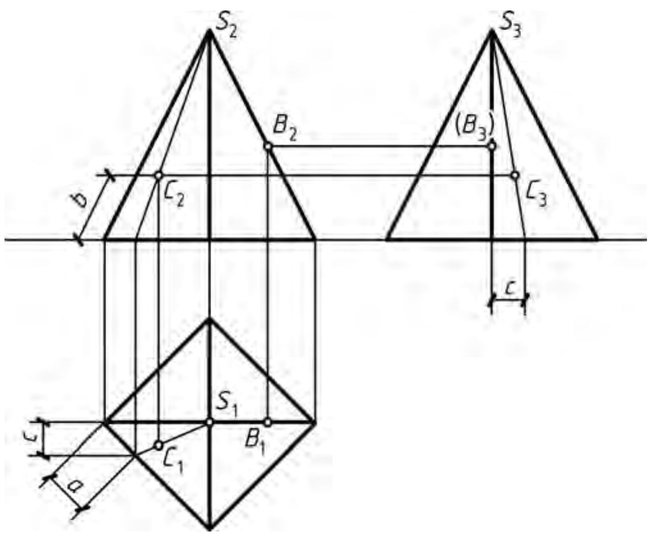


Рис. 61. Проекции точек на поверхности прямой пирамиды, получаемые с помощью образующей

Сечением прямой пирамиды плоскостью, параллельной горизонтальной плоскости проекций Π_1, является многогранник. Каждая грань пирамиды представляет собой плоскость, и, следовательно, проекции точки, принадлежащей поверхности, определяют исходя из принадлежности точки плоскости. Проекции точки, заданной на поверхности пирамиды, определяют с помощью прямой, лежащей в плоскости, или образующей, соединяющей основание пирамиды с его вершиной S. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 61). Вместо образующей для определения проекций точки можно использовать вспомогательную плоскость уровня (рис. 62).

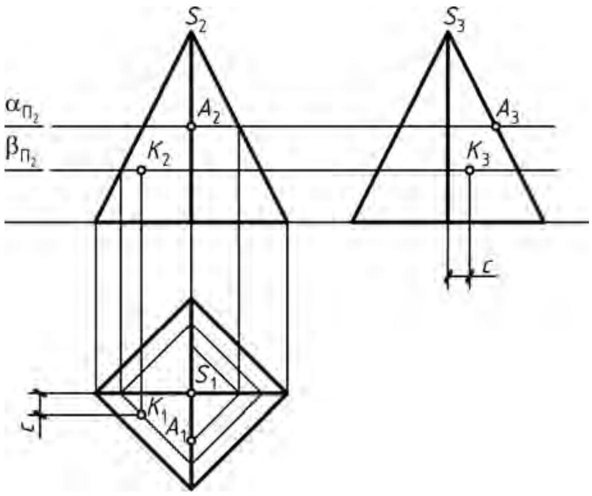


Рис. 62. Проекции точек на поверхности прямой пирамиды, получаемые с помощью вспомогательной плоскости уровня

При построении развертки прямой пирамиды вначале определяют натуральные величины ее основания и ребер. Так в данном примере основание пирамиды, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Грани прямой пирамиды являются плоскостями общего положения, ребра пирамиды, как правило, прямыми общего положения и, в частном случае (см. рис. 61 и 62), прямыми уровня, которые на плоскости $П_2$ или $П_3$ проецируются в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямой пирамиды требуются дополнительные построения в том случае, если ребра пирамиды являются прямыми общего положения. Тогда, применяя способы преобразования плоскостей проекций (чаще способ вращения), определяют натуральные величины ребер пирамиды (см. рис. 50).

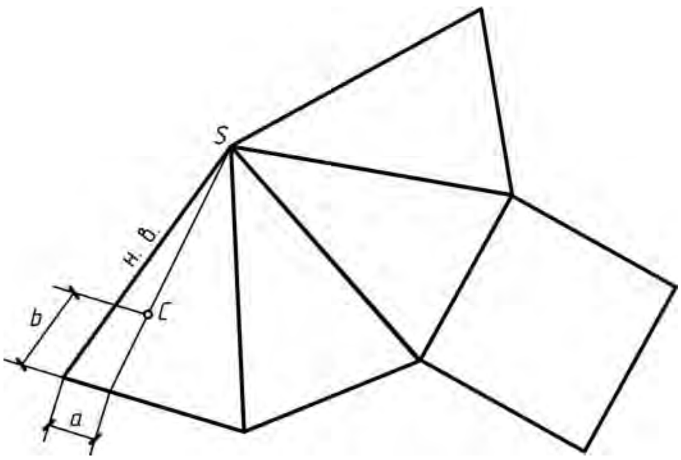


Рис. 63. Развертка прямой пирамиды

Развертку прямой пирамиды производят методом треугольников (триангуляции) (рис. 63). Положение точек, принадлежащих поверхности пирамиды, определяют следующим образом: заложение a каждой точки берут с горизонтальной проекции пирамиды, превышение b точек — с фронтальной или профильной проекций пирамиды (см. рис. 61).

6.4. Поверхности вращения. Образование некоторых поверхностей вращения. Точки на поверхности геометрических тел вращения. Общие принципы построения разверток поверхностей вращения

Поверхности вращения относят к кривым поверхностям, в образовании которых участвуют плоские кривые линии правильной формы. Поверхность вращения образуется путем вращения любой линии, например MN, вокруг другой неподвижной прямой линии $0N$ (рис. 64).

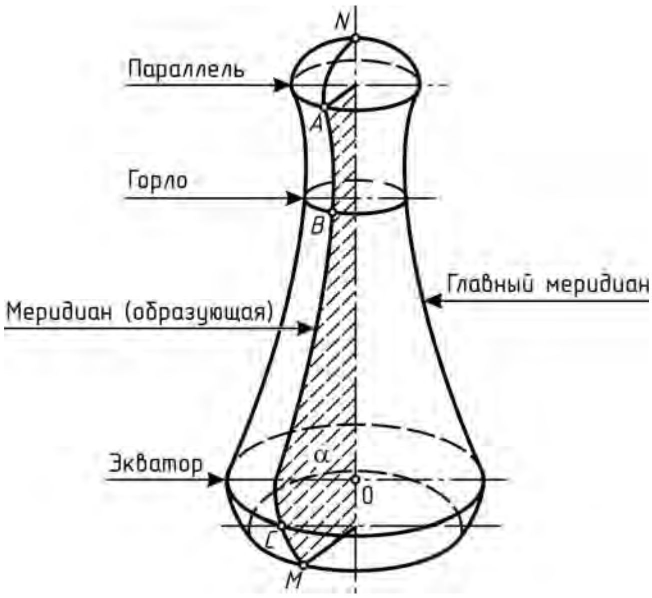


Рис. 64. Образование поверхности вращения

Неподвижная прямая $0N$ называется *осью вращения*, линия MN — *образующей* поверхности вращения. Плоскость, перпендикулярная к оси вращения, при пересечении с поверхностью вращения образует в сечении окружность, называемую *параллелью*. Самая большая окружность называется *экватором*, самая малая — *горлом*. Любая секущая плоскость, проходящая через ось вращения, называется *меридиональной плоскостью*, линия ее пересечения с поверхностью вращения — *меридианом*. Меридиан, лежащий в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций Π_2, называется *главным меридианом*. Он определяет очерк поверхности вращения на плоскости Π_2.

Каждая точка, принадлежащая поверхности вращения, обязательно принадлежит какой-либо одной параллели и какому-либо одному меридиану (образующей).

По виду образующей различают:

линейчатые поверхности вращения;

нелинейчатые поверхности вращения.

I. Линейчатые поверхности вращения относятся к развертываемым поверхностям. Образующей такой поверхности является прямая, направляющей — кривая линия. К этой группе поверхностей относят:

конические;

цилиндрические и др.

Цилиндрической называется поверхность, образующая которой при перемещении вокруг оси вращения остается ей параллельной.

Цилиндром называется геометрическое тело, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон, принятой за ось вращения (рис. 65). Цилиндр может быть *прямым* или *наклонным*.

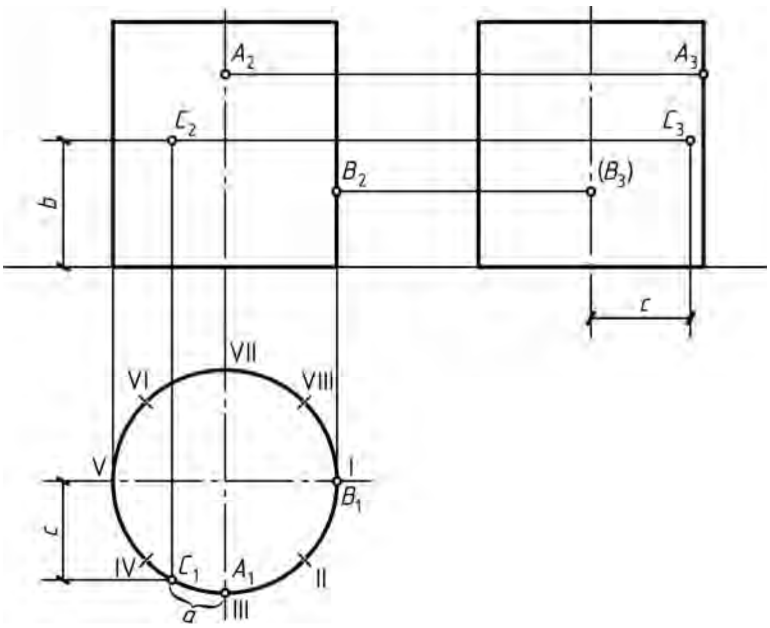


Рис. 65. Проекции точек на поверхности прямого цилиндра

Проецирование прямого кругового цилиндра с вертикальной осью вращения аналогично проецированию призмы. Основаниями цилиндра являются конгруэнтные круги. При оси вращения, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций $П_1$, горизонтальная проекция цилиндра будет в виде круга, фронтальная и профильная проекции — в виде прямоугольников. Сечением прямого кругового цилиндра плоскостью, перпендикулярной к его оси, является круг. При вычерчивании проекций прямого кругового цилиндра вначале выполняются оси симметрии (вращения) тела. Затем основание в виде окружности, потом фронтальная и профильная проекции геометрического тела. Проекции точки, заданной на поверхности цилиндра, определяют с помощью образующих и линий проекционной связи. При этом помнят, что цилиндрическая поверхность является проецирующей, и все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на плоскость Π_1 на ее очерк (см. рис. 65).

При построении развертки данного прямого цилиндра его основания, являясь горизонтальными плоскостями уровня, проецируются на горизонтальную плоскость проекций Π_1 в натуральную величину. Поверхность прямого цилиндра является горизонтально-проецирующей. Все точки, принадлежащие данной поверхности, будут проецироваться на горизонтальную плоскость проекций Π_1 на ее очерк. Образующая такой поверхности — горизонтально-проецирующая прямая, которая на фронтальную плоскость проекций Π_2 и профильную плоскость проекций Π_3 проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого цилиндра никаких дополнительных построений не требуется.

Развертка прямого цилиндра производится методом раскатки (рис. 66). Основание цилиндра (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать равных частей. Положение точек, принадлежащих поверхности цилиндра, определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки берется с горизонтальной проекции цилиндра, превышение *b* точек — с фронтальной или профильной проекций цилиндра (см. рис. 65).

Рис. 66. Развертка прямого цилиндра

Конической называется поверхность, образованная перемещением прямой образующей, проходящей через неподвижную точку (вершину) S по кривой направляющей.

Конусом называется геометрическое тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг катета, принятого за ось вращения. Конус может быть *прямым* или *наклонным*. Это зависит от того, перпендикулярны или наклонены к его основанию образующие.

Проецирование прямого кругового конуса с вертикальной осью вращения аналогично проецированию пирамиды (рис. 67). Основанием конуса является окружность, с выполнения которой следует начинать чертеж конуса. При оси вращения, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций Π_1, горизонтальная проекция конуса будет в виде круга, фронтальная и профильная проекции — в виде треугольников с вершиной S. Сечением прямого кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к его оси, является круг.

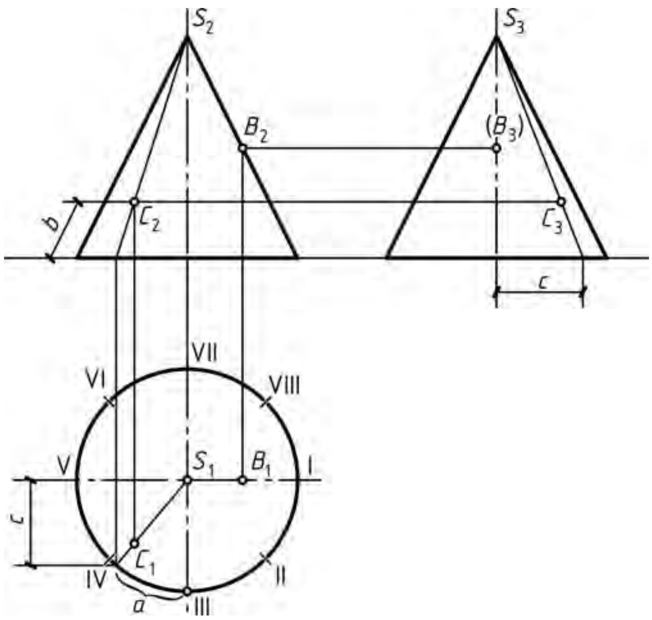


Рис. 67. Проекции точек на поверхности прямого конуса, получаемые с помощью образующей

Проекции точки, заданной на поверхности конуса, определяют с помощью образующей, соединяющей основание конуса с его вершиной S. Следует помнить, что точка, принадлежащая поверхности, лежит на линии, принадлежащей также данной поверхности. Найдя проекции образующей, переносят на нее с помощью линий проекционной связи проекции данной точки (см. рис. 67). Вместо образующей для определения проекций точки можно использовать вспомогательную параллель (рис. 68).

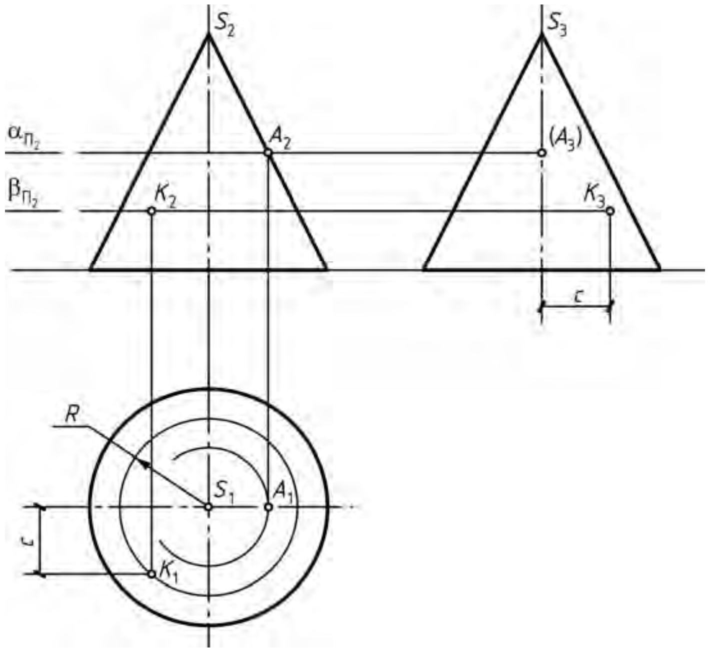


Рис. 68. Проекции точек на поверхности прямого конуса, получаемые с помощью вспомогательной параллели

При построении развертки прямого кругового конуса его основание, являясь горизонтальной плоскостью уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Образующая прямого конуса является прямой частного положения (фронтальной уровня или профильной уровня) и на плоскости $П_2$ или $П_3$ проецируется в натуральную величину. Следовательно, для построения развертки прямого конуса дополнительные построения не требуются.

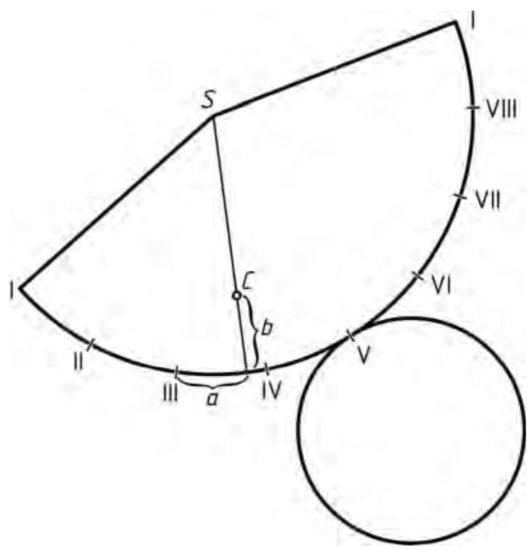


Рис. 69. Развертка прямого конуса

Развертка прямого конуса производится методом раскатки (рис. 69). Основание конуса (окружность) с помощью циркуля разбивается на шесть, восемь или двенадцать равных частей. Положение точек, принадлежащих поверхности конуса, определяется следующим образом: заложение *a* каждой точки берется с горизонтальной проекции конуса, превышение *b* точек — с фронтальной или профильной проекций конуса (рис. 67).

II. Нелинейчатые поверхности вращения относятся к неразвертываемым поверхностям. Образующей и направляющей такой поверхности являются кривые линии.

Поверхностью вращения общего вида называют поверхность, образованную вращением произвольной кривой (плоской или пространственной) вокруг оси вращения поверхности (рис. 70).

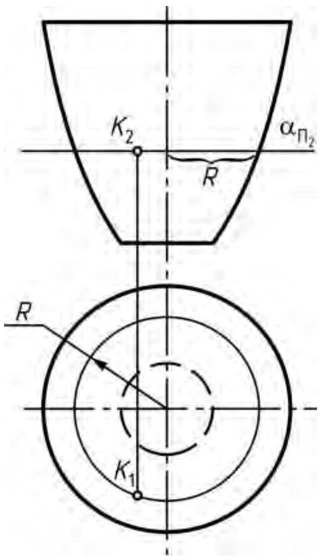


Рис. 70. Поверхность вращения общего вида

Проекции точки, заданной на поверхности общего вида, определяются с помощью параллели, проведенной через заданную точку. Радиус параллели измеряется от оси поверхности до ее очерка. Следует помнить, что точка, принадлежащая поверхности, лежит на линии, также принадлежащей данной поверхности. К этой группе поверхностей относят:

шаровые;

торовые и др.

Сферой (*шаром*) называется геометрическое тело, образованное вращением окружности вокруг ее диаметра, принятого за ось вращения (рис. 71). Центр вращающейся окружности является центром сферы. Сфера проецируется на все плоскости проекций в виде равных окружностей одинакового радиуса. Самая большая окружность — экватор. На горизонтальную плоскость проекций он проецируется в виде круга, на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде прямой линии, параллельной оси проекций $0x$. Соответственно, главный меридиан на плоскость Π_1 проецируется в прямую линию, параллельную оси проекций $0x$, а на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде круга (см. рис. 71). Сечением сферы плоскостью, перпендикулярной к ее оси, является круг.

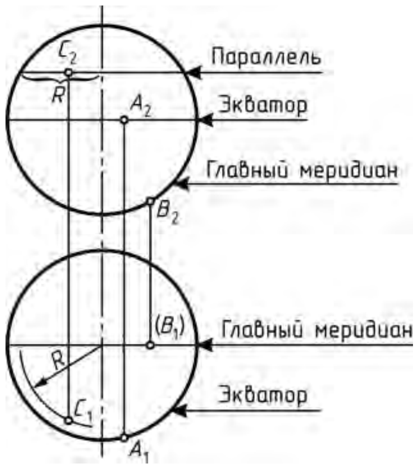
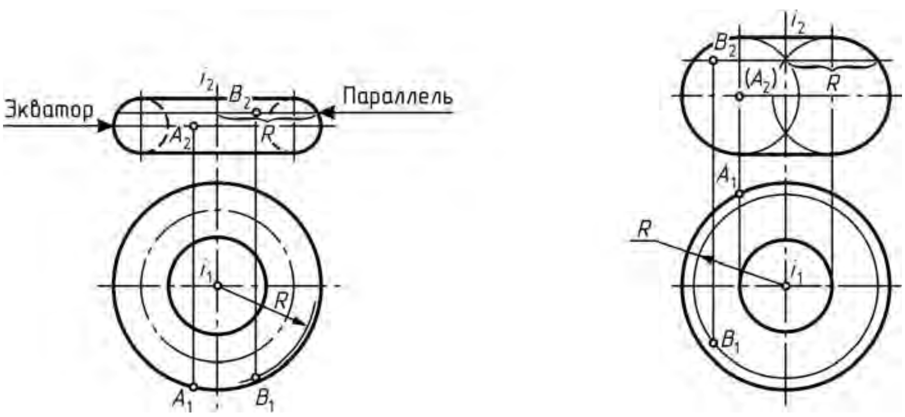


Рис. 71. Проекции точек на поверхности сферы

Тором называется геометрическое тело, образованное вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности, но не проходящей через ее центр. Тор является *открытым* (кольцо), если ось вращения поверхности не пересекает эту окружность, т. е. находится за ее пределами (рис. 72, *а*), и *закрытым*, если ось вращения поверхности пересекает или касается окружности (рис. 72, *б*).



а *б*

Рис. 72. Проекции точек на поверхности тора

Тор проецируется на горизонтальную плоскость проекций в виде окружностей разного радиуса. Самая большая окружность — экватор. На горизонтальную плоскость проекций он проецируется в виде круга, на фронтальную и профильную плоскости проекций — в виде прямой линии, параллельной оси проекций $0x$. Сечением тора плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, является круг.

Тема 7. Пересечение поверхности плоскостью

7.1. Общие понятия и определения. 7.2. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями частного положения. Определение натуральной величины сечения. 7.3. Сечения геометрических тел плоскостями общего положения. Определение натуральной величины сечения

7.1. Общие понятия и определения

Сечением называется плоская фигура, полученная в результате пересечения геометрического тела секущей плоскостью и содержащая точки, принадлежащие поверхности тела и плоскости.

Сечение ограничивается замкнутой ломаной линией, если плоскостью пересекается гранная поверхность, и замкнутой кривой линией, если плоскостью пересекается кривая поверхность.

Построение линии сечения в общем случае сводится к определению точек пересечения ребер многогранника или образующих кривой поверхности с секущей плоскостью. Следовательно, построение линии сечения сводится к множественной задаче определения точек пересечения прямой с плоскостью.

7.2. Сечения многогранников и тел вращения плоскостями частного положения. Определение натуральной величины сечения

Сечение поверхностей гранных геометрических тел плоскостями частного положения. Сечением многогранника плоскостью является плоский многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам, а стороны — граням многогранника. В зависимости от вида гранной поверхности и положения секущей плоскости сечение может принимать различные геометрические фигуры. Например, при пересечении поверхностей прямых правильных призмы и пирамиды плоскостями возможно образование геометрических фигур, показанных на рис. 73 и 74.

Построение линии пересечения многогранника плоскостью сводится к многократному решению задачи на определение точек пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. Определение натуральной величины сечения гранной поверхности плоскостью определяют любым известным способом, например, способом совмещения секущей плоскости с плоскостью проекций, способом вращения, способом замены плоскостей проекций и т. д.

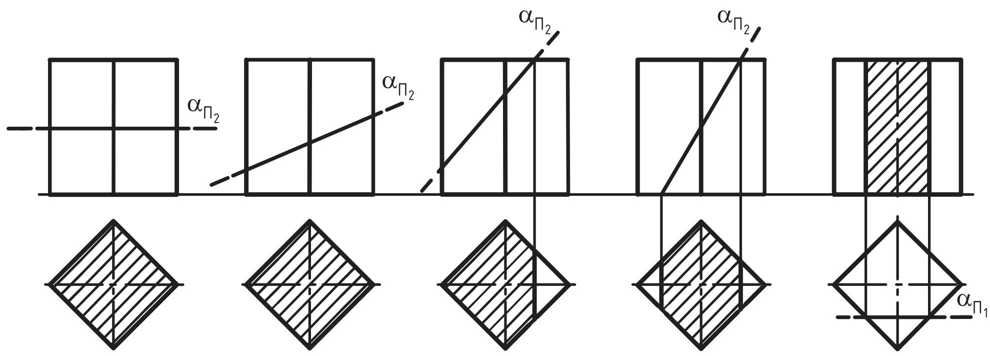


Рис. 73. Сечение прямой призмы плоскостями частного положения

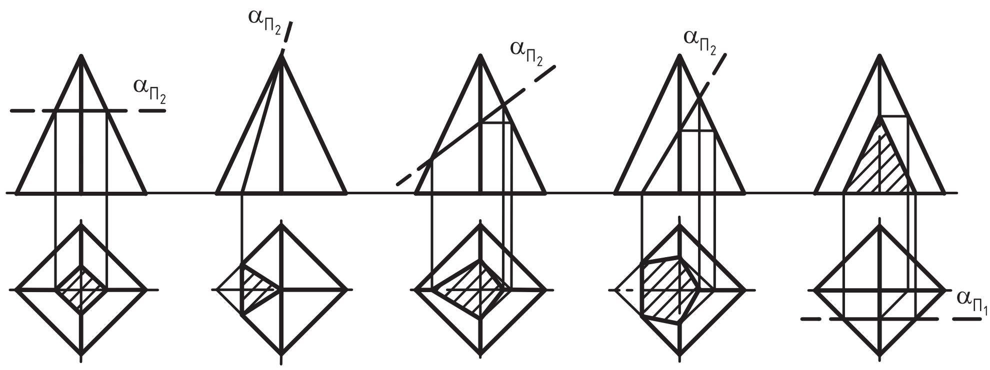


Рис. 74. Сечение прямой пирамиды плоскостями частного положения

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 13

Дано: прямая шестигранная пирамида *ABCDEFS* с вершиной в точке *S* и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 75).

Выполнить: 1) построить линию пересечения пирамиды плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след $\alpha_{П_2}$ фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, в том числе и линия пересечения пирамиды плоскостью, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение фронтального следа $\alpha_{П_2}$ с ребрами пирамиды образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения пирамиды плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

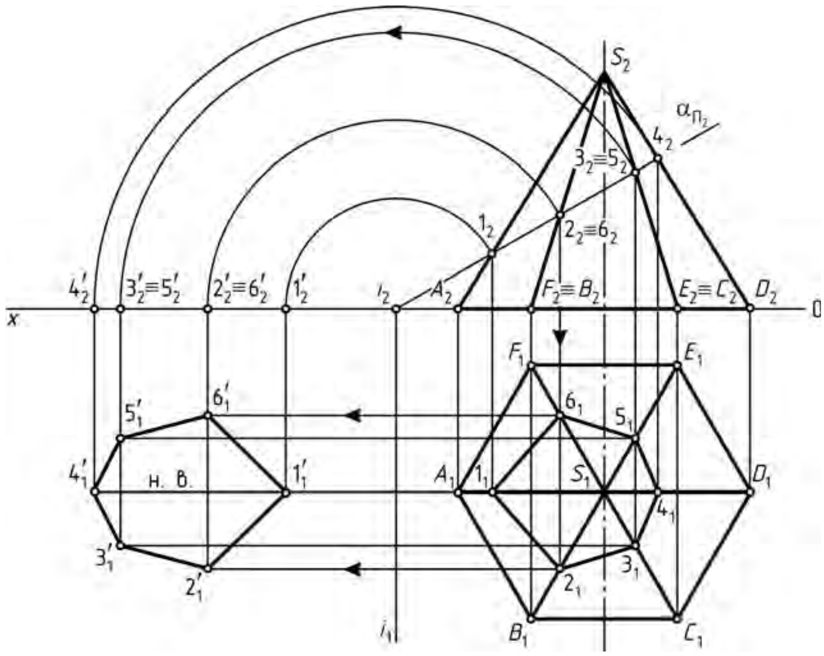


Рис. 75. Пересечение прямой пирамиды плоскостью частного положения

З а д а ч а 14

Дано: прямая шестигранная призма и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 76).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами призмы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2$.

2. Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$ определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения призмы плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций.

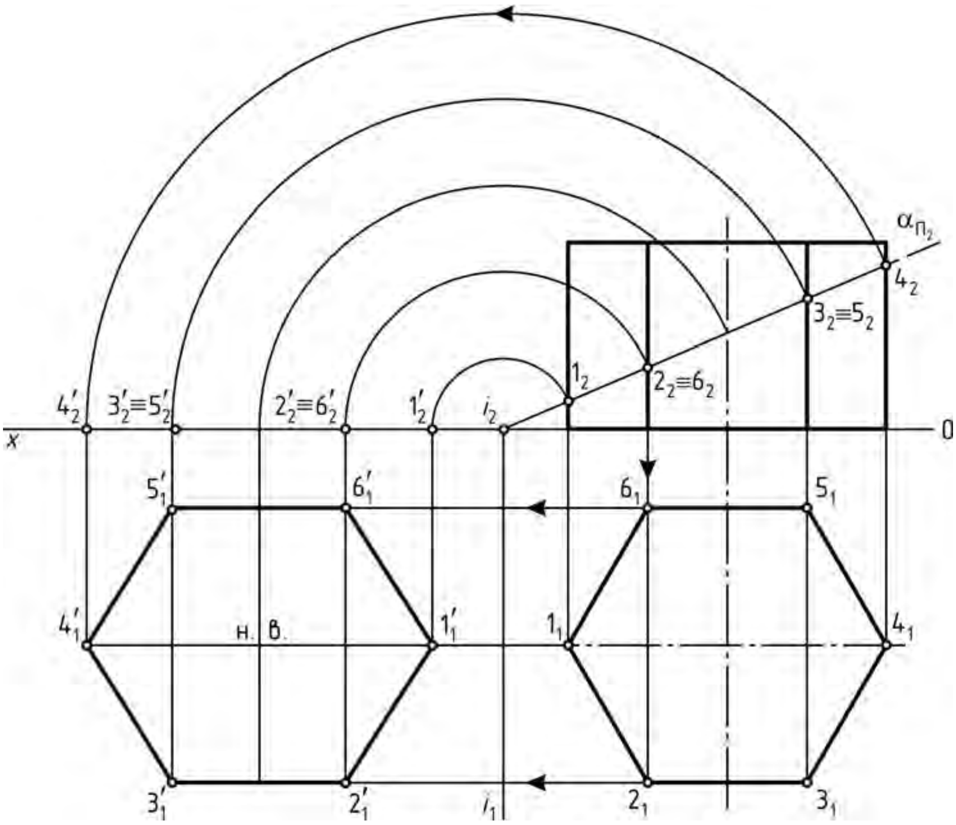


Рис. 76. Пересечение прямой призмы плоскостью частного положения

Сечение поверхностей геометрических тел вращения плоскостями частного положения. Сечением тел вращения плоскостью является плоская кривая линия. В зависимости от вида поверхности вращения и положения секущей плоскости сечение может принимать различные геометрические фигуры. Так, при пересечении поверхности прямого кругового цилиндра плоскостью возможно образование следующих геометрических фигур:

окружности, если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра, такое сечение называют нормальным (рис. 77, *а*);

эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает все его образующие (рис. 77, *б*);

усеченного эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра и пересекает одно или оба его основания (рис. 77, *в* и *г*);

прямоугольника, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 77, *д*).

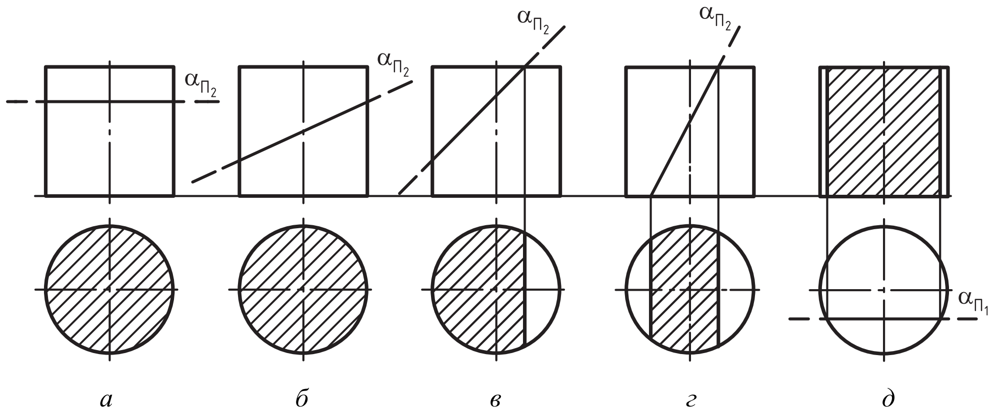


Рис. 77. Пересечение прямого цилиндра плоскостями частного положения

При пересечении поверхности прямого кругового конуса плоскостью возможно образование следующих геометрических фигур:

окружности, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса (рис. 78, *а*);

треугольника, если секущая плоскость пересекает конус через его вершину по двум образующим (рис. 78, *б*);

эллипса, если секущая плоскость наклонена к оси конуса и пересекает все его образующие (рис. 78, *в*);

параболы, если секущая плоскость параллельна одной из образующих конуса (рис. 78, *г*);

гиперболы, если секущая плоскость параллельна оси конуса или параллельна двум его образующим (рис. 78, *д*).

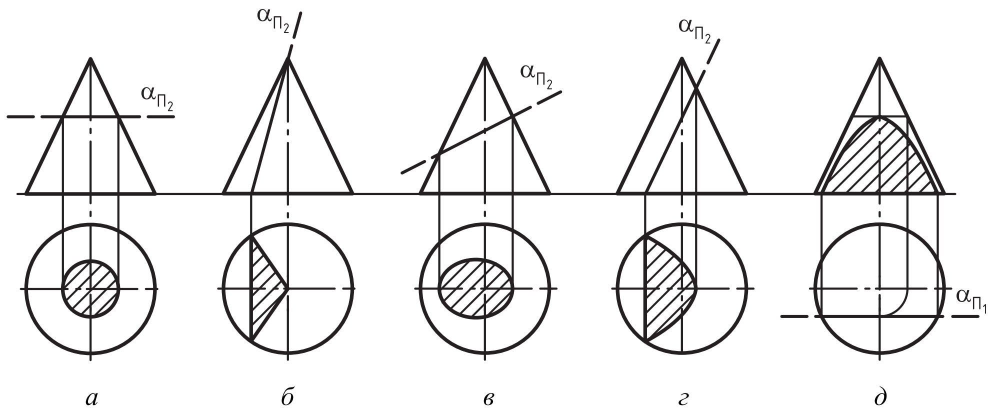


Рис. 78. Пересечение прямого конуса плоскостями частного положения

Построение линии пересечения тел вращения плоскостью сводится к многократному решению задачи на определение точек пересечения образующих кривой поверхности с секущей плоскостью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 15

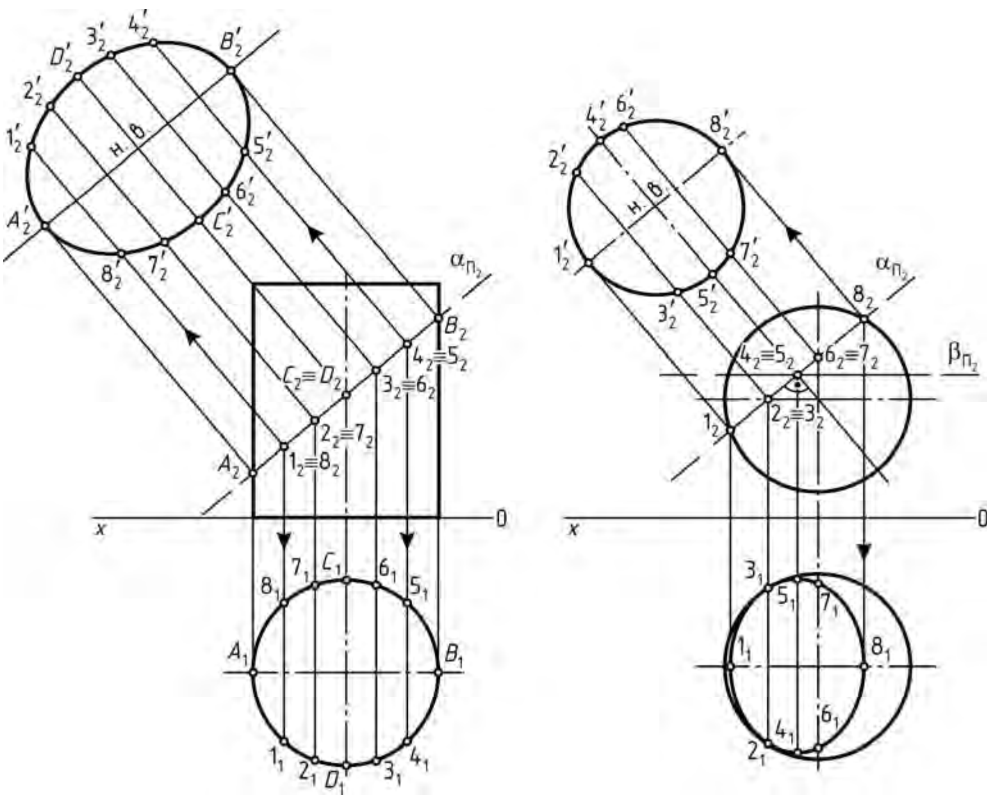
Дано: прямой круговой цилиндр и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 79, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения цилиндра плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью цилиндра образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_2 1_2 2_2 D_2 3_2 4_2 B_2 5_2 6_2 C_2 7_2 8_2$.

2. Цилиндрическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $A_1 1_1 2_1 D_1 3_1 4_1 B_1 5_1 6_1 C_1 7_1 8_1$ определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.



а *б*

Рис. 79. Пересечение геометрических тел плоскостью частного положения

3. Натуральную величину сечения цилиндра плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.

З а д а ч а 16

Дано: сфера и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 79, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения сферы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения сферы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, в т. ч. и линия пересечения сферы плоскостью, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью сферы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 2_2 4_2 6_2 8_2 7_2 5_2 3_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 7_1 5_1 3_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения сферы плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

З а д а ч а 17

Дано: прямой круговой конус и фронтально-проецирующая плоскость α (рис. 80).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально-проецирующей плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_2 8_2 4_2 6_2 10_2 2_2 9_2 5_2 3_2 7_2$.

2. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $1_1 8_1 4_1 6_1 10_1 2_1 9_1 5_1 3_1 7_1$ определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Натуральную величину сечения конуса плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, совмещая секущую плоскость с горизонтальной плоскостью проекций, однако допустимо применение и любого другого способа.

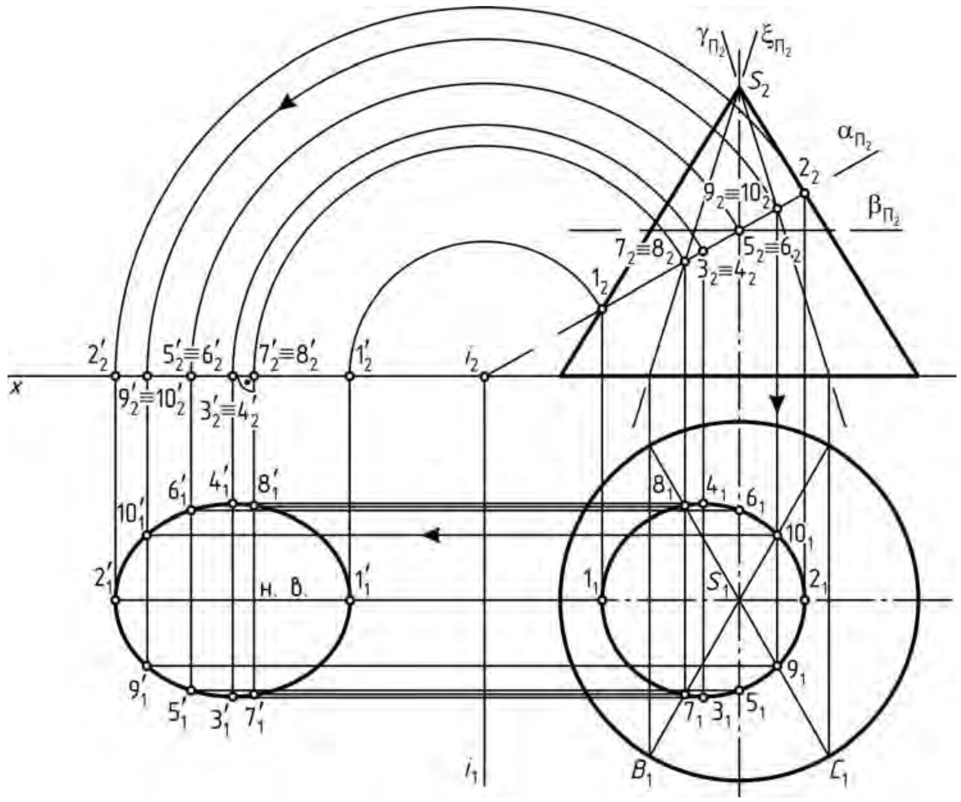


Рис. 80. Пересечение прямого конуса плоскостью частного положения

7.3. Сечения геометрических тел плоскостями общего положения. Определение натуральной величины сечения

Сечение поверхностей гранных геометрических тел плоскостями общего положения. Построение линии пересечения многогранника плоскостью общего положения сводится к двум этапам. На первом этапе плоскость из общего положения преобразуют в частное (проецирующее) положение. На втором — определяют точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 18

Дано: прямая трехгранная пирамида ABC с вершиной в точке S и плоскость общего положения α, заданная ΔDEF (рис. 81).

Выполнить: 1) построить линию пересечения пирамиды плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения пирамиды плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α (ΔDEF) из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию пирамиды ($A_4B_4C_4S_4$).

2. След α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) проецирующей плоскости обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} ($\Delta D_4E_4F_4$) с ребрами пирамиды образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $2_43_44_4$.

3. Горизонтальную ($2_13_14_1$) и фронтальную ($2_23_24_2$) проекции сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью можно определить любым известным способом (на примере не показано).

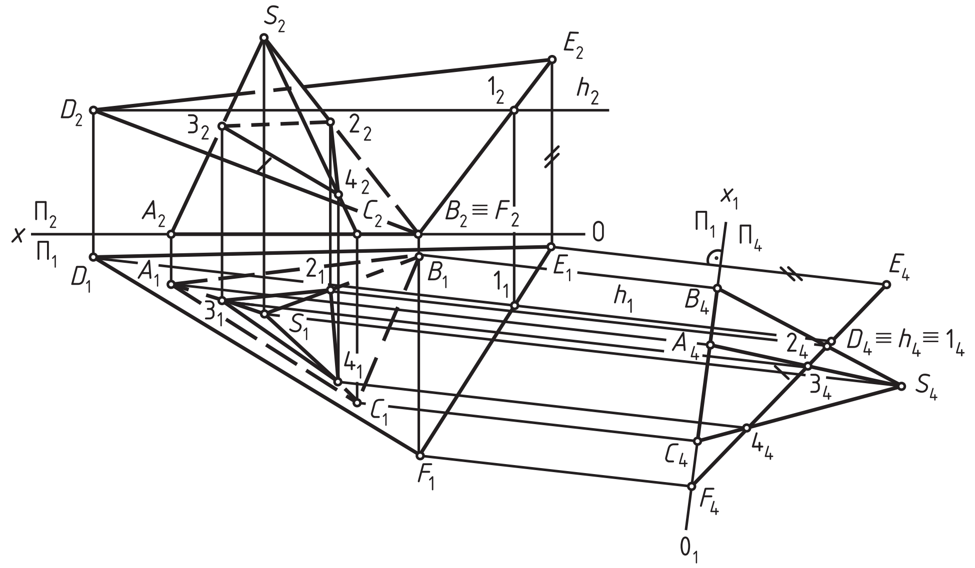


Рис. 81. Пересечение прямой пирамиды плоскостью общего положения α (ΔDEF)

З а д а ч а 19

Дано: прямая четырехгранная призма *ABCD* и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 82).

Выполнить: 1) построить линию пересечения призмы плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения призмы плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где α_{Π_4} — проецирующий след плоскости. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию призмы ($A_4B_4C_4D_4$).

2. След α_{Π_4} проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение проецирующего следа α_{Π_4} с ребрами призмы образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_42_43_44_4$.

3. Призматическая поверхность является горизонтально проецирующей. Поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 4_1 3_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 4_2 3_2$) определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом вращения. Однако допустимо применение и любого другого способа.

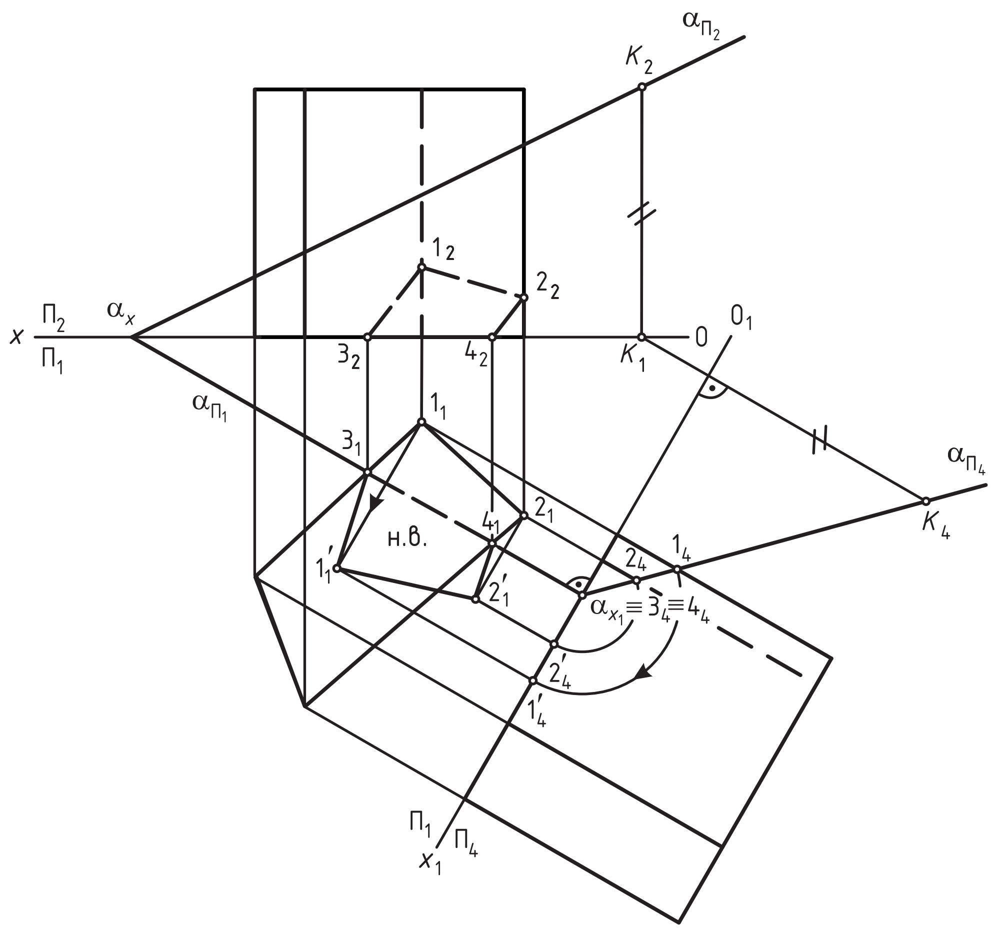


Рис. 82. Пересечение прямой призмы плоскостью общего положения α, заданной следами

Сечение поверхностей геометрических тел вращения плоскостями общего положения. Построение линии пересечения тел вращения плоскостью общего положения также сводится к двум этапам. На первом этапе плоскость из общего положения преобразуют в частное (проецирующее), а затем определяют точки пересечения образующих кривой поверхности с секущей плоскостью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 20

Дано: прямой круговой цилиндр и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 83).

Выполнить: 1) построить линию пересечения цилиндра плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения цилиндра плоскостью.

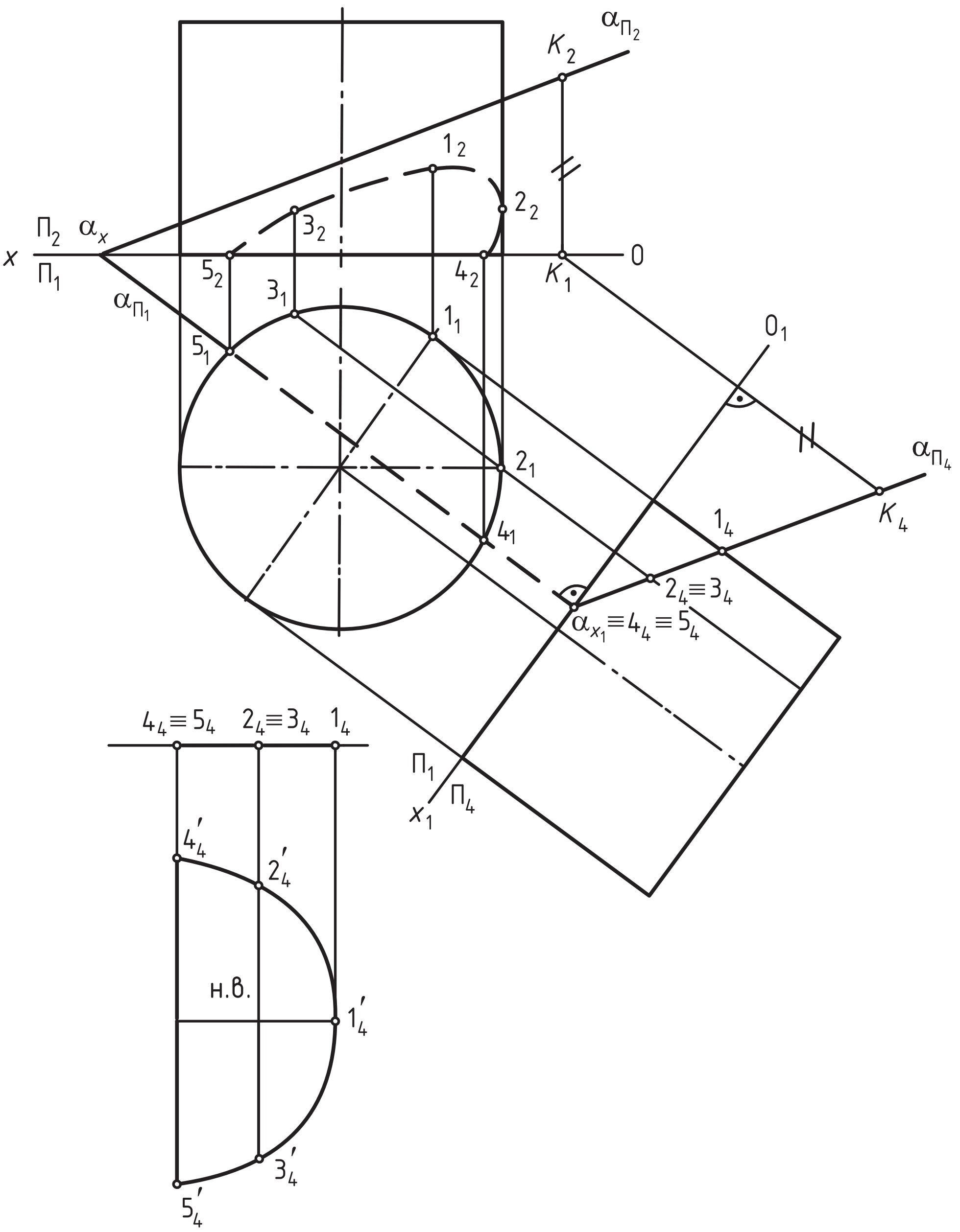


Рис. 83. Пересечение прямого цилиндра плоскостью общего положения

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где $\alpha_{П_4}$ — проецирующий след плоскости. В плоскости $П_4$ выстраивают проекцию цилиндра.

2. След $\alpha_{П_4}$ проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством* (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение следа $\alpha_{П_4}$ с поверхностью цилиндра образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4 5_4$.

3. Цилиндрическая поверхность является горизонтально проецирующей. Поэтому горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$) определяют из этого условия и условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом замены плоскостей проекций.

З а д а ч а 21

Дано: прямой круговой конус и плоскость общего положения α, заданная следами (рис. 84).

Выполнить: 1) построить линию пересечения конуса плоскостью; 2) определить натуральную величину сечения конуса плоскостью.

Порядок выполнения:

1. Способом замены плоскостей проекций преобразуют плоскость α из общего положения в частное — проецирующее, где $\alpha_{П_4}$ — проецирующий след плоскости. В плоскости $П_4$ выстраивают проекцию конуса.

2. След $\alpha_{П_4}$ обладает *собирательным свойством* (любой геометрический элемент, принадлежащий фронтально-проецирующей плоскости, в том числе и линия пересечения конуса плоскостью, будет проецироваться в ее фронтальный след). Следовательно, пересечение проецирующего следа $\alpha_{П_4}$ с поверхностью конуса образует проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_4 2_4 3_4 4_4 5_4$.

3. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью ($1_1 2_1 4_1 5_1 3_1$) и фронтальную ($1_2 2_2 4_2 5_2 3_2$) определяют из условия принадлежности точки прямой.

4. Натуральную величину сечения поверхности плоскостью в данной задаче определяют способом вращения, однако допустимо применение и любого другого способа.

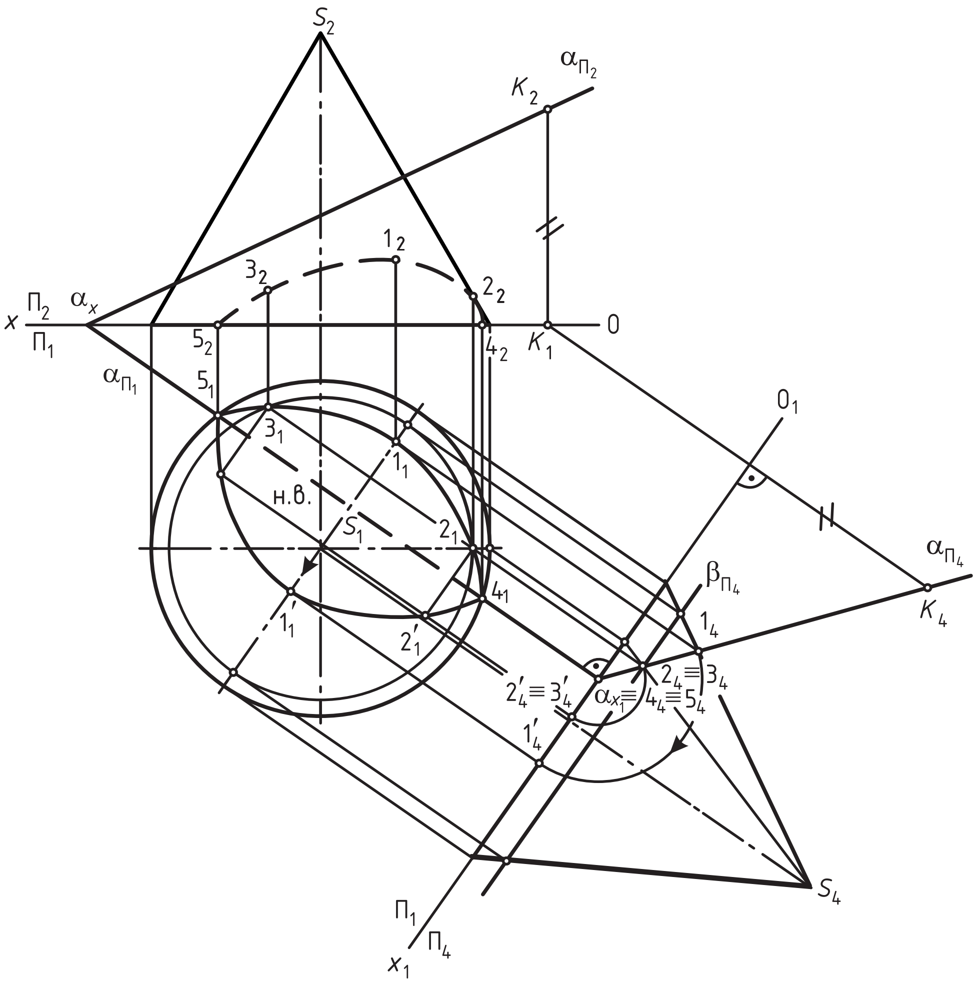


Рис. 84. Пересечение прямого конуса плоскостью общего положения

Тема 8. Пересечение поверхности прямой линией

Пересечение прямой с поверхностью называется *проницанием*. Построение точек пересечения прямой с поверхностью геометрических тел в общем случае сводится к следующему алгоритму:

1) заключить прямую во вспомогательную плоскость-посредник;

2) построить линию пересечения плоскости-посредника с поверхностью заданного геометрического тела;

3) определить точки пересечения линии сечения с данной прямой, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью.

Рассмотрим некоторые примеры.

З а д а ч а 22

Дано: прямая призма и прямая общего положения *l* (рис. 85, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой *l*.

Порядок выполнения:

Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей, поэтому проекции точек пересечения прямой с поверхностью могут быть построены без применения вспомогательной плоскости, только с помощью линий проекционной связи. Горизонтальные проекции K_1 и L_1 точек пересечения прямой l с призмой определяют в пересечении горизонтальных проекций призмы и прямой. Фронтальные проекции точек K_2 и L_2 определяют с помощью линий проекционной связи. Видимость прямой l определяют по положению точек K и L.

З а д а ч а 23

Дано: прямой цилиндр и прямая общего положения l (рис. 85, *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Цилиндрическая поверхность в данном примере является горизонтально-проецирующей, поэтому проекции точек пересечения прямой с поверхностью могут быть построены без применения вспомогательной плоскости-посредника, только с помощью линий проекционной связи. Горизонтальную проекцию K_1 точки пересечения прямой l с цилиндром определяют в пересечении горизонтальных проекций цилиндра и прямой. Фронтальную проекцию точки K_2 определяют с помощью линий проекционной связи. В точке L прямая пересекает верхнее основание цилиндра. Здесь определяют фронтальную проекцию L_2 точки пересечения прямой l с цилиндром, горизонтальную проекцию L_1 находят в проекционной связи. Видимость прямой l определяют по положению точек K и L.

З а д а ч а 24

Дано: прямая пирамида и прямая общего положения l (рис. 85, *в*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l во фронтально-проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости α обладает собирательным свойством. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами пирамиды образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью —$1_2 2_2 3_2$.

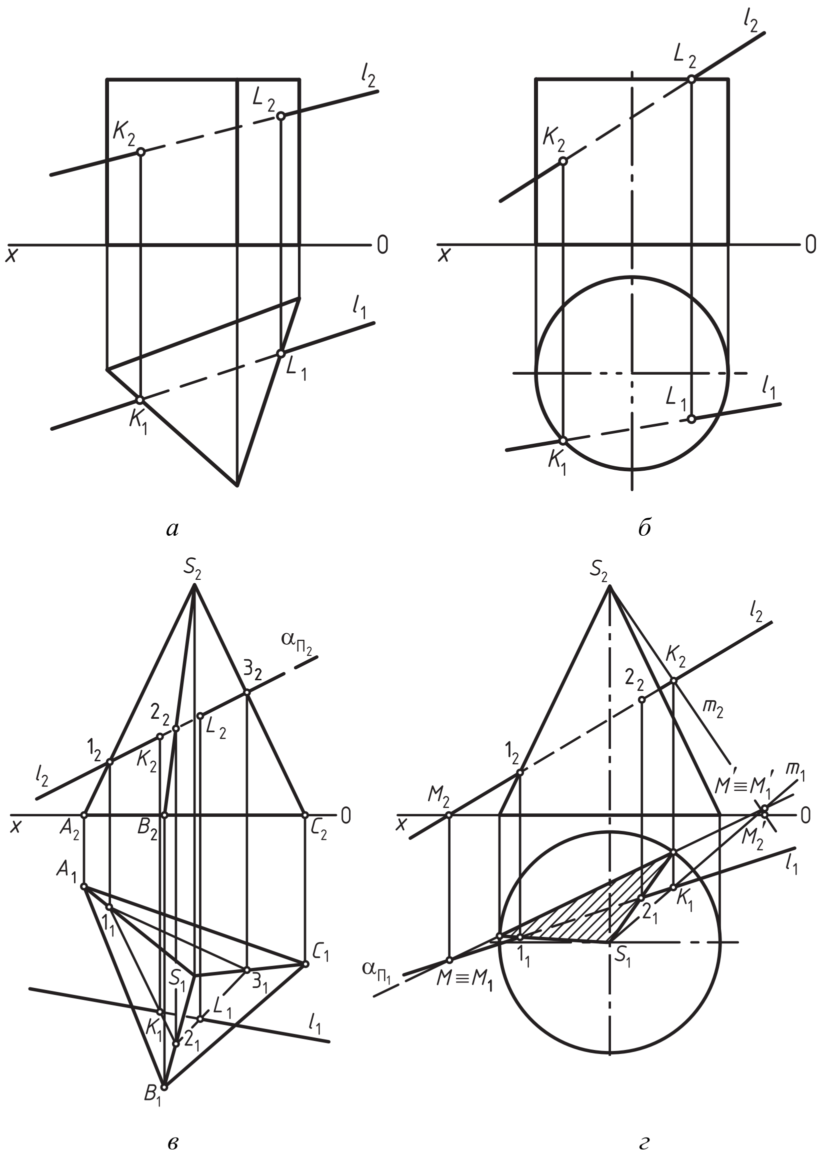


Рис. 85. Пересечение геометрических тел прямой общего положения

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α с пирамидой — $1_1 2_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции K_1 и L_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции K_2 и L_2 точек пересечения прямой с поверхностью пирамиды определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек K и L.

З а д а ч а 25

Дано: прямой круговой конус с вершиной в точке S и прямая общего положения l (рис. 85, *г*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Рассмотрим первый способ.

1. Заключают прямую l в плоскость-посредник α, заданную двумя пересекающимися прямыми, одна из которых прямая l, а другая прямая m, проходящая через вершину конуса S и пересекающая прямую l в точке K.

2. Преобразуют плоскость-посредник α, заданную двумя пересекающимися прямыми, в плоскость, заданную следами. Определяя горизонтальные следы прямых l и m, выстраивают горизонтальный след α_{Π_1} плоскости α.

3. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α ($l \cap m$) с конусом (треугольник с вершиной S).

4. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

5. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

Рассмотрим второй способ (рис. 86).

1. Заключают фронтальную проекцию прямой l во фронтально проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью —$1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 9_2 10_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с конусом ($1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 10_1 9_1 7_1 5_1 3_1$). Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции A_1 и B_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции A_2 и B_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек A и B.

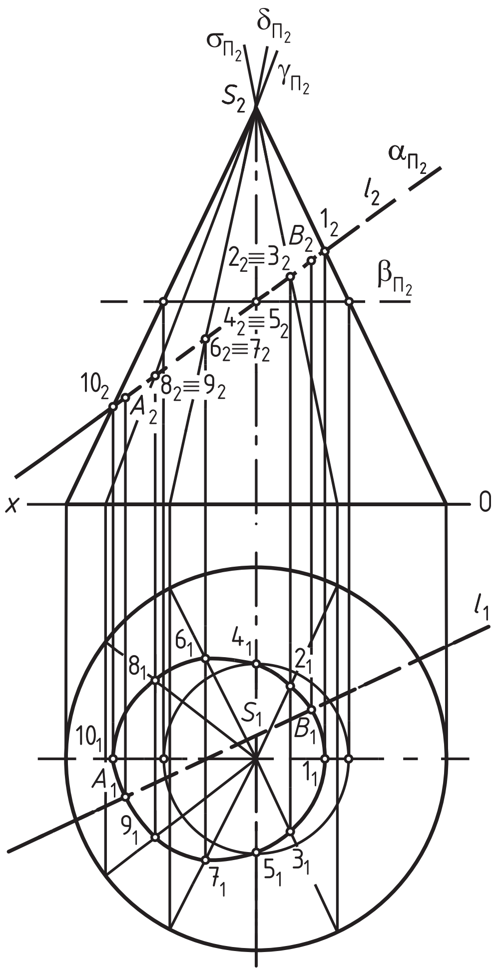


Рис. 86. Пересечение конуса прямой общего положения

З а д а ч а 26

Дано: прямая трехгранная пирамида *ABCS* с вершиной в точке *S* и фронтально-проецирующая прямая *l* (рис. 87, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой *l* с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

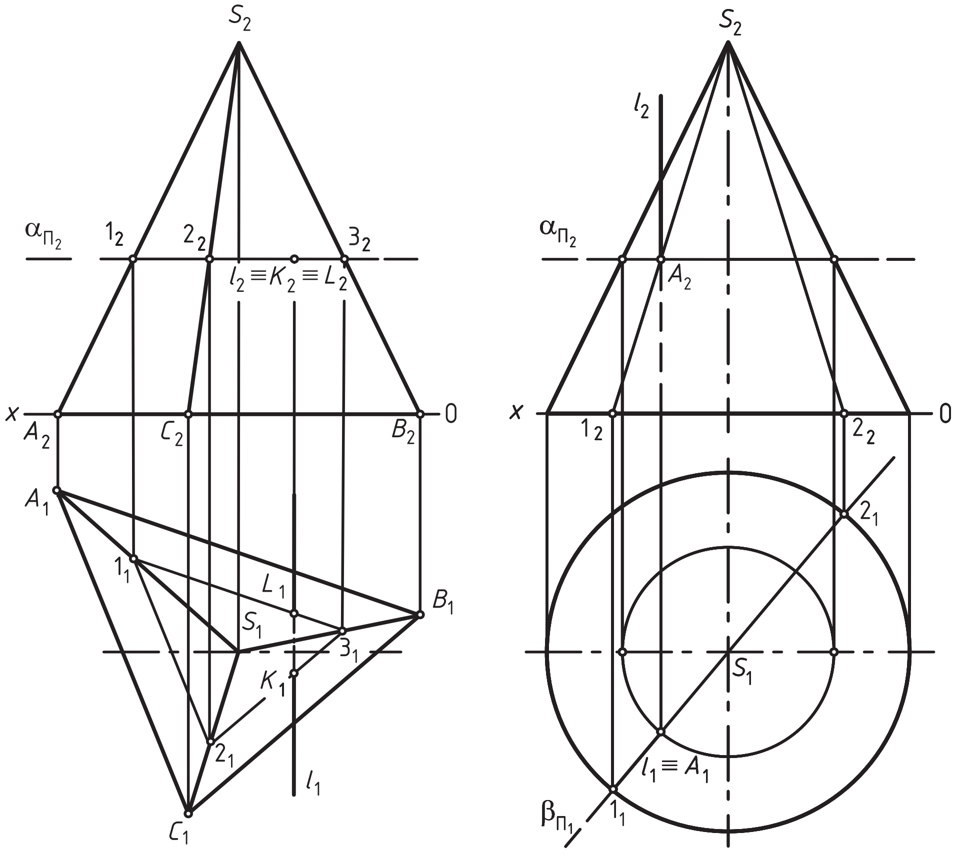
Порядок выполнения:

1. Заключают прямую *l* в горизонтальную плоскость уровня α. Фронтальный след α_{Π_2} горизонтальной плоскости уровня α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с ребрами пирамиды образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_2 2_2 3_2$.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α с пирамидой — $1_1 2_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции K_1 и L_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения ($1_1 2_1 3_1$) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции K_2 и L_2 точек пересечения прямой с поверхностью пирамиды определяют с помощью линий проекционной связи. Так как прямая l является фронтально-проецирующей прямой, то $l_2 \equiv K_2 \equiv L_2$.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек K и L.



а *б*

Рис. 87. Пересечение геометрических тел прямой частного положения

З а д а ч а 27

Дано: прямой круговой конус с вершиной в точке S и горизонтально-проецирующая прямая l (рис. 87 , *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Рассмотрим первый способ.

1. Заключают прямую l в горизонтально-проецирующую плоскость-посредник β, проходящую через вершину конуса S. Горизонтальный след β_{Π_1} горизонтально проецирующей плоскости β обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа β_{Π_1} с поверхностью конуса образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_1S_12_1$.

2. Выстраивают фронтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника β с конусом — $1_2S_22_2$.

3. Определяют фронтальную проекцию A_2 точки пересечения фронтальных проекций линии сечения и прямой l, которая и будет являться искомой точкой пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальную проекцию A_1 точки пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи. Так как прямая l является горизонтально-проецирующей прямой, то $l_1 \equiv A_1$.

4. Видимость прямой определяют по положению точки A.

Рассмотрим второй способ (см. рис. 87, *б*).

1. Через горизонтальную проекцию прямой l_1 проводят параллель в виде окружности.

2. Определяют фронтальную проекцию полученной параллели — плоскость α_{Π_2}.

3. Определяют фронтальную проекцию A_2 точки пересечения фронтальных проекций окружности и прямой l, которая и будет являться искомой точкой пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальную проекцию A_1 точки пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой определяют по положению точки A.

З а д а ч а 28

Дано: сфера и прямая общего положения l.

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

Задача может быть решена двумя способами.

Первый способ (рис. 88):

1. Применяя способ замены плоскостей проекций, прямую l преобразуют из общего положения в частное. Для этого вначале ограничивают прямую l в точках A и B. Новую плоскость Π_4 выстраивают параллельно горизонтальной проекции прямой A_1B_1. В плоскости Π_4 выстраивают проекцию сферы и проекцию прямой l_4.

2. Заключают прямую в горизонтально-проецирующую плоскость-посредник α. Горизонтальный след α_{Π_1} горизонтально-проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверхностью сферы образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

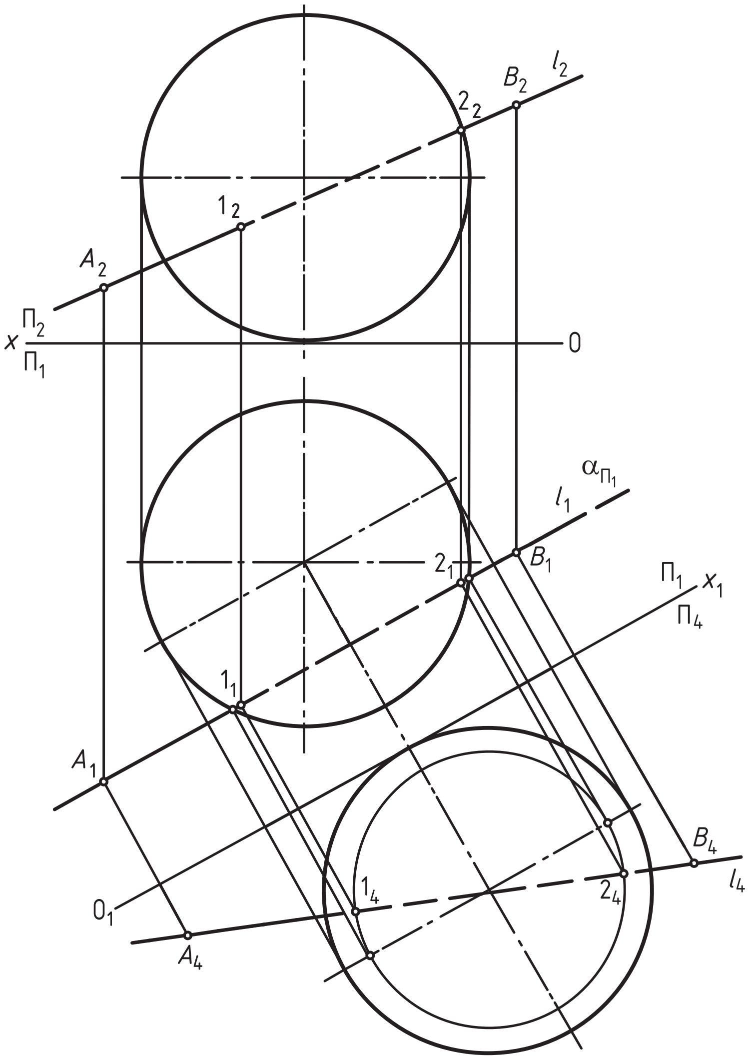


Рис. 88. Пересечение сферы прямой общего положения способом замены плоскостей проекций

3. Выстраивают в плоскости Π_4 проекции прямой l_4 (A_4B_4) и линии пересечения плоскости-посредника α со сферой. Так как секущая плоскость параллельна плоскости проекций Π_4, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

4. Определяют проекции 1_4 и 2_4 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальные 1_1 и 2_1 и фронтальные 1_2 и 2_2 проекции точек пересечения прямой l с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

5. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

Второй способ (рис. 89):

1. Заключают прямую l во фронтально проецирующую плоскость-посредник α. Фронтальный след α_{Π_2} фронтально проецирующей плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью конуса образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2\, 9_2 10_2$.

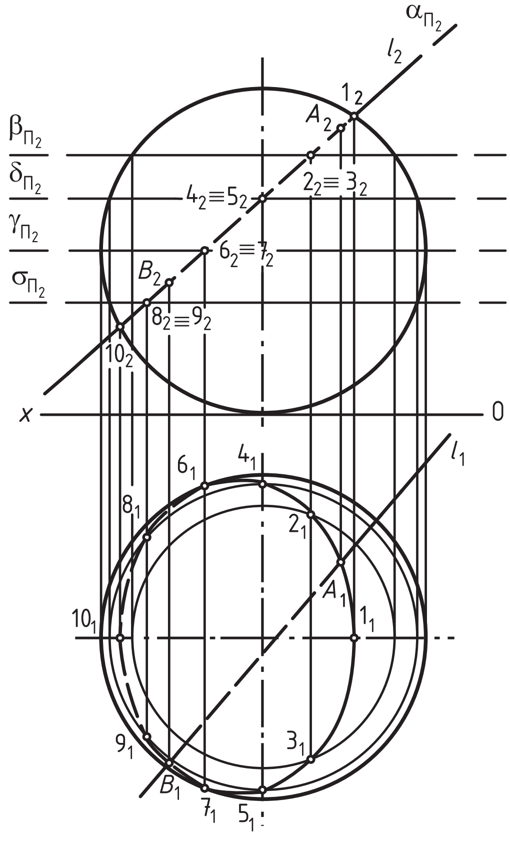


Рис. 89. Пересечение сферы прямой общего положения

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости α с конусом — $1_1 2_1 4_1 6_1 8_1 10_1 9_1 7_1 5_1 3_1$. Горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью определяют из условия принадлежности точки прямой.

3. Определяют горизонтальные проекции A_1 и B_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции A_2 и B_2 точек пересечения прямой с поверхностью конуса определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой определяют по положению точек A и B.

З а д а ч а 29

Дано: сфера и фронтально-проецирующая прямая l (рис. 90, *а*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l в горизонтальную плоскость уровня α. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение фронтального следа α_{Π_2} с поверхностью сферы образует фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

2. Выстраивают горизонтальную проекцию линии пересечения плоскости-посредника α со сферой. Так как секущая плоскость параллельна горизонтальной плоскости проекций, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

3. Определяют горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения горизонтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения прямой с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.

З а д а ч а 30

Дано: сфера и фронтальная прямая уровня l (рис. 90, *б*).

Выполнить: 1) определить точки пересечения прямой l с заданной поверхностью; 2) определить видимость прямой.

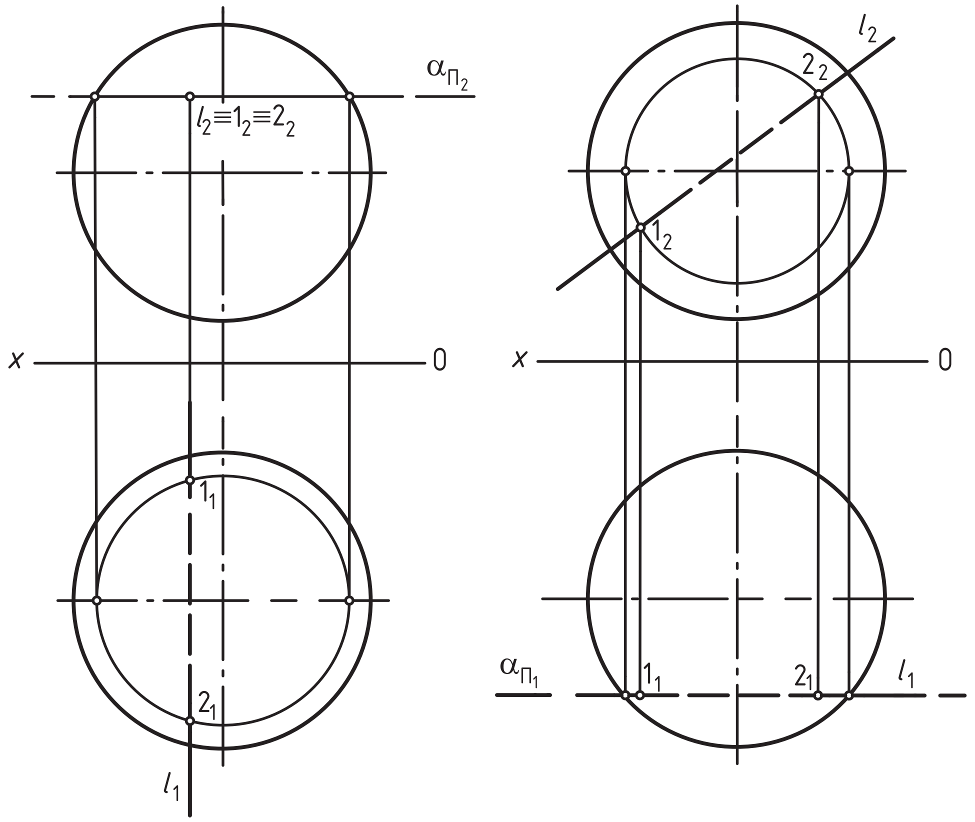
Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l во фронтальную плоскость уровня α. Горизонтальный след α_{Π_1} плоскости α обладает *собирательным свойством*. Следовательно, пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверхностью сферы образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью.

2. Выстраивают фронтальную проекцию линии пересечения плоскости α со сферой. Так как секущая плоскость параллельна фронтальной плоскости проекций, то на эту плоскость сечение проецируется в виде *окружности* (в натуральную величину).

3. Определяют фронтальные проекции 1_2 и 2_2 точек пересечения фронтальных проекций линии сечения (окружности) и прямой l, которые и будут являться искомыми точками пересечения прямой с заданной поверхностью. Горизонтальные проекции 1_1 и 2_1 точек пересечения прямой с поверхностью сферы определяют с помощью линий проекционной связи.

4. Видимость прямой l определяют по положению точек 1 и 2.



а *б*

Рис. 90. Пересечение сферы прямой частного положения

Тема 9. Взаимное пересечение поверхностей

9.1. Взаимное пересечение поверхностей. Основные способы построения линий пересечения поверхностей. 9.2. Способ вспомогательных секущих плоскостей. 9.3. Способ вспомогательных шаровых поверхностей

9.1. Взаимное пересечение поверхностей. Основные способы построения линий пересечения поверхностей

Поверхности инженерных сооружений представляют собой сочетание простейших геометрических поверхностей — конических, цилиндрических, призматических, пирамидальных, сферических и т. д. При выполнении технических чертежей таких сооружений выполняют построение линий пересечения поверхностей.

Линия пересечения поверхностей — это замкнутая ломаная или кривая линия, принадлежащая обеим пересекающимся поверхностям.

При пересечении поверхностей образующие или ребра этих поверхностей пересекаются. Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо решить множественную задачу на определение точек пересечения прямой с поверхностью. Соединение этих точек в определенной последовательности и определяет линию пересечения поверхностей.

При пересечении поверхностей различают:

полное пересечение поверхностей, при котором все ребра или образующие одной поверхности пересекаются с другой поверхностью;

частичное (неполное) пересечение поверхностей, при котором у обеих поверхностей есть ребра или образующие, не участвующие в пересечении.

Линия пересечения поверхностей может быть определена двумя основными способами:

1) вспомогательных секущих плоскостей;

2) вспомогательных шаровых поверхностей (способ сфер).

Вспомогательные плоскости и поверхности, участвующие в пересечении поверхностей, называют *посредниками*.

9.2. Способ вспомогательных секущих плоскостей

Рассмотрим некоторые примеры построения линии пересечения поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей.

Пересечение гранных поверхностей

Задача 31

Дано: прямая четырехгранная призма *KLMN* и наклонная трехгранная пирамида *ABCS* с вершиной в точке *S* (рис. 91, *а*).

Выполнить: 1) построить линии пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и граней пересекающихся поверхностей.

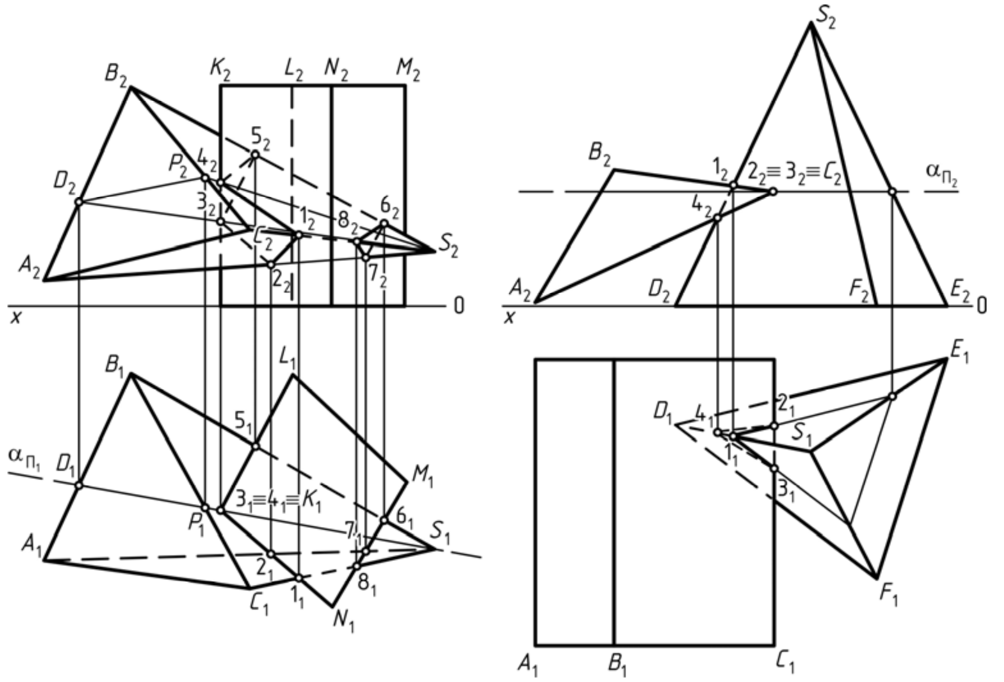
Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является горизонтально-проецирующей. В этом случае горизонтальные проекции точек $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1$ и $6_1 7_1 8_1$, определяющих линии пересечения призмы *KLMN* и пирамиды *ABCS*, находят в пересечении горизонтальных проекций этих геометрических тел.

2. Фронтальные проекции точек $1_2 2_2 5_2$ и $6_2 7_2 8_2$ определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Фронтальные проекции точек 3_2 и 4_2 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтально-проецирующей, горизонтальный след которой α_{Π_1} обладает собирательным свойством. Горизонтальный след α_{Π_1} плоскости-посредника проводят через горизонтальные проекции точек $3_1 \equiv 4_1$, вершину *S* и основание

пирамиды *ABC*. Пересечение горизонтального следа α_{Π_1} с поверхностью пирамиды образует горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $D_1P_1S_1$. Фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью $D_2P_2S_2$ определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой. Фронтальные проекции точек 3_2 и 4_2 определяют из пересечения фигуры сечения геометрического тела плоскостью $D_2P_2S_2$ с проекцией K_2 ребра *K* призмы.



а *б*

Рис. 91. Пересечение гранных поверхностей

4. Соединение точек, определяющих линии пересечения поверхностей, производят последовательно по их горизонтальным проекциям.

5. Видимость линий пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и призмы.

З а д а ч а 32

Дано: прямая трехгранная пирамида *DEFS* с вершиной в точке *S* и прямая трехгранная призма *ABC* (рис. 91, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и граней пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей. В этом случае фронтальные проекции точек $1_2 2_2 3_2 4_2$, определяющих линию пересечения призмы и пирамиды, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 4_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1 определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность пирамиды, образуя фронтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью. Горизонтальные проекции сечений геометрических тел плоскостью α определяют с помощью линий проекционной связи. Пересечение полученных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1.

4. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

5. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и призмы.

Пересечение гранных поверхностей и поверхностей вращения

З а д а ч а 33

Дано: прямая четырехгранная пирамида и сфера (рис. 92, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

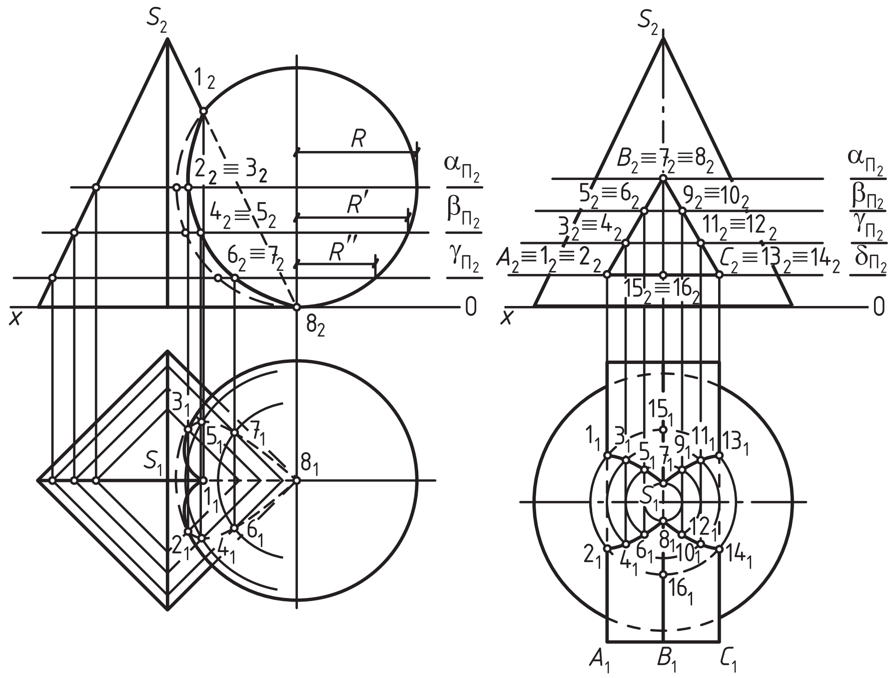
Порядок выполнения:

1. Сфера проецируется на все плоскости проекций в виде равных окружностей одинакового радиуса. В этом случае в пересечении фронтальных проекций геометрических тел (пирамиды и сферы) намечают вспомогательные точки линии пересечения заданных поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 8_2 уже принадлежат линии пересечения поверхностей из условия пересечения ребра пирамиды и образующей сферы.

2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек, например 2_1 и 3_1, определяют следующим образом. Через вспомогательные точки в плоскости Π_2 проводят плоскость-посредник α — горизонтальную уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции

вспомогательных точек, одновременно пересекает поверхность пирамиды и поверхность сферы, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — правильный четырехугольник (квадрат) и окружность заданного радиуса R. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей β и γ.



а *б*

Рис. 92. Пересечение гранных поверхностей и поверхностей вращения

4. Фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, $4_2 \equiv 5_2$ и $6_2 \equiv 7_2$, определяющих линию пересечения пирамиды и сферы, находят с помощью линий проекционной связи.

5. Соединение точек, образующих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней пирамиды и образующей сферы.

Задача 34

Дано: прямой круговой конус и прямая трехгранная призма ABC (рис. 92, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Призматическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей, поэтому фронтальные проекции точек 1—16, определяющих линию пересечения призмы *ABC* и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек, например 5_1 и 6_1, 9_1 и 10_1, определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости β — горизонтальной уровня, фронтальный след которой β_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след β_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $5_2 \equiv 6_2$ и $9_2 \equiv 10_2$, одновременно пересекает поверхность призмы и поверхность конуса, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — прямоугольник и окружность заданного радиуса *R*. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 5_1 и 6_1, 9_1 и 10_1. Горизонтальные проекции остальных точек определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей α, γ и δ. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер и граней призмы и образующей конуса.

З а д а ч а 35

Дано: прямая трехгранная призма и прямой круговой цилиндр (рис. 93).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость ребер и образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Цилиндрическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей, поэтому фронтальные проекции точек 1—7, определяющих линию пересечения призмы и цилиндра, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Призматическая поверхность является горизонтально-проецирующей. Отсюда, горизонтальные проекции точек 1—7 определяют с помощью линий проекционной связи, исходя из принадлежности точки поверхности. Профильные проекции точек определяют с помощью линий проекционной связи (см. тему 6). Соединение точек, определяющих линию пересечения заданных поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

3. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости ребер призмы и образующих цилиндра.

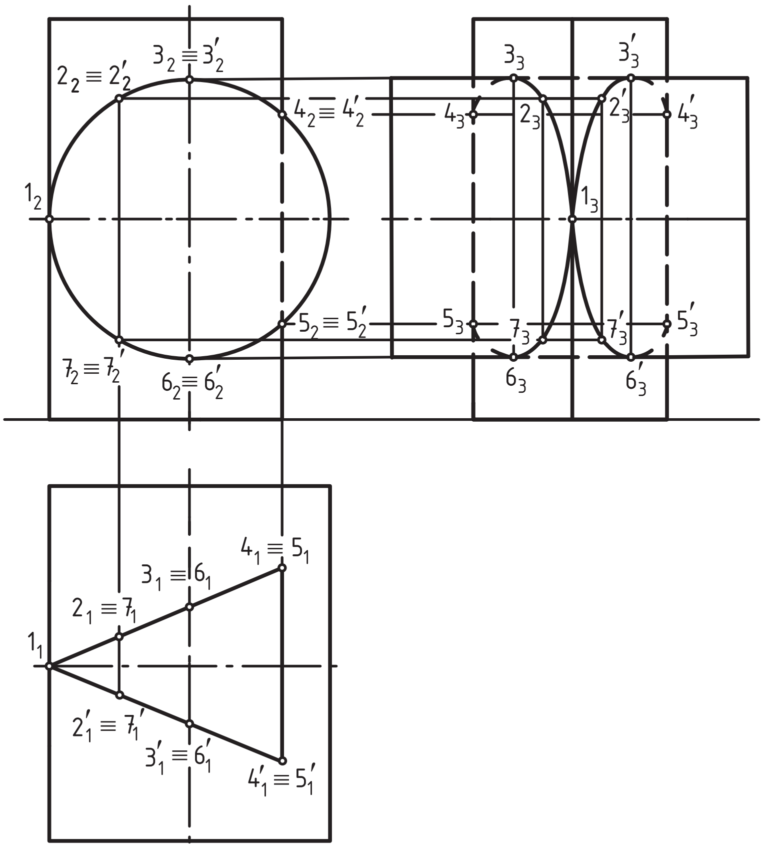


Рис. 93. Пересечение гранной поверхности и поверхности вращения

Пересечение поверхностей вращения.

З а д а ч а 36

Дано: два прямых круговых конуса (рис. 94).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют фронтальную проекцию точки 1_2 в точке пересечения образующих конусов. Горизонтальную проекцию точки 1_1 выстраивают с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

2. Находят горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1 в точках пересечения оснований конусов. Фронтальные проекции точек $4_2 \equiv 5_2$ выстраивают с помощью линий проекционной связи.

3. Проекции промежуточных точек 2 и 3 определяют с помощью произвольно взятой вспомогательной секущей плоскости-посредника α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника одно-

временно пересекает поверхность обоих конусов, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — окружности заданного радиуса R и R'. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$ выстраивают с помощью линий проекционной связи.

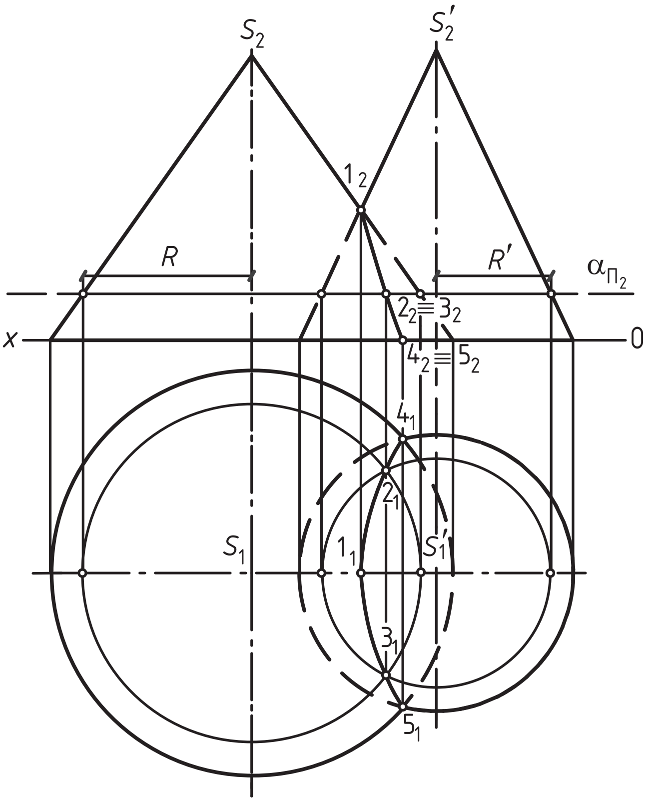


Рис. 94. Пересечение поверхностей прямых круговых конусов

4. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их горизонтальным и фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих конусов.

Задача 37

Дано: прямой конус и прямой цилиндр (рис. 95, *а*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей; 2) определить видимость образующих пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Цилиндрическая поверхность в данном примере является фронтально-проецирующей. В этом случае фронтальные проекции точек $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2$, определяющих линию пересечения цилиндра и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

2. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Горизонтальные проекции точек, например 2_1 и 3_1, определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости α — горизонтальной уровня, фронтальный след которой α_{Π_2} обладает собирательным свойством. Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, одновременно пересекает поверхность цилиндра и поверхность конуса, образуя в плоскости Π_1 горизонтальные проекции сечения геометрических тел плоскостью — прямоугольник и окружность заданного радиуса R. Пересечение полученных горизонтальных проекций сечений определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1.

4. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей-посредников β и γ.

5. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

6. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих конуса и цилиндра.

9.3. Способ вспомогательных шаровых поверхностей

При построении линии пересечения поверхностей в некоторых случаях наиболее оптимальным является применение в качестве вспомогательной секущей не плоскости, а поверхности, например сферической.

Способ вспомогательных шаровых поверхностей или способ сфер состоит в том, что для определения точек, принадлежащих линии пересечения заданных поверхностей, проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Сфера минимального радиуса должна вписываться в одну поверхность вращения и пересекаться с другой или вписываться в обе заданные поверхности вращения. Выстраивают линии пересечения сферы с поверхностями — это окружности, которые проецируются на плоскость проекций в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Проведя несколько таких вспомогательных секущих сфер, определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

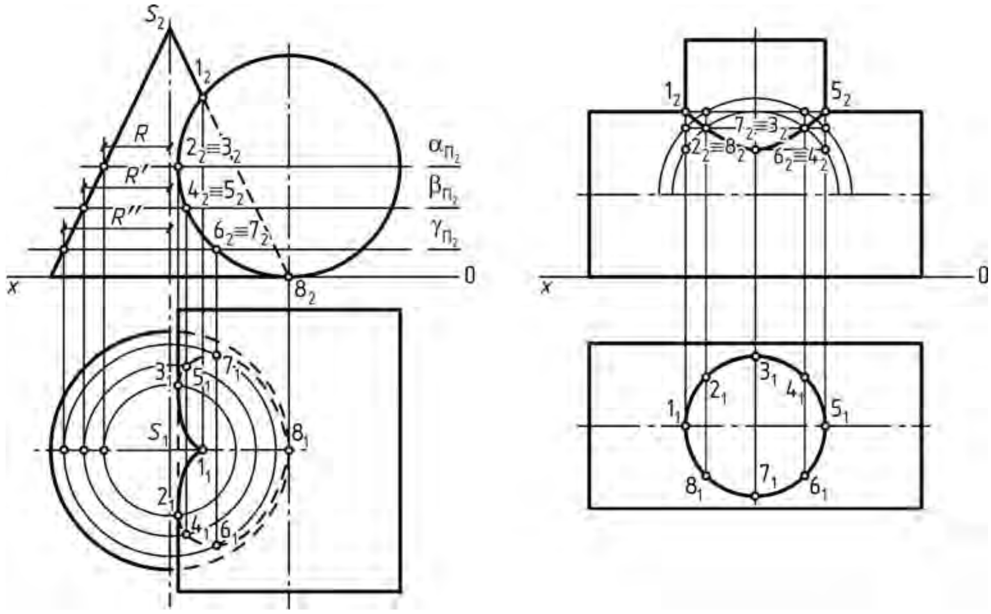
Способ сфер применяется, если:

1) обе пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения;

2) оси вращения обеих поверхностей пересекаются в одной точке;

3) оси вращения обеих поверхностей параллельны какой-либо плоскости проекций.

Рассмотрим примеры построения линии пересечения поверхностей способом сфер.



а *б*

Рис. 95. Пересечение поверхностей вращения

З а д а ч а 38

Дано: два прямых круговых цилиндра (рис. 95, *б*).

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей вращения; 2) определить видимость пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют точку пересечения осей вращения заданных поверхностей. Оси вращения обеих поверхностей параллельны фронтальной плоскости проекций Π_2.

2. Определяют точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 5_2, определяющих линию пересечения поверхностей цилиндров, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел.

3. Проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Радиус данной сферы является минимальным и служит перпендикуляром к образующей цилиндра, поверхность которого профильно-проецирующая.

4. Выстраивают линии пересечения сферы с заданными поверхностями — это окружности, которые проецируются на фронтальную плоскость проекций Π_2 в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей цилиндров.

5. Проводят несколько таких вспомогательных секущих сфер. Определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

6. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям.

7. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих цилиндров.

З а д а ч а 39

Дано: прямой круговой конус и наклонный цилиндр (рис. 96).

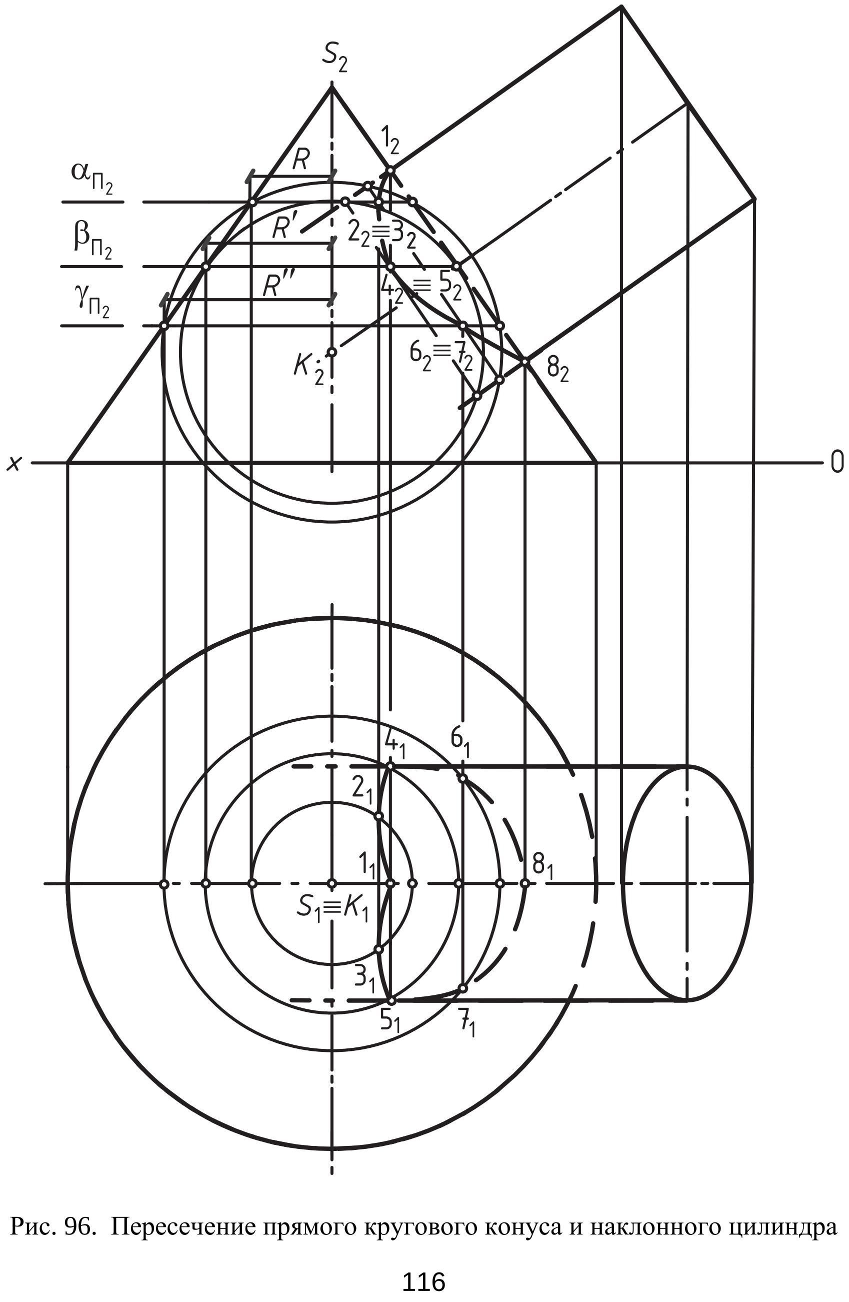


Рис. 96. Пересечение прямого кругового конуса и наклонного цилиндра

Выполнить: 1) построить линию пересечения заданных поверхностей вращения; 2) определить видимость пересекающихся поверхностей.

Порядок выполнения:

1. Определяют точку пересечения осей вращения заданных поверхностей — точка K. Оси вращения обеих поверхностей параллельны фронтальной плоскости проекций Π_2.

2. Определяют точки пересечения очерковых образующих поверхностей. Фронтальные проекции точек 1_2 и 8_2, определяющих линию пересечения поверхностей цилиндра и конуса, находят в пересечении фронтальных проекций этих геометрических тел. Горизонтальные проекции точек 1_1 и 8_1 определяют с помощью линий проекционной связи из условия принадлежности точки прямой.

3. Проводят вспомогательную секущую сферу, центр которой расположен в точке пересечения осей вращения поверхностей. Радиус данной сферы является минимальным и служит перпендикуляром к образующей конуса.

4. Выстраивают линии пересечения сферы с заданными поверхностями — это окружности, которые проецируются на фронтальную плоскость проекций Π_2 в прямые линии. Точки пересечения этих прямых и есть точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса.

5. Проводят несколько таких вспомогательных секущих сфер. Определяют необходимое и достаточное количество точек, принадлежащих искомой линии пересечения заданных поверхностей вращения.

6. Горизонтальные проекции точек, например 2_1 и 3_1, определяют с помощью вспомогательной секущей плоскости α — горизонтальной уровня.

Фронтальный след α_{Π_2} плоскости-посредника, проходящий через фронтальные проекции точек $2_2 \equiv 3_2$, пересекает поверхность конуса, образуя в плоскости Π_1 горизонтальную проекцию сечения геометрического тела плоскостью — окружность заданного радиуса R. Пересечение полученной горизонтальной проекции сечения и линий проекционной связи от заданных фронтальных проекций точек определяет горизонтальные проекции точек 2_1 и 3_1. Горизонтальные проекции точек 4_1 и 5_1, 6_1 и 7_1 определяют аналогичным образом с помощью вспомогательных секущих плоскостей β и γ.

7. Соединение точек, определяющих линию пересечения поверхностей, производят последовательно по их фронтальным проекциям. Видимость линии пересечения поверхностей определяют исходя из общей видимости образующих поверхностей.

Тема 10. Проекции с числовыми отметками

10.1. Сущность способа проекций с числовыми отметками. Точка и прямая в проекциях с числовыми отметками. 10.2. Плоскость в проекциях с числовыми отметками. 10.3. Поверхность в проекциях с числовыми отметками. 10.4. Топографическая поверхность. 10.5. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью. 10.6. Примеры решения инженерных задач

10.1. Сущность способа проекций с числовыми отметками. Точка и прямая в проекциях с числовыми отметками

При проектировании автомобильных дорог, аэродромов, мостов и других инженерных сооружений вместе с ними на чертежах изображается и земная поверхность. Вместе с тем при изображении земной поверхности способ проецирования на две плоскости проекций становится неудобным, так как величины значений по осям x и y (т. е. длина и ширина объекта) достаточно большие, а по оси z (высота) — незначительные. В связи с этим, наиболее оптимальным является применение способа проекций с числовыми отметками, который относится к одному из видов прямоугольного проецирования.

Сущность данного способа заключается в том, что предмет ортогонально проецируется только на одну плоскость проекций, как правило, горизонтальную, называемую плоскостью нулевого уровня $П_0$. Так как одна проекция не определяет положение предмета в пространстве, то фронтальную проекцию заменяют числами (отметками), которые ставятся около проецируемых точек. Эти отметки (обычно в метрах) указывают превышение точек над плоскостью нулевого уровня $П_0$.

При проецировании земной поверхности за абсолютный нулевой уровень принимают постоянный уровень воды в Балтийском море. При этом точки, расположенные выше плоскости нулевого уровня, обозначают цифрой со знаком «+», который на изображениях не ставится, а точки, расположенные ниже плоскости нулевого уровня — цифрой со знаком «–».

Проекции точки и прямой в проекциях с числовыми отметками. Для задания точек вышеописанным способом, кроме числовых отметок проецируемых точек, необходимо иметь масштаб или указание, в каких линейных единицах выражены данные числовые отметки.

Изобразим плоскость нулевого уровня $П_0$ и точки пространства A и B. Построим проекции точек на плоскости $П_0$ и определим их отметки в выбранном масштабе. Соединив точки, получаем отрезок прямой AB (рис. 97).

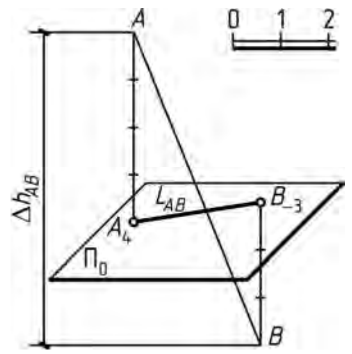


Рис. 97. Проекции отрезка прямой

Длина горизонтальной проекции отрезка прямой AB называется *заложением отрезка прямой* и обозначается L_{AB}.

Разность высотных отметок концов отрезка прямой называют *превышением* или *подъемом отрезка прямой* и обозначают Δh_{AB}.

Отношение превышения концов отрезка прямой к его заложению называют *уклоном отрезка прямой* и обозначают i: $i = \Delta h_{AB} / L_{AB}$.

Отметим на отрезке прямой AB точку C, которая находится выше точки A на 1 м, и построим проекцию точки C_2 (рис. 98).

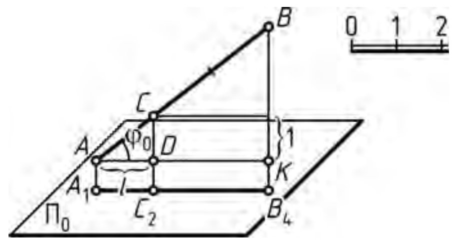


Рис. 98. Уклон и интервал отрезка прямой

Заложение отрезка прямой при разности высотных отметок его концов, равной единице, называют *интервалом* и обозначают l.

Уклон и интервал отрезка прямой являются величинами, обратными друг другу. Из $\Delta\ ABK$ (см. рис. 98) видно, что $i = \mathrm{tg}\ \varphi_0$, где φ_0 — угол наклона прямой AB к плоскости $П_0$, а из ΔACD имеем, что $\mathrm{tg}\ \varphi_0 =$ $= 1/l$, следовательно, $i = 1/l$.

Уклон и интервал — взаимообратные характеристики крутизны прямой: чем круче прямая, тем больше ее уклон и меньше интервал.

Градуирование прямой. Интервал прямой используют для определения на ней точек с целочисленными высотными отметками. Эта операция называется градуированием. Отсюда, проградуировать прямую — значит определить на ней точки, имеющие высотные отметки, выраженные целыми числами. Проградуировать прямую можно аналитически, определив по формуле величину интервала, и графически, используя теорему Фалеса.

З а д а ч а 40

Дано: прямая *AB*.

Выполнить: проградуировать прямую *AB* (рис. 99).

Порядок выполнения:

Из точки *A*, имеющей меньшую высотную отметку, проводят под произвольным углом вспомогательную прямую, на которой в заданном масштабе отмечают целые отметки точек. Концы отрезков соединяют прямой, а через точки деления проводят параллельные прямые, определяющие на прямой *AB* точки с целочисленными отметками и величину интервала прямой *l*.

Угол наклона прямой к плоскости Π_0 можно определить из прямоугольного треугольника (см. рис. 99), в котором один катет равен интервалу, а другой — единице превышения в заданном масштабе.

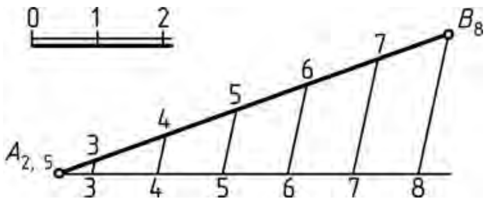


Рис. 99. Градуирование отрезка прямой

Относительное положение прямых пространства. В проекциях с числовыми отметками прямые пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны, пересекаться и скрещиваться.

1. Если прямые пространства параллельны, то их проекции параллельны, интервалы равны и отметки возрастают в одном направлении (рис. 100).

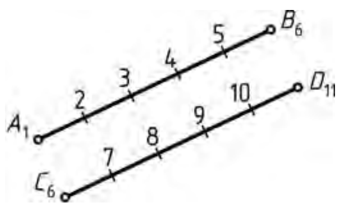


Рис. 100. Параллельные прямые

2. Если прямые пространства пересекаются, то их проекции пересекаются и отметки в точке пересечения проекций прямых одинаковые (рис. 101).

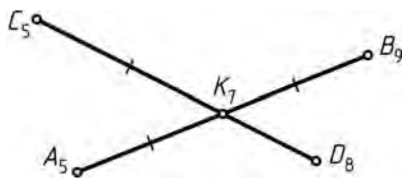


Рис. 101. Пересекающиеся прямые

3. Если прямые пространства скрещиваются, то их отметки в точке пересечения проекций прямых различны (рис. 102).

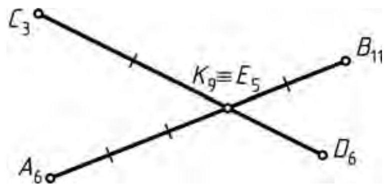


Рис. 102. Скрещивающиеся прямые

Из приведенных примеров видно, что для определения взаимного положения прямых пространства их необходимо проградуировать.

10.2. Плоскость в проекциях с числовыми отметками

Плоскость в проекциях с числовыми отметками может быть задана уже известными нам способами:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
2) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой;
3) двумя параллельными прямыми;
4) двумя пересекающимися прямыми;
5) плоской фигурой.

Однако в проекциях с числовыми отметками наиболее рациональным считается задание плоскости масштабом уклонов.

Плоскость, заданная масштабом уклона. Даны плоскость нулевого уровня Π_0 и плоскость общего положения α (рис. 103).

Линия пересечения плоскости α с плоскостью нулевого уровня Π_0 называется *горизонтальным следом плоскости* и обозначается α_{Π_0}:

$$\alpha_{\Pi_0} = \alpha \cap \Pi_0.$$

Горизонтальный след плоскости является ее нулевой горизонталью ($\alpha_{\Pi_0} \equiv h_0$) и перпендикулярен линии n наибольшего ската или наклона плоскости α к плоскости нулевого уровня Π_0 ($n \perp \alpha_{\Pi_0}$).

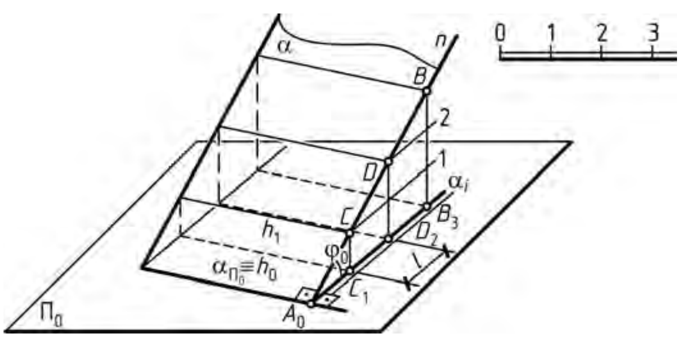


Рис. 103. Плоскость, заданная масштабом уклона

Зададим на линии n наибольшего ската плоскости α отрезок AB и спроецируем его на плоскость нулевого уровня Π_0: $|AB| \rightarrow |A_0B_3|$.

Отметим на отрезке AB точки C и D, отстоящие от плоскости Π_0 на 1 и 2 м, и построим их проекции C_1 и D_2. Проекции точек A_0, C_1, D_2, B_3 отстоят друг от друга на расстоянии, равном интервалу l.

Проградуированная горизонтальная проекция линии наибольшего ската называется *масштабом уклона плоскости* и обозначается α_i.

Масштаб уклона обозначается двумя параллельными линиями — тонкой и толстой, отстоящих друг от друга на расстоянии 1 мм. Высотные отметки точек ставятся на тонкой линии.

Угол наклона плоскости α к плоскости нулевого уровня Π_0 называется *углом падения плоскости* и обозначается φ_0. Угол падения плоскости измеряется между линией наибольшего ската n и ее горизонтальной проекцией α_i.

Проведем через точки C, D и B проектные горизонтали плоскости α. Они параллельны между собой и горизонтальному следу плоскости α_{Π_0} и перпендикулярны линии наибольшего ската n. Построим проекции этих горизонталей (см. рис. 103).

Проекции горизонталей плоскости α *и масштаб уклона плоскости* α_i *взаимно перпендикулярны.*

В плоскости можно провести множество прямых с различными уклонами, но не превышающими наибольший уклон плоскости, который имеет линия наибольшего ската: $i = \text{tg}\ \varphi_0$, где угол φ_0 определяется из прямоугольного треугольника, один катет которого равен l, а другой — единице масштаба (см. рис. 103).

Относительное положение плоскостей пространства. В проекциях с числовыми отметками плоскости пространства по отношению друг к другу могут быть параллельны и пересекаться.

1. Если плоскости параллельны, то их масштабы уклонов параллельны, интервалы равны и возрастают в одном направлении (рис. 104).

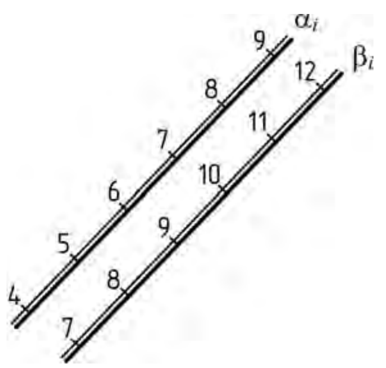


Рис. 104. Параллельные плоскости

2. Если плоскости пересекаются, то линия их пересечения проходит через точки пересечения горизонталей с одинаковыми отметками (рис. 105).

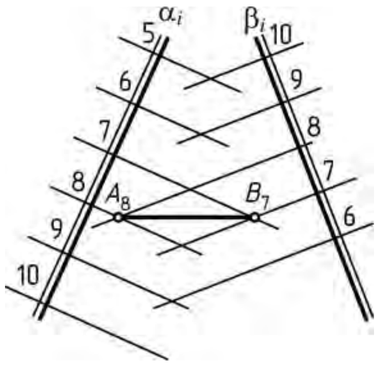


Рис. 105. Пересекающиеся плоскости

З а д а ч а 41

Дано: прямая AB и плоскость α_i.

Выполнить: определить точки пересечения прямой AB и плоскости α_i (рис. 106).

Порядок выполнения:

Пересечение прямой с плоскостью в проекциях с числовыми отметками сводится к нахождению точки, общей для прямой и плоскости. Для определения точки пересечения прямой AB и плоскости α_i прямая заключается во вспомогательную плоскость-посредник β_i, проектные горизонтали которой в пределах чертежа пересекаются с соответствующими (одноименными) проектными горизонталями заданной плоскости α_i. Затем выстраивается линия пересечения вспомогательной плоскости β_i и заданной плоскости α_i. Там, где линия пересечения плоскостей пересечет заданную прямую AB, и будет точка K пересечения прямой с плоскостью.

$|AB| \subset \beta;\ \beta \cap \alpha = |CD|;\ |CD| \cap |AB| = K \Rightarrow |AB| \cap \alpha = K.$

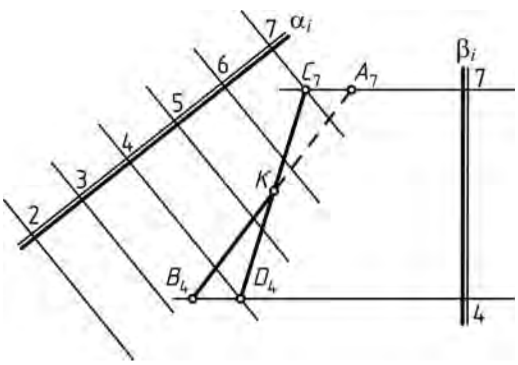


Рис. 106. Пересечение прямой с плоскостью в проекциях с числовыми отметками

10.3. Поверхность в проекциях с числовыми отметками

В проекциях с числовыми отметками при проектировании различных инженерных сооружений широко применяются геометрические и графические поверхности. К *геометрическим* относят поверхности закономерные, подчиняющиеся определенным геометрическим законам. Наибольшее применение в проекциях с числовыми отметками имеют конические поверхности и поверхности постоянного ската. *Графической* является поверхность, закон образования которой неизвестен, например, земная поверхность, называемая топографической.

Для изображения геометрических и графических поверхностей используют проекции горизонталей, которые получают при пересечении данной поверхности с несколькими горизонтальными плоскостями уровня, отстоящими друг от друга на одну единицу длины, равной, как правило, 1 м.

В геометрических поверхностях о форме и размерах предмета судят по одной ортогональной (горизонтальной) проекции и высотным отметкам, показанным в характерных точках. Так, в многограннике, например в пирамиде, характерными точками являются его вершины.

На рис. 107 задана трехгранная пирамида *ABCS*, основанием которой является Δ *ABC*, расположенный в плоскости нулевого уровня Π_0. Вершина *S* пирамиды *ABCS* отстоит от плоскости нулевого уровня Π_0 на расстояние 5 м.

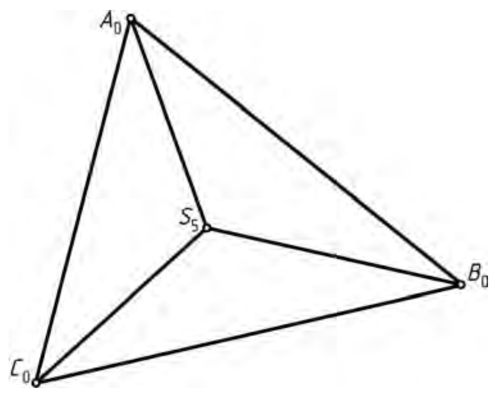


Рис. 107. Гранная поверхность в проекциях с числовыми отметками

Криволинейные поверхности изображаются проекциями своих горизонталей. На рис. 108, *а* показано образование горизонталей конической поверхности — прямого кругового конуса. Горизонтали такой поверхности являются окружностями с центрами, расположенными на оси вращения конуса, поэтому прямой круговой конус изображается на плане серией концентрических окружностей, проведенных через равные интервалы. По интервалам можно судить об уклоне. В данном случае интервалы равны по всем образующим конуса. Отсюда, поверхность имеет один и тот же уклон по всем направлениям: уклон образующей *SA* равен уклону *SB* и уклону *SC*.

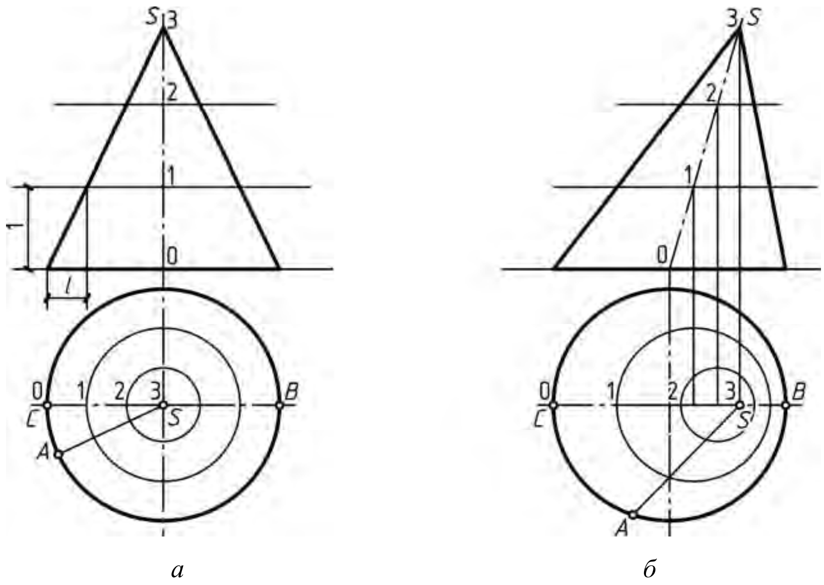


Рис. 108. Криволинейная поверхность в проекциях с числовыми отметками

На рис. 108, *б* показано образование горизонталей поверхности наклонного конуса. Горизонтали такой поверхности являются эксцентрическими окружностями со смещенными центрами, т. е. интервалы с левой и правой стороны конуса будут разными. Отсюда, данная коническая поверхность имеет и разные уклоны: уклон образующей *SC* меньше, чем уклон образующей *SA*, так как интервал *SC* больше интервала *SA*. Наименьший интервал имеет образующая *SB*, которая в данном случае имеет и наибольший уклон, т. е. для поверхности наклонного конуса образующая *SB* является линией наибольшего ската или наклона поверхности к плоскости нулевого уровня Π_0.

Линия наибольшего ската поверхности есть непрерывное множество наименьших интервалов этой поверхности.

Коническая поверхность используется в строительстве при сооружении дамб, насыпей; при примыкании двух автомобильных дорог, идущих в плане местности под некоторым углом друг к другу. При этом, если уклон откосов насыпей одинаков и интервалы равны, то соединение откосов происходит по поверхности кругового конуса. Если уклоны откосов насыпей неодинаковые, например, при подходе дороги к мосту, и интервалы различны, то соединение откосов происходит по поверхности эллиптического конуса.

На криволинейном участке автомобильной дороги с одновременным подъемом (спуском) в откосах насыпей или выемок образуется поверхность, которая по своей протяженности имеет постоянно заданный уклон. Такая поверхность называется *поверхностью постоянного (одинакового) ската* или *равного уклона*. Поверхность одинакового ската есть линейчатая поверхность, все прямолинейные образующие которой составляют с горизонтальной плоскостью одинаковый угол наклона.

Образование поверхности постоянного ската рассмотрено на рис. 109. Если прямой круговой конус перемещать таким образом, чтобы его вершина скользила по некоторой заданной кривой, например, по краю дороги, а его ось все время оставалась бы вертикальной, то поверхность, огибающая различные положения конуса, будет поверхностью постоянного ската. Наклон поверхности к плоскости нулевого уровня Π_0 соответствует наклону образующих конуса к этой плоскости.

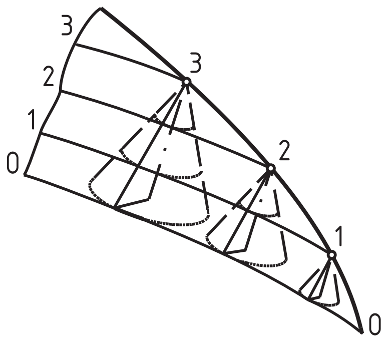


Рис. 109. Образование поверхности постоянного ската

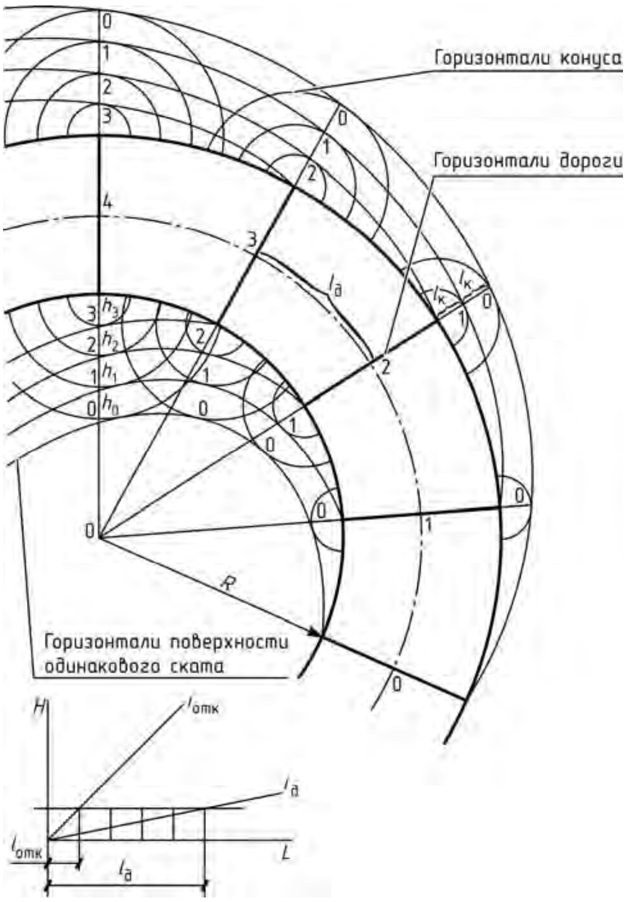


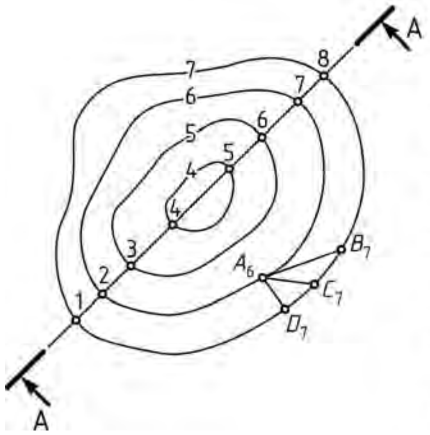
Рис. 110. Криволинейный участок автомобильной дороги

На рис. 110 показан криволинейный участок автомобильной дороги с уклоном $i_д$ = 1 : 5 и интервалом $l_д$ = 5 м. Масштаб 1 : 200. Дорога с постоянно заданным уклоном называется *аппарелью*. На рис. 110 также показаны горизонтали конуса с уклоном $i_к$ = 1:1 и интервалом $l_к$ = 1 м и горизонтали поверхности одинакового ската (откоса) — это кривые линии, огибающие горизонтали конуса с одинаковыми отметками, при этом $l_к = l_{отк}$. Если участок автомобильной дороги прямолинеен, то горизонтали откоса являются прямыми линиями.

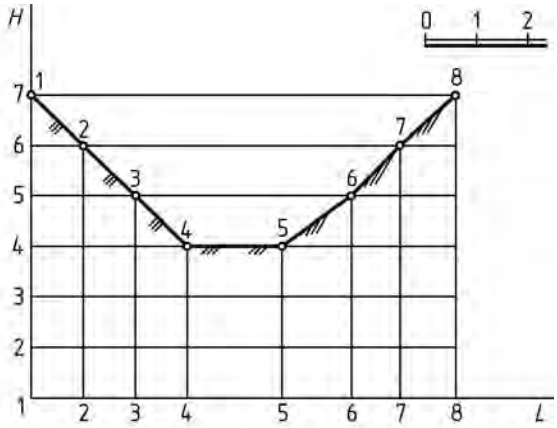
10.4. Топографическая поверхность

Топографическая поверхность в плане местности показывается с помощью горизонталей — линий различной кривизны, соединяющих точки земной поверхности с одинаковыми высотными отметками (рис. 111, *а*).

Разность высотных отметок между двумя соседними горизонталями принимают, как правило, равной 1 м. Расстояние между соседними горизонталями — интервал — определяет уклон топографической поверхности: $l_{AD} < l_{AC} < l_{AB}$. Отсюда, линия наибольшего ската A_6D_7 является самой крутой, а линия наибольшего ската $A_6 B_7$ — самой пологой (см. рис. 111, *а*).



а



б

Рис. 111. Топографическая поверхность и ее профиль

Отметки горизонталей пишут в разрыве линий основанием к понижению и по ним определяют форму земной поверхности:

1) вершина — поверхность, горизонтали которой выражены в виде замкнутых кривых линий, при этом каждая внутренняя горизонталь имеет высотную отметку больше каждой внешней;

2) котловина — поверхность, горизонтали которой выражены в виде замкнутых кривых линий, при этом каждая внутренняя горизонталь имеет числовую отметку меньше каждой внешней;

3) седловина — поверхность, ограниченная с четырех сторон выпуклыми сторонами горизонталей;

4) водораздел (линия хребта) — линия наибольшего ската поверхности, проходящей через точки максимальной кривизны горизонталей в случае, когда любая огибающая горизонталь имеет меньшую высотную отметку, чем огибаемая горизонталь;

5) водослив (тальвег) — линия наибольшего ската поверхности, проходящей через точки максимальной кривизны горизонталей (линия долины) в случае, когда любая огибающая горизонталь имеет бóльшую высотную отметку, чем огибаемая горизонталь.

В практической деятельности для решения целого ряда инженерных задач пользуются вертикальным разрезом топографической поверхности, называемым профилем.

Профилем называется линия пересечения топографической поверхности с вертикальной секущей плоскостью. Профиль может быть совмещенным с топографической поверхностью или вынесенным за ее пределы.

З а д а ч а 42

Дано: топографическая поверхность — котловина (см. рис. 111, *а*).

Выполнить: построить профиль топографической поверхности по сечению *А* — *А* (рис. 111, *б*).

Порядок выполнения:

1. Намечают точки пересечения секущей плоскости *А* — *А* с топографическими горизонталями поверхности (1, 2, 3, 4 и т. д.).

2. Вычерчивают две взаимно перпендикулярные прямые линии — горизонтальную (*L*) и вертикальную (*H*). На горизонтальной прямой отмечают интервалы топографической поверхности вдоль секущей плоскости *А* — *А*, т. е. расстояния между точками пересечения секущей плоскости с топографическими горизонталями поверхности. На вертикальной прямой отмечают единицы вертикального масштаба. Если М 1 : 200, то 1 м = 0,5 см.

3. Точки пересечения одноименных перпендикуляров, проведенных от вертикальной и горизонтальной прямых, соединяют ломаной линией.

10.5. Пересечение прямой линии и плоскости с топографической поверхностью

Рассмотрим пересечение топографической поверхности плоскостью и прямой общего положения.

З а д а ч а 43

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности плоскостью общего положения (рис. 112).

Порядок выполнения:

Для построения линии пересечения плоскости α_i, заданной масштабом уклонов, с топографической поверхностью достаточно отметить точки пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей и соединить их ломаной линией.

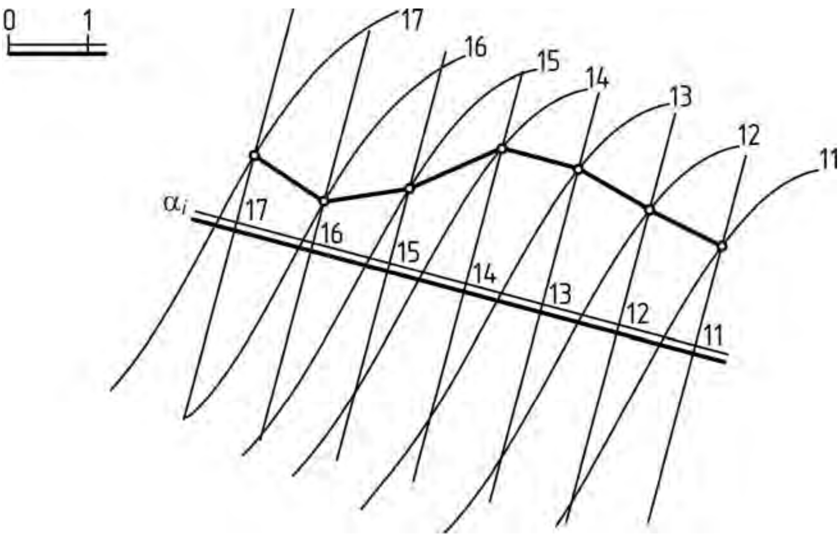


Рис. 112. Пересечение топографической поверхности плоскостью

З а д а ч а 44

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности прямой *AB* общего положения (рис. 113).

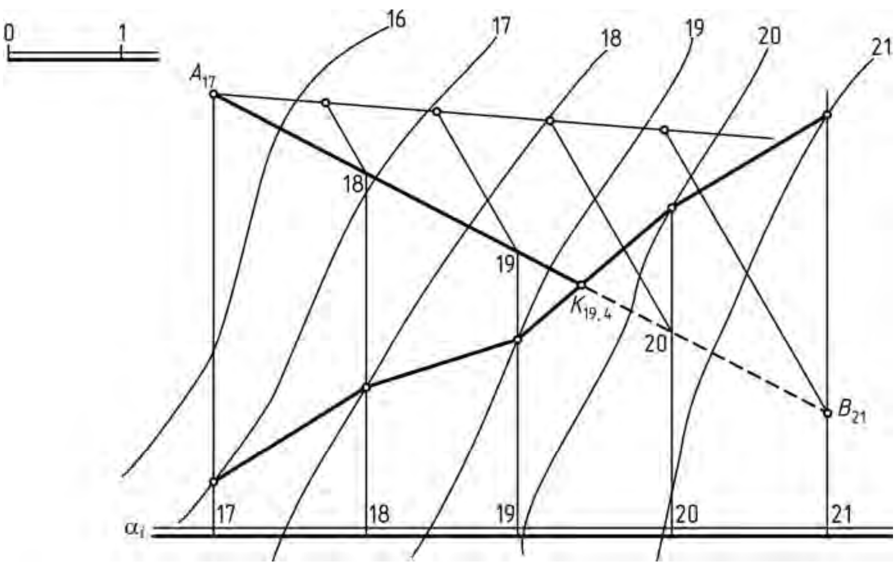


Рис. 113. Пересечение топографической поверхности прямой

Порядок выполнения:

Для определения точки пересечения прямой *AB* с топографической поверхностью прямую градуируют и заключают во вспомогательную плоскость-посредник α_i, проектные горизонтали которой в пределах чертежа пересекаются с соответствующими (одноименными) горизонталями заданной поверхности.

Затем выстраивают линию пересечения вспомогательной плоскости α_i и поверхности. Там, где линия пересечения плоскости α_i и топографической поверхности пересечет заданную прямую *AB*, и будет точка пересечения прямой с топографической поверхностью.

З а д а ч а 45

Дано: топографическая поверхность.

Выполнить: построить пересечение топографической поверхности прямой *AB* способом профиля (рис. 114).

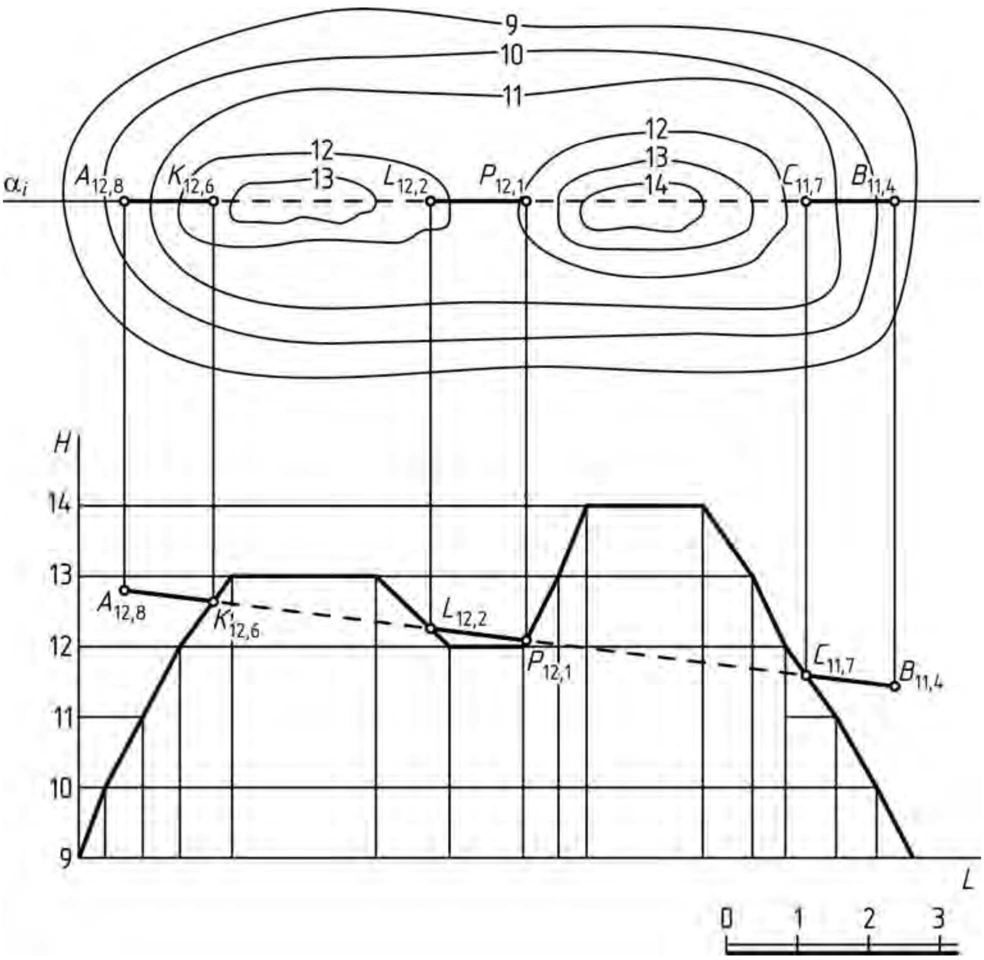


Рис. 114. Пересечение топографической поверхности прямой способом профиля

Порядок выполнения:

Для определения точек пересечения прямой *AB* с топографической поверхностью прямая заключается в плоскость-посредник α_i. По сечению данной плоскости выстраивается профиль топографической поверхности. На профиль наносится прямая *AB* в соответствующих высотных отметках. Там, где прямая *AB* пересекается с профилем топографической поверхности, определяют точки пересечения прямой с топографической поверхностью.

10.6. Примеры решения инженерных задач

З а д а ч а 46

Дано: прямолинейный участок автомобильной дороги с постоянно заданным уклоном $i_а = 1 : 3$. Уклон откосов: $i = 1 : 1$. М 1 : 200.

Выполнить: определить границу земляных работ (рис. 115).

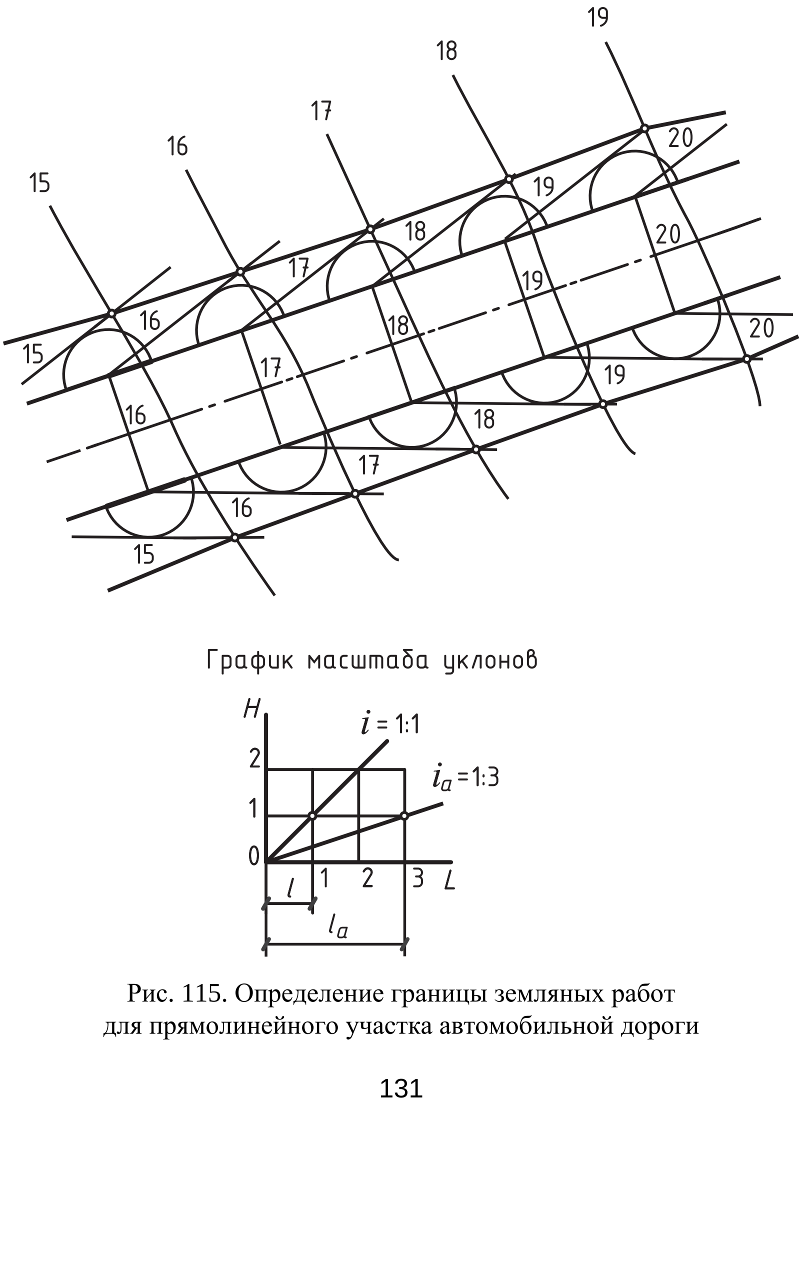


Рис. 115. Определение границы земляных работ
для прямолинейного участка автомобильной дороги

Порядок выполнения:

1. Построить график масштаба уклонов и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов и аппарели.

2. Проградуировать полотно автомобильной дороги, показать на оси дороги точки с высотными отметками 16, 17, 18, 19 и т. д. Через эти точки провести горизонтали аппарели перпендикулярно оси дороги.

3. Построить масштабы уклонов откосов дороги, градуируя их интервалами насыпи и выемки.

4. Вычертить проектные горизонтали откосов дороги.

5. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи и выемки. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинаковые отметки.

6. Направление падения плоскостей откосов показывают на чертежах берг-штрихами (рис. 117 и 118).

З а д а ч а 47

Дано: искусственное сооружение — горизонтальная площадка. Высотная отметка: 52.00. Уклоны откосов: i выемки = 2 : 3, i насыпи =1:1. М 1: 200.

Выполнить: 1) запроектировать горизонтальную площадку на заданной высотной отметке топографической поверхности; 2) построить профиль топографической поверхности и сооружения по сечению A — A (см. рис. 117).

Порядок выполнения:

1. Определить точки нулевых работ (точки 0) и места выемки и насыпи, сравнивая отметки площадки и топографической поверхности.

2. Построить графики масштабов уклонов и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов выемки и насыпи.

3. Построить масштабы уклонов всех откосов площадки, градуируя их интервалами насыпи и выемки. Масштаб уклонов конической поверхности провести в направлении к центру окружности, ограничивающей контур площадки.

4. Вычертить проектные горизонтали всех откосов насыпи и выемки.

5. Построить линии взаимного пересечения откосов насыпи и выемки — это линии пересечения одноименных проектных горизонталей. Их проводят через точки пересечения горизонталей соседних откосов с одинаковыми отметками. Плоские откосы пересекаются по прямой, конический откос с плоским откосом пересекаются по кривой линии.

6. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи и выемки. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинако-

вые отметки. Границы земляных работ соседних откосов должны пересекаться в точках, лежащих на линии взаимного пересечения этих откосов (точки *B*, *C*, *D*, *E* и *F*) (рис. 116).

7. Показать берг-штрихами направление падения плоскостей откосов насыпи и выемки. Берг-штрихи вычерчивают перпендикулярно горизонталям откосов на прямолинейных участках площадки и на продолжении радиусов окружности конической поверхности.

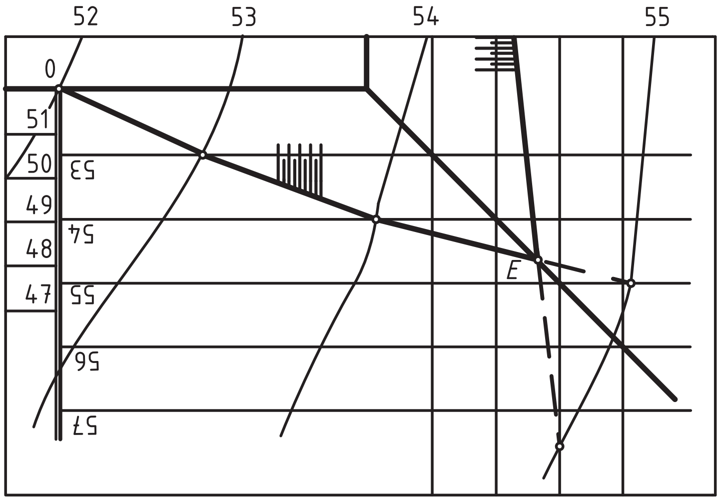


Рис. 116. Пример построения границы земляных работ

8. Построить профиль топографической поверхности по сечению *А* — *А* (точки 1, 2, 3, 4, 5). На него нанести профиль искусственного сооружения — линию пересечения откосов насыпи и выемки и горизонтальной площадки с секущей плоскостью *А* — *А* (точки 6, 7, 8, 9) (см. рис. 117).

З а д а ч а 48

Дано: искусственное сооружение — плотина. Высотная отметка: 22.00. Уклоны откосов насыпи: i = 1 : 1. М 1 : 200.

Выполнить: 1) построить откосы плотины и определить границу земляных работ; 2) построить профиль топографической поверхности и сооружения по сечению *А* — *А* (рис. 118).

Порядок выполнения:

1. Построить график масштаба уклона и определить интервалы заложения проектных горизонталей откосов насыпи.

2. Построить масштабы уклонов откосов плотины, градуируя их интервалами насыпи.

3. Вычертить проектные горизонтали откосов насыпи.

4. Построить границу земляных работ — это линия пересечения одноименных проектных и топографических горизонталей насыпи. Ее проводят через точки пересечения горизонталей откосов с горизонталями топографической поверхности, имеющими одинаковые отметки.

5. Показать берг-штрихами направление падения плоскостей откосов насыпи. Берг-штрихи вычерчивают перпендикулярно горизонталям откосов.

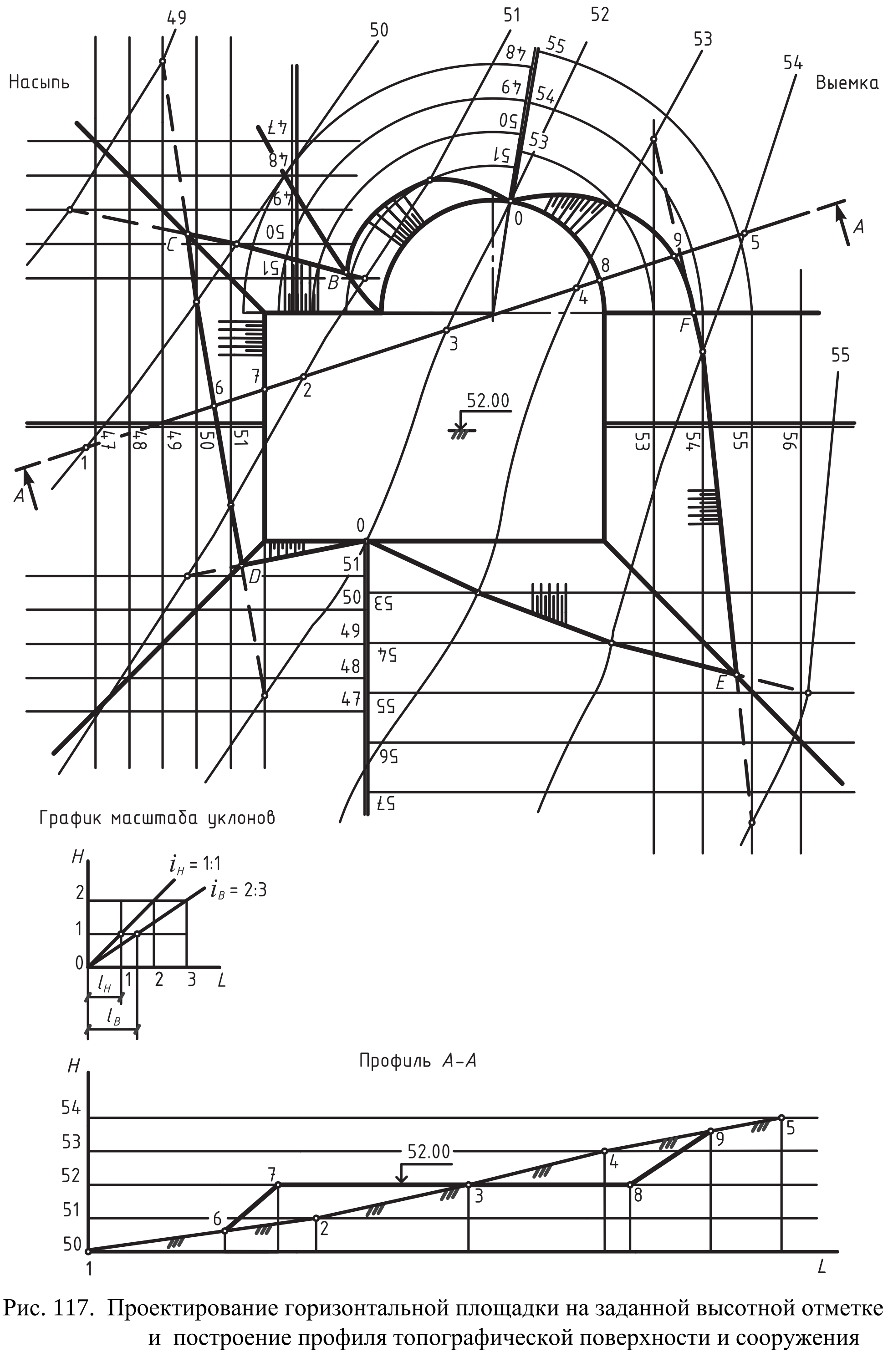


Рис. 117. Проектирование горизонтальной площадки на заданной высотной отметке и построение профиля топографической поверхности и сооружения

6. Построить профиль топографической поверхности по сечению *A* — *A* (точки 1, 2, 3, 4). На него нанести профиль искусственного сооружения — линию пересечения откосов насыпи и плотины с секущей плоскостью *A* — *A* (точки 5, 6, 7, 8) (см. рис. 118).

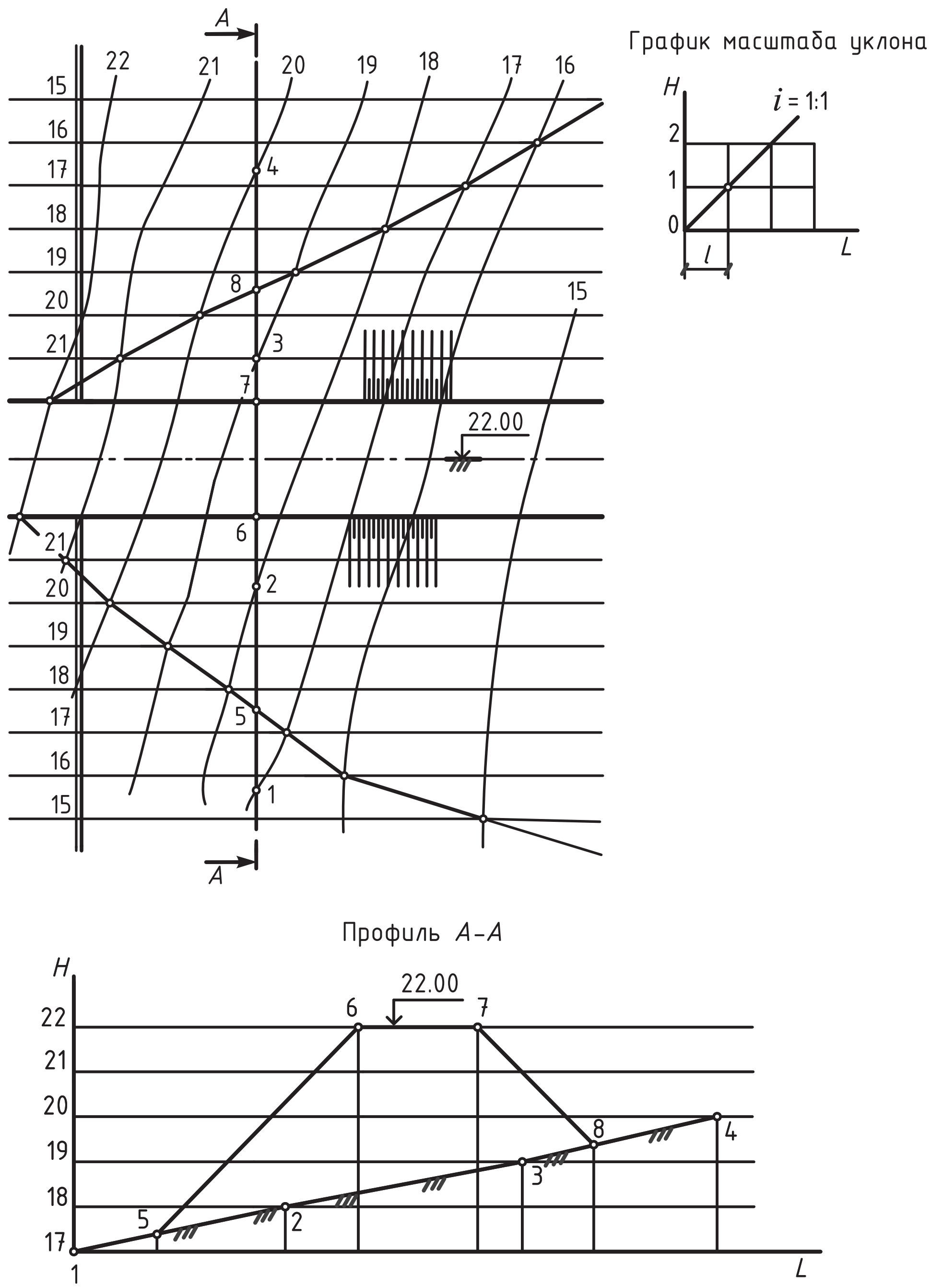


Рис. 118. Проектирование плотины на заданной высотной отметке и построение профиля топографической поверхности и сооружения

Тема 11. Аксонометрические проекции

11.1. Виды аксонометрических проекций. 11.2. Изображение точки, прямой, плоской фигуры и многогранника в аксонометрии. 11.3. Окружность в аксонометрии. 11.4. Аксонометрические проекции геометрических тел

11.1. Виды аксонометрических проекций

При выполнении технических чертежей часто оказывается необходимым наряду с изображением предметов на комплексном чертеже иметь и более наглядное изображение. К таким изображениям относят аксонометрическую проекцию или сокращенно *аксонометрию*, что в переводе с греческого означает «измерение по осям».

Различают аксонометрическое проецирование *центральное* и *параллельное*. Рассмотрим *параллельную аксонометрию*. В этом случае аксонометрическое проецирование представляет собой параллельное проецирование геометрической фигуры на произвольно выбранную плоскость K, которая называется картинной плоскостью. Сущность метода параллельного аксонометрического проецирования заключается в том, что геометрическую фигуру относят к некоторой системе прямоугольных координат и затем проецируют параллельными лучами на плоскость вместе с координатной системой.

На рис. 119 показано аксонометрическое проецирование на картинную плоскость K произвольной точки пространства A, ее горизонтальной проекции A_1 и декартовой системы координат, к которой отнесена в пространстве эта точка.

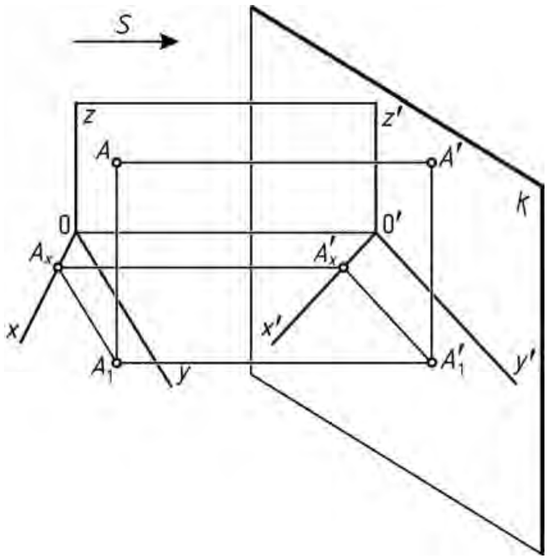


Рис. 119. Проецирование точки

Проецирование осуществляется параллельно некоторому заданному направлению S. Проекция точки A на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией* или *аксонометрией точки A* и обозначается A'. Проекции пространственных координатных осей x, y и z на картинную плоскость K называются *аксонометрическими осями* или *осями аксонометрических координат* и обозначаются x', y' и z'. Горизонтальная проекция точки A_1 на картинную плоскость K называется *аксонометрической проекцией точки* A_1 или *вторичной горизонтальной проекцией точки A* и обозначается A_1'. Аналогично могут быть получены вторичные фронтальная и профильная проекции точки A.

Координаты точки A в декартовой системе координат определяются как $X_A = 0A_x$; $Y_A = 0A_y$; $Z_A = 0A_z$.

Проекции пространственных координат точки A на картинную плоскость K называются *аксонометрическими координатами точки A* и обозначаются $X'_A = 0'A'_x$; $Y'_A = 0'A'_y$; $Z'_A = 0'A'_z$.

На пространственных координатных осях x, y и z откладываются равные отрезки $b = b_x = b_y = b_z$. Величина отрезка b принимается за единицу длины и называется *натуральным масштабом*. Проекции натурального масштаба на картинную плоскость K называются *аксонометрическими масштабами* и обозначаются b'_x, b'_y и b'_z.

Координаты точки A при произвольном положении пространственной системы координат относительно картинной плоскости K будут проецироваться на последнюю с искажениями. Отношения аксонометрических координат точки A к ее натуральным (пространственным) координатам называются *показателями* или *коэффициентами искажения по осям*: $k_1 = x'_A/x_A$; $k_2 = y'_A/y_A$; $k_3 = z'_A/z_A$.

Величину коэффициентов искажения можно также определить как отношение соответствующего аксонометрического масштаба к натуральному: $k_1 = b'_x/b_x$; $k_2 = b'_y/b_y$; $k_3 = b'_z/b_z$.

Коэффициенты искажения являются отвлеченными числами, показывающими, в каком отношении меняются размеры геометрических образов при проецировании их на плоскость аксонометрических проекций.

По направлению проецирования на плоскость различают:

прямоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи составляют с плоскостью проекций прямой угол;

косоугольные аксонометрические проекции, если проецирующие лучи образуют с плоскостью проекций острый угол.

В зависимости от соотношения коэффициентов искажения по осям аксонометрические проекции делятся на следующие виды:

1) *изометрические* (изометрия) — коэффициенты искажения равны по всем трем осям ($k_1 = k_2 = k_3$);

2) *диметрические* (диметрия) — коэффициенты искажения равны по каким-либо двум осям ($k_1 = k_2$ или $k_1 = k_3$ или $k_2 = k_3$);

3) *триметрические* (триметрия) — коэффициенты искажения различны по всем трем осям ($k_1 \neq k_2 \neq k_3$).

Все виды аксонометрических проекций характеризуются двумя параметрами — направлением аксонометрических осей и коэффициентами искажения по этим осям.

ГОСТ 2.317—69 устанавливает аксонометрические проекции, применяемые в чертежах всех отраслей промышленности и строительства. Рассмотрим наиболее часто применяемые в техническом черчении виды аксонометрических проекций.

Прямоугольная изометрия. Положение аксонометрических осей в прямоугольной изометрии показано на рис. 120. Коэффициент искажения по осям x', y' и z' равен 0,82. В целях упрощения изометрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x', y' и z', приняв коэффициент искажения равным 1.

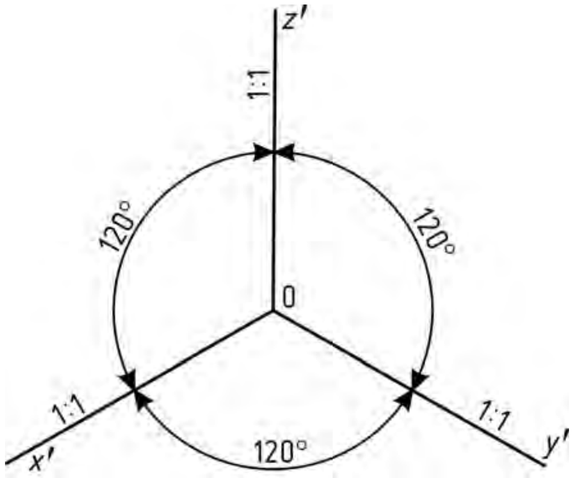
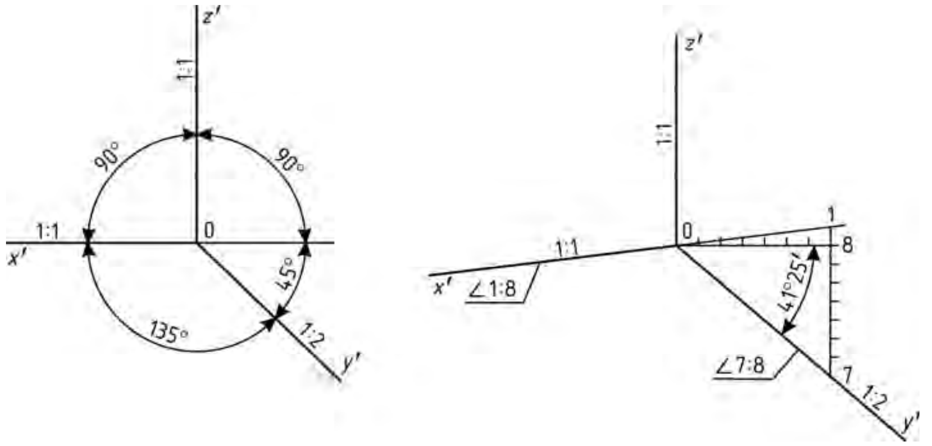


Рис. 120. Прямоугольная изометрия

Прямоугольная диметрия. Положение аксонометрических осей в прямоугольной диметрии показано на рис. 121, *б*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 0,94, а по оси y' равен 0,47. В целях упрощения диметрическую проекцию, как правило, выполняют без искажения по осям x' и z' и с коэффициентом искажения по оси y', равным 0,5.

Косоугольная фронтальная диметрия. Положение аксонометрических осей в косоугольной фронтальной диметрии показано на рис. 121, *а*. Коэффициент искажения по осям x' и z' равен 1, по оси y равен 0,5.

Выбор аксонометрических проекций для построения изображений различных объектов определяется в основном их формой и устройством и подчиняется определенным требованиям, главными из которых являются наглядность и простота построения. Задав систему аксонометрических осей и коэффициенты искажения по ним, можно построить аксонометрические изображения любой геометрической фигуры по ее ортогональным проекциям.



а *б*

Рис. 121. Косоугольная и прямоугольная фронтальные диметрии

11.2. Изображение точки, прямой, плоской фигуры и многогранника в аксонометрии

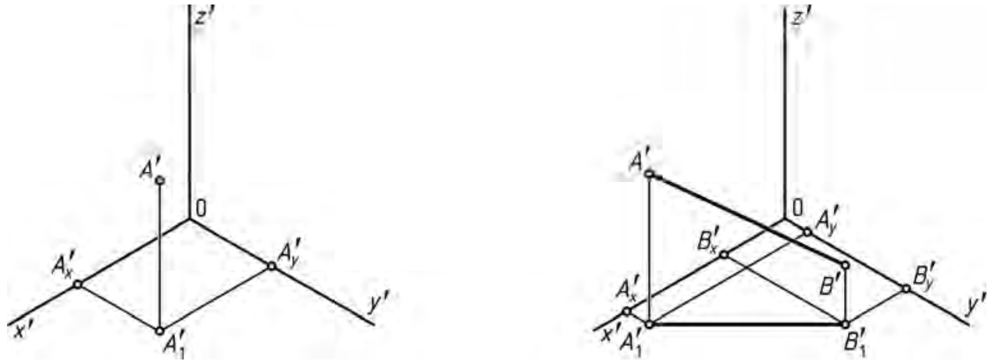
Для построения аксонометрической проекции точки A при заданном направлении аксонометрических осей необходимо отложить на координатных осях пространственные координаты этой точки, учитывая коэффициенты искажения по осям.

Рассмотрим построение аксонометрической проекции точки A в прямоугольной изометрии. В этом виде аксонометрического проецирования углы между координатными осями равны 120°, а коэффициенты искажения по координатным осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Сначала по ортогональным проекциям точки A определяют ее пространственные координаты: $X_A = 0A_x$; $Y_A = 0A_y$; $Z_A = 0A_z$.

Затем, учитывая коэффициенты искажения по координатным осям, находят аксонометрические координаты точки A: $X'_A = k_1 X_A$; $Y'_A = k_2 Y_A$; $Z'_A = k_3 Z_A$. Так как коэффициенты искажения по осям $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, то $X'_A = X_A$; $Y'_A = Y_A$; $Z'_A = Z_A$.

В заданной системе аксонометрических осей выстраивают, как правило, вначале вторичную горизонтальную проекцию A'_1, а затем, откладывая аксонометрическую координату Z'_A точки A параллельно оси z', выстраивают аксонометрию точки A' (рис. 122, *а*).



а *б*

Рис. 122. Аксонометрические проекции точки и прямой

Используя данную систему построения аксонометрической проекции точки, можно выстраивать аксонометрические проекции любого геометрического образа (отрезка, плоской фигуры, многогранника, поверхности и т. д.) в любом виде аксонометрии.

На рис. 122, *б* показано построение отрезка *AB* прямой в прямоугольной изометрии. По вышеописанному алгоритму вначале выстраивают вторичные горизонтальные проекции A_1' и B_1', а затем, откладывая аксонометрическую координату Z_A' и Z_B' точек *A* и *B* параллельно оси *z'*, выстраивают аксонометрию точек *A'* и *B'*. Соединив вторичные горизонтальные проекции A_1' и B_1', получают вторичную горизонтальную проекцию отрезка прямой $A_1'B_1'$. Соединив аксонометрии точек *A'* и *B'*, получают аксонометрию отрезка прямой *A'B'*.

По аналогии, задав дополнительно точки *C*, *D* и *E*, можно построить аксонометрическую проекцию плоской фигуры (рис. 123).

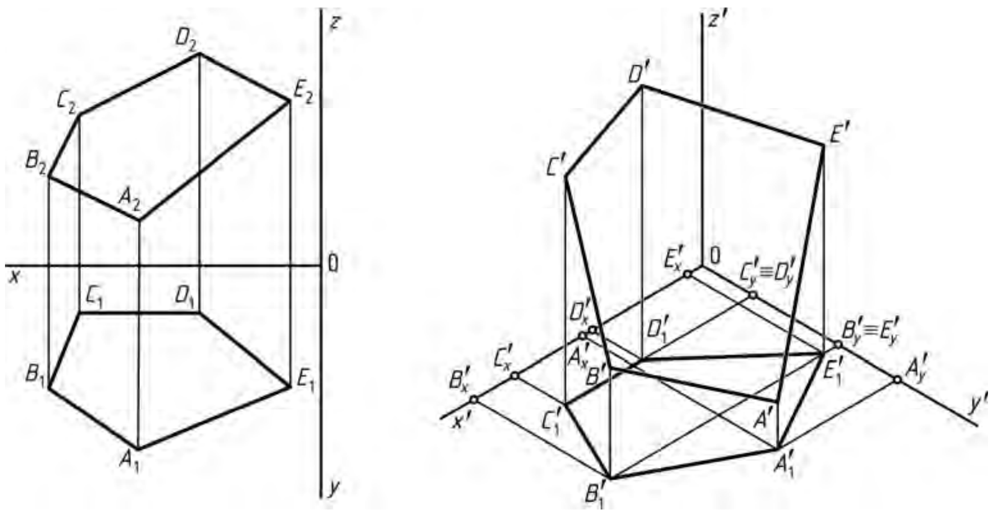


Рис. 123. Аксонометрическая проекция плоской фигуры

Построение аксонометрических проекций многогранника сводится к определению аксонометрических проекций его вершин и соединению их между собой отрезками прямых линий (рис. 124).

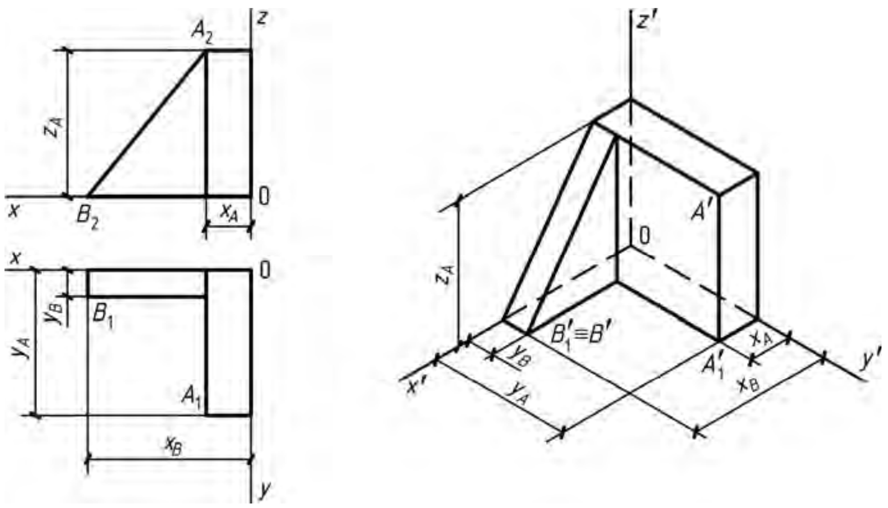


Рис. 124. Аксонометрическая проекция многогранника

11.3. Окружность в аксонометрии

Построение аксонометрических проекций предметов, форма которых имеет поверхность вращения, невозможно без изображения аксонометрической проекции окружности. Аксонометрическая проекция окружности представляет собой замкнутую кривую линию, для удобства построения которой иногда применяют способ сетки. В этом случае окружность делят на определенное количество частей, строят сетку и вписывают эллипс (рис. 125).

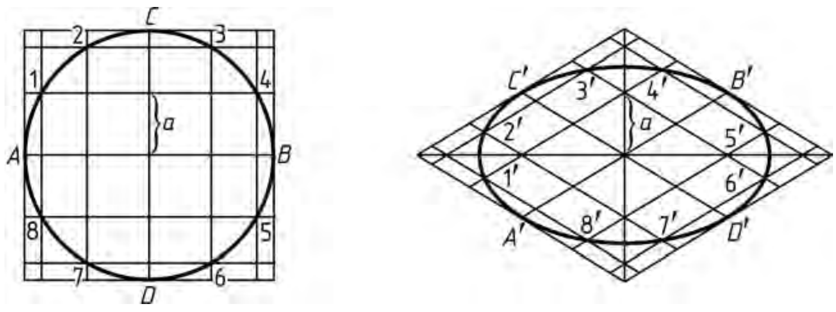


Рис. 125. Аксонометрическая проекция окружности

Данный способ используется для всех видов аксонометрических проекций, где окружность проецируется с искажением. Однако там, где это возможно, в аксонометрических проекциях эллипс заменяют овалом. *Овалом* называется кривая линия, по начертанию похожая на эллипс, но выстроенная с помощью циркуля.

Рассмотрим построение окружности в прямоугольной изометрии. Основное требование к построению аксонометрических проекций окружностей следующее: направление большой оси эллипсов определяется как перпендикуляр к той оси координат, которой нет в плоскости окружности. Так, в координатной плоскости Π_1 большая ось эллипса перпендикулярна оси z', в плоскости Π_2 перпендикулярна оси y', в плоскости Π_3 перпендикулярна оси x' (рис. 126).

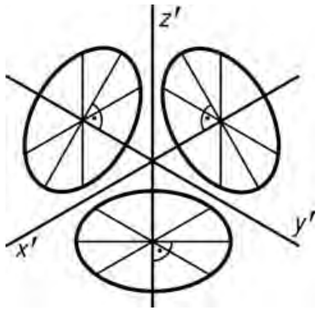


Рис. 126. Аксонометрические проекции окружности

В целях упрощения построений эллипсы могут быть заменены овалами, состоящими из дуг окружностей. В прямоугольной изометрии форма овалов будет одинакова для всех трех координатных плоскостей проекций. При выполнении прямоугольной изометрии без искажения по осям x, y и z, согласно ГОСТ 2.317—69 большая ось эллипсов равна 1,22, малая ось эллипсов — 0,71 диаметра заданной окружности.

Приведем пример построения овала без вычисления размеров большой и малой осей. Направление большой оси определяется исходя из вышеназванного требования, в нашем примере — перпендикулярно координатной оси z'. Очерчивается окружность заданного радиуса. Через центр окружности проводятся прямые, параллельные координатным осям x' и y'. Пересечением этих прямых с очерком окружности являются точки сопряжения дуг овала. Из построений определяются: центры большой (0_1) и малой ($0_1'$) дуг овала, радиус большой R и малой r дуг овала (рис. 127).

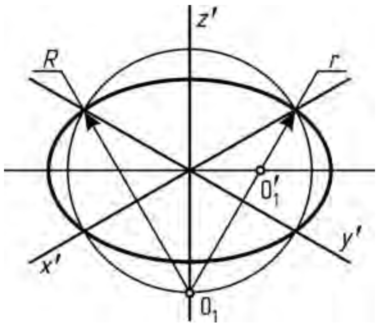


Рис. 127. Построение овала в прямоугольной изометрии

11.4. Аксонометрические проекции геометрических тел

Построение аксонометрических проекций геометрических тел рекомендуется начинать с построения аксонометрических проекций их оснований, к которым выстраивают изображение других элементов геометрических тел (ребер, граней, оснований, образующих). На рис. 128 показано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения правильной прямой шестигранной призмы согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

Оси аксонометрии проводят по нижнему основанию призмы. Строят вторичную проекцию основания. Затем на вертикальных прямых от каждой вершины откладывают высоту призмы, получая вершины верхнего основания. Соединяют полученные точки и выстраивают верхнее основание призмы.

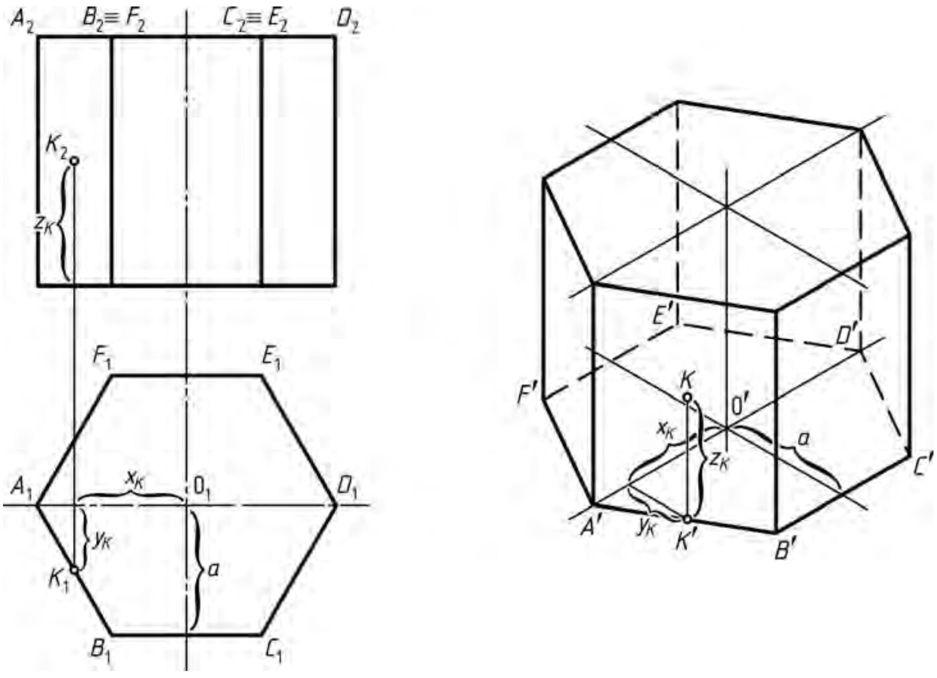


Рис. 128. Аксонометрическая проекция призмы

На рис. 129 дано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения правильной прямой шестигранной пирамиды. Вначале строят вторичную проекцию ее основания. Затем от центра основания, через которое проходят оси аксонометрии, проводят вертикальную прямую и на ней откладывают высоту пирамиды согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

На рис. 130 дано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения прямого кругового конуса. Вначале строят вторичную проекцию основания конуса в виде эллипса (овал). Затем от центра основания, через которое проходят оси аксонометрии, проводят вертикальную прямую и на ней откладывают высоту конуса согласно предложенному чертежу в двух проекциях.

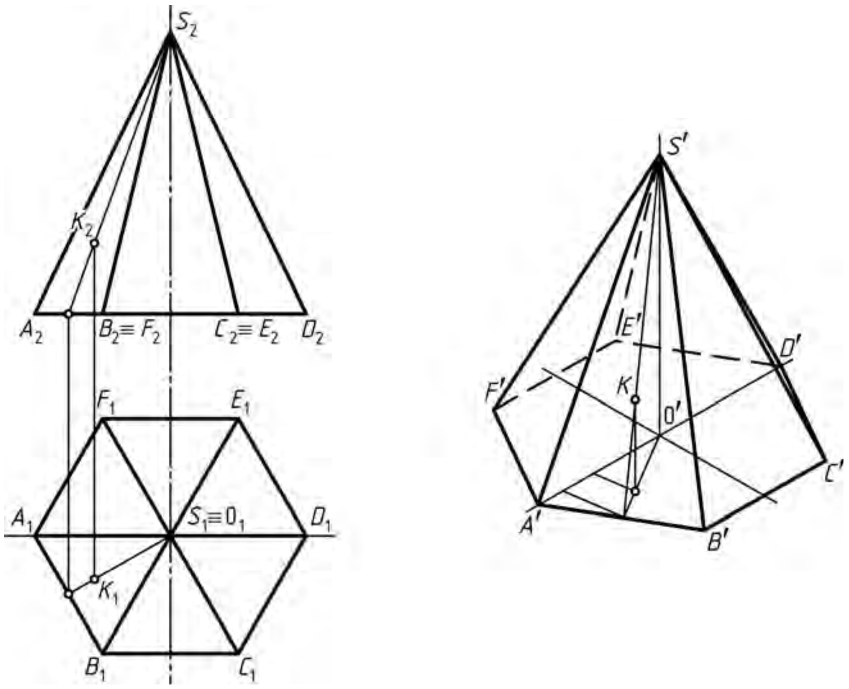


Рис. 129. Аксонометрическая проекция пирамиды

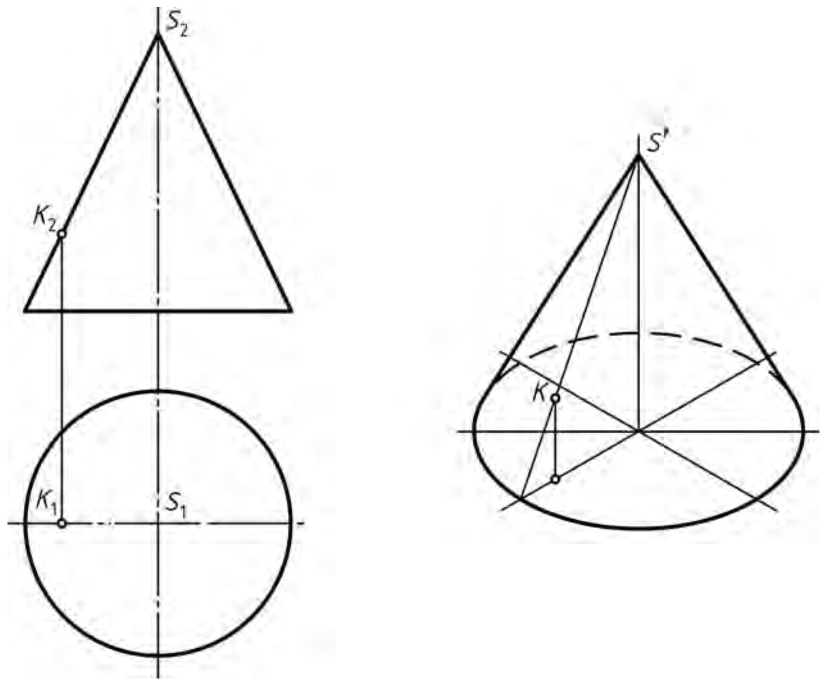


Рис. 130. Аксонометрическая проекция конуса

На рис. 131 показано построение в прямоугольной изометрии аксонометрического изображения прямого кругового цилиндра с вырезами.

Оси аксонометрии проводят по нижнему основанию цилиндра. Строят вторичную проекцию основания в виде эллипса (овал). Затем берут полную высоту цилиндра и делают вырезки согласно предложенному чертежу в двух проекциях. Вначале находят линию $A'N'$, затем опускаются ниже и выстраивают линии $C'K'$ и $C'D'$ и потом выполняют линии $B'F'$ и $F'E'$.

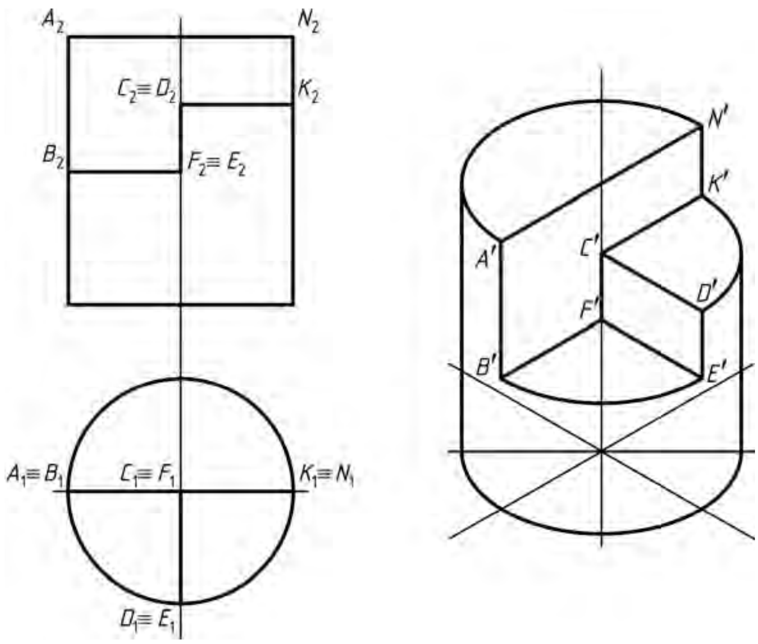


Рис. 131. Аксонометрическая проекция цилиндра с вырезами

II. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К НИМ

В процессе изучения начертательной геометрии студенты выполняют две домашние контрольные работы. Каждая из них проходит две стадии проверки: первая — рецензирование преподавателем (в присутствии студента или без него), вторая — устная защита листов студентом (по выбору преподавателя). На первой стадии студент должен получить допуск к защите или экзамену. Вторая стадия проверки проводится после исправления всех замечаний рецензента.

Задачи контрольных работ сопровождаются пояснительными записками. Объем и требования к оформлению пояснительных записок устанавливает кафедра. Задачи контрольных работ выполняются по индивидуальным вариантам. Вариант должен соответствовать последней цифре шифра — номера студенческого билета, например, если шифр 478, студент выполняет вариант 8.

Контрольные работы сдаются на проверку в сброшюрованном виде и должны включать все листы, предусмотренные содержанием, в противном случае работы не рецензируются. Контрольные работы возвращают студенту с пометкой о допуске к защите (экзамену) и замечаниями на листе 2. Преподаватель должен указать, что исправить, какую часть переработать или выполнить заново. «Забракованные» листы или задачи представляются при устной защите вместе с исправленными или выполненными вновь.

На стадии устной защиты со студентом проводится собеседование по теоретическим вопросам курса. Преподаватель вправе не засчитать и передать на кафедру представленные контрольные работы, если при собеседовании убеждается, что они выполнены несамостоятельно или скопированы. Контрольные рекомендуется передавать (или отсылать) на рецензирование в сроки, предусмотренные рабочим планом изучения курса. Зачтенные работы приносят на экзамен обязательно сброшюрованными в альбом, снабженный титульным листом с содержанием.

Представленный объем контрольных работ исходит из общей трудоемкости дисциплины, равной 108 ч (лекции — 6 ч, практические занятия — 8 ч, самостоятельная работа студентов — 94 ч), рассчитанной для студентов заочной формы обучения направления подготовки 270800 «Строительство» (бакалавриат).

Итоговой проверкой знаний является экзамен. Студент должен решить предложенные задачи и в графической форме ответить на вопросы экзаменационного билета. Кроме того, экзаменатору предоставляется право задавать дополнительные вопросы.

В период экзаменационной сессии читаются лекции, проводятся практические занятия и консультации. Студент должен рационально использовать время, отведенное на консультации, заранее подготавливать вопросы. За разъяснением вопросов, возникших в межсессионный период, нужно в устной или письменной форме обратиться на кафедру.

Важную роль при изучении учебного материала играет конспектирование, так как приучает студента самостоятельно мыслить и коротко формулировать основные положения курса. Объем конспектов не регламентирован, их качество преподаватель проверяет на консультациях, экзамене, зачете. При самостоятельном изучении курса начертательной геометрии рекомендуется внимательно ознакомиться с программой, приобрести необходимую учебную литературу, организовать рабочее место. Правильно построенные самостоятельные занятия позволяют сэкономить время и получить хорошие результаты. При организации учебного процесса следует руководствоваться следующими рекомендациями: 1) изучать начертательную геометрию строго последовательно и систематически; 2) изученные теоретические положения обязательно подкреплять практическим решением задач; 3) проявлять максимальную самостоятельность, так как начертательную геометрию заучить нельзя, ее надо понимать; 4) научиться совмещать текст и чертеж книги, привлекая на помощь свое пространственное воображение, допуская в отдельных случаях простейшие модели; 5) приучить себя укладываться в сроки, рекомендуемые вузом, и своевременно отсылать и передавать на рецензирование контрольные работы.

Оформление контрольных работ. Контрольные работы брошюруют в альбом «Начертательная геометрия». Обложкой служит титульный лист с содержанием (рис. 1). Листы контрольных работ прочно сшивают нитками (не допускаются веревочки, ленточки, металлические зажимы и т. п.). Контрольные работы оформляют как текстовые документы по ГОСТ 2.105—79 (СТ СЭВ 2667—80).

Поле текстовых и графических документов ограничивается рамкой, внутри которой помещается основная надпись. Задачи выполняют с двух сторон листа формата А3 (297×420 мм). Оборотная сторона титульного листа (с содержанием) используется для работы над ошибками и оформляется как оборотная сторона текстового документа. Все текстовые и графические документы выполняют в соответствии с государственными стандартами СПДС (Системы проектной документации для строительства) и ЕСКД (Единой системы конструкторской документации). Они должны отличаться выразительностью, аккуратностью и четкостью графического исполнения. Толщину и тип линий принимают в соответствии с ГОСТ 2.303—68 (СТ СЭВ 1180—78). Условия задач, все геометрические построения выполняют с помощью чертежных инструментов, карандашом, вначале тонкими линиями (0,2 мм), а затем линии видимого контура обводят карандашом сплошной линией толщиной 0,6…0,8 мм, линии невидимого контура — штриховой 0,3…0,4 мм, все остальные — тонкой линией 0,2 мм. Дополнительные требования к оформлению графических изображений приведены в указаниях к конкретным задачам. Надписи и буквенно-цифровые обозначения на листах и в основной надписи выполняют стандартным шрифтом по ГОСТ ЕСКД 2.304—81 (СТ СЭВ 851—78 — СТ СЭВ 855—78). Высота шрифта для размерных чисел и буквенно-цифровых обозначений 3,5 мм, для цифровых индексов — 2,5 мм. Номера задач на листах выполняют шрифтом высотой 5 или 7 мм и обводят в кружок диаметром 10…14 мм. На чертежах необходимо оставлять все линии графических построений и ризки для нанесения надписей, буквенных и цифровых обозначений, размерных чисел.

Контрольная работа 1

Листы 1—5. Листы 2, 4 выполняют на обороте листов 1, 3, 5.

Лист 1

Выполняются титульный лист и содержание контрольных работ по дисциплине (см. рис. 1).

Лист 2

Выполняются графические задания, в которых были допущены ошибки, указанные рецензентом. Объем и характер задач определяются преподавателем.

Лист 3

Выполнить три задачи на точку, прямую и плоскость в ортогональных проекциях, используя учебный материал, приведенный в темах 1 — 4 теоретической части. Пример выполнения листа приведен на рис. 2. Задачи 1 и 2 совместить на одном чертеже в левой части листа, а задачу 3 расположить в правой части листа. Точку E построить только для задачи 3. Для левой и правой части листа координатные оси показывать раздельно. Четко различать видимые и невидимые линии чертежа. Обозначить все точки чертежа.

З а д а ч а 1

Дано: плоскость α (ΔABC) и точка D.

Выполнить: 1) определить расстояние от точки D до плоскости, заданной треугольником α (ΔABC); 2) определить видимость перпендикуляра, проходящего через точку D и плоскость треугольника α (ΔABC). Данные для выполнения задачи взять из табл. 1 в соответствии с вариантом.

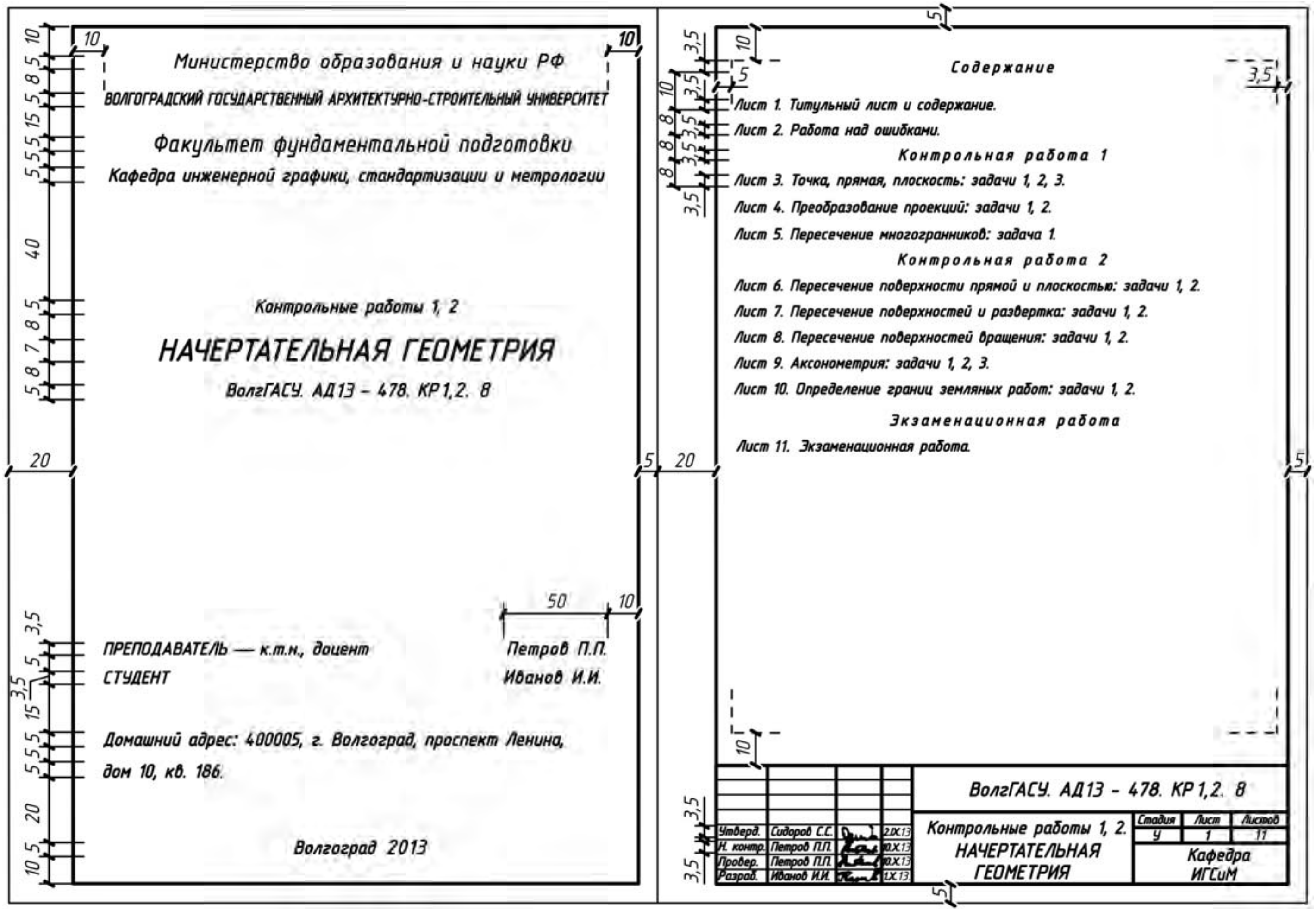


Рис. 1. Образец оформления титульного листа контрольной работы

Порядок выполнения:

1. Применяя теорему о перпендикулярности прямой плоскости, из точки D опускают перпендикуляр, используя горизонталь h и фронталь f плоскости α (ΔABC). При этом горизонтальная проекция перпендикуляра должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали h_1, а фронтальная проекция перпендикуляра соответственно перпендикулярна фронтальной проекции фронтали f_2.

2. Определяют точку пересечения перпендикуляра с плоскостью α (ΔABC), для чего перпендикуляр (прямую) заключают во вспомогательную (обычно проецирующую) плоскость-посредник γ, находят линию пересечения плоскости α (ΔABC) и вспомогательной плоскости γ и отмечают точку K, в которой эта линия пересекается с перпендикуляром.

3. Определяют натуральную величину расстояния от точки D до плоскости α (ΔABC), применяя способ прямоугольного треугольника.

4. Видимость проекции перпендикуляра определяют методом конкурирующих точек.

Таблица 1

№ варианта	Значения координат, мм														
	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Y_B	Z_B	X_C	Y_C	Z_C	X_D	Y_D	Z_D	X_E	Y_E	Z_E
1	170	120	80	140	45	135	70	60	50	185	45	55	60	70	75
2	10	40	80	80	110	120	140	80	40	140	20	110	10	80	60
3	50	90	100	110	20	10	180	115	100	80	115	10	180	30	120
4	20	40	30	90	15	130	140	95	95	140	15	65	20	60	45
5	45	110	120	15	20	30	145	90	55	135	30	110	25	70	70
6	10	60	130	150	10	90	70	100	50	150	100	130	20	40	90
7	50	50	20	140	20	120	180	110	60	110	110	120	70	10	20
8	60	60	10	145	20	120	185	100	45	185	10	20	55	30	50
9	30	10	80	125	70	120	90	120	15	140	15	50	30	35	30
0	40	80	20	130	20	20	170	95	100	70	35	110	180	50	65

Задача 2

Дано: плоскость треугольника α (ΔABC).

Выполнить: построить плоскость, параллельную заданной и отстоящую от нее на 45…50 мм. Данные для выполнения задачи взять из табл. 1 в соответствии с вариантом.

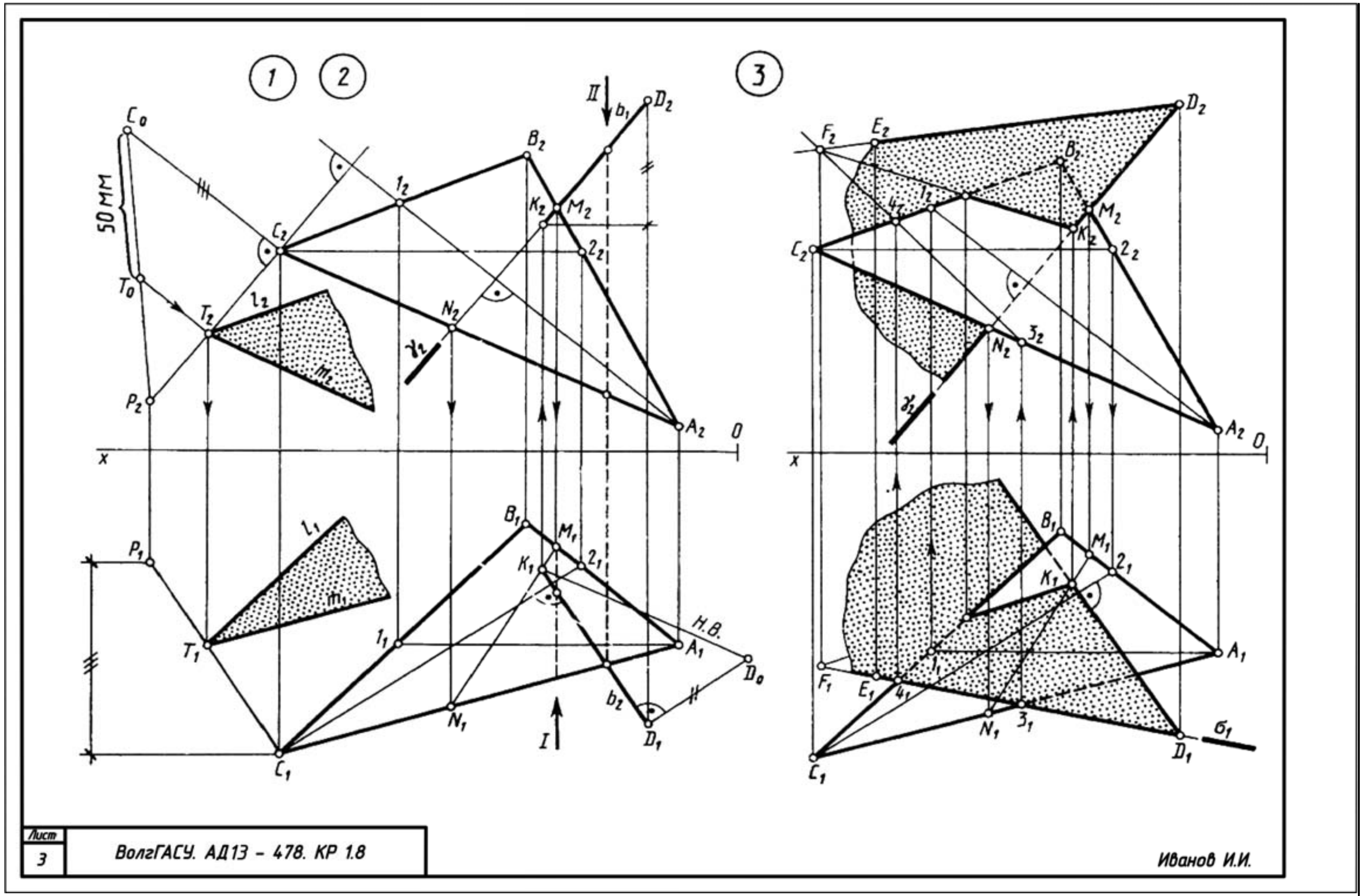


Рис. 2. Образец оформления листа 3 контрольной работы

Порядок выполнения:

1. В заданной плоскости α (Δ*ABC*) выбирают произвольную точку, в том числе вершину (на рис. 2 взята точка *C*), и из нее восстанавливают перпендикуляр к плоскости α (Δ*ABC*) (аналогично действию первому в задаче 1). В связи с тем, что задачи 1 и 2 совмещены на одном чертеже и направление перпендикуляра к плоскости α (Δ*ABC*) уже выявлено — прямая *b* (*DK*), то перпендикуляр через произвольно выбранную точку можно провести как прямую, параллельную перпендикуляру *b* (*DK*). На эпюре одноименные проекции параллельных прямых параллельны.

2. Методом прямоугольного треугольника определяют натуральную величину перпендикуляра, который ограничивают в произвольной точке *P*.

3. На натуральной величине отрезка перпендикуляра находят точку *T*, расположенную на заданном расстоянии (например, 50 мм) от плоскости α (Δ*ABC*), и выстраивают проекции этой точки на проекциях перпендикуляра.

4. Через точку *T* строят искомую плоскость, соблюдая условие параллельности плоскостей: если плоскости параллельны, то две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. На эпюре одноименные проекции пересекающихся прямых параллельны.

З а д а ч а 3

Дано: плоскость треугольника α (Δ*ABC*) и прямая *a* (*DE*).

Выполнить: 1) через прямую *a* (*DE*) провести плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника α (Δ*ABC*); 2) построить линию пересечения этих двух плоскостей; 3) определить видимость отсеков плоскостей. Данные для выполнения задачи взять из табл. 1.

Порядок выполнения:

1. Строят плоскость, перпендикулярную плоскости α (Δ*ABC*). Плоскость, перпендикулярная другой плоскости, должна проходить через перпендикуляр к этой плоскости. Искомая плоскость, таким образом, должна содержать в себе заданную прямую *a* (*DE*) и перпендикуляр, опущенный из любой точки этой прямой на заданную плоскость α (Δ*ABC*), например, из точки *D*.

2. Строят линию пересечения двух плоскостей — заданной плоскости α (Δ*ABC*) и построенной, перпендикулярной ей. Задачу на определение линии пересечения двух плоскостей можно решить двумя способами: первый — построить точки пересечения двух прямых одной плоскости с другой плоскостью, т. е. использовать два раза схему нахождения точки пересечения прямой с плоскостью; второй — ввести две

вспомогательные секущие плоскости частного положения, которые одновременно пересекали бы плоскость α (ΔABC) и плоскость, перпендикулярную ей, построить их линии пересечения с заданными плоскостями. Две собственные точки пересечения этих линий определяют линию пересечения данных плоскостей. В задаче 3, представленной на рис. 2, применен первый способ. Точки пересечения прямой a (DE) и перпендикуляра b (DK) определяют линию пересечения плоскостей α (ΔABC) и искомой перпендикулярной к ней.

3. Определяют видимость пересекающихся заданных плоскостей с помощью конкурирующих точек скрещивающихся прямых, принадлежащих этим плоскостям.

При решении задач 1, 2 и 3 листа 3 нужно помнить следующие положения ортогональных проекций:

1. Две проекции точки определяют ее положение в пространстве (относительно плоскостей проекций), так как по двум проекциям можно установить расстояние от точки до всех трех основных плоскостей проекций.

2. Ортогональные проекции одной и той же точки располагаются на перпендикуляре к оси проекции, который называется линией связи.

3. Если одна проекция прямой параллельна оси проекции, то такая прямая параллельна одной из плоскостей проекций. Принадлежащий ей отрезок проецируется на одну плоскость в натуральную величину (горизонтальная, фронтальная, профильная прямые). Если обе проекции прямой параллельны одной из осей проекций, то такая прямая занимает проецирующее положение. Одна из ее проекций вырождается в точку.

4. Проекция отрезка прямой общего положения всегда меньше натуральной величины отрезка. Одноименные проекции параллельных прямых взаимно параллельны. Точки пересечения одноименных проекций пересекающихся прямых расположены на одной и той же линии связи. Точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не расположены на одной и той же линии связи.

5. Прямой угол проецируется на плоскость также в прямой угол, если одна его сторона параллельна этой плоскости.

6. Горизонталь, фронталь и линии наклона плоскости являются главными линиями плоскости. Фронтальная проекция горизонтали параллельна оси $0x$, горизонтальная проекция параллельна горизонтальному следу плоскости. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси $0x$, фронтальная проекция — фронтальному следу плоскости. Линии наклона плоскости перпендикулярны фронталям, горизонталям или профильным прямым плоскости. Угол их наклона к соответствующей плоскости проекций определяет угол наклона плоскости к той же плоскости проекций.

Лист 4

Выполнить две задачи на способы преобразования проекций, используя учебный материал, приведенный в теме 5 теоретической части. Пример выполнения листа 4 представлен на рис. 3.

З а д а ч а 1

Дано: плоскость α (Δ*ABC*).

Выполнить: способом вращения вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, определить натуральную величину α (Δ*ABC*). Данные для выполнения задачи принять по табл. 2.

Порядок выполнения:

1. Приводят плоскость α (Δ*ABC*) в положение, перпендикулярное плоскости проекций. Признаком перпендикулярности заданной плоскости плоскостям проекций на эпюре является вырождение одной из проекций плоскости треугольника α (Δ*ABC*) в прямую линию. Для получения фронтально-проецирующей плоскости необходимо горизонталь *h* плоскости α (Δ*ABC*) вместе с системой всех точек треугольника *ABC* поставить в положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций, а для получения горизонтально-проецирующей плоскости необходимо фронталь *f* плоскости α (Δ*ABC*) перевести в положение прямой, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций.

Таблица 2

№ варианта	Значения координат, мм								
	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Y_B	Z_B	X_C	Y_C	Z_C
1	90	90	10	140	90	70	160	20	30
2	10	30	80	20	80	10	90	10	10
3	10	10	20	100	35	20	50	80	65
4	85	30	30	135	80	30	155	50	80
5	40	20	40	140	95	20	160	10	70
6	10	90	60	20	20	10	80	20	40
7	20	65	95	45	25	30	95	15	95
8	20	40	30	40	85	100	80	20	100
9	15	100	60	50	30	10	90	100	30
0	20	100	85	30	50	10	90	100	30

2. Полученную проецирующую плоскость преобразуют в плоскость уровня, т. е. параллельную либо горизонтальной, либо фронтальной плоскости проекций в зависимости от ее положения на первом этапе преобразования. Для этого выродившуюся в прямую линию проекцию α (Δ*ABC*) поворачивают в положение, параллельное оси 0*x*. Проекция плоскости α (Δ*ABC*) на одной из плоскостей проекций и будет являться натуральной величиной.

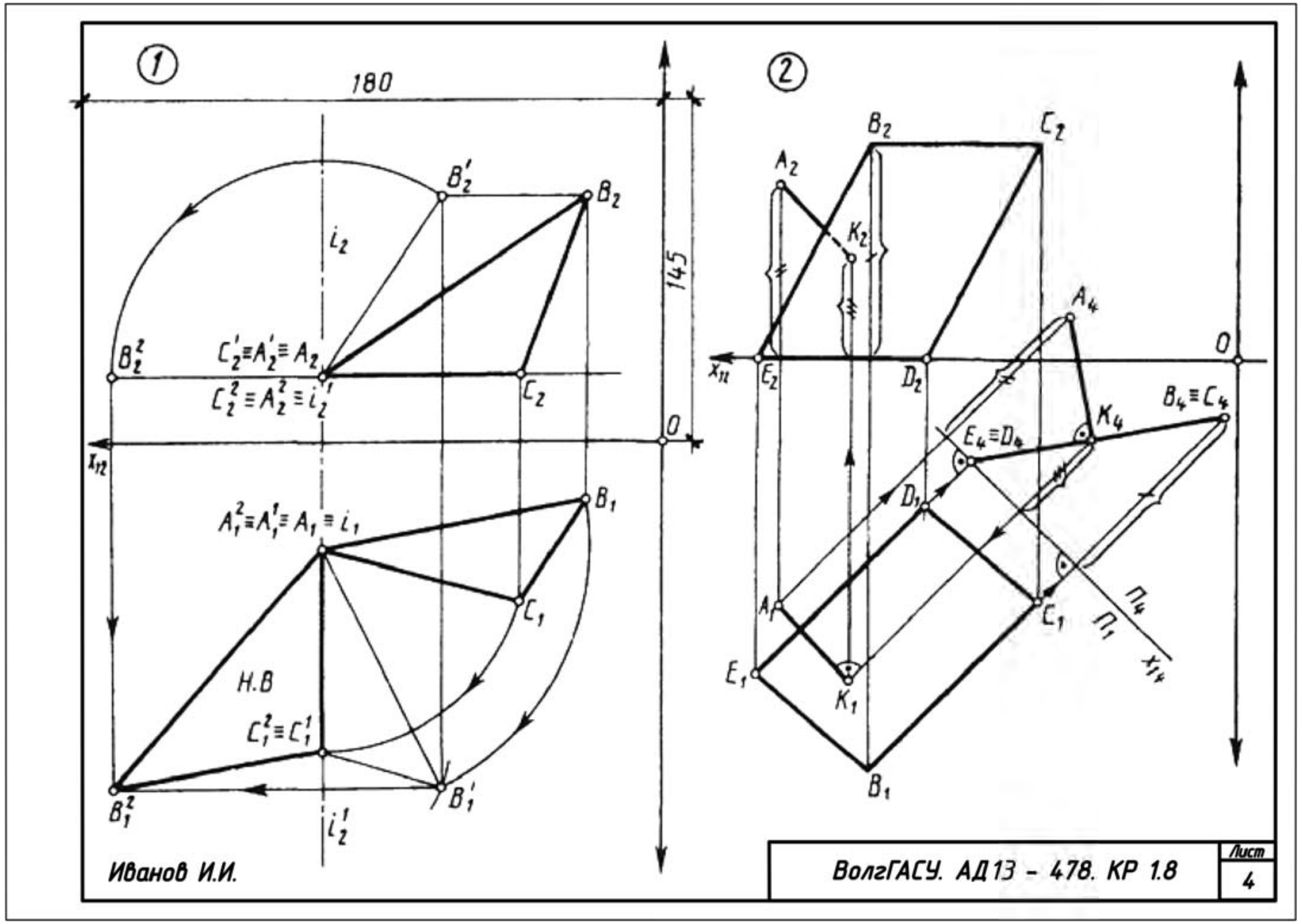


Рис. 3. Образец оформления листа 4 контрольной работы

Поэтапное построение данной задачи см. на с. 58.

При вращении фигур вокруг осей, перпендикулярных плоскостям проекций, необходимо учитывать следующее:

1) линия перемещения точки (траектория) представляет собой окружность. Так как плоскость траектории параллельна плоскости проекций, то проекции точки перемещаются: одна — по окружности, другая — по прямой, параллельной оси проекций;

2) проекция фигуры на ту плоскость проекций, на которой ось вращения проецируется в точку, не изменяется ни по величине, ни по форме, изменяется только ее положение относительно оси проекций;

3) ось проекций не участвует в решении задач (как это имеет место при замене плоскостей проекций), поэтому на чертеже она может быть не проведена.

З а д а ч а 2

Дано: плоскость α (□*EBCD*) и точка *A*.

Выполнить: способом замены плоскостей проекций определить расстояние от точки *A* до плоскости α (□*EBCD*) и построить проекции этого расстояния на исходном эпюре. Точки *E*, *B*, *C*, *D* для всех вариантов имеют одинаковые координаты: *E* (90, 60, 10), *B* (60, 90, 80), *C* (10, 60, 80), *D* (40, 30, 10). Координаты точки *A* приведены в табл. 3.

Порядок выполнения:

1. Преобразуют плоскость общего положения α (□*EBCD*) в плоскость фронтально-проецирующую и выстраивают проекцию точки *A*. Положение новой плоскости определяет новая ось проекций $x_{1,4}$. Она должна располагаться перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h_1 плоскости α (□*EBCD*).

2. Определяют расстояние от точки *A* до заданной плоскости. Оно равно отрезку перпендикуляра *AK*, опущенного из точки *A* на плоскость α (□*EBCD*), выродившуюся на новой фронтальной плоскости проекций в прямую линию.

3. Получив основание перпендикуляра K_4, строят его проекции на исходном чертеже задачи. Так как проекция отрезка A_4K_4 перпендикуляра b — натуральная величина отрезка, то, следовательно, его проекция на плоскость Π_1 будет параллельна оси $x_{1,4}$. Координату Z для плоскости проекций Π_2 следует взять с плоскости проекций Π_4.

Таблица 3

Координаты точки	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	Значения координат, мм									
X_A	90	100	150	160	170	110	120	105	95	80
Y_A	105	100	50	30	40	95	100	90	95	50
Z_A	50	20	50	60	70	30	25	40	35	95

Построение данной задачи см. также на с. 53.

При изучении способа замены плоскостей нужно иметь в виду, что фигура не меняет своего положения в пространстве, плоскость же проекций $П_1$ или $П_2$ заменяют новой плоскостью, соответственно $П_4$ или $П_5$. Такую замену проводят последовательно, сначала заменяют одну плоскость, затем другую. При построении проекции фигуры на новой плоскости проекций необходимо помнить, что происходит переход от одного эпюра к другому, на котором соответственные проекции точек также расположены на линиях связи. Координата точки на новой плоскости проекций равна координате точки на заменяемой плоскости проекций.

Лист 5

Выполнить задачу на пересечение многогранных поверхностей, используя учебный материал, приведенный в темах 6 — 9 теоретической части. Пример выполнения листа 5 представлен на рис. 4.

З а д а ч а 1

Дано: прямая четырехгранная пирамида и трехгранная горизонтальная призма.

Выполнить: 1) вычертить три проекции пирамиды и призмы; 2) построить линию пересечения этих многогранников; 3) определить видимость линии пересечения. Для всех вариантов стороны основания пирамиды $P_1F_1 = K_1E_1$ = 60 мм; $K_1P_1 = E_1F_1$ = 70 мм; высота пирамиды 110 мм; высота вертикальной грани призмы 90 мм; длина всех ребер призмы 140 мм (см. рис. 4). Величины l, h, $\angle\alpha$, а также значения координат точек P и D принимают по табл. 4 в соответствии с вариантом.

Таблица 4

№ варианта	X_P	Y_P	Z_P	X_D	Y_D	Z_D	l	h	$\angle\alpha$	Секущая грань
1	75	20	0	10	40	0	40	35	30	*ACNM*
2	65	20	0	10	40	0	50	80	60	*BDNM*
3	75	20	0	10	20	0	75	30	45	*ACNM*
4	65	20	0	10	25	0	70	50	30	*BDNM*
5	85	20	0	10	40	0	50	90	60	*BDNM*
6	55	20	0	10	10	0	60	65	30	*ACNM*
7	85	20	0	10	20	0	80	40	60	*BDNM*
8	75	20	0	10	30	0	70	60	45	*ACNM*
9	85	20	0	10	30	0	45	40	30	*BDNM*
0	65	20	0	10	25	0	60	50	45	*ACNM*

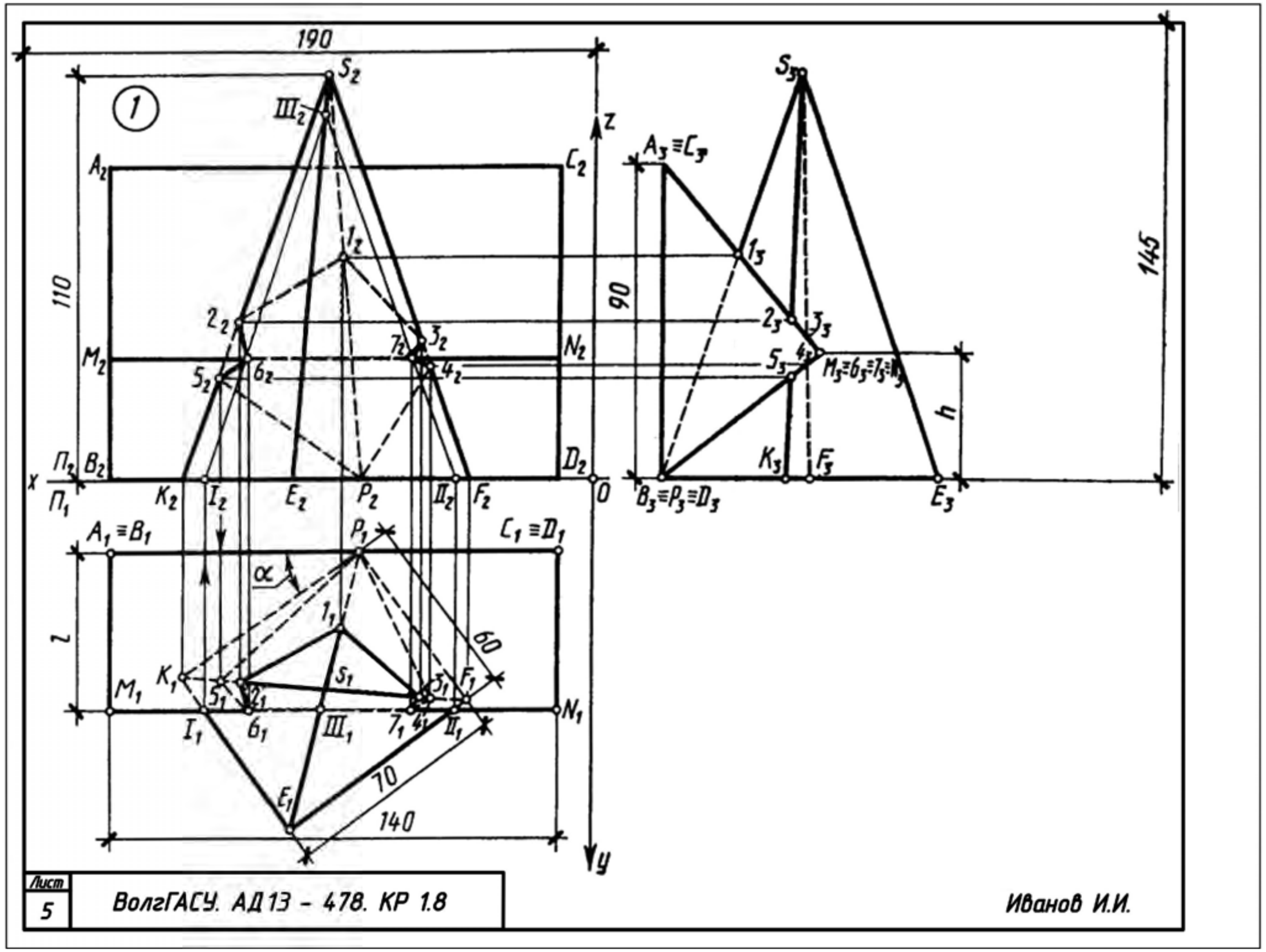


Рис. 4. Образец оформления листа 5 контрольной работы

Порядок выполнения:

Вычерчивание пирамиды нужно начинать с точки P, а призмы — с точки D. Основание пирамиды расположено в плоскости Π_1, ее ребра прямые общего положения. Одна из граней призмы — фронтальная плоскость, две других — профильно-проецирующие, поэтому ребра этих граней на плоскости Π_3 проецируются в точки. Линия пересечения многогранников определяется по точкам пересечения ребер каждого из них с гранями другого многогранника или построением линий пересечения граней многогранников. Соединяя каждые пары точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем линии пересечения фигур.

Видимыми линиями пересечения будут те, которые принадлежат видимым граням многогранников. Линия их пересечения строится только с использованием фронтальных и горизонтальных проекций фигур. Профильные проекции фигур применить для проверки правильности определения точек пересечения ребер с гранями многогранников и их последовательного соединения.

Контрольная работа 2

Листы 6 — 10. Листы 6, 8, 10 выполняют на обороте листов 7, 9.

Лист 6

Выполнить две задачи на пересечение поверхности плоскостью и прямой, используя учебный материал, приведенный в темах 6 — 9 теоретической части. Пример выполнения листа 6 представлен на рис. 5.

З а д а ч а 1

Дано: пирамида и прямая l.

Выполнить: определить точки пересечения прямой l с поверхностью трехгранной пирамиды. Все варианты задач имеют две одинаковые величины — высоту пирамиды 70 мм и диаметр вспомогательной окружности 60 мм, в которую вписывается треугольное основание произвольного расположения по усмотрению студента. Положение прямой l устанавливается студентом также самостоятельно.

Порядок выполнения:

1. Заключают прямую l во вспомогательную плоскость частного положения (фронтально-проецирующую или горизонтально-проецирующую).

2. Построить линию пересечения пирамиды с вспомогательной плоскостью.

3. Отметить точки пересечения проекций прямой с проекциями линии пересечения.

4. Определить видимость.

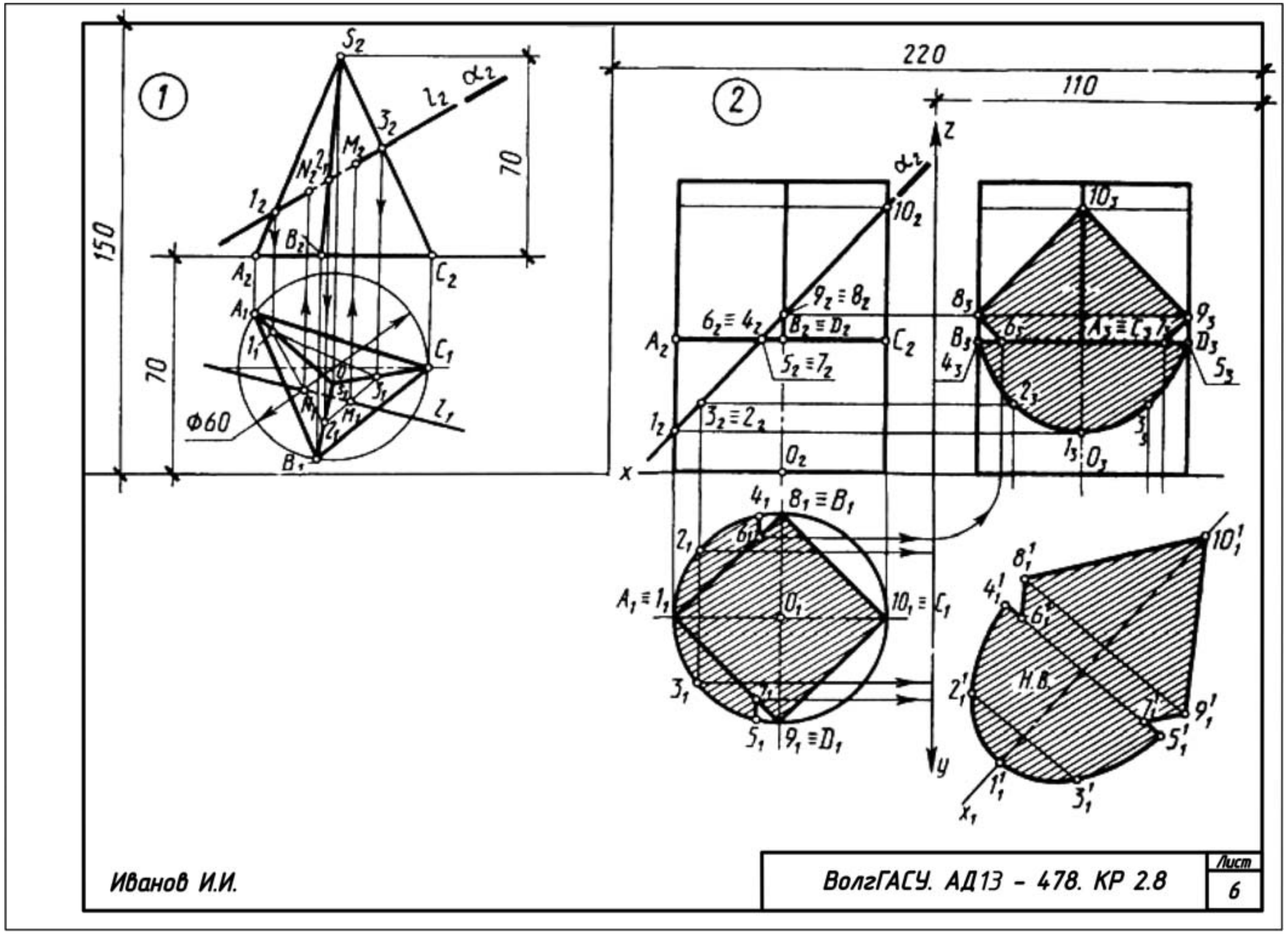


Рис. 5. Образец оформления листа 6 контрольной работы

Так как плоскость, в которую заключается прямая, частного положения, то одна из проекций фигуры сечения пирамиды совпадает с проекцией секущей плоскости, выродившейся в линию. Вторую проекцию сечения достраивают по точкам фигуры сечения, которые лежат непосредственно на ребрах. Задача может иметь одно из трех решений: прямая пересекает пирамиду в двух точках, в одной точке (касается) и не пересекает поверхность.

Задача 2

Дано: сложная поверхность и фронтально-проецирующая плоскость α.

Выполнить: 1) построить три проекции линии пересечения сложной поверхности с фронтально-проецирующей плоскостью; 2) способом совмещения (вращения вокруг линии уровня) определить натуральную величину этого сечения. Данные для вычерчивания комбинированной поверхности приведены в табл. 5.

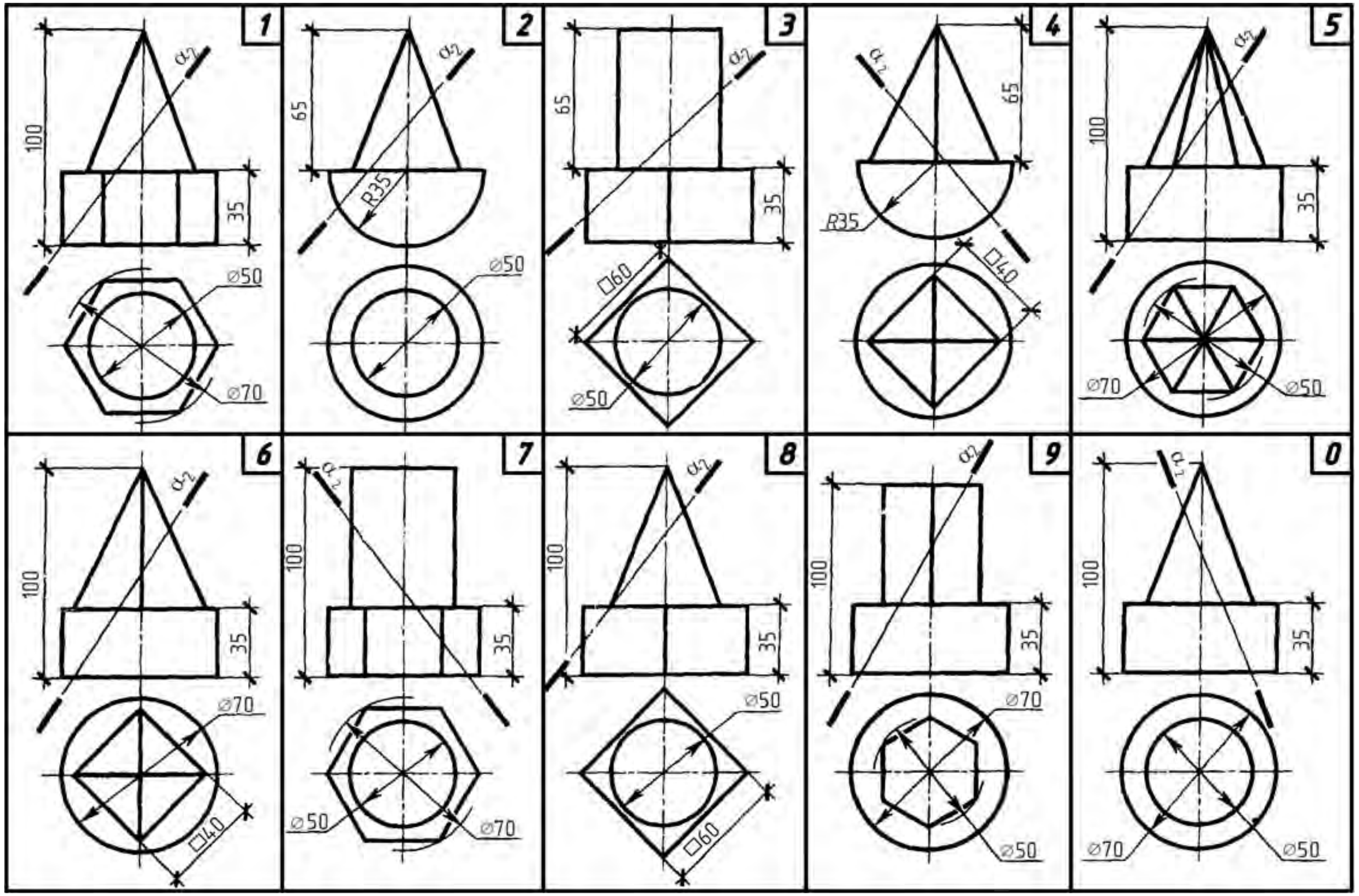
Задачу размещают на правой стороне листа (см. рис. 5). Высота всей комбинированной поверхности равна 100 мм, нижняя ее часть — 35 мм. Размеры диаметров оснований поверхностей и вспомогательных окружностей, а также сторон многоугольников приведены в табл. 5. Положение секущей плоскости для своего варианта студент назначает самостоятельно.

Порядок выполнения:

1. Строят проекции сечения.

2. Определяют натуральную величину сечения. Так как в данной задаче для пересечения предложена плоскость частного положения — фронтально-проецирующая, то ее решение сводится к построению проекций точек сечения заданной поверхности как точек, расположенных на образующих или направляющих линиях этой поверхности. Первоначально крайние и промежуточные точки сечения назначаются на следе секущей плоскости. Натуральную величину сечения определяют по тем же точкам, которые были установлены на первом этапе. За ось вращения плоскости сечения выбирают фронталь плоскости сечения, совпадающую с ее осью симметрии. Для того, чтобы избежать наложения изображений, фронталь следует размещать на свободном поле чертежа параллельно следу секущей плоскости. Каждая точка сечения будет вращаться вокруг оси в плоскости, перпендикулярной ей. Радиус вращения отображен в натуральную величину на горизонтальной плоскости проекций и соответствует расстоянию от точки до продольной оси симметрии (оси вращения).

Таблица 5


1
100
35
α2
⌀50
⌀70
2
65
R35
α2
⌀50
3
65
35
α2
□60
⌀50
4
65
α2
R35
□40
5
100
35
α2
⌀70
⌀50
6
100
35
α2
⌀70
□40
7
100
35
α2
⌀50
⌀70
8
100
35
α2
⌀50
□60
9
100
35
α2
⌀70
⌀50
0
100
35
α2
⌀70
⌀50

Лист 7

Выполнить две задачи на пересечение многогранных и кривых поверхностей и построение разверток поверхностей, используя учебный материал, приведенный в темах 6 — 9 теоретической части. Пример выполнения листа 7 представлен на рис. 6.

З а д а ч а 1

Дано: многогранник и кривая поверхность.

Выполнить: способом вспомогательно-секущих плоскостей построить линию пересечения многогранной и кривой поверхностей, выделив ее видимые и невидимые участки.

Данные для задачи берут из табл. 6 в соответствии с вариантом. Задачу выполняют на левой половине листа.

Порядок выполнения:

1. Намечают расположение вспомогательных секущих плоскостей частного положения (уровня) или проецирующих.

2. С их помощью определяют характерные и промежуточные точки линии пересечения поверхностей.

3. Полученные точки соединяют плавными кривыми или прямыми линиями, установив предварительно последовательность расположения точек на линии пересечения поверхностей. При решении задач на взаимное пересечение поверхностей следует помнить следующее:

1) чтобы построить точку, принадлежащую линии пересечения поверхностей, нужно обе поверхности рассечь вспомогательной плоскостью (иногда вспомогательной поверхностью) и, найдя линии пересечения вспомогательной плоскости с заданными поверхностями, отметить общие для них точки. Плоскость следует выбирать так, чтобы линии ее пересечения с поверхностями проецировались в простейшие геометрические фигуры (окружности или прямые). Использование нескольких вспомогательных плоскостей позволяет определить ряд точек линий пересечения. Соединять можно только те точки, которые расположены в одной грани многогранника;

2) когда боковая поверхность цилиндра или призмы занимает относительно плоскости проекции проецирующее положение, то одна проекция линии пересечения поверхностей становится известной без дополнительных построений — она совпадает с проекцией поверхности;

3) если линия, принадлежащая поверхности, видна не полностью, то точки перехода от видимой части линии пересечения к невидимой располагаются на очерке поверхности. Видимая часть линии пересечения поверхностей должна быть видимой как на одной поверхности, так и на другой;

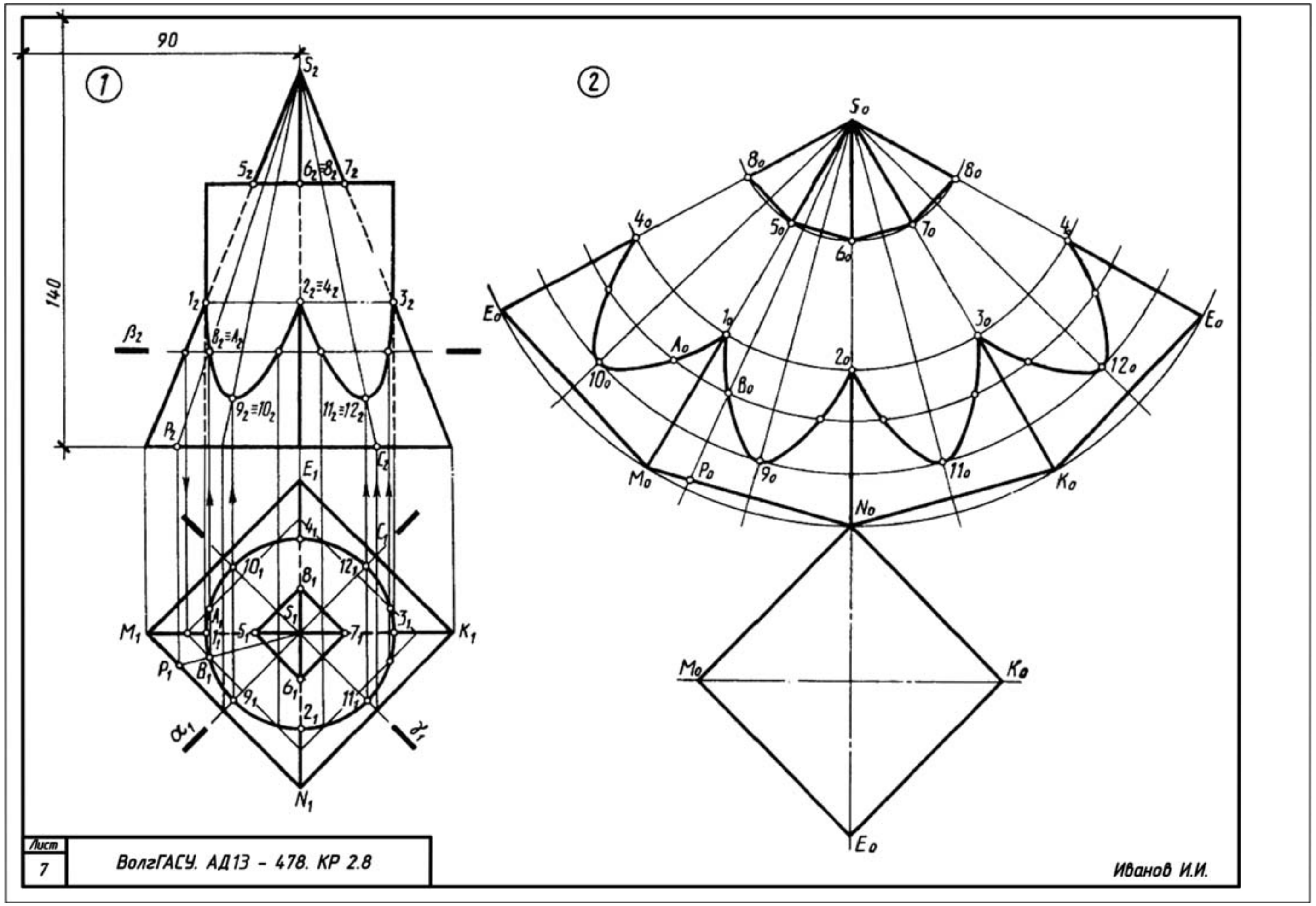
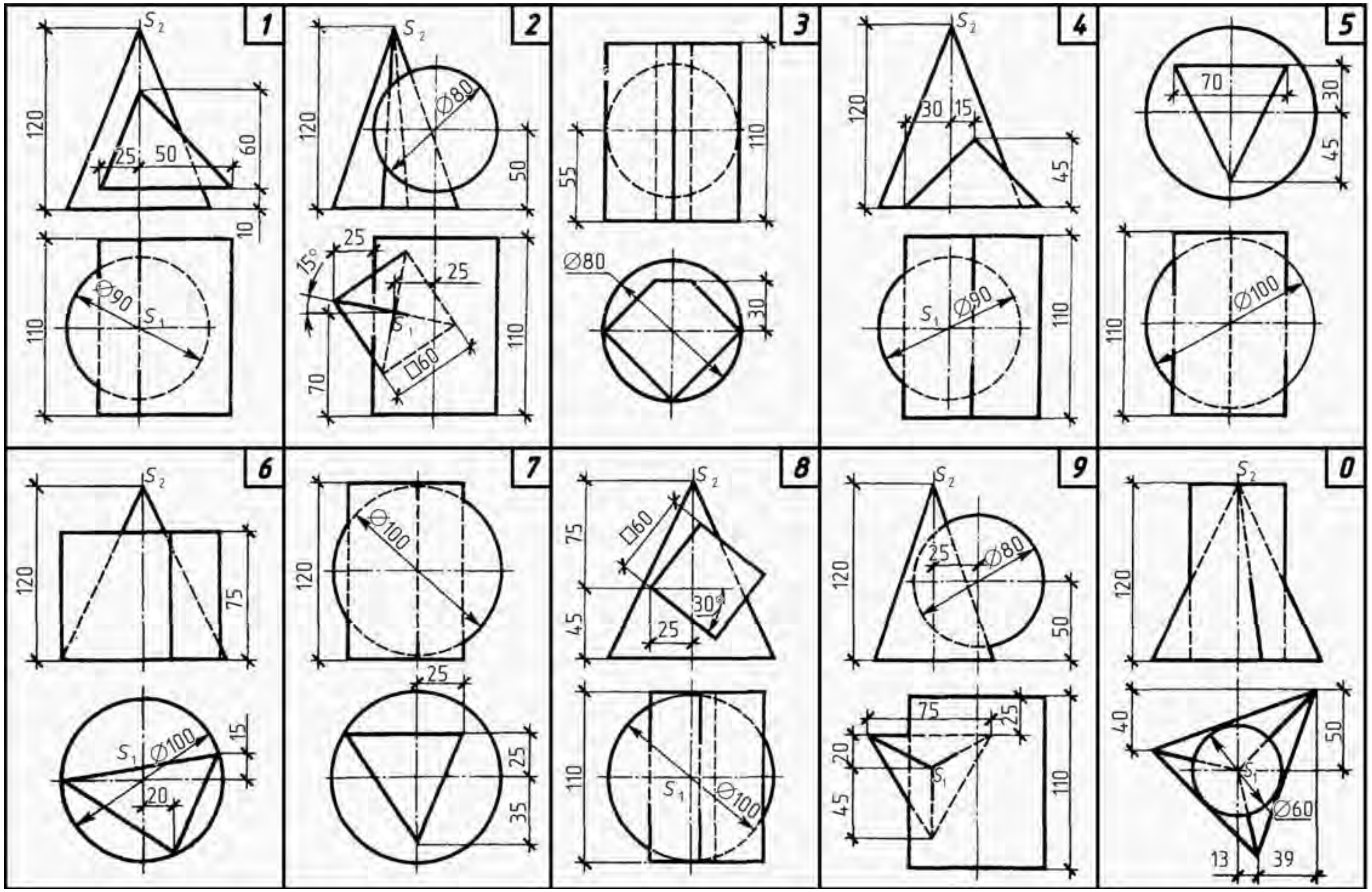


Рис. 6. Образец оформления листа 7 контрольной работы



1
S_2
120
25
50
60
10
110
∅90
S_1
2
S_2
120
∅80
50
25
15°
25
S_1
□60
110
70
3
110
55
∅80
30
4
S_2
120
30
15
45
S_1
∅90
110
5
70
30
45
110
∅100
6
S_2
120
75
S_1
∅100
15
20
7
120
∅100
25
25
35
8
S_2
75
□60
30°
45
25
110
S_1
∅100
9
S_2
120
25
∅80
50
75
25
20
45
S_1
110
0
S_2
120
40
50
S_1
∅60
13
39

4) чтобы найти верхнюю или нижнюю точку линии пересечения соответствующей грани с конусом, нужно взять такую вспомогательную плоскость, которая должна проходить через вершину конуса перпендикулярно этой грани призмы (для прямой призмы — перпендикулярно ребрам основания).

З а д а ч а 2

Дано: две пересекающиеся поверхности — многогранник и кривая поверхность и линия их пересечения.

Выполнить: построить полную развертку одной из пересекающихся поверхностей и нанести на ней линию их пересечения. Поверхность для построения развертки студент выбирает сам из двух поверхностей задачи 1 в соответствии со своим вариантом. Линии пересечения поверхностей наносят по результату решения задачи 1. Задачу выполняют на правой половине листа.

Порядок выполнения:

1. В кривую поверхность вписывают многогранник.
2. Определяют натуральные величины всех ребер вписанного многогранника.
3. На плоскости чертежа строят одну из граней поверхности по натуральным величинам ее ребер и к ней последовательно пристраивают остальные грани, пользуясь смежными ребрами.
4. Соответствующие вершины граней соединяют плавными кривыми линиями.

При развертывании многогранной поверхности выполняют только вторую и третью операции. Линия пересечения поверхностей наносится на развертку с помощью ее характерных точек. Для каждой такой точки в ортогональных проекциях определяют положение образующей и направляющей линий поверхности, на пересечении которых расположена взятая точка. Строят эти линии (образующую и направляющую) на развертке и в их пересечении отмечают искомую точку линии пересечения поверхностей (см. рис. 6).

Лист 8

Выполнить две задачи на построение линии пересечения поверхностей различными способами, используя учебный материал, приведенный в теме 9 теоретической части. Пример выполнения листа 8 представлен на рис. 7.

З а д а ч а 1

Дано: две пересекающиеся кривые поверхности.

Выполнить: способом вспомогательно-секущих плоскостей построить линию их пересечения, выделив ее видимые и невидимые участки. Данные для каждого варианта берут из табл. 7. Задачу выполняют в левой части листа.

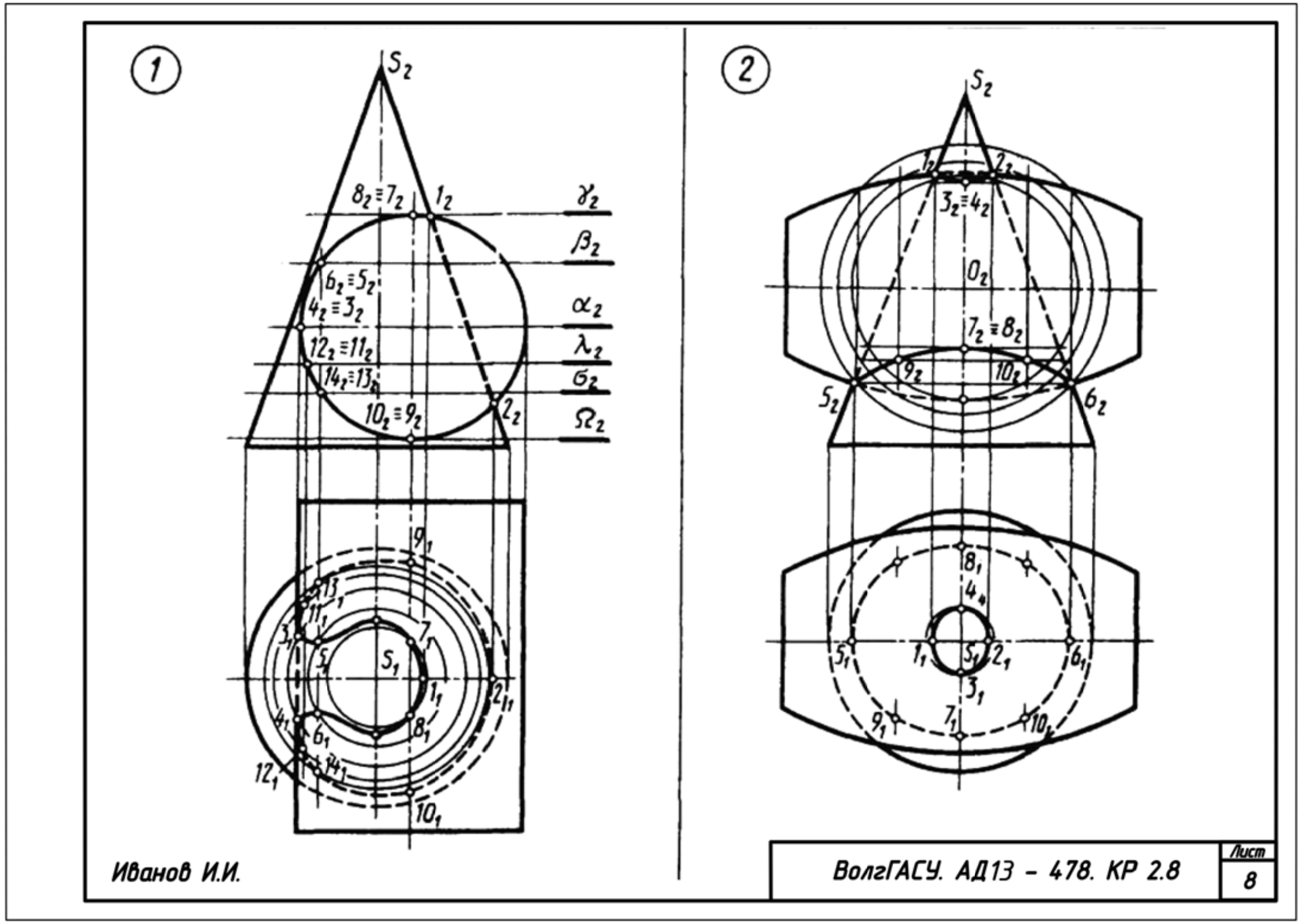
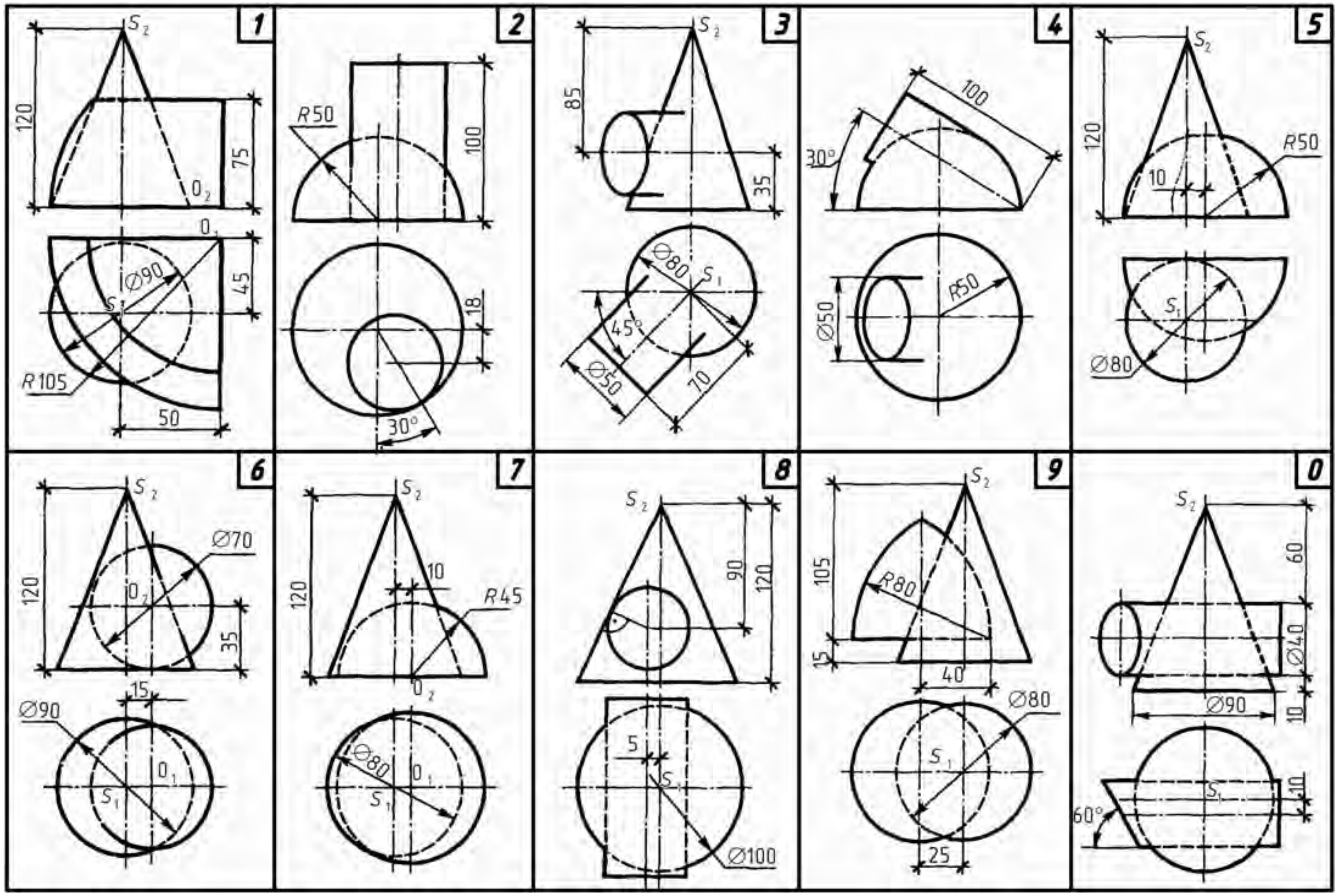


Рис. 7. Образец оформления листа 8 контрольной работы

Таблица 7



Порядок выполнения:

1. Определяют точки пересечения очерковых образующих одной поверхности с другой, затем второй поверхности с первой.

2. Определяют наивысшие и наинизшие точки линии пересечения.

3. Определяют промежуточные точки линии пересечения.

4. Все найденные точки пересечения последовательно соединяют кривой линией, учитывая их видимость. При выборе вспомогательно-секущих плоскостей необходимо помнить, что они должны пересечь одновременно обе поверхности и дать наипростейшие фигуры сечения. Для всех вариантов заданий вспомогательно-секущими плоскостями могут быть выбраны плоскости уровня: для одних — горизонтальные, для других — вертикальные или те и другие. Точками пересечения поверхностей являются точки пересечения контуров фигур сечения поверхностей, лежащих в одной и той же вспомогательно-секущей плоскости. Каждая секущая плоскость может определить от одной до четырех точек линии пересечения в зависимости от характера пересекающихся поверхностей, их расположения относительно друг друга и положения самой секущей плоскости.

З а д а ч а 2

Дано: две пересекающиеся поверхности вращения.

Выполнить: способом секущих концентрических сфер построить линию их пересечения и определить ее видимость. Данные для каждого варианта задачи представлены в табл. 8. Задачу выполняют в правой половине листа.

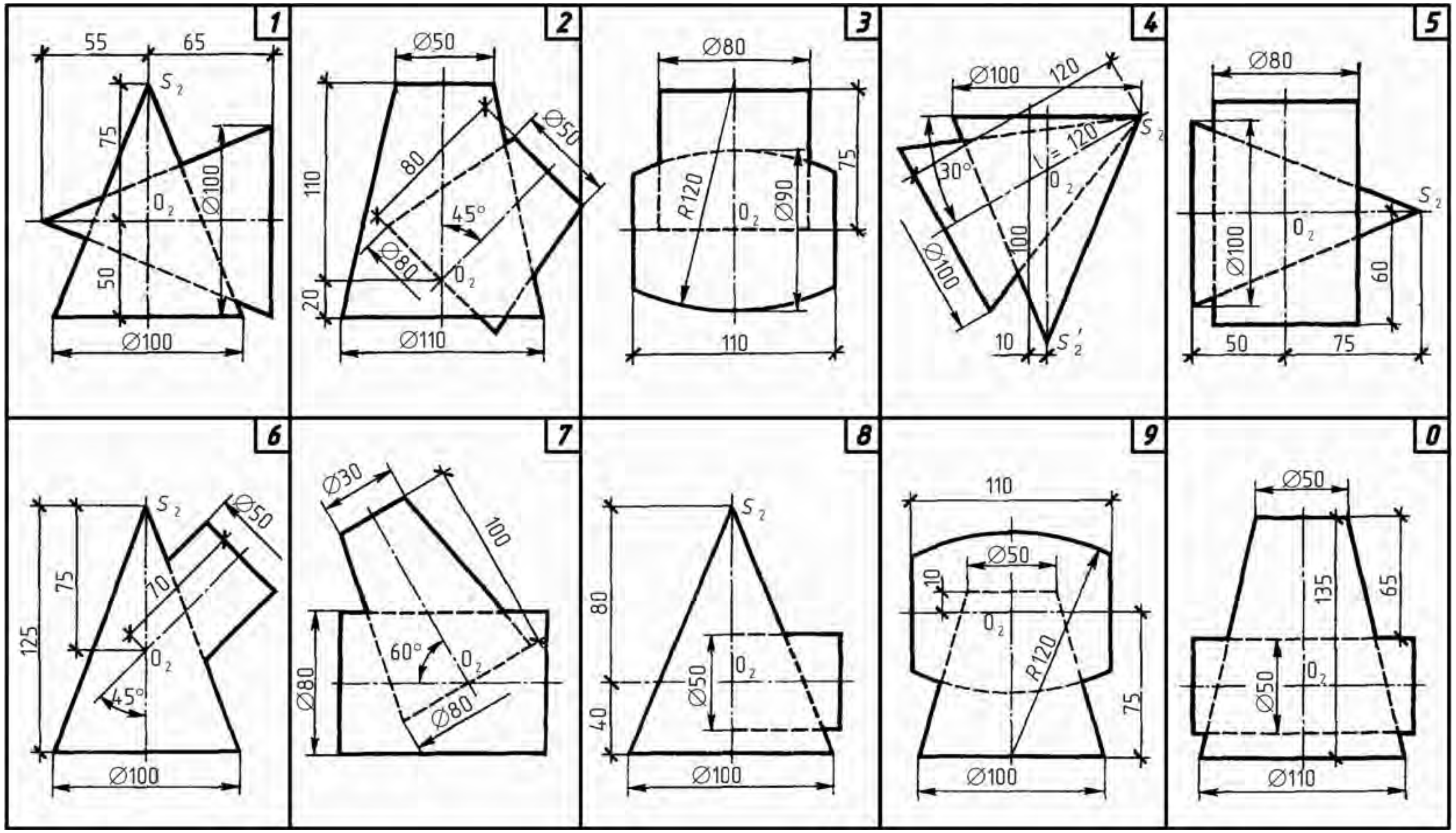
Порядок выполнения:

1. Определяют центр концентрических сфер — точку пересечения осей поверхностей вращения — и проводят ряд концентрических окружностей — сфер различного радиуса. Диапазон радиусов сфер определяется минимальным и максимальным радиусами. Минимальный радиус секущей сферы назначается из условия касания сферы одной и пересечения другой пересекающейся поверхности. Максимальным радиусом является отрезок прямой от центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерков пересекающихся поверхностей.

2. Строят линии пересечения выбранных сфер с заданными пересекающимися поверхностями. Каждая из сфер, будучи соосной с заданными поверхностями, пересечет их по окружностям, которые в данной задаче на плоскости Π_2 представляют собой прямые линии — хорды окружности, называемые параллелями. Точки пересечения проекций полученных параллелей являются проекциями искомых точек линии пересечения поверхностей.

3. Найденные точки пересечения поверхностей соединяют плавной кривой линией. Достраивают горизонтальную проекцию линии пересечения по имеющимся точкам.

Таблица 8


1
55
65
S_2
75
Ø100
O_2
50
Ø100
2
Ø50
Ø50
110
80
45°
Ø80
O_2
20
Ø110
3
Ø80
75
R120
O_2
Ø90
110
4
Ø100
120
S_2
l = 120
30°
O_2
100
Ø100
10
S_2'
5
Ø80
S_2
O_2
Ø100
60
50
75
6
S_2
Ø50
75
70
125
O_2
45°
Ø100
7
Ø30
100
60°
O_2
Ø80
Ø80
8
S_2
80
O_2
Ø50
40
Ø100
9
110
Ø50
10
O_2
R120
75
Ø100
0
Ø50
135
65
O_2
Ø50
Ø110

Лист 9

Выполнить три задачи на построение аксонометрических проекций плоских и пространственных фигур, используя учебный материал, приведенный в теме 11 теоретической части. Пример выполнения листа 9 представлен на рис. 8. Расположение элементов задач, построения и обозначения выполнить в соответствии с примером. Разбивку поля чертежа для отдельных задач выдержать согласно приведенным размерам, но линии границ не наносить.

З а д а ч а 1

Дано: ортогональные проекции трех правильных шестиугольников, принадлежащих плоскостям проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Выполнить: построить их аксонометрические проекции в прямоугольной изометрии. Описанные окружности для построения правильных шестиугольников имеют диаметр 40 мм.

Порядок выполнения:

1. Строят проекции трех правильных шестиугольников, которые расположены в плоскостях проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$.

2. Наносят оси координат, соответствующие прямоугольной изометрической проекции, и, используя приведенные коэффициенты искажения, намечают вершины шестиугольников по соответствующим аксонометрическим осям координат, которые затем соединяют линиями. При выполнении данной задачи следует помнить, что в прямоугольной изометрии угол между проецирующим лучом и плоскостью аксонометрических проекций равен 90°, аксонометрические оси координат располагают под углом 120°, действительные коэффициенты искажения по всем осям равны 0,82, но для практических построений применяют приведенные коэффициенты искажения, равные 1. При приведенных коэффициентах прямоугольная изометрия увеличивается в 1,22 раза (1:0,82 = 1,22), а прямоугольная диметрия — в 1,06 раза (1:0,94 = 1,06).

З а д а ч а 2

Дано: ортогональные проекции трех окружностей, соответственно принадлежащих плоскостям проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$ (см. рис. 8, задача 2, *а*, *б*, *в*).

Выполнить: построить их аксонометрические проекции в прямоугольной изометрии. Диаметр окружностей равен 40 мм.

Порядок выполнения:

1. Строят ортогональные проекции окружностей и намечают на них характерные точки, соответственно расположенные в плоскостях проекций $П_1$, $П_2$ и $П_3$.

2. Наносят аксонометрические оси координат, соответствующие прямоугольной изометрической проекции.

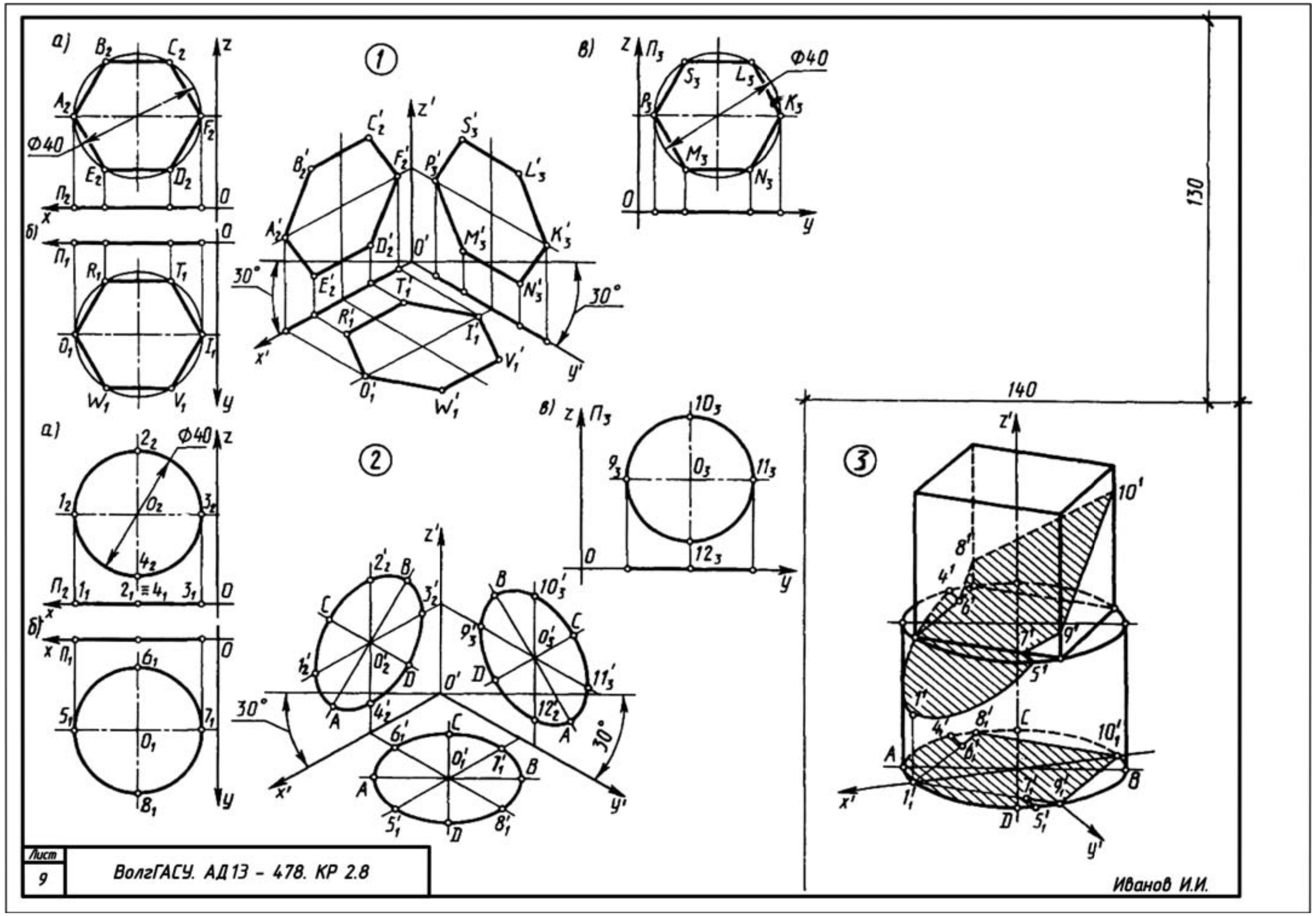


Рис. 8. Образец оформления листа 9 контрольной работы

Используя приведенные коэффициенты искажения, строят выбранные характерные точки окружностей, а также большую ось эллипса *AB* и малую ось эллипса *CD*. Окружности в аксонометрии проецируются в виде эллипсов, причем при использовании действительных коэффициентов искажения большая ось эллипса равна диаметру окружности. Так как приведенные коэффициенты аксонометрическое изображение увеличивают, то, следовательно, большая и малая оси тоже увеличиваются. При построении аксонометрии окружности нужно помнить, что во всех трех плоскостях прямоугольной изометрической проекции большая ось эллипса должна быть направлена перпендикулярно оси, которая отсутствует в этой плоскости, а малая ось сохраняет направление отсутствующей.

Задача 3

Дано: ортогональные проекции комбинированной поверхности и сечение этой поверхности фронтально-проецирующей плоскостью.

Выполнить: построить прямоугольную изометрию или прямоугольную диметрию комбинированной поверхности вместе с контуром сечения этой поверхности плоскостью. За исходные данные для построения аксонометрии комбинированной поверхности берут ортогональные проекции задачи 2 листа 6 (см. рис. 5) и найденное на них сечение от фронтально-проецирующей плоскости. Вид аксонометрии студент определяет сам.

Порядок выполнения:

1. На ортогональном чертеже наносят оси прямоугольной системы координат, к которой относят заданную поверхность.

2. Выбирают вид аксонометрии так, чтобы обеспечить наилучшую наглядность поверхности, и наносят аксонометрические оси координат.

3. В системе координат $x'0'y'$ строят вторичные проекции оснований поверхностей и сечения.

4. Каждую точку вторичной проекции поднимают на высоту ее положения, которое она занимает в натуре, и по этим точкам строят аксонометрию.

Следует помнить, что выполнение любой аксонометрии нужно начинать со вторичной проекции, т. е. с построения аксонометрии плоской фигуры, являющейся видом данного предмета сверху или спереди.

Лист 10

Выполнить две задачи на определение границ земляных работ при строительстве земляного сооружения и профиля земляного сооружения, используя учебный материал, приведенный в теме 10 теоретической части. Пример выполнения листа 10 представлен на рис. 9.

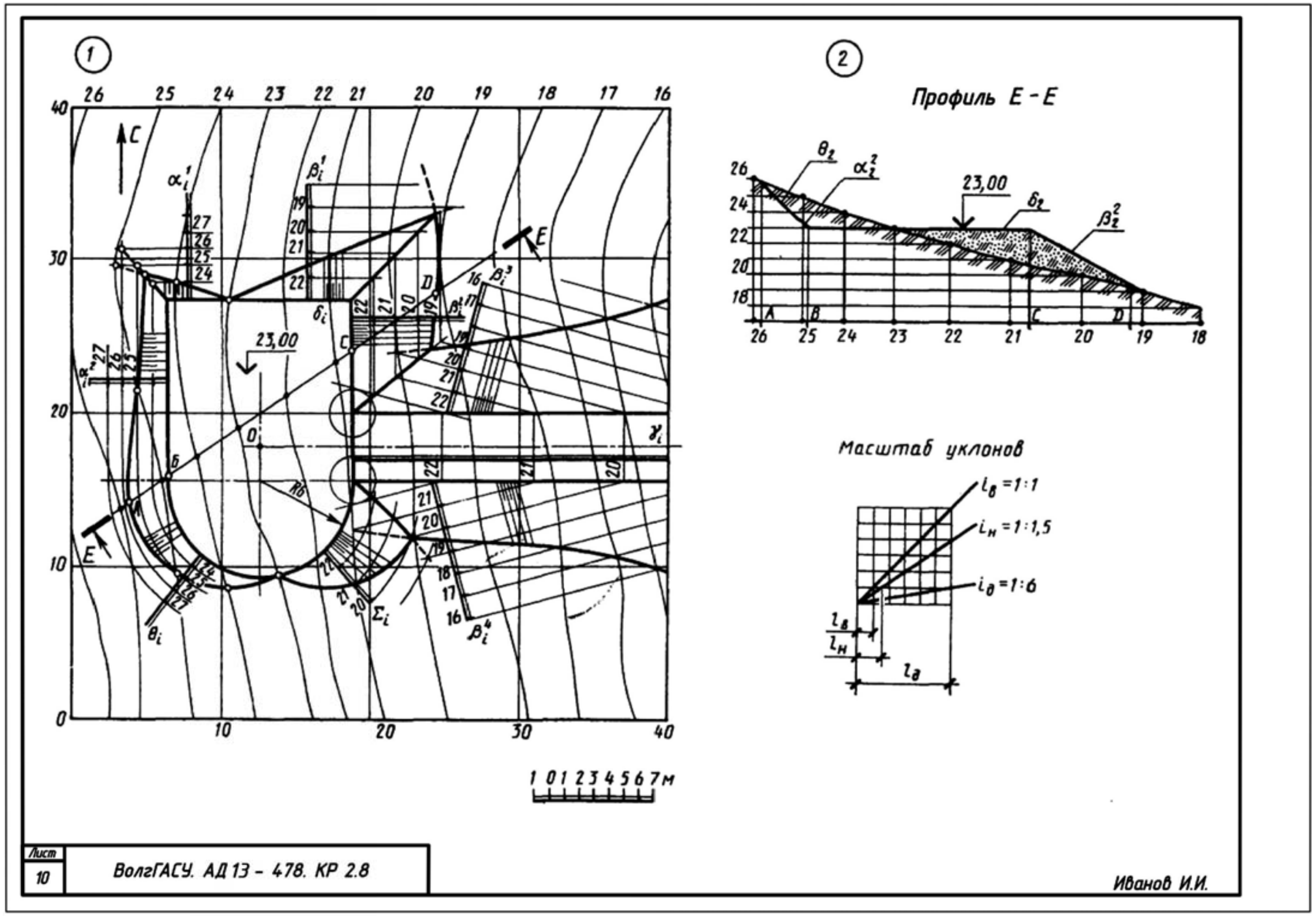


Рис. 9. Образец оформления листа 10 контрольной работы

З а д а ч а 1

Дано: топографическая поверхность и земляное сооружение с указанными уклонами откосов (рис. 10). Откосы выемок имеют уклон 1:1, откосы насыпей — 1:1,5, уклон дороги — 1: 6.

Выполнить: построить линии пересечения откосов выемок и насыпей земляного сооружения (искусственного сооружения – площадки и дороги) между собой и с заданной топографической поверхностью. Форма и размеры земляного сооружения (рис. 10, 11) приведены в табл. 9.

Таблица 9

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тип сооружения	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	А	Б
Направление отклонения от оси меридиана	С	СЗ	С	С	СВ	СЗ	ЮЗ	СЗ	СЗ	ЮВ
Градус отклонения	0	15	0	0	15	30	15	30	30	15

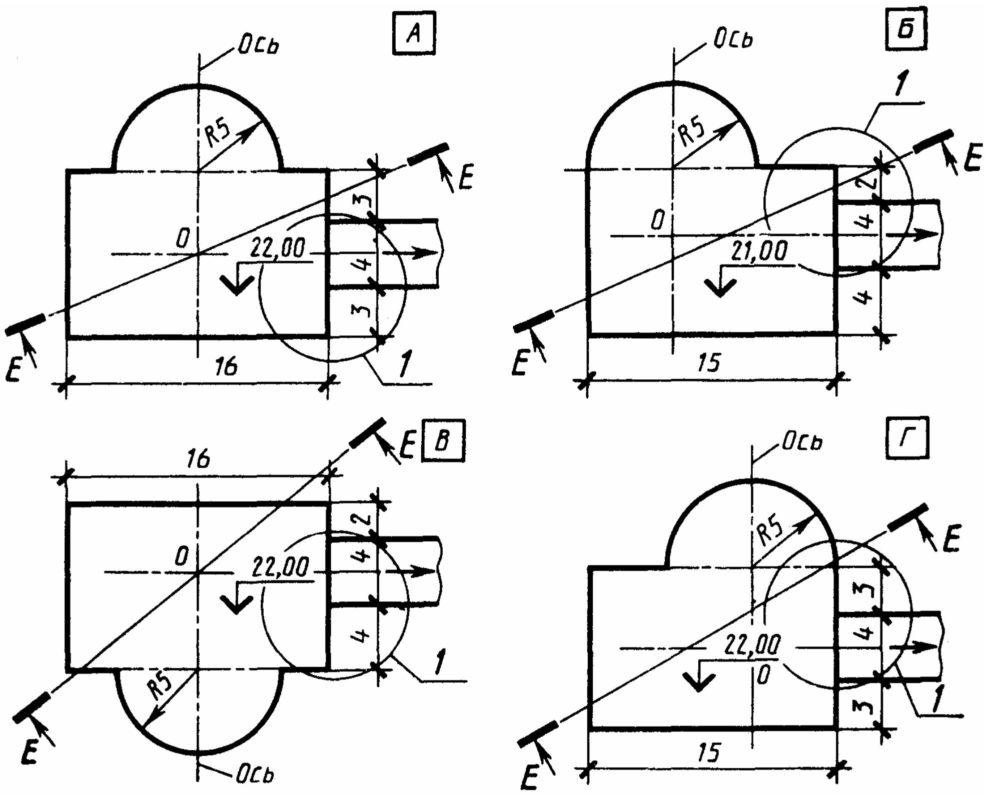


Рис. 10. Формы и размеры земляного сооружения

Порядок выполнения:

1. Начертить в масштабе 1: 200 план земельного участка, рельеф которого задан горизонталями (рис. 11). Нанести на него в том же масштабе план земляного сооружения так, чтобы центр сооружения 0 совпал с центром участка 0, и ось сооружения была наклонена к меридиану под заданным углом. Горизонтали топографической поверхности обвести цветной тушью (лучше жженой сиеной) или цветной шариковой ручкой, что облегчает последующие построения карандашом. Толщина линий обводки 0,1…0,2 мм. Контур земляного сооружения и линии пересечения откосов с топографической поверхностью и между собой обводят карандашом линиями толщиной 0,4…0,6 мм, штриховку откосов выемок и насыпей выполняют линиями толщиной 0,1…0,2 мм перпендикулярно проектным горизонталям при расстоянии между штрихами 1,5…2,5 мм, линии построения (в том числе проектные горизонтали) должны иметь толщину 0,1…0,2 мм.

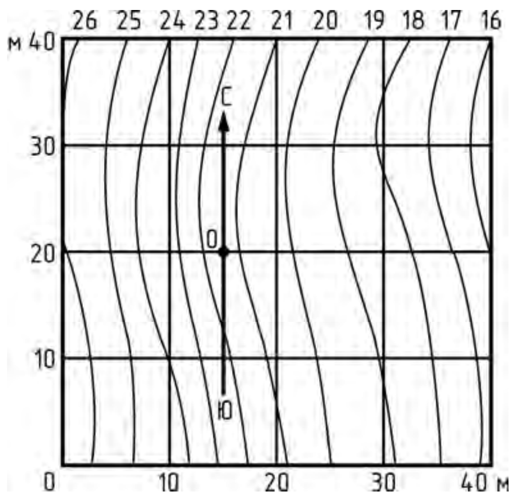


Рис. 11. Рельеф земельного участка

2. Проанализировать и обозначить все плоскости и поверхности земляного сооружения при помощи масштабов уклонов. Построить горизонтали всех откосов земляного сооружения и дороги с учетом заданных для них уклонов. Для построения горизонталей необходимо при помощи графика масштаба уклонов определить величину интервалов для откосов насыпей, выемок и дороги в масштабе чертежа (1 : 200), затем нанести эти интервалы на масштабах уклонов всех откосов и провести горизонтали перпендикулярно масштабам уклонов.

3. Используя точки пересечения одноименных горизонталей, построить линию пересечения откосов между собой и с топографической поверхностью.

З а д а ч а 2

Дано: топографическая поверхность и земляное сооружение на ней.

Выполнить: построить профиль сооружения — сечение от вертикальной плоскости *Е — Е*. Задача выполняется по результатам решения задачи 1. Положение секущей плоскости указано на рис. 10. Пример выполнения задачи приведен на рис. 9.

Порядок выполнения:

1. В масштабе 1 : 200 на расстоянии 1 м по высоте изображают горизонтали рельефа в пределах отметок той части сооружения, которая пересекается плоскостью *Е — Е*.

2. Строят профиль земли. Для этого измеряют и откладывают на чертеже горизонталей точки пересечения горизонталей топографической поверхности и следа секущей плоскости. Из полученных точек восстанавливают вертикальные линии до горизонталей, отметки которых определяются отметками этих точек на топографической поверхности. Пересечения одноименных горизонталей и вертикальных линий соответствуют точкам профиля земли, соединяя которые плавной линией, получают искомый профиль.

3. Строят профиль земляного сооружения аналогично построению профиля земли.

При выполнении листа 10 следует помнить следующее:

1) точка в проекциях с числовыми отметками задается своей горизонтальной проекцией и числом при ней (отметкой), выражающим высоту этой точки над горизонтальной плоскостью, принятой за нулевую. Прямая линия задается проекциями двух точек и их отметками или отметкой одной точки и уклоном. В последнем случае должно быть указано направление, в котором прямая опускается (стрелкой);

2) плоскость может быть задана проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой, и их отметками, двумя параллельными или пересекающимися прямыми, точкой и непроходящей через нее прямой. Кроме того, плоскость можно задать масштабом уклонов (градуированной линией наибольшего ската плоскости) или одной горизонталью и уклоном. В последнем случае указывают направление спуска плоскости;

3) если прямые параллельны, то параллельны их проекции, одинаковы уклоны и их направления;

4) линия пересечения плоскостей определяется точками пересечения двух пар однозначных горизонталей этих плоскостей;

5) линия пересечения плоскости и поверхности или двух поверхностей определяется точками пересечения однозначных горизонталей обеих поверхностей (или плоскости и поверхности);

6) для построения линии пересечения прямой с плоскостью или поверхностью нужно через прямую провести плоскость общего положения, задав ее произвольно выбранными горизонталями. Определив линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной плоскостью или поверхностью, отмечают на ней точку, в которой эта линия пересекается с заданной прямой;

7) так как топографическая поверхность в проекциях с числовыми отметками изображается большей частью с помощью горизонталей, то линию пересечения поверхности земляного сооружения (откосов) с топографической поверхностью можно построить, соединив точки пересечения однозначных горизонталей откосов и поверхности земли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Инженерное образование в России всегда отличалось высоким уровнем фундаментальной, профессиональной и практической подготовки технических кадров. В настоящее время в связи с кардинальными социально-экономическими изменениями в обществе требуется переход на качественно новую систему инженерного образования. Необходимо внедрять новые инновационные образовательные технологии, совершенствовать направления подготовки выпускников университета, учитывая запросы и потребности экономики и производства. В этих условиях необходимо повышать и уровень графического образования студентов, в задачу которого входит изучение большого комплекса геометрических и технических задач с широким использованием современных средств вычислительной техники.

Дисциплина «Начертательная геометрия» дает будущему специалисту необходимую геометро-графическую подготовку и развивает способность к логическому трехмерному пространственному мышлению и проективному видению, фантазию и воображение, ассоциативность и творчество, без которых трудно себе представить грамотных инженеров, способных строить и проектировать современные объекты, здания и сооружения. На этих же знаниях и развитых способностях основывается обучение студентов на старших курсах другим общетехническим и специальным дисциплинам вуза, так как графические способы исследований предметов, изучаемые данной дисциплиной, широко используются в ряде технических и других наук. Например, при решении задач специальных инженерных дисциплин, таких как механика, основы архитектуры и строительных конструкций, инженерные системы зданий и сооружений, инженерное обеспечение строительства, применение AutoCAD в курсовом и дипломном проектировании. Методы, изучаемые начертательной геометрией, применяются при проектировании и строительстве различных инженерных конструкций и сооружений, а также при конструировании различных геометрических поверхностей в авиационной, автомобильной, автотранспортной и судостроительной промышленности.

Успешная деятельность специалиста в будущем определяется не только объемом полученных знаний, но и уровнем сформированности его профессиональных качеств и компетенций, в том числе и графических: инженерно-техническая грамотность, творческий подход к работе, развитое пространственное мышление и логика, умение ориентироваться в конструкторской и технологической документации, использование возможностей компьютерной техники, готовность к постоянному профессиональному росту и самообразованию.

В последние годы значительно расширилась область задач, решаемых методами начертательной геометрии, которые нашли широкое применение при проектировании и разработке технических систем и сооружений, при конструировании поверхностей сложных форм и сочетаний в различных сферах профессиональной деятельности. Поэтому и сегодня изучение начертательной геометрии и базирующихся на ее основе черчения и инженерной графики по-прежнему остается актуальным.

Список рекомендуемой литературы

1. *Автономова, М. П.* Начертательная геометрия : учеб. пособие / М. П. Автономова, А. П. Степанова. — Ростов н/Д : Феникс, 2009. — 283, [1] с. — (Высшее образование).

2. *Ермилова, Н. Ю.* Начертательная геометрия: основы курса и примеры решения задач : учеб. пособие / Н. Ю. Ермилова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — 174 с.

3. *Кузнецов, Н. С.* Начертательная геометрия : учебник для строительных специальностей вузов. — 3-е изд., репринт. — М. : ООО «ИД ”БАСТЕТ“», 2011. — 264 с.

4. Начертательная геометрия : учебник для строительных специальностей вузов / Н. Н. Крылов и др.; под ред. Н. Н. Крылова. — 9-е изд., стер. — М. : Высш. шк., 2005. — 224 с. : ил.

Учебное издание

Ермилова Наталья Юрьевна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *Р. В. Худадян*
Компьютерная правка и верстка *Н. А. Каширина*

Подписано в свет 25.04.2013. Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 9,5. Объем данных 5,46 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru