**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**Методические указания к лабораторным работам по дисциплинам «Математическое обеспечение технологических процессов» и «Методы оптимизации»**

***Составители Т. В. Ерещенко, И. В. Иванов, А. В. Жиделев***



**Волгоград**
**ВолгГАСУ**
**2013**

УДК 51-7(076.5)
ББК 65в6я73
М34

М34 **Математическое** обеспечение технологических процессов [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторным работам по дисциплинам «Математическое обеспечение технологических процессов» и «Методы оптимизации» / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. Т. В. Ерещенко, И. В. Иванов, А. В. Жиделев. — Электронные текстовые и графические данные (0,6 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ по дисциплинам «Математическое обеспечение технологических процессов» и «Методы оптимизации». Приведены варианты индивидуальных заданий, даны контрольные вопросы.

Для студентов технических специальностей всех форм обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

**УДК 51-7(076.5)**
**ББК 65в6я73**

ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие

Коммерциализация современной жизни предполагает принятие оптимальных управленческих решений. Оптимизация может быть достигнута только при постановке математического моделирования всех экономических и социальных систем.

Оптимизация в модели заключается в максимизации или минимизации какой-либо целевой функции при условии выполнения различных ограничений. Например, предприятию нужно получить максимум прибыли при ограниченных временных, трудовых, материальных и финансовых ресурсах. Многие расчеты могут быть выполнены в оптимизационной программе «Поиск решения», встроенной в табличный процессор MS Excel.

Данные методические указания составлены в соответствии с программами дисциплин «Математическое обеспечение технологических процессов» и «Методы оптимизации», рассчитанных на аудиторию, подготовленную по математике в пределах программы технического вуза. Постановка каждой задачи оптимизации включает два объекта — множество допустимых решений и целевую функцию, которую следует минимизировать или максимизировать на указанном множестве. С этой точки зрения и рассматриваются различные классы экстремальных задач, составляющие предмет изучения линейного программирования, геометрического программирования и теории оптимального управления.

Методические указания не предполагают изучение теории принятия решений, не выходят за рамки возможностей MS Excel. Это практическое руководство не только для обучения студентов, но и для планирования работы предприятий малого и среднего бизнеса.

## Лабораторная работа 1
## ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Цель работы** — знакомство с теорией по данной теме и ее применение в решении прикладных задач.

**Программное обеспечение** — система Mathcad, табличный процессор MS Excel.

### Теоретическое введение

Общей задачей линейного математического программирования (ЗЛП) называется задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_mx_m = \sum_{j=1}^{n} C_jx_j \qquad (1.1)$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \le b_i, \\ x_j \ge 0, \text{ где } j = 1...n. \end{cases} \qquad (1.2)$$

Функция (1.1) называется целевой функцией задачи, а условия (1.2) — ее ограничениями.

Если в ограничениях общей задачи знаки неравенств заменить на точные равенства, мы получим стандартную форму ЗЛП, если же в условиях (1.2) отсутствуют точные равенства, то система записана в канонической форме.

Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющую всем ограничениям задачи, называют допустимым решением задачи или ее планом. Если допустимое решение обращает хотя бы одно из неравенств в равенство, оно называется опорным планом.

Опорный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при котором целевая функция принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется оптимальным.

Рассмотрим графический метод, используемый при решении ЗЛП, который основан на ее геометрической интерпретации и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и в редких случаях — трехмерного. Задача должна быть сформулирована в канонической форме.

Пусть ЗЛП задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные. Математическая модель задачи в этом случае такова: найти минимальное (максимальное) значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{1.4}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \tag{1.5}$$

*Решение*. Допустим, что система (1.4) при условии (1.5) совместна и ее многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (1.4) и (1.5) определяет полуплоскость с граничной прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,$$

где $i = \overline{1; m}$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Линейная функция (1.1) при фиксированном значении $Z$ является уравнением прямой:

$$C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}.$$

Построим многоугольник решений системы (1.4), (1.5) и график линейной функции (1.1) при $Z = 0$ (рис. 1.1). Тогда поставленной ЗЛП можно дать следующую интерпретацию: необходимо найти такие точки многоугольника решений, в которых прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ становится опорной и функция $Z$ при этом достигает минимума или максимума. Геометрически это соответствует методичному перебору всех вершин многоугольника.

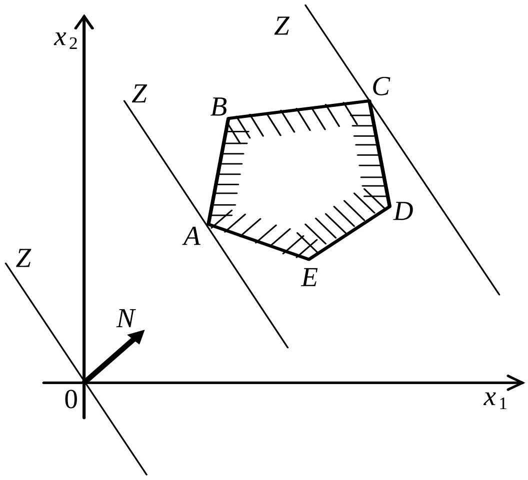



Рис. 1.1

Значения функции $Z$ возрастают в направлении возрастания вектора $N = (C_1,\ C_2)$, поэтому прямую $Z = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении возрастания вектора $N$.

Из рис. 1.1 видно, что прямая $Z$ = const дважды становится опорной — в точках $A$ и $C$, что соответствует минимуму в точке $A$ и максимуму в точке $C$. Координаты точки $A$ ($x_1$; $x_2$) находим, решая систему уравнений для прямых $AB$ и $AE$. Если многоугольник решений представляет неограниченную многоугольную область, то возможны два случая:

1) прямая $Z$ = const, передвигаясь в направлении $N$ или противоположном ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной. Значит, линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис. 1.2, *а*);

2) прямая $Z$ = const, передвигаясь, все же становится опорной. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограничена только сверху (рис. 1.2, *б*), только снизу (рис. 1.2, *в*) или и сверху и снизу (рис. 1.2, *г*).

Вообще, с помощью графического метода может быть решена ЗЛП, система ограничений которой содержит $n$ неизвестных и $m$ независимых уравнений, если $n$ и $m$ связаны соотношением $n - m = 2$.

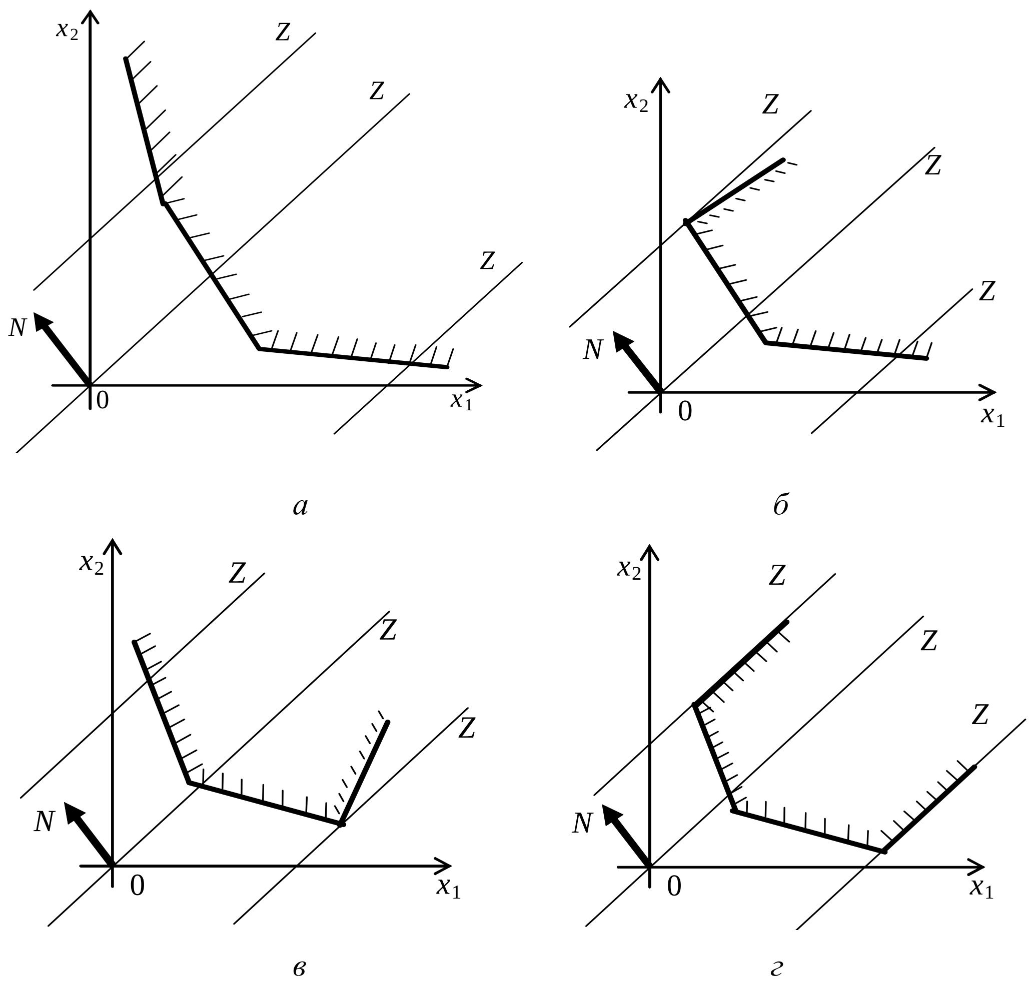



Рис. 1.2

## Порядок выполнения лабораторной работы

1. Построить многоугольник решений в системе координат $x_1Ox_2$.

2. Построить вектор нормали $\vec{N}$ и прямую $Z = 0$, проходящую через точку $O$ (0; 0) перпендикулярно вектору нормали.

3. Провести прямые, параллельные прямой $Z = 0$, опорные по отношению к многоугольнику решений.

4. Найти оптимальные планы и значения $Z_{\min}$ и $Z_{\max}$.

## Пример выполнения лабораторной работы

Найти максимум и минимум функции

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 - 1x_2 \ge 8, \\ 1x_1 + 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 - 7x_2 \le -8. \end{cases}$$

1. Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат $x_1Ox_2$ на плоскости изобразим граничные прямые (рис. 1.3):

$$\begin{cases} 5x_1 - 1x_2 \ge 8 \ (L_1), \\ 1x_1 + 3x_2 \le 24 \ (L_2), \\ 3x_1 - 7x_2 \le -8 \ (L_3); \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

2. Для построения прямой достаточно взять координаты двух точек. Например, построим прямую $L_1$:

| $x_1$ | 2 | 3 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 7 |

Для прямой $L_2$

| $x_1$ | 6 | 9 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 6 | 5 |

Для прямой $L_3$

| $x_1$ | 2 | 9 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 2 | 5 |

Из условия неотрицательности переменных $x_1$ и $x_2$ заключаем, что многоугольник решений ограничивается первым координатным углом. Взяв какую-нибудь точку, например $O$ (0; 0), установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Для этого подставим в первое неравенство координаты точки $O$ (0; 0) и проверим, удовлетворяют ли они неравенству. Если неравенство истинное, точка $O$ лежит в искомой полуплоскости, а если неравенство не выполняется, значит, искомой полуплоскостью является полуплоскость, не содержащая точку $O$.

Для первого неравенства $5 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \geq 8$, искомая полуплоскость не содержит точку $O$. Аналогично поступаем с остальными неравенствами.

Многоугольником решений данной задачи является треугольник $ABC$.

3. Для построения прямой $3x_1 + 2x_2 = 0$ (или $Z = 0$) строим вектор нормали $N$ (3; 2) и через точку $O$ проводим прямую, перпендикулярную $N$.

4. Для нахождения максимума построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении возрастания вектора $N$. Из рис. 1.3 видно, что опорной прямая $Z$ = const становится в точке $A$, где функция $Z$ принимает минимальное значение, и в точке $C$, где функция $Z$ принимает максимальное значение.

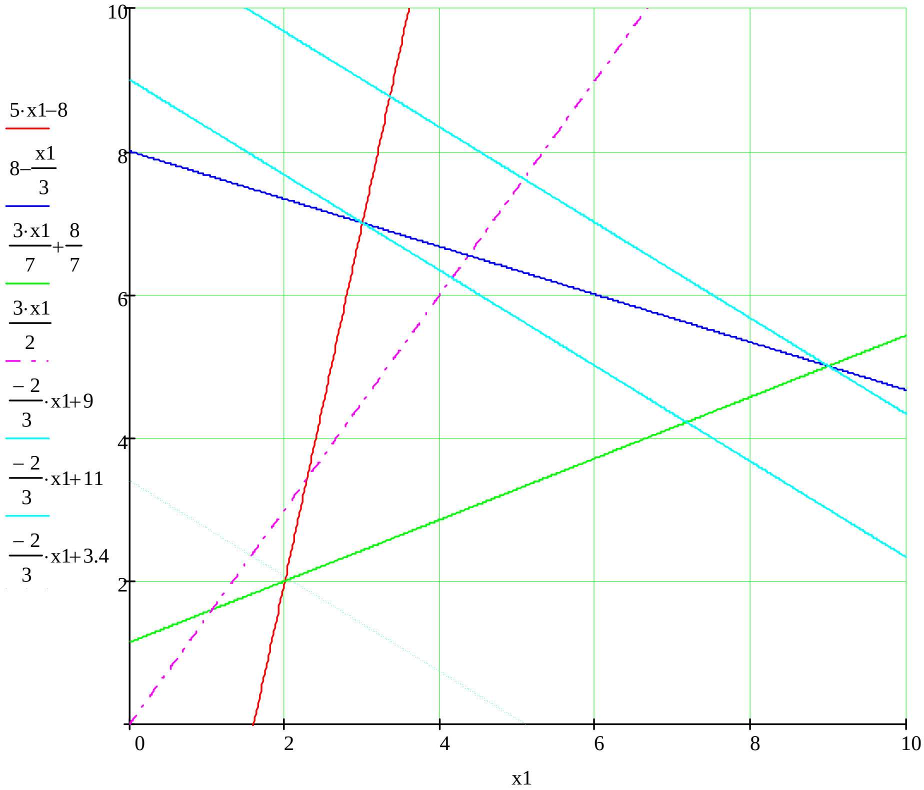



Рис. 1.3

Точка $C$ лежит на пересечении прямых $L_2$ и $L_3$. Для определения ее координат решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 3x_1 - 7x_2 \leq -8; \end{cases}$$

$$x_1 = 9, \quad x_2 = 5; \;\; z(9;\ 5) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 5 = 37.$$

Точка $A$ лежит на пересечении прямых $L_1$ и $L_3$. Для определения ее координат решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 1x_2 \geq 8, \\ 3x_1 - 7x_2 \leq -8; \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2; \;\; z(2;\ 2) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10.$$

Минимальному значению функции $Z$ соответствует точка $Z\ (2;\ 2) = 10$.
Максимальному значению функции $Z$ соответствует точка $Z\ (9;\ 5) = 37$.

## Варианты индивидуальных заданий

Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях.

***Вариант 1***

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97, \\ x_1 + 7x_2 \ge 77; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 2***

$$Z = x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 3***

$$Z = 9x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 4***

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17, \\ x_1 + 2x_2 \le 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 5***

$$Z = 5x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 26; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 6***

$$Z = 9x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24, \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110, \\ -2x_1 + 7x_2 \ge 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 7***

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 8***

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 9***

$$Z = 5x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \ge 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 10***

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 6, \\ 9x_1 + 8x_2 \le 157, \\ -3x_1 + 11x_2 \ge 16; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 11***

$$Z = 7x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 97, \\ x_1 + 7x_2 \ge 77; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 12***

$$Z = 6x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 13***

$$Z = x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 53, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 71; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 14***

$$Z = x_1 + 9x_2$$
$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17, \\ x_1 + 2x_2 \le 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 15***

$$Z = x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 26; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 16***

$$Z = 7x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \ge 24, \\ 9x_1 + 4x_2 \le 110, \\ -2x_1 + 7x_2 \ge 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 17***

$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 18***

$$Z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 19***

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \ge 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \ge 15; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

***Вариант 20***

$$Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48, \\ 2x_1 + x_2 \ge 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

## Требования к отчету

Отчет должен содержать:
титульный лист;
условие задачи;
чертеж с графической иллюстрацией решения задачи, пояснения к чертежу;
все промежуточные и окончательные вычисления;
вывод и анализ полученных результатов.

### Контрольные вопросы

1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
3. Каким может быть многоугольник решений?
4. Что геометрически означает каждое неравенство в системе ограничений?

## Лабораторная работа 2
## ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**Цель работы** — по условию задачи составить математическую модель, определить искомые величины и найти оптимальные решения.

**Программное обеспечение** — табличный процессор MS Excel.

### Теоретическое введение

Линейное программирование (ЛП) — это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны. ЛП успешно применяется в военной области, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках. Широкое использование этого метода также подкрепляется реализующими его высокоэффективными компьютерными алгоритмами. На алгоритмах линейного программирования (учитывая их компьютерную эффективность) базируются оптимизационные алгоритмы для других, более сложных типов моделей и задач исследования операций, включая целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование.

Рассмотрим модели с двумя переменными и их графические решения. Обобщение графического метода решения приводит к алгебраическому симплекс-методу (см. лабораторную работу 3).

***Модели ЛП с двумя переменными.*** Рассмотрим на простом примере с двумя переменными основные элементы модели ЛП. Далее этот пример будет обобщен в общую задачу линейного программирования.

*Пример 1.* Компания «Мир красок» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов — Ml и M2. В табл. 2.1. представлены основные данные для задачи.

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на 1 т аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

*Таблица 2.1*

| Вид сырья | Расход сырья, т, на 1 т краски | | Максимально возможный ежедневный расход краски, т |
|---|---|---|---|
| | для наружных работ | для внутренних работ | |
| Сырье М1 | 6 | 4 | 24 |
| Сырье М2 | 1 | 2 | 6 |
| Доход, тыс. р., за 1 т краски | 5 | 4 | — |

Задача (модель) линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента:

1) переменные, которые следует определить;

2) целевую функцию, подлежащую оптимизации;

3) ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Определение переменных — первый шаг в создании модели. После этого построение ограничений и целевой функции обычно не вызывает трудностей.

В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

$x_1$ — ежедневный объем производства краски для наружных работ;

$x_2$ — ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Далее, используя эти переменные, строим целевую функцию. Логично предположить, что целевая функция, как суммарный ежедневный доход, должна возрастать при увеличении ежедневных объемов производства красок. Обозначим эту функцию через $z$ (она измеряется в тыс. р.) и положим, что $z = 5x_1 + 4x_2$. В соответствии с целями компании получаем задачу: максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$.

Итак, остался неопределенным последний элемент модели — условия (ограничения), которые должны учитывать возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию. Другими словами, ограничения на сырье можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \text{используемый объем} \\ \text{сырья для производства} \\ \text{обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \text{максимально возможный} \\ \text{ежедневный расход сырья} \end{pmatrix}.$$

С учетом данных, представленных в табл. 2.1, имеем следующее:

используемый объем, т, сырья Ml = $6x_1 + 4x_2$;

используемый объем, т, сырья М2 = $1x_1 + 2x_2$.

Поскольку ежедневный расход сырья Ml и М2 ограничен 24 и 6 т соответственно, получаем следующие ограничения:

сырье Ml: $6x_1 + 4x_2 \le 24$;

сырье М2: $1x_1 + 2x_2 \le 6$.

Имеются еще два ограничения по спросу на готовую продукцию. Первое указывает, что ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на 1 т, т. е. $x_2 - x_1 < 1$.

Второе ограничение простое: максимальный ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать 2 т, т. е. $x_2 \le 2$.

Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные $x_1$ и $x_2$ должны быть неотрицательными. Таким образом, к сформулированным выше ограничениям необходимо добавить условие неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$.

Окончательно задача будет сформулирована следующим образом: максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$ при выполнении ограничений

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является допустимым. Например, решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ будет допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения, включая условие неотрицательности. Чтобы удостовериться в этом, подставьте значения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ в левые части неравенств системы ограничений и убедитесь, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$.

Итак, задача сформулирована, теперь встает вопрос о поиске оптимального допустимого решения, обеспечивающего максимум целевой функции. После некоторых раздумий приходим к выводу, что задача имеет много (фактически бесконечно много) допустимых решений. По этой причине невозможна подстановка значений переменных для поиска оптимума, т. е. нельзя применить простой перебор всех допустимых решений. Следовательно, необходима эффективная процедура отбора допустимых решений для поиска оптимального. В лабораторной работе 1 показан графический метод нахождения оптимального допустимого решения, а в лабораторной работе 3 — его алгебраическое обобщение.

В рассмотренном примере целевая функция и все ограничения были линейными.

***Графическое решение задачи ЛП.*** Графический способ решения задачи ЛП состоит из двух этапов:

1) построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели;

2) поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

*Пример 2*. Мы используем модель, построенную для компании «Мир красок» в разделе «Модели ЛП с двумя переменными», чтобы показать два этапа графического решения задачи ЛП.

Этап 1. Построение пространства допустимых решений.

Сначала проведем оси: на горизонтальной будут указываться значения переменной $x_1$, а на вертикальной — $x_2$ (рис. 2.1). Далее рассмотрим условие неотрицательности переменных: $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Эти два ограничения показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте (т. е. выше оси $x_1$ и правее оси $x_2$).

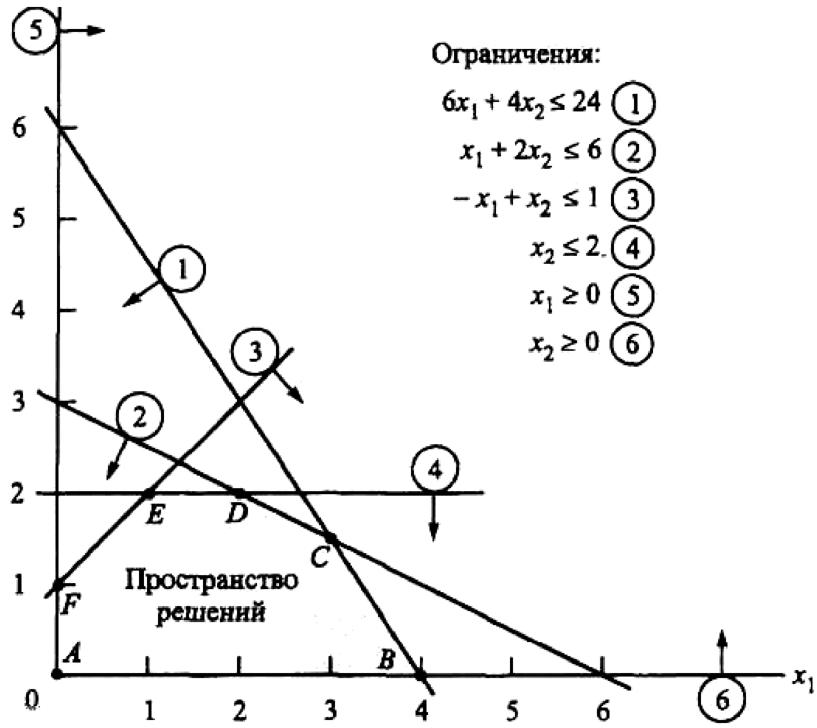



Рис. 2.1

Чтобы учесть оставшиеся ограничения, проще всего заменить неравенства на равенства (получив уравнения прямых), а затем на плоскости провести эти прямые.

Для построения каждой прямой ограничений достаточно найти две точки.

Для прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$

| $x_1$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 6 | 0 |

Для прямой $x_1 + 2x_2 = 6$

| $x_1$ | 0 | 6 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 3 | 0 |

Для прямой $-x_1 + x_2 = 1$

| $x_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $x_2$ | 1 | 2 |

Решением неравенства $x_2 \le 2$ является полуплоскость, лежащая ниже прямой $x_2 = 2$. Далее определим полуплоскости, являющиеся решением каждого неравенства, и получим многоугольник решений $ABCDEF$.

Любая точка, расположенная внутри или на границе области, ограниченной ломаной $ABCDEF$, является допустимым решением, т. е. удовлетворяет всем ограничениям. Поскольку пространство допустимых решений содержит бесконечное число точек, необходима некая процедура поиска оптимального решения.

Для того чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление возрастания целевой функции $z = 5x_1 + 4x_2$ (напомним, что функцию $z$ следует максимизировать). Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие возрастающим значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет точкой оптимума.

Из рис. 2.2 видно, что оптимальное решение соответствует точке $C$. Эта точка является местом пересечения прямых 1 и 2, поэтому ее координаты $x_1$ и $x_2$ находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24, \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 24, \\ -6x_1 + (-12x_2) = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x_2 = -12, \\ 6x_1 + 4x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1{,}5, \\ 6x_1 + 4 \cdot 1{,}5 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1{,}5, \\ x_1 = 3. \end{cases}$$

Решением данной системы будет $x_1 = 3$ и $x_2 = 1{,}5$, при этом значение целевой функции равно $z = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1{,}5 = 24$. Полученное решение означает, что для компании «Мир красок» оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 т краски для наружных и 1,5 т для внутренних работ с ежедневным доходом в 21 тыс. р.

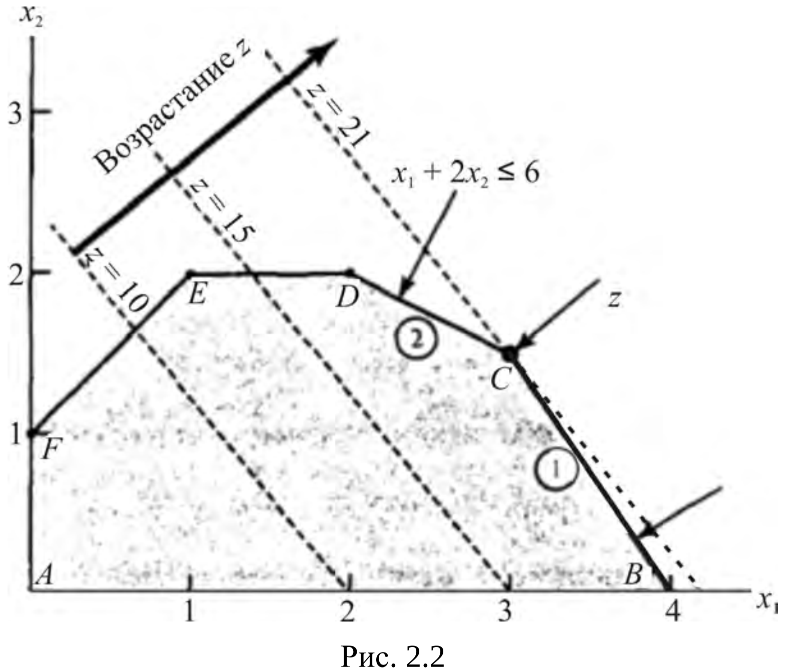



Рис. 2.2

Неслучайно, что графически оптимальное решение расположено в угловой точке пространства допустимых решений, где пересекаются две прямые. В этом и состоит основная идея построения общего симплексного алгоритма, который будет рассмотрен в лабораторной работе 3.

Направление изменения целевой функции легко определить из ее вида: коэффициенты при переменных $x_1$ и $x_2$ — это координаты нормали к прямой, определяемой целевой функцией. В данном случае целевая функция будет изменяться в направлении вектора $N$ (5; 4).

***Оптимизация задач линейного целочисленного программирования.*** «Поиск решения» — это надстройка, входящая в поставку MS Excel и предназначенная для оптимизации моделей. Она располагается в меню MS Excel «Сервис». Для ее активизации необходимо выполнить следующие действия: «Сервис» ⇒ «Надстройки» ⇒ «Поиск решений (отметить)» ⇒ ⇒ «Ок» (рис. 2.3).

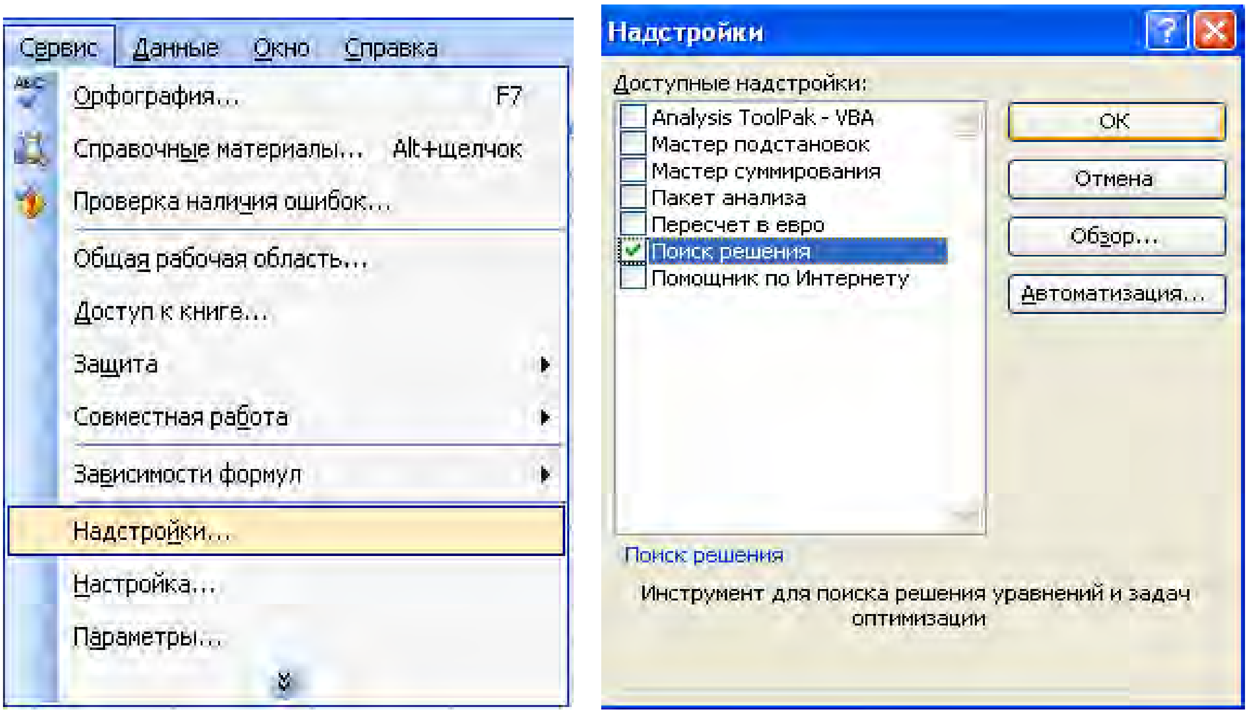



Рис. 2.3

«Поиск решения» при оптимизации линейного программирования использует симплекс-метод.

В программе MS Excel в меню «Сервис» при активации команды «Поиск решения» откроется диалоговое окно, где устанавливаются адрес целевой ячейки, диапазон переменных (рис. 2.4). С помощью кнопки «Добавить» вводятся необходимые ограничения (рис. 2.5). Кнопка «Параметры» открывает диалоговое окно «Параметры поиска решения», где по умолчанию стоит определенный набор команд (рис. 2.6).

Значение допустимого отклонения по умолчанию составляет 5 %. Это значит, что процедура оптимизации продолжается только до тех пор, пока значение целевой функции будет отличаться от оптимального не более чем на 5 %. Устанавливая значение допустимого отклонения равным, например, 0 %, мы заставляем «Поиск решения» находить истинный оптимум задачи за счет, возможно, более длительного времени решения.

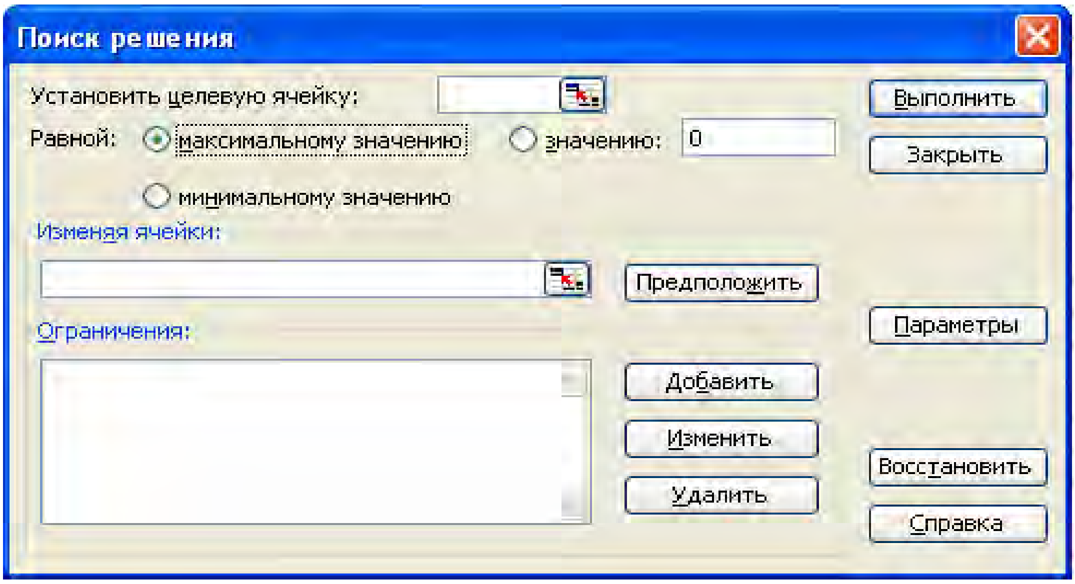



Рис. 2.4

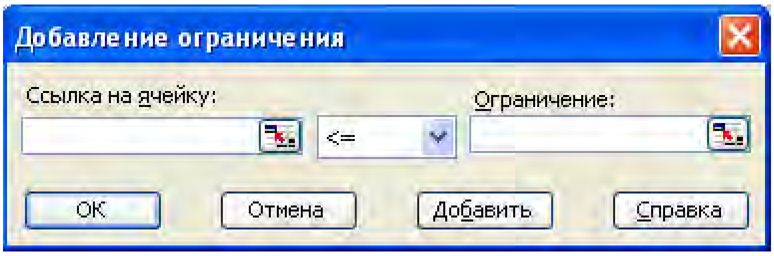



Рис. 2.5

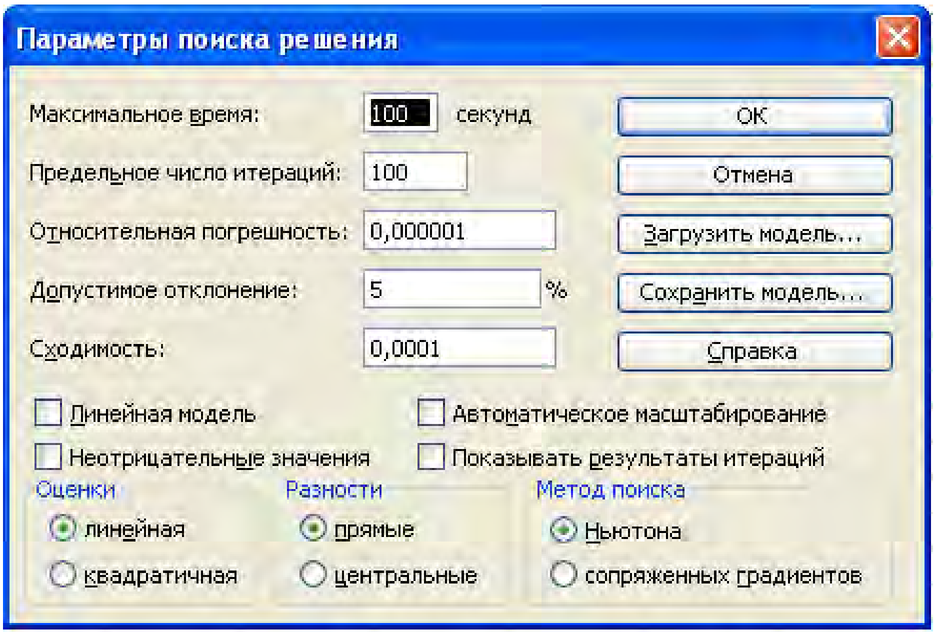



Рис. 2.6

Для улучшения работы средства «Поиска решения» настройка диалогового окна «Параметры поиска решения» часто применяется при решении задач нелинейного программирования.

Значение в поле «Сходимость» используется для завершения процесса поиска решения, когда изменение целевой функции происходит очень медленно. Если установить меньшее значение сходимости, чем предусмотрено по умолчанию (0,0001), программа продолжит процесс оптимизации даже при малых изменениях целевой функции.

Если установить в области «Оценки» переключатель «Квадратичная», «Поиск решения» будет применять для вычисления различных оценок более точную квадратичную аппроксимацию, а не линейную (по умолчанию). Кроме того, установка в области «Разности» переключателя «Центральные» вместо переключателя «Прямые» приведет к тому, что «Поиск решения» для вычисления частных производных будет применять более точную аппроксимацию, используя большее количество точек.

Обе эти установки улучшают вычисляемые числовые оценки функций нелинейной модели, однако могут увеличить время решения, поскольку на каждой итерации следует производить дополнительные вычисления.

В диалоговом окне «Параметры поиска решения» можно также задать метод поиска решения. Метод сопряженных градиентов в процессе оптимизации использует меньше памяти, но требует большего количества вычислений при заданном уровне точности, чем заданный по умолчанию метод Ньютона.

Значение в поле «Относительная погрешность» определяет, на сколько точно должно совпадать вычисленное значение левой части ограничения со значением правой части, чтобы данное ограничение было выполнено.

Команда «Выполнить» запускает решение задачи. «Поиск решения» просит уточнить, сохранить ли найденное решение или нет (рис. 2.7).

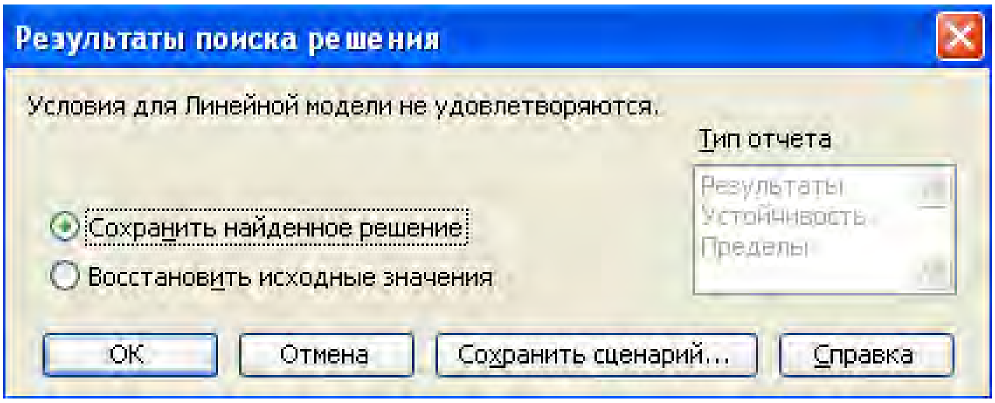



Рис. 2.7

Рекомендации по поиску решения задач:

1. При задании в диалоговом окне «Поиск решения» правых частей ограничений всегда следует указывать ссылки на ячейки в табличной модели.

2. Ячейки в правых частях неравенств в табличной модели должны содержать константы, а не формулы.

## Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составляем математическую модель задачи.

2. Для задач с двумя переменными решаем задачу графическим методом. Для задач со многими переменными данный пункт опускаем.

3. Получаем решение при помощи пакета «Поиск решения» в MS Excel. Ячейки A6 и B6 заполняем нулями. После поиска решений там будет находиться ответ (рис. 2.8).

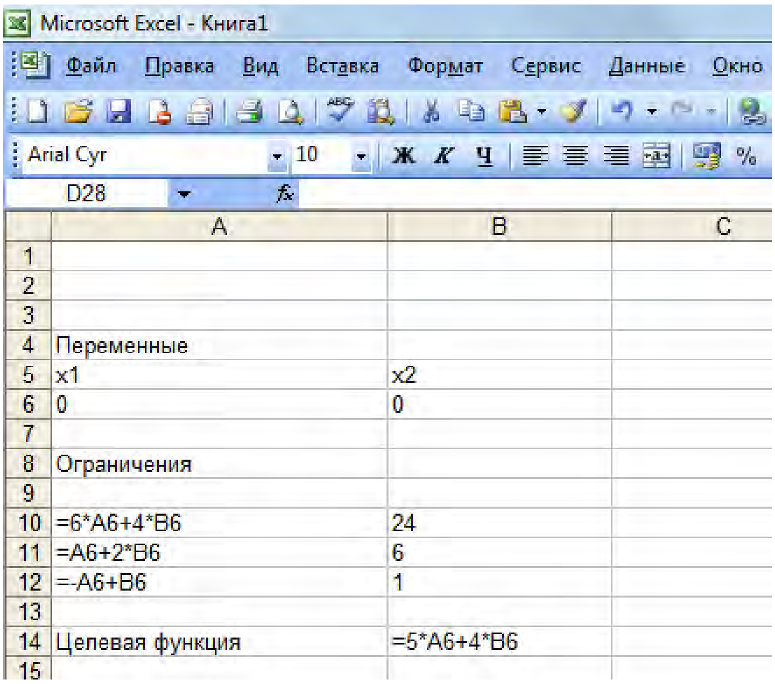



Рис. 2.8

Переходим в «Сервис/Поиск решения», заполняем диалоговые окна (рис. 2.9).

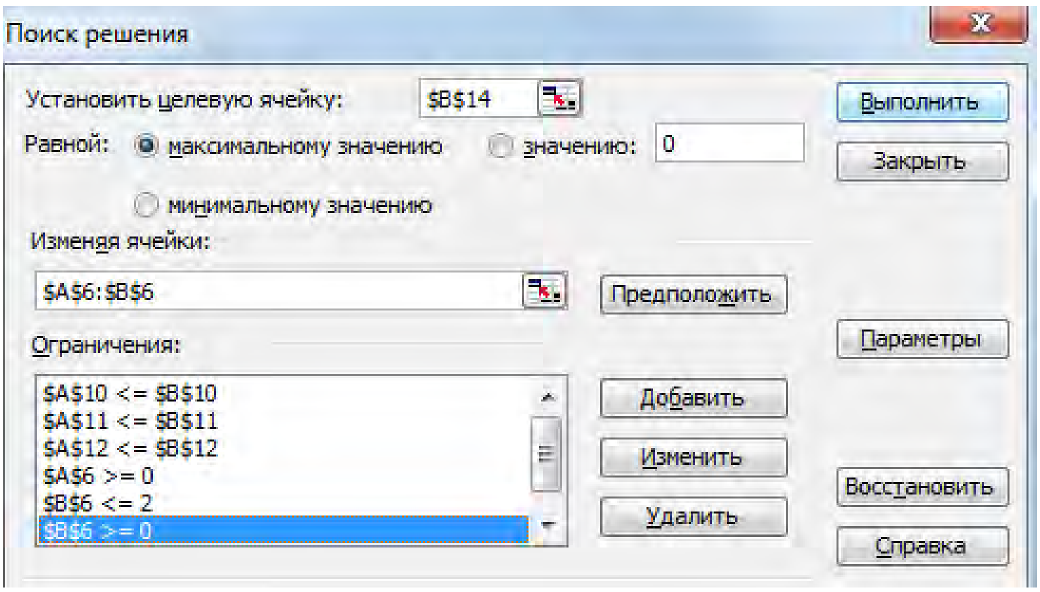



Рис. 2.9

Командой «Выполнить» запускаем решение задачи (рис. 2.10).

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | Переменные | | |
| 5 | x1 | x2 | |
| 6 | 3 | 1,5 | |
| 7 | | | |
| 8 | Ограничения | | |
| 9 | | | |
| 10 | 24 | 24 | |
| 11 | 6 | 6 | |
| 12 | -1,5 | 1 | |
| 13 | | | |
| 14 | Целевая функц | 21 | |
| 15 | | | |

Рис. 2.10

Нами получен ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 1{,}5$; значение целевой функции $z = 21$ тыс. р. Ранее этот ответ был получен при решении примера графическим методом.

## Варианты индивидуальных заданий

***Вариант 1.*** Мебельная фабрика производит столы и стулья. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в табл. 2.2

*Таблица 2.2*

| Расход ресурсов | Столы | Стулья | Объем ресурсов |
|---|---|---|---|
| Расход древесины на изделие, м | 0,5 | 0,04 | 200 |
| Расход труда, чел./ч | 12,0 | 0,60 | 1800 |
| Прибыль от реализации единицы изделия, тыс. р. | 180,0 | 20,00 | — |

Кроме того, на производство 80 столов заключен контракт, который должен быть выполнен. Найти оптимальную производственную программу, чтобы прибыль от реализации продукции была максимальной.

***Вариант 2.*** Фирма производит два продукта А и Б, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой машиной I, II, III. Время обработки, ч, для каждого из изделий А и Б приведено в табл. 2.3.

*Таблица 2.3*

| Продукт | Обрабатывающая машина | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| А | 0,50 | 0,4 | 0,2 |
| Б | 0,25 | 0,3 | 0,4 |

Время работы машин 40; 36 и 36 ч в неделю соответственно. Прибыль от изделий А и Б составляет соответственно 5 и 3 р. Определить недельные нормы выпуска изделий А и Б, максимизирующие прибыль.

***Вариант 3.*** Небольшая фабрика выпускает два вида красок — А и Б. Продукция поступает в оптовую продажу. Для производства используется два вида исходных продуктов — В и Г. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 т соответственно (табл. 2.4).

*Таблица 2.4*

| Исходный продукт | Расход на 1 т краски | | Максимальный запас, т |
|---|---|---|---|
| | А | Б | |
| В | 1 | 2 | 6 |
| Г | 2 | 1 | 8 |

Суточный спрос на краску А не превышает спроса на краску Б более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску Б не превышает 2 т/сут. Прибыль от продажи красок А и Б равна 3000 и 2000 р. соответственно. Найти количество выпускаемой краски, при котором прибыль максимальна.

***Вариант 4.*** Для приготовления трех видов изделий (А, Б, В) используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия и фонд рабочего времени для каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия указаны в табл. 2.5.

*Таблица 2.5*

| Тип оборудования | Затраты времени, ч | | | Общий фонд времени, ч |
|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | |
| Фрезерное | 2 | 4 | 5 | 120 |
| Токарное | 1 | 8 | 6 | 280 |
| Сварочное | 7 | 4 | 5 | 240 |
| Шлифовальное | 4 | 6 | 7 | 360 |
| Прибыль, р. | 10 | 14 | 2 | — |

Определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

***Вариант 5.*** Для изготовления паркета используется древесина четырех ценных пород дерева. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в табл. 2.6.

*Таблица 2.6*

| Расход ресурсов | Дуб | Клен | Бук | Орех | Объем ресурсов |
|---|---|---|---|---|---|
| Расход древесины на 1 м$^2$ (м$^3$) | 0,8 | 0,4 | 0,65 | 0,81 | 1000 |
| Расход труда, чел./ч | 23,0 | 18,0 | 15,00 | 7,00 | 1800 |
| Прибыль, р. | 1600,0 | 900,0 | 1400,00 | 1100,00 | — |

Кроме того, сделан заказ на 40 м$^2$ дубового и 10 м$^2$ орехового паркета. Найти такую производственную программу, при которой прибыль была бы максимальной.

***Вариант 6.*** Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида, м$^3$, на каждое изделие задан в табл. 2.7.

*Таблица 2.7*

| Вид продукции | Расход древесины, м$^3$ | | Цена изделия, тыс. р. |
|---|---|---|---|
| | хвойные | лиственные | |
| Стол | 0,15 | 0,2 | 0,8 |
| Шкаф | 0,30 | 0,1 | 1,5 |
| Запасы древесины, м$^3$ | 80,0 | 40,0 | — |

Кроме того, сделан заказ на 15 столов и 10 шкафов. Определить оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.

***Вариант 7.*** Для изготовления трех видов железобетонных изделий предприятие использует бетон трех различных классов. Нормы расхода бетона на производство изделия каждого вида, цена одного изделия, а также общее количество бетона приведены в табл. 2.8.

*Таблица 2.8*

| Класс бетона | Расход на одно изделие | | | Общее количество бетона |
|---|---|---|---|---|
| | А | Б | В | |
| В12,5 | 18 | 15 | 12 | 360 |
| В20 | 6 | 4 | 8 | 192 |
| В22,5 | 5 | 3 | 3 | 180 |
| Цена одного изделия | 23 | 26 | 28 | — |

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость произведенной продукции была бы максимальной.

***Вариант 8.*** Завод может производить четыре вида изделий — А, Б, В и Г. По технологии каждое изделие обрабатывается четырьмя машинами (время обработки, мин, в пересчете на 1 кг готовой продукции приведено в табл. 2.9). Каждая машина может работать 60 ч в неделю. Изделия могут продаваться по следующим ценам: А = 9 \$, Б = 7 \$, В = 6 \$, Г = 5 \$ за кг. Определить оптимальный план производства, максимизирующий прибыль при заданном максимальном спросе для каждого вида продукции.

*Таблица 2.9*

| Продукция | Машина | | | | Максимальный спрос |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| А | 5 | 10 | 6 | 3 | 400 |
| Б | 3 | 6 | 4 | 8 | 100 |
| В | 4 | 5 | 3 | 3 | 150 |
| Г | 4 | 2 | 1 | 2 | 500 |

***Вариант 9.*** Фирма производит три продукта (А, Б и В), рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой машиной I, II, III. Время обработки, ч, для каждого из изделий приведено в табл. 2.10.

*Таблица 2.10*

| Продукт | Обрабатывающая машина | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| А | 1,50 | 1,40 | 1,20 |
| Б | 1,25 | 1,34 | 1,45 |
| В | 3,03 | 2,90 | 3,20 |

Время работы машин 36, 40 и 48 ч в неделю соответственно. Прибыль от изделий А, Б и В составляет соответственно 230, 304 и 323 р. Определить недельные нормы выпуска изделий, максимизирующие прибыль.

***Вариант 10.*** В выпуске двух продуктов задействованы три станка. Чтобы выпустить 1 кг продукта, каждый станок должен отработать определенное количество часов (данные приводятся в табл. 2.11). Ресурс рабочего времени для станка 1 составляет 10 ч, для станка 2 — 16 ч и для станка 3 — 12 ч. Удельная прибыль в расчете на 1 кг составляет 4 $ для продукта 1 и 3 $ для продукта 2.

*Таблица 2.11*

| Станок | Время обработки, ч | |
|---|---|---|
| | продукта 1 | продукта 2 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 4 |
| 3 | 5 | 3 |

Определить оптимальный план производства продуктов каждого вида с целью получения максимальной прибыли от продаж.

***Вариант 11.*** Деревообрабатывающий завод производит столярные изделия двух видов — А и Б. Поступил заказ на производство 84 изделий А и 120 изделий Б. Расход ресурсов на их производство и прибыль от их реализации представлены в табл. 2.12.

*Таблица 2.12*

| Расход ресурсов | А | Б | Объем ресурсов |
|---|---|---|---|
| Расход древесины на изделие, м$^3$ | 1,25 | 0,9 | 400 |
| Расход труда, чел./ч | 12 | 5,8 | 980 |
| Прибыль от реализации единицы изделия, тыс. р. | 230 | 200 | — |

Найти оптимальную производственную программу, при которой прибыль от реализации продукции была бы максимальной.

***Вариант 12.*** Конкуренция приводит к необходимости торговым предприятиям заниматься выпуском продукции собственного производства, например салатов, пиццы и т. п. Нормы затрат на производство разного вида пиццы, объемы ресурсов и стоимость продуктов приведены в табл. 2.13. Определить оптимальный план производства, гарантирующий максимальный доход.

*Таблица 2.13*

| Продукты | Нормы затрат на изготовление 100 шт. пиццы, кг | | | Запасы продуктов, кг |
|---|---|---|---|---|
| | ассорти | грибная | салями | |
| Грибы | 6 | 7 | 2 | 20 |
| Колбаса | 5 | 2 | 8 | 18 |
| Тесто | 10 | 8 | 6 | 25 |
| Цена за 100 шт., тыс. р. | 9 | 6 | 5 | — |

***Вариант 13.*** Фирма производит два вида фундаментных блоков. Для производства 1 ед. фундаментного блока 1-го вида необходимо 0,45 ч работы оборудования, а для 2-го вида — 0,55 ч; расход пластической добавки на них составляет 0,013 и 0,02 кг на 1 блок соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 11 кг данной добавки и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 ед. фундаментного блока 1-го вида составляет 328 р., а 2-го вида — 410 р. Определить ежедневный план производства фундаментных блоков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

***Вариант 14.*** Строительная фирма распространяет два вида красок — А и Б. Для производства используется два вида исходных продуктов — олифа и пигмент. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 80 и 40 т соответственно.

Суточный спрос на краску А не превышает спроса на краску Б более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску Б не превышает 2 т/сут. Прибыль от продажи красок А и Б составляет 3000 и 2000 р. соответственно. Исходя из сведений, представленных в табл. 2.14, найти количество выпускаемой краски, при котором прибыль максимальна.

*Таблица 2.14*

| Исходный продукт | Расход на 1 т краски | | Максимальный запас |
|---|---|---|---|
| | А | Б | |
| Олифа | 10 | 12 | 80 |
| Пигмент | 2 | 1 | 4 |

***Вариант 15.*** Для производства красного и силикатного кирпича завод ЖБИ № 1 использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на 1 усл. ед. изделия, прибыль от реализации и общее количество ресурсов данного вида приведены в табл. 2.15.

Определить, сколько красного и сколько силикатного кирпича надо изготовлять, чтобы прибыль была максимальной.

*Таблица 2.15*

| Ресурсы | Нормы затрат ресурсов на 1 усл. ед. | | Общее количество ресурсов |
|---|---|---|---|
| | Красный кирпич | Силикатный кирпич | |
| 1-го вида, т | 0,2 | 0,1 | 40 |
| 2-го вида, т | 0,1 | 0,3 | 60 |
| Трудоемкость, чел./ч | 1,2 | 1,5 | 371,4 |
| Прибыль, р. | 600 | 800 | — |

***Вариант 16.*** Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и Б. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел./ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел./ч, а для производства одной детали типа Б — 2 чел./ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа Б в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа Б — 4 кг полимерного и 3 кг листового материала. Еженедельные запасы каждого материала 10 000 кг. Общее число производимых деталей должно составлять не менее 1500 шт.

Определить, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали каждого типа составляет соответственно 1,1 и 1,5 р.

***Вариант 17.*** Для изготовления двух видов продукции ($P_1$ и $P_2$) используют три вида сырья ($S_1$, $S_2$ и $S_3$). Запасы и количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл. 2.16. Необходимо составить такой план продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

*Таблица 2.16*

| Вид сырья | Запас сырья | Количество ед. сырья, идущего на изготовление ед. продукции | |
|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ |
| $S_1$ | 20 | 2 | 5 |
| $S_2$ | 40 | 8 | 5 |
| $S_3$ | 30 | 5 | 6 |
| Прибыль от ед. продукции, р. | | 50 | 40 |

***Вариант 18.*** Издательский дом издает два журнала — «Автомеханик» и «Инструмент», которые печатаются в типографиях «Алмаз-Пресс», «Карелия-принт» и Hansaprint (Финляндия), где общее количество часов, отведенных для печати, и производительность печати 1 тыс. экземпляров ограничены (табл. 2.17).

*Таблица 2.17*

| Типография | Время печати 1 тыс. экземпляров | | Ресурс времени, отведенный типографией, ч |
|---|---|---|---|
| | «Автомеханик» | «Инструмент» | |
| Алмаз-Пресс | 2 | 14 | 112 |
| Карелия-Принт | 4 | 6 | 70 |
| Hansaprint | 6 | 4 | 80 |
| Оптовая цена, р./шт. | 16 | 12 | — |

Спрос на журнал «Автомеханик» составляет 12 тыс. экземпляров, а на журнал «Инструмент» — не более 7,5 тыс. экземпляров в месяц. Определить оптимальное количество издаваемых журналов в месяц, которое обеспечит максимальную выручку от продаж.

***Задача 19.*** Нефтяная компания строит новый нефтеперерабатывающий завод для производства четырех видов продукции — дизельного топлива, бензина, смазочных материалов и авиационного топлива. Спрос на эти виды продукции составляет 140, 300, 100, 80 бр в неделю соответственно. По технологии каждый вид топлива обрабатывается четырьмя машинами. Время обработки, мин, в пересчете на 1 кг готовой продукции, а также запас времени приведены в табл. 2.18.

*Таблица 2.18*

| Машина | Продукция, бр | | | | Запас времени на все операции, мин |
|---|---|---|---|---|---|
| | Дизельное топливо | Бензин | Смазочные материалы | Авиационное топливо | |
| 1 | 5 | 10 | 6 | 3 | 400 |
| 2 | 3 | 6 | 4 | 8 | 100 |
| 3 | 4 | 5 | 3 | 3 | 150 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 2 | 500 |

Найти количество выпускаемой продукции, при котором расход времени минимален.

***Вариант 20.*** Завод «Электра» производит два типа электрических двигателей, каждый на отдельной сборочной линии. Производительность этих линий составляет 600 и 750 двигателей в день. Двигатель первого типа использует 10 ед. некоторого комплектующего, а двигатель второго типа — 8 ед. этого же компонента. Поставщик может обеспечить на день 8000 ед. этих деталей. Доходность изготовления двигателя первого типа — 6000 р., двигателя второго типа — 8000 р. Определить оптимальную структуру ежедневного производства деталей.

## Требования к отчету

Отчет должен содержать:

титульный лист;

условие задачи;

математическую модель задачи;
графическое решение для задач с двумя переменными;
решение при помощи «Поиска решений» в MS Excel.

**Контрольные вопросы**

1. Сформулируйте основную задачу линейного программирования.
2. С какой целью используется условие неотрицательности переменных?
3. Как активизировать надстройку «Поиск решения» в MS Excel?
4. Опишите получение решения при помощи пакета «Поиск решения» в MS Excel.

## Лабораторная работа 3
## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

**Цель работы** — усвоение симплекс-метода и приобретение практических навыков его применения.

**Программное обеспечение** — табличный процессор MS Excel.

### Теоретическое введение

Решение любой ЗЛП можно найти лишь симплексным методом или методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из методов, необходимо записать ЗЛП в канонической форме.

Симплексный метод основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает или убывает (при условии, что данная ЗЛП имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Переход возможен, если известен какой-нибудь опорный план.

Количество опорных планов определяется числом $C_n^m$. При больших $n$ и $m$ найти оптимальный план, перебирая все опорные планы, трудно. Поэтому необходимо иметь схему, по которой осуществляется упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой и является симплексный метод решения ЗЛП.

Пусть дана ЗЛП. Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1; n}. \tag{3.3}$$

Здесь $a_{ij}$, $b_i$ и $c_j$ ($i = \overline{1; m}$; $j = \overline{1; n}$) — заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Векторная форма данной задачи: найти максимум функции

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_i \tag{3.4}$$

при условиях

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m + \ldots + x_n A_n = A_0; \tag{3.5}$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1; n}, \tag{3.6}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix};\ \ldots;\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix};\ A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \cdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};\ \ldots;\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1 A_1 + bx_2 A_2 + \ldots + b_m A_m = A_0$, то по определению опорного плана $X = (b_1; b_2; \ldots; b_m; 0; \ldots; 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компоненты вектора $X$ равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые образуют базис $m$-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а также вектор $A_0$ могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса.

Пусть

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i,$$

где $j = \overline{0; n}$.

Положим,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij};\ \Delta_j = Z_j - C_j,$$

где $j = \overline{1; n}$.

Так как векторы $A_1$, $A_2$, …, $A_m$ единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$, $Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} a_{ij}$, $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} a_{ij} - C$.

Теорема 3.1. Опорный план $X^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots;\ x_m^*;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ задачи (3.4—3.6) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j = \overline{1; n}$.

Теорема 3.2. Если $\Delta_k < 0$ для некоторого $j = k$ и среди чисел $a_{ik}(I = \overline{1; m})$ нет положительных ($a_{ik} \leq 0$), то целевая функция (3.4) задачи (3.4—3.6) не ограничена на множестве ее планов.

Теорема 3.3. Если опорный план $X$ задачи (3.4—3.6) не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел $a_{ik}$ есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план $X'$, такой, что $Z(X') > Z(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать в симплексную таблицу.

## Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составить математическую модель задачи.

2. Решить ЗЛП симплекс-методом, используя для расчетов MS Excel. Алгоритм метода включает следующие этапы:

1) найти первоначальный опорный план;

2) составить симплекс-таблицу, используя для расчетов MS Excel;

3) выяснить, имеется ли хотя бы одно положительное (при минимуме) или отрицательное (при максимуме) число $\Delta_j$; если нет, то найденный опорный план оптимален; если же среди чисел $\Delta_j$ имеются положительные (отрицательные), то либо установить неразрешимость задачи, либо перейти к новому опорному плану;

4) найти направляющие столбец и строку: направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине числом $\Delta_j$, а направляющая строка — минимальным из отношений компонент-столбца вектора $A_0$ к положительным компонентам направляющего столбца;

5) используя метод исключения неизвестных Жордана — Гаусса, сделать новый базисный вектор $A_j$ единичным; при этом определить компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов $A_j$ по векторам нового базиса и числа $Z'$ и $\Delta'_j$; все эти числа записать в новой симплекс-таблице;

6) проверить найденный опорный план на оптимальность; если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то снова искать разрешающий элемент и далее действовать по алгоритму, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи закончить.

3. Проверить полученный результат с помощью инструментального средства Solver (Решатель) MS Excel «Сервис/Поиск решения».

## Пример выполнения лабораторной работы

1. Математическая модель задачи. Найти минимальное значение функции $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } j = \overline{1;\ 3}.$$

2. Первоначальный опорный план можно найти только при $b_i \geq 0$. Поэтому умножим второе неравенство на (–1):

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ 3x_1 + x_3 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1;\ 3}.$$

Перейдем к равенствам, добавляя дополнительные переменные к левым частям ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1;\ 6}.$$

Запишем систему в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы $A_4$, $A_5$, $A_6$ — базис первоначального опорного плана. Соответственно, $x_4$, $x_5$, $x_6$ — базисные неизвестные, $x_1$, $x_2$, $x_3$ — свободные неизвестные, которые приравниваем к нулю.

В результате получаем первоначальный опорный план $X_0 = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,\ x_6 = 5)$.

3. Для проверки плана $X_0$ на оптимальность составляем симплексную таблицу (рис. 3.1).

| | | | | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Базис | сб | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 1 | A4 | 0 | 1 | 2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | A5 | 0 | 2 | -4 | 2 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | A6 | 0 | 5 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| m+1 | | | 0 | -1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 |

Рис. 3.1

Тогда

$$Z(X_0) = C_б X_0 = 0;\ Z_1 = C_б X_1 = 0;\ Z_2 = C_б X_2 = 0;\ Z_3 = C_б X_3 = 0;$$

$$Z_1 - C_1 = 0 - 1 = -1;\ Z_2 - C_2 = 0 + 2 = 2;\ Z_3 - C_3 = 0 + 3 = 3.$$

4. Среди полученных оценок есть две положительные. Это означает, что $X_0$ не является оптимальным планом. Его можно улучшить, т. е. перейти к новому опорному плану (условия неразрешимости задачи не выполняются).

5. В базисе необходимо заменить один вектор другим. Для этого находим разрешающий элемент по критерию

$$\max \theta_{0j}(Z_j - C_j) > 0;\ \theta_{02} = \frac{2}{2};\ \theta_{03} = \min\left(\frac{1}{1}; \frac{5}{1}\right) = 1;$$

$$\theta_{02}(Z_2 - C_2) = 2 \cdot 1 = 2;\ \theta_{03}(Z_3 - C_3) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Следовательно, разрешающий элемент стоит на пересечении 1-й строки и 3-го столбца. Значит, вектор $A_3$ нужно включить в базис, а вектор $A_4$ — исключить.

6. Во второй симплекс-таблице (рис. 3.2) методом исключения неизвестных делаем новый базисный вектор единичным. При этом полноценно применяем вычислительные возможности MS Excel (ввод формульных данных с абсолютными и относительными адресами, копирование формул, форматирование числовых данных).

| | | | | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Базис | сб | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 1 | A3 | -3 | 1 | 2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | A5 | 0 | 3 | -2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | A6 | 0 | 4 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| m+1 | | | -3 | -7 | 5 | 0 | -3 | 0 | 0 |

Рис. 3.2

7. В оценочной строке второй симплекс-таблицы опять есть одна положительная оценка, поэтому найденный опорный план не является оптимальным и необходимо повторить все действия, начиная с пункта 5.

В оценочной строке третьей симплекс-таблицы (рис. 3.3) опять есть одна положительная оценка, поэтому найденный опорный план не является оптимальным и необходимо повторить все действия, начиная с пункта 5.

| | | | | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Базис | сб | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 1 | A3 | -3 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | A2 | -2 | 3 | -2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | A6 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | -2 | -1 | 1 |
| m+1 | | | -18 | 3 | 0 | 0 | -8 | -5 | 0 |

Рис. 3.3

В четвертой таблице (рис. 3.4) в оценочной строке все оценки отрицательные, значит, план $X_0 = (x_1 = 1 / 3;\ x_2 = 11 / 3;\ x_3 = 4)$ является оптимальным, $Z_{\min} = -19$. Этот оптимальный план единственный, так как нулевые $\Delta_j$ соответствуют только векторам, входящим в базис. Для векторов базиса оценки равны нулю.

| | | | | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | Базис | сб | A0 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
| 1 | A3 | -3 | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | A2 | -2 | 3 2/3 | 0 | 1 | 0 | - 1/3 | 1/3 | 2/3 |
| 3 | A1 | 1 | 1/3 | 1 | 0 | 0 | - 2/3 | - 1/3 | 1/3 |
| m+1 | | | -19 | 0 | 0 | 0 | -6 | -4 | -1 |

Рис. 3.4

8. Проверим наши вычисления, пользуясь командой MS Excel «Сервис/Поиск решения». Введем необходимые данные и ограничения (рис. 3.5).

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Переменные | | | |
| 2 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
| 3 | | | | |
| 4 | Целевая функция | | | =A3-2*B3-3*C3 |
| 5 | | | | |
| 6 | Ограничения | | | |
| 7 | =2*A3-B3+C3 | 1 | | |
| 8 | =-4*A3+2*B3-C3 | 2 | | |
| 9 | =3*A3+C3 | 5 | | |

Рис. 3.5

Выберем «Сервис/Поиск решения». Заполним окно диалога «Поиск решения» (рис. 3.6).

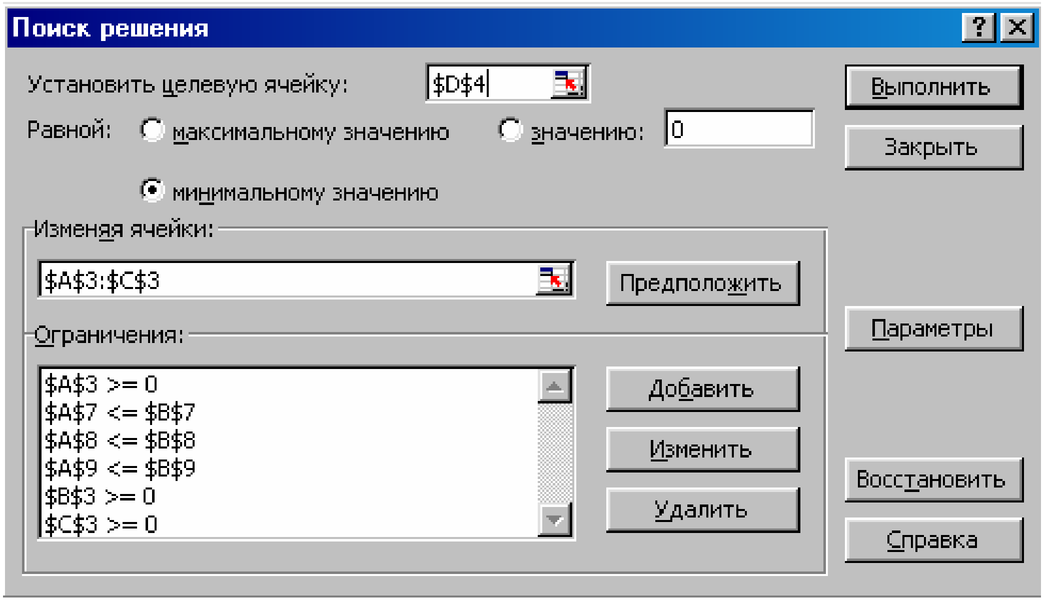



Рис. 3.6

Установим параметры в окне «Параметры поиска решения» (рис. 3.7).

После команды «Выполнить» откроется окно диалога «Результаты поиска решения», которое сообщит, что решение найдено (рис. 3.8).

Оптимальный план и максимальное значение целевой функции появятся в соответствующих ячейках таблицы (рис. 3.9).

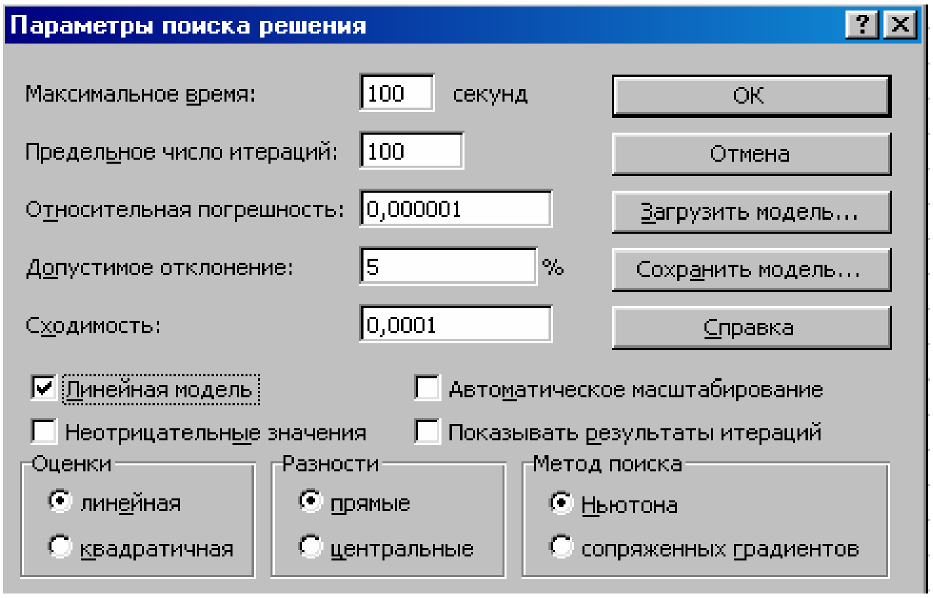



Рис. 3.7

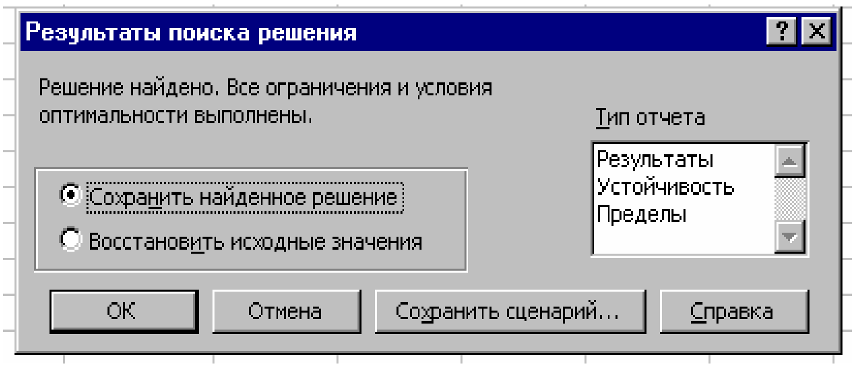
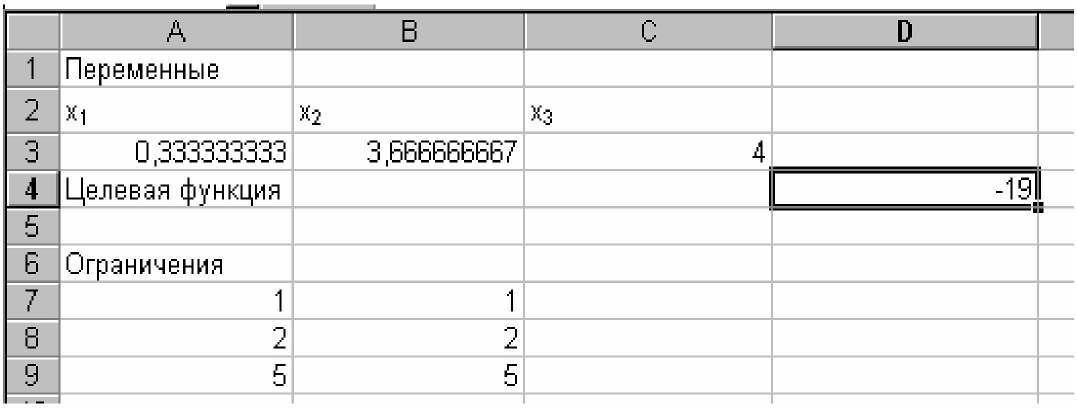



Рис. 3.8



| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Переменные | | | |
| 2 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
| 3 | 0,333333333 | 3,666666667 | 4 | |
| 4 | Целевая функция | | | -19 |
| 5 | | | | |
| 6 | Ограничения | | | |
| 7 | 1 | 1 | | |
| 8 | 2 | 2 | | |
| 9 | 5 | 5 | | |

Рис. 3.9

## Варианты индивидуальных заданий

***Варианты 1—10.*** Предположим, что для производства двух видов продукции А и Б можно использовать только материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида А расходуется $a_1$ кг материала первого сорта, $a_2$ кг материала второго сорта, $a_3$ кг материала третьего сорта. На изготовление единицы изделия вида Б расходуется $b_1$ кг материала первого сорта, $b_2$ кг материала второго сорта, $b_3$ кг материала третьего сорта. На складе фабрики всего имеется материала первого сорта $c_1$ кг, материала второго сорта $c_2$ кг, материала третьего сорта $c_3$ кг. От реализации единицы готовой продукции вида А фабрика имеет прибыль $\alpha$ р., вида Б — $\beta$ р.

Исходя из данных, представленных в табл. 3.1, определить, максимальную прибыль от реализации всей продукции обоих видов.

*Таблица 3.1*

| Вари-ант | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 15 | 14 | 28 | 9 | 1 | 758 | 526 | 541 | 10 | 2 |
| 2 | 15 | 15 | 9 | 33 | 25 | 3 | 571 | 577 | 445 | 8 | 10 |
| 3 | 11 | 13 | 13 | 21 | 15 | 3 | 741 | 741 | 822 | 5 | 3 |
| 4 | 14 | 12 | 8 | 8 | 4 | 2 | 624 | 541 | 376 | 7 | 3 |
| 5 | 19 | 16 | 19 | 26 | 17 | 8 | 868 | 638 | 853 | 5 | 4 |
| 6 | 14 | 15 | 20 | 40 | 27 | 4 | 1200 | 993 | 1097 | 5 | 13 |
| 7 | 9 | 15 | 15 | 27 | 15 | 3 | 606 | 802 | 840 | 11 | 6 |
| 8 | 13 | 13 | 11 | 2 | 11 | 1 | 608 | 614 | 575 | 5 | 7 |
| 9 | 8 | 14 | 14 | 7 | 8 | 1 | 417 | 580 | 591 | 5 | 5 |
| 10 | 19 | 16 | 19 | 31 | 9 | 1 | 1121 | 706 | 1066 | 16 | 19 |

***Варианты 11—20.*** Предположим, что в производстве двух видов продукции (А и Б) принимают участие три предприятия. При этом на изготовление единицы изделия А первое предприятие тратит $a_1$ ч, второе — $a_2$ ч, третье — $a_3$ ч. На изготовление единицы изделия Б первое предприятие тратит $b_1$ ч, второе — $b_2$ ч, третье — $b_3$ ч. На производство всех изделий первое предприятие может затратить не более чем $c_1$ ч, второе — не более чем $c_2$ ч, третье — не более чем $c_3$ ч. От реализации единицы готовой продукции вида А прибыль составляет $\alpha$ р., а вида Б — $\beta$ р.

Исходя из данных, представленных в табл. 3.2, определить максимальную прибыль от реализации всей продукции обоих видов.

*Таблица 3.2*

| Вари-ант | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 7 | 6 | 5 | 8 | 3 | 1 | 476 | 364 | 319 | 11 | 10 |
| 12 | 10 | 9 | 3 | 18 | 15 | 1 | 1238 | 1118 | 523 | 11 | 13 |
| 13 | 8 | 7 | 7 | 12 | 9 | 5 | 612 | 492 | 562 | 11 | 9 |
| 14 | 8 | 7 | 7 | 10 | 5 | 2 | 459 | 379 | 459 | 9 | 9 |
| 15 | 10 | 9 | 5 | 6 | 3 | 1 | 735 | 765 | 355 | 8 | 4 |
| 16 | 5 | 6 | 7 | 7 | 6 | 1 | 256 | 283 | 363 | 9 | 7 |
| 17 | 3 | 9 | 10 | 5 | 3 | 2 | 414 | 723 | 788 | 12 | 16 |
| 18 | 7 | 7 | 8 | 13 | 8 | 2 | 363 | 327 | 429 | 6 | 4 |
| 19 | 7 | 7 | 8 | 5 | 2 | 1 | 347 | 300 | 357 | 11 | 7 |
| 20 | 5 | 9 | 10 | 7 | 9 | 8 | 343 | 587 | 587 | 11 | 7 |

## Требования к отчету

Отчет должен содержать:

титульный лист;

описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

анализ полученных результатов и вывод.

### Контрольные вопросы

1. Как построить первоначальный опорный план ЗЛП и проверить его на оптимальность?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана ЗЛП на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?
7. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?
8. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

### Список рекомендуемой литературы

1. *Таха, А. Хемди.* Введение в исследование операций / Хемди А. Таха ; пер. с англ. — 7-е изд. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.
2. *Акулич, И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. — М. : Высшая школа, 1986.
3. *Кузнецов, Ю. Н.* Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. — М. : Высшая школа, 1980.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2013 г., поз. 40

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *Н. Э. Фотина*
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Подписано в свет 28.10.2013.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,3. Объем данных 0,6 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru