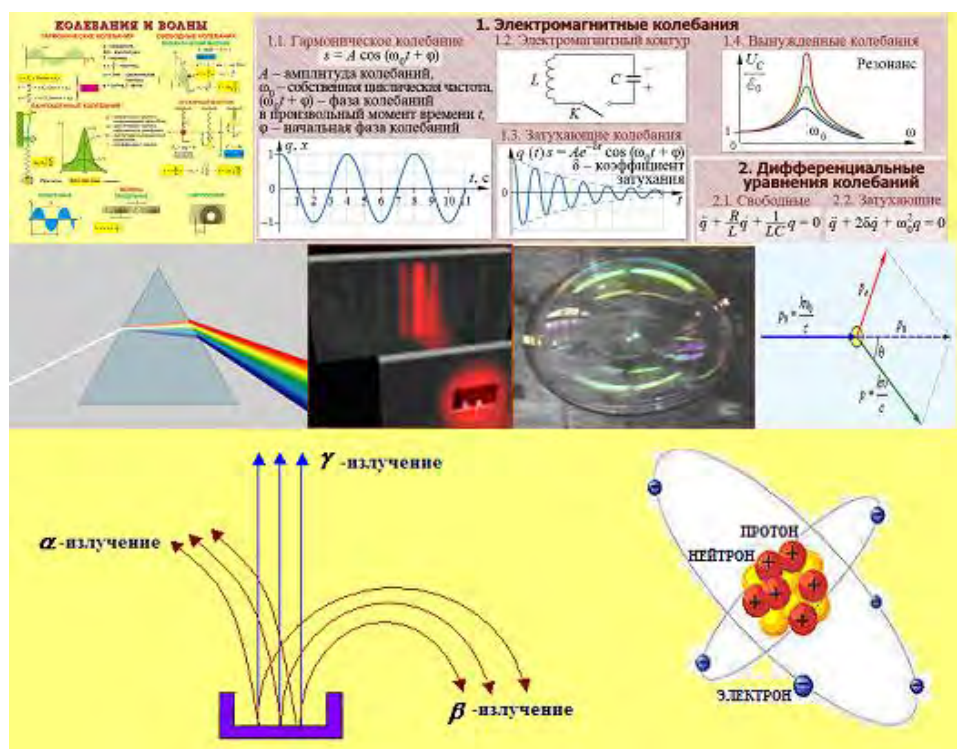


Н. Е. Чеботарева, В. А. Федорихин, А. И. Бурханов

# КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ВОЛНОВЫЕ И КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА. СТРОЕНИЕ АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Учебно-практическое пособие



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2013

Волгоград  
ВолГАСУ  
2013

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Н. Е. Чеботарева, В. А. Федорихин, А. И. Бурханов

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ВОЛНОВЫЕ И КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА.  
СТРОЕНИЕ АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА.  
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ**

*Учебно-практическое пособие*

Волгоград  
ВолгГАСУ  
2013

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73  
Ч-343

Р е ц е н з е н т ы:

кандидат физико-математических наук *Л. А. Васильева*, доцент кафедры физики Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;  
кандидат физико-математических наук *С. В. Медников*, доцент кафедры физики Волгоградского государственного политехнического университета

**Чеботарева, Н. Е.**

Ч-343 Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Строение атома и атомного ядра. Элементы квантовой теории [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие / Н. Е. Чеботарева, В. А. Федорихин, А. И. Бурханов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (13,6 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения: 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-585-7

Соответствует требованиям государственных образовательных стандартов третьего поколения, определяющих содержание примерных программ дисциплины «Физика» федерального компонента цикла общих математических и естественно-научных дисциплин и соответствующих рабочих программ подготовки бакалавров строительного направления, утвержденных методическими советами ВолГАСУ.

Содержит материалы для проведения лекций, практических (семинарских) занятий и лабораторного (натурного или виртуального) практикума. После лекции приведены вопросы для самостоятельного рассмотрения, каждое практическое занятие содержит перечень соответствующих основных законов и формул и подробный разбор типовых задач. В приложениях даны варианты тестовых заданий различных уровней сложности для проведения итогового контроля и календарные планы всех видов учебных занятий с указанием точек текущего и итогового контроля.

Для бакалавров всех профилей строительного направления дневной формы обучения, изучающих физику, и преподавателей физики.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 53(075.8)  
ББК 22.3я73

Незаконное использование данного продукта запрещено

ISBN 978-5-98276-585-7



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2013

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Лекция 1. Механические и электромагнитные колебания . . . . .	5
1.1. Гармонические механические колебания . . . . .	5
1.2. Затухающие и вынужденные механические колебания. Автоколебания. . . . .	9
1.3. Свободные электромагнитные колебания . . . . .	11
1.4. Затухающие и вынужденные электромагнитные колебания . . . . .	15
Лекция 2. Механические и электромагнитные волны . . . . .	17
2.1. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны . . . . .	17
2.2. Звуковые волны . . . . .	19
2.3. Законы и уравнения Максвелла . . . . .	20
2.4. Основные характеристики электромагнитных волн . . . . .	21
2.5. Экспериментальное получение электромагнитных волн. Опыты Г. Герца . . . . .	24
Практические занятия 1, 2. Механические и электромагнитные колебания . . . . .	27
Лекция 3. Волновая оптика . . . . .	35
3.1. Интерференция света . . . . .	35
3.2. Дифракция света . . . . .	38
3.3. Поляризация света . . . . .	42
3.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом . . . . .	44
Практическое занятие 3. Механические и электромагнитные волны. . . . .	48
Лекция 4. Квантовые свойства излучения . . . . .	56
4.1. Тепловое излучение. Законы теплового излучения . . . . .	56
4.2. Фотоэлектрический эффект . . . . .	59
4.3. Давление света . . . . .	62
4.4. Эффект Комптона . . . . .	63
Лекция 5. Элементы квантовой механики . . . . .	65
5.1. Волновые свойства микрочастиц. Соотношения неопределенностей . . . . .	65
5.2. Волновая функция. Уравнение Шредингера . . . . .	68
5.3. Решение уравнения Шредингера для различных состояний микрочастиц . . . . .	69
5.3.1. Движение свободной частицы . . . . .	69
5.3.2. Микрочастица в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками». . . . .	70
5.3.3. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект	72
5.3.4. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике . . . . .	73
Практические занятия 4, 5. Волновая оптика . . . . .	75
Лекция 6. Элементы современной физики атомов и молекул . . . . .	85
6.1. Атом водорода в квантовой механике . . . . .	85
6.2. Строение многоэлектронных атомов и периодический закон Менделеева . . . . .	88
6.3. Молекулярные спектры . . . . .	90
6.4. Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучение. Оптические квантовые генераторы (лазеры) . . . . .	92
Практическое занятие 6. Квантовые свойства излучения . . . . .	96
Лекция 7. Элементы ядерной физики . . . . .	102
7.1. Основные составляющие атомного ядра. Энергия связи ядра . . . . .	102
7.2. Радиоактивное излучение и его виды . . . . .	105
7.3. Ядерные реакции . . . . .	109
Практическое занятие 7. Элементы квантовой механики . . . . .	113
Практическое занятие 8. Элементы современной физики атомов и молекул . . . . .	119
Практическое занятие 9. Элементы ядерной физики . . . . .	124
Список рекомендуемой литературы . . . . .	128

Приложение 1. Контрольное задание по теме «Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Физика атома и атомного ядра» . . . . .	129
Приложение 2. Вариант тестовых заданий коллоквиума «Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Строение атома и атомного ядра. Элементы квантовой теории твердого тела» . . . . .	130
Приложение 3. Календарные планы проведения всех видов учебных занятий с указанием точек текущего и итогового контроля . . . . .	132

## Лекция 1 МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 1.1. Гармонические механические колебания

**Колебания** — движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания называются периодическими, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени.

В зависимости от физической природы колебательного процесса и механизма его возбуждения различают механические и электромагнитные колебания.

Наиболее важными величинами, характеризующими колебания, являются: смещение, амплитуда, период, частота, циклическая (круговая) частота.

**Смещение  $x$**  — величина, равная отклонению тела от положения равновесия в данный момент времени.

**Амплитуда колебаний  $x_m$**  — максимальное значение колеблющейся величины  $x$ . В случае механических колебаний амплитуда — модуль механического смещения.

**Период колебаний  $T$**  — наименьший промежуток времени, через который система, совершающая колебания, возвращается в то же состояние. По истечении этого времени значения физических величин, характеризующих колебательный процесс, повторяются.

**Частота колебаний  $\nu$**  — величина, равная числу колебаний, совершающихся в единицу времени. Частота и период колебаний связаны соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad (1.1)$$

$$[\nu] = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц (Герц)}.$$

**Циклическая (круговая) частота  $\omega_0$**  — число колебаний, совершающихся за  $2\pi$  единиц времени.

Циклическая частота  $\omega_0$  связана с периодом  $T$  и частотой гармонических колебаний  $\nu$  соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}; \quad (1.2)$$

$$[\omega_0] = \text{рад/с.}$$

**Фаза колебаний  $\varphi$**  — периодически изменяющийся аргумент функции, описывающей колебательный или волновой процесс. Фаза характеризует состояние этого процесса в данный момент времени.

Например, при гармонических колебаниях фаза равна  $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ , где  $t$  — произвольный момент времени,  $\varphi_0$  — начальная фаза (при  $t = 0$ ).

Простейший вид периодических колебаний — гармонические колебания.

**Гармонические колебания** — периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону синуса или косинуса

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.3)$$

Гармонические механические колебания происходят под действием упругой силы  $F$ , пропорциональной смещению  $x$  и направленной к положению равновесия:  $F_x = kx$ , где  $k$  — постоянный коэффициент. Такая зависимость силы от смещения характерна для любой природы силы. Поэтому силы иной физической природы, удовлетворявшие тому же виду зависимости, называются квазиупругими.

Если смещение при гармонических колебаниях изменяется со временем по закону

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то изменение скорости  $v$  и ускорения  $a$  колебательной системы описываются уравнениями

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = v_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (1.4)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $v_m = x_m \omega_0$  и  $a_m = x_m \omega_0^2$  — амплитуды скорости и ускорения.

Кинетическая энергия  $E_k$  материальной точки массой  $m$ , совершающей незатухающие гармонические колебания, определяется соотношением

$$E_k = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.5)$$

Потенциальная энергия  $E_p$  равна

$$E_p = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.6)$$

Полная механическая энергия  $E$  пропорциональна квадрату амплитуды и не изменяется с течением времени

$$E = E_k + E_p = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} = \text{const.} \quad (1.7)$$

Изменение смещения  $x$ , скорости  $v$ , ускорения  $a$ , кинетической энергии  $E_k$ , потенциальной энергии  $E_p$ , полной энергии  $E$  можно представить графически (рис. 1.1).

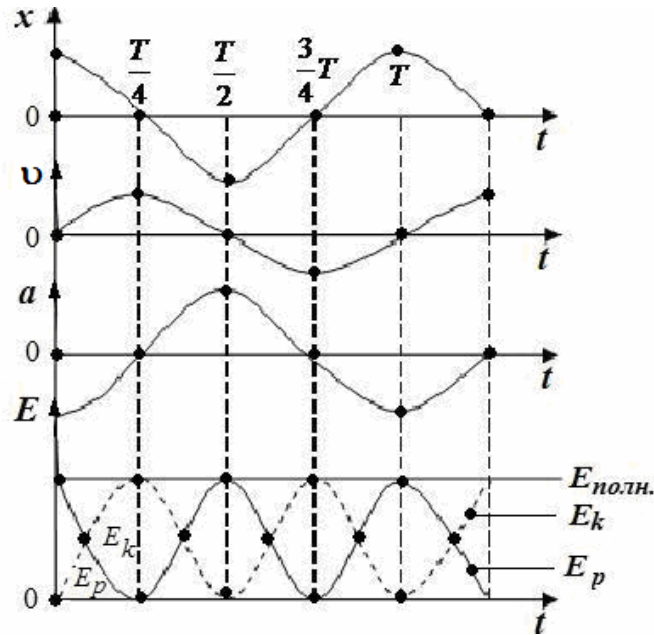


Рис. 1.1

Колебания представленной самой себе системы, вызываемые первоначальным кратковременным внешним воздействием (сообщение энергии), называются **свободными** или **собственными**.

**Колебательная система** — та, которая способна совершать свободные колебания. Она должна удовлетворять следующим условиям:

- 1) наличие положения устойчивого равновесия;
- 2) существование фактора, не позволяющего системе остановиться в положении равновесия в процессе колебаний (в механике — инертность системы);
- 3) малое трение в системе.

Собственная частота колебательной системы определяется только параметрами системы.

Ниже даны примеры механических колебательных систем.

**Пружинный маятник** — колебательная система, состоящая из груза массой  $m$ , подвешенного к абсолютно упругой пружине, коэффициент жесткости которой  $k$ . Пружинный маятник совершает гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$  с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



и периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.8)$$

**Математический маятник** — идеализированная модель, представляющая собой материальную точку, подвешенную на тонкой невесомой и нерастяжимой нити, закрепленной в неподвижной точке. Колебания такой системы происходят с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.9)$$

**Физический маятник** — твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр массы.

Физический маятник совершает колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

и периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad (1.10)$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку  $O$  (рис. 1.2);  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника.

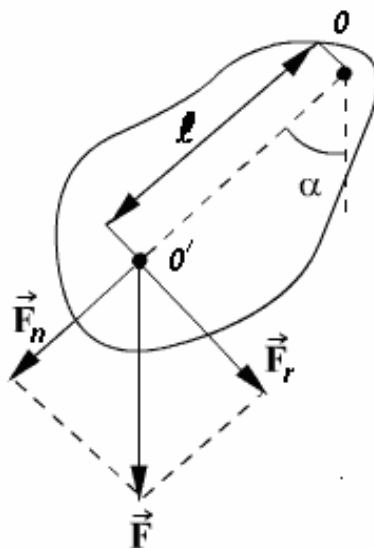


Рис. 1.2

## 1.2. Затухающие и вынужденные механические колебания. Автоколебания

Свободные колебания реальных колебательных систем всегда являются затухающими.

**Затухающие колебания** — собственные колебания, амплитуды которых уменьшаются со временем. Уменьшение амплитуды обусловлено потерями энергии колебательной системой.

В случае механических колебаний механическая энергия убывает за счет действия сил трения и других сил сопротивления. Быстрота убывания амплитуды характеризуется коэффициентом затухания и логарифмическим декрементом затухания. Коэффициент затухания для механических колебаний зависит от сил трения и массы колеблющегося тела. В любой колебательной системе затухание нарушает периодичность колебаний и к ним не применимы понятия периода и частоты. Но если затухание мало, то можно пользоваться понятием периода и считать период затухающих колебаний равным периоду гармонических колебаний в этой колебательной системе.

Логарифмический декремент затухания равен натуральному логарифму отклонения двух последовательных максимальных отклонений  $x_{m_1}$  и  $x_{m_2}$  колеблющейся величины в одну сторону (рис. 1.3).

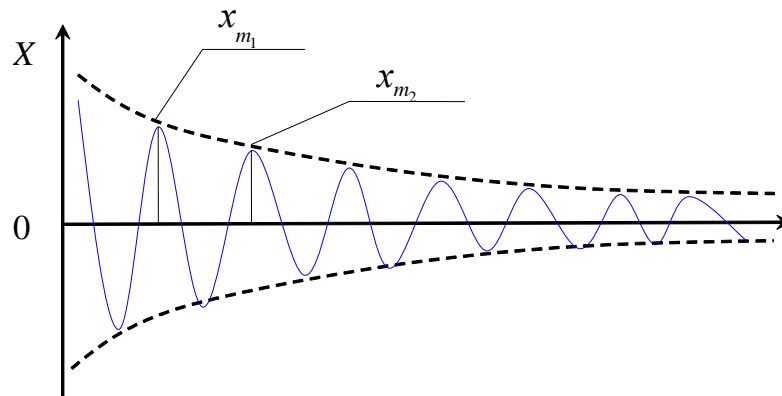


Рис. 1.3

**Логарифмический декремент затухания** — величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда убывает в  $e$  раз ( $e \approx 2,72\dots$ )

$$\lambda = \ln \frac{x_{m_1}}{x_{m_2}} = \frac{1}{N_e}. \quad (1.11)$$

Для получения незатухающих колебаний на колебательную систему должна действовать периодически изменяющаяся внешняя сила. В этом случае колебания называются вынужденными.

**Вынужденные колебания** — колебания, возникающие под действием внешней периодической, вынуждающей силы.

Их характер определяется свойствами внешнего воздействия и самой системы, совершающей колебания.

Частота и период вынужденных колебаний равен частоте и периоду вынуждающей силы.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды действующей силы и затухания в системе.

Если вынужденные колебания совершает колебательная система, затухание в которой мало, то амплитуда сильно зависит от соотношения между частотой вынуждающей силы и частотой собственных колебаний системы. При приближении частоты внешней силы к собственной частоте системы амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает. Эти явления называются резонансом.

**Резонанс** — явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебательной системы.

Амплитуда колебаний при резонансе зависит от степени затухания колебаний и определяется параметром колебательной системы, влияющим на затухание, — коэффициентом трения. На рис. 1.4 изображены графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от циклической частоты вынуждающей силы для колебательных систем с различным затуханием.

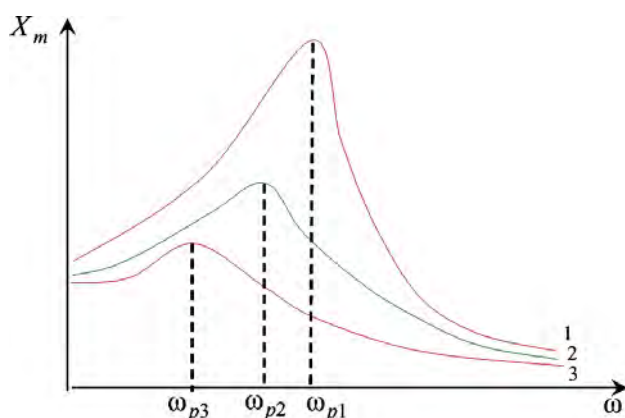


Рис. 1.4

Если затухание отсутствует (или бесконечно мало), то амплитуда при резонансе увеличивается до бесконечности (кривая 1). При наличии затухания резонансная амплитуда имеет конечное значение, причем при большем затухании резонансный максимум становится менее выраженным. Кривая 2 соответствует резонансу в системе с меньшим затуханием, чем в системе, которой соответствует кривая 3.

Резонанс играет большую роль в повседневной жизни. Резонанс сооружений и машин при периодических внешних воздействиях может привести к разрушениям и катастрофам. Чтобы избежать резонансных воздействий, подбирают соответствующим образом свойства системы или используют успокоители (демпферы) колебаний.

Если система сама управляет воздействием внешних сил, то возникающие в ней колебания называются автоколебаниями.

**Автоколебания** — незатухающие колебания физической системы, существующие без воздействия на нее внешних сил.

Они поддерживаются источником энергии, находящимся в самой системе. Амплитуда и период автоколебаний определяются параметрами автоколебательной системы.

Примеры автоколебаний: колебания маятника часов, электрические колебания в радиотехническом генераторе.

Блок-схема автоколебательной системы приведена на рис. 1.5.



Рис. 1.5

Автоколебательная система состоит из следующих элементов:

- 1) колебательная система, параметры которой определяют частоту автоколебаний;
- 2) источник энергии, поддерживающий колебания в системе;
- 3) клапан, регулирующий поступление энергии в колебательную систему;
- 4) обратная связь, посредством которой колебательная система управляет клапаном так, чтобы энергия, поступающая в систему за период, компенсировала потери энергии на преодоление трения и сопротивления среды за то же время.

Амплитуда автоколебаний определяется параметрами колебательной системы и энергией, поступающей в систему за период.

### 1.3. Свободные электромагнитные колебания

Электромагнитные и механические колебания имеют много общего, так как все основные характеристики колебаний определяются одинаково. Однако физическая сущность явлений в механике и электромагнетизме принципиально различна. Механические колебания — вид движения тел, например маятника часов, струны гитары, масс воды и воздуха.

Может колебаться величина электрического заряда на обкладке конденсатора, электрический ток в проводнике, электрическое напряжение на резисторе и так далее, т. е. колеблются электрические величины — они изменяются с течением времени.

Из явления электромагнитной индукции известно, что изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное поле, а изменяющееся во времени магнитное поле — электрическое. Колебания электрического заряда можно назвать и электрическими, но так как они порождают колебания магнитного поля, то их называют **электромагнитными колебаниями**.

Сравнение математических уравнений и физических величин, описывающих свободные механические и электромагнитные колебания, показывают аналогичность закономерностей, которым они подчиняются, что наглядно видно из табл. 1.1.

Таблица 1.1

Механические колебания	Электромагнитные колебания
$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ $v = \frac{dx}{dt} = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ или } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ или } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ $U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t + \varphi_0)$ $i = \frac{dq}{dt} = -i_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ $\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} = -q_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $T = 2\pi\sqrt{LC}$
Величины, описывающие колебания	
Масса $m$ Жесткость $k$ Коэффициент трения $\mu$ Сила $F$ Смещение $x$ Скорость $v$	Индуктивность $L$ Величина, обратная емкости $\frac{1}{C}$ Сопротивление $R$ ЭДС (напряжение) $\varepsilon, U$ Заряд $q$ Сила тока $i$

Электромагнитные колебания, как и механические, принято делить на свободные, вынужденные автоколебания.

Эти три типа колебаний имеют аналоги механических колебаний, что наглядно видно на рис. 1.6.

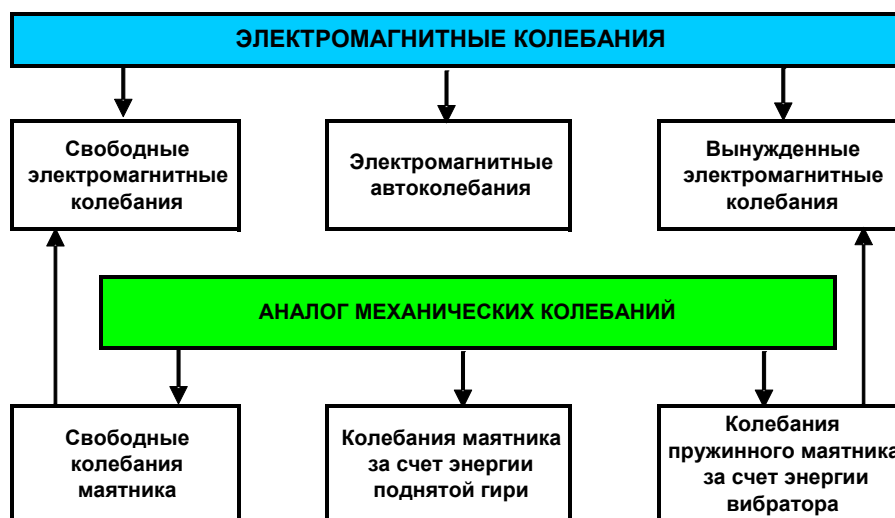


Рис. 1.6

Электромагнитные колебания возникают и существуют во многих природных объектах, в грозах, на Солнце и т. д. Такие колебания можно создать и искусственно, например, в самом простом колебательном контуре.

**Идеальный закрытый колебательный контур** — электрическая цепь, состоящая из заряженного конденсатора и катушки индуктивности.

Активное сопротивление этого контура  $R \rightarrow 0$ , поэтому он и называется идеальным.

Последовательные стадии колебательного процесса в этом контуре представлены на рис. 1.7 ( $C$  — емкость конденсатора,  $L$  — индуктивность катушки).

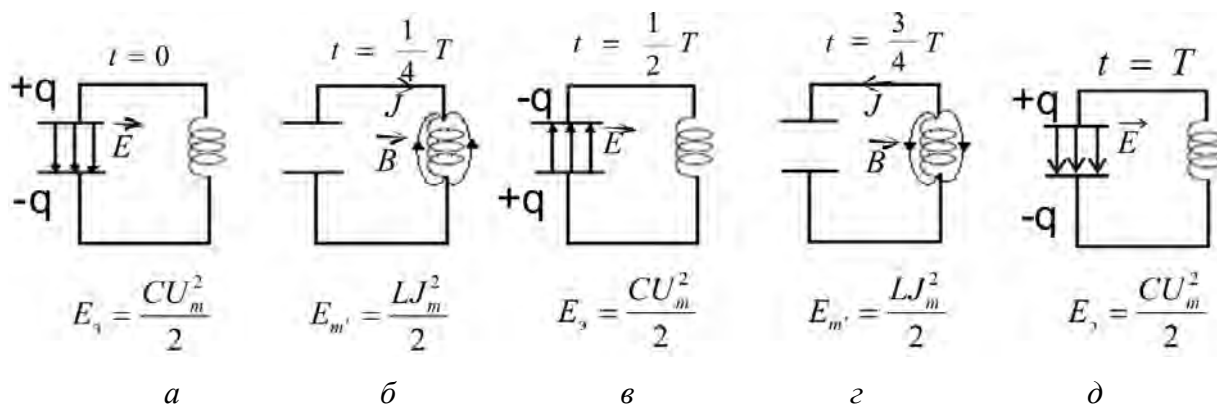


Рис. 1.7

В момент времени  $t = 0$  (рис. 1.7, а) между обкладками конденсатора возникает электрическое поле, энергия которого равна  $E_s = \frac{CU_m^2}{2}$ . Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток силой  $J$ . В результате энергия электрического поля уменьшается, а энергия магнитного поля катушки возрастает.

В момент времени  $t = \frac{1}{4}T$ , когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (следовательно, и ток) достигает наибольшего значения (рис. 1.7, б). С этого момента ток в контуре будет убывать, следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникает электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обращается в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигает максимума.

Далее те же процессы начнут происходить в обратном направлении (рис. 1.7, в, г).

Система к моменту времени  $t = T$  (рис. 1.7, д) придет в первоначальное состояние, после чего начинается повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора.

В процессе этих колебаний происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот.

$$E_э \rightarrow E_m \rightarrow E_э \rightarrow E_m \rightarrow E_э \rightarrow \dots$$

Полная энергия электромагнитных колебаний в любой момент времени равна сумме энергий электрического и магнитного полей

$$E = E_э + E_m. \quad (1.12)$$

По закону сохранения энергии полная энергия идеального контура постоянна

$$E = \frac{CU^2}{2} + \frac{LJ^2}{2} = \text{const}, \quad (1.13)$$

где  $U$  — мгновенное значение напряжения на конденсаторе;  $J$  — мгновенное значение силы тока в контуре.

При протекании тока по катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_{is} = -L \frac{dJ}{dt}.$$

Так как  $J = \frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dq}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$  и учитывая, что для идеального контура  $U_c = \varepsilon_{is}$ , после простых преобразований получаем дифференциальное уравнение колебаний заряда в контуре

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (1.14)$$

Заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $q_m$  — амплитуда колебаний заряда с собственной циклической частотой контура  $\omega_0$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , и периодом  $T$ .

Формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (1.15)$$

Формула Томсона позволяет сделать важный вывод: период собственных колебаний не зависит от амплитуды и определяется только параметрами колебательного контура.

Сила тока в колебательном контуре и напряжение на конденсаторе записываются в виде

$$J = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = J_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \quad J_m = q_m \omega_0; \quad (1.16)$$

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad U_m = \frac{q_m}{C}.$$

Из данных уравнений можно установить, что колебания тока опережают колебания заряда (напряжения) на  $\frac{\pi}{2}$ . Ток достигает максимального значения, когда величина заряда и напряжения обращаются в 0 и наоборот, что наглядно видно из рис. 1.8.

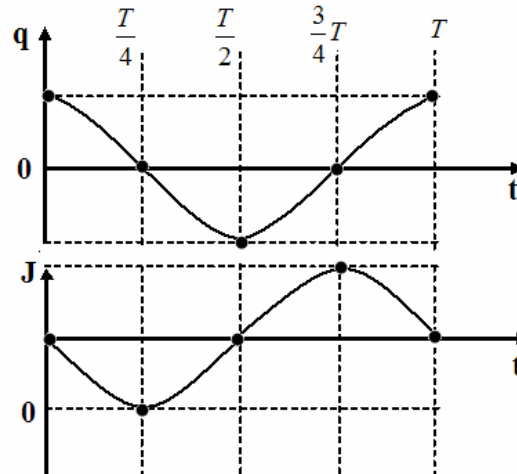


Рис. 1.8

#### 1.4. Затухающие и вынужденные электромагнитные колебания

В контуре с активным сопротивлением  $R$  колебания затухают, так как часть сообщенной колебательной системе энергии необратимо превращается во внутреннюю энергию, которая рассеивается в окружающее пространство.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре имеет вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (1.17)$$

Учитывая коэффициент затухания

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad (1.18)$$

дифференциальное уравнение (1.17) можно записать в виде

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (1.19)$$

При этом колебания заряда совершаются по закону

$$q = q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.20)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (1.21)$$



Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии.

**Вынужденные электромагнитные колебания** — колебания, возникающие в колебательной системе под действием внешнего, периодически изменяющегося напряжения.

Для вынужденных электромагнитных колебаний можно записать дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t, \quad (1.22)$$

где  $\omega$  — циклическая частота внешней ЭДС, например, генератора переменного тока.

Частное решение дифференциального уравнения (1.22)

$$q = q_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.23)$$

где  $\varphi$  определяет сдвиг по фазе между колебаниями заряда и приложенного напряжения.

Величины  $q_m$  и  $\varphi$  определяются из формул, связывающих эти величины с параметрами колебательной системы  $R, C, L, U_m, \omega$ .

#### **Вопросы для самостоятельного рассмотрения**

1. Сложение колебаний одинаковой частоты и одинакового направления.
2. Сложение колебаний одинакового направления, незначительно различающихся по частоте — биении.
3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.
4. Графики затухающих механических колебаний.
5. Полное решение дифференциального уравнения вынужденных механических колебаний.
6. Полное решение дифференциального уравнения вынужденных электромагнитных колебаний.

## Лекция 2 МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### 2.1. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

**Волны** — возмущения (изменение состояния вещества или поля), распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью.

Распространение волн связано с переносом энергии без переноса вещества.

Наиболее важные и часто встречающиеся виды волн: упругие (механические) волны, волны (в том числе звуковые) на поверхности жидкости, электромагнитные (в том числе радиоволны, видимый свет, рентгеновское излучение и т. д.).

При распространении волн возможны явления отражения, преломления, дисперсии, дифракции, интерференции, поглощения и рассеяния (эти явления будут рассмотрены на примере электромагнитных волн).

В зависимости от ориентации возмущения относительно направления распространения волны делятся на два типа: продольные и поперечные.

**Поперечная волна** — волна, в которой возмущения ориентированы перпендикулярно направлению ее распространения.

**Продольная волна** — волна, в которой возмущения ориентированы вдоль направления ее распространения.

**Луч** — направление, в котором волной переносится энергия. Он перпендикулярен фронту волны.

**Фронт волны** — геометрическое место точек, до которых доходит волновое возмущение к моменту времени  $t$ .

**Волновая (фазовая) поверхность** — геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновых поверхностей может быть много, а волновой фронт в каждый момент времени — один (рис. 2.1, *a* — плоской, *б* — сферической волны).

Через каждую точку среды, охваченной волновым движением, можно провести одну волновую поверхность, соответствующую значению фазы колебаний в этой точке в данный момент времени.

В однородной изотропной среде излучение точечного источника имеет сферические волновые поверхности (см. рис. 2.1, *б*).

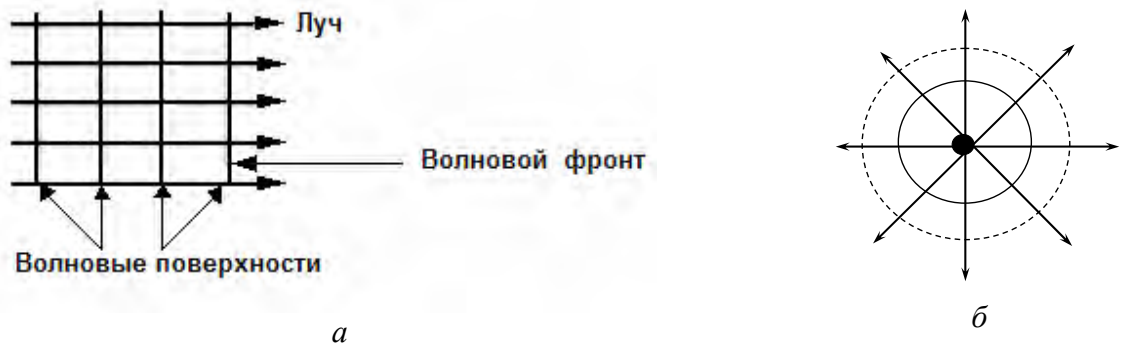


Рис. 2.1

**Упругая волна** называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими (рис. 2.2).

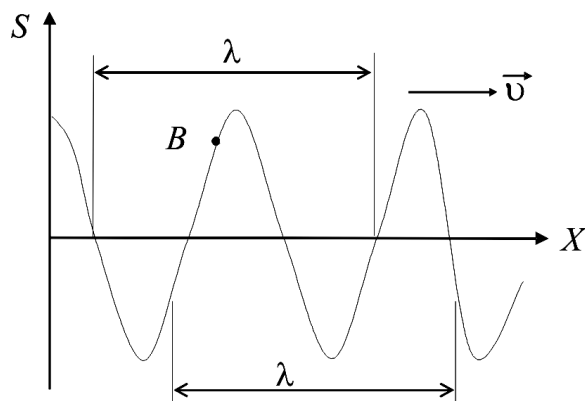


Рис. 2.2

**Длина волны  $\lambda$**  — величина, равная расстоянию между точками, фазы колебаний которых отличаются на  $2\pi$ , или расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний точки среды. Длина волны связана с периодом колебаний  $T$  и скоростью  $v$  распространения волны соотношениями

$$\lambda = vT; \quad (2.1)$$

$$v = \lambda\nu. \quad (2.2)$$

При прохождении упругих волн в среде возникают механические деформации сжатия-растяжения (при распространении продольных волн) и сдвига (при распространении поперечных волн), которые переносятся волной из одной точки среды в другую. В твердых телах могут распространяться и продольные и поперечные упругие волны, а в жидкостях и газах — только продольные.

Примером упругих волн являются волны в жидкостях, звуковые волны, ультразвук, волны, возникающие в земной коре при землетрясениях.

В общем случае уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $X$  в однородной, изотропной, непоглощающей среде, имеет вид

$$S(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (2.3)$$

где  $A$  — амплитуда волны;  $\omega$  — циклическая частота;  $\varphi_0$  — начальная фаза волны;  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$  — волновое число;  $\omega t = kx + \varphi_0$  — фаза плоской волны в момент времени  $t$ .

*Уравнение сферической волны*

$$S(x,t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (2.4)$$

где  $r$  — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды. В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний убывает с расстоянием по закону  $\frac{1}{r}$ .

## 2.2. Звуковые волны

**Звуковые волны** — упругие волны с частотами 16...20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха человека.

Наиболее распространенными источниками звука являются колеблющиеся тела, частота колебаний которых лежит в вышеуказанном интервале, например, струна, камертон, столб воздуха в трубе, мембрана, голосовые связки человека. Источником звука в газах или жидкостях могут быть не только вибрирующие тела. Так, например, полет стрелы в воздухе сопровождается свистом, бурное течение воды — шумом.

Различают следующие звуки:

- 1) простой тон, представляющий собой гармоническое колебание;
- 2) сложный тон, представляющий собой результат сложения нескольких простых тонов;
- 3) шум, являющийся нерегулярными колебаниями;
- 4) звуковой удар — кратковременное сильное звуковое воздействие на орган слуха человека.

Скорость распространения звуковых волн в газах вычисляется по формуле:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (2.5)$$

где  $R$  — молярная газовая постоянная;  $\mu$  — молярная масса;  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — отношение молярных теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме;  $T$  — термодинамическая температура.

При распространении звука в атмосфере необходимо учитывать целый ряд факторов: скорость и направление ветра, влажность воздуха, молекулярную структуру газовой среды, явления преломления и отражения звука на границе двух сред.

### 2.3. Законы и уравнения Максвелла

Существование электромагнитных волн, т. е. переменного электромагнитного поля, распространяющихся в пространстве с конечной скоростью, вытекает из теории Максвелла.

Максвелл установил следующие закономерности:

1) любая точка пространства вблизи электрического заряда характеризуется вектором электрической силы (напряженности);

2) каждая точка вблизи электрического тока характеризуется вектором магнитной силы (магнитной индукции);

3) в проволочном контуре, который пронизывается переменным потоком линий индукции, возникает электрический ток — явление Фарадея;

4) электрический ток создается тогда, когда на электрические заряды действует электрическая сила.

Объединив пункты 3 и 4, можно утверждать, что в проволочном контуре, через который проходит переменный магнитный поток, возникает электрическое поле.

Не так существенно то, что магнитный поток охватывается электрическим контуром. Электрическое поле может возникать и в вакууме. Тогда можно утверждать, что около изменяющегося потока линий магнитной индукции возникают замкнутые линии электрической напряженности.

Окончательно сформулируем следующее.

I. Электрическое поле создается электрическим зарядом и в этом случае линии напряженности начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

II. Электрическое поле создается переменным магнитным полем, и в этом случае линия электрической напряженности замкнута и охватывает изменяющийся магнитный поток.

Эти два утверждения и образуют *два первых закона Максвелла*.

Точно так же можно построить рассуждения, объясняющие возникновение магнитного поля по аналогии с возникновением электрического поля:

1) магнитное поле создается электрическим потоком;

2) переменный электрический ток образует переменное магнитное поле;

3) переменной ток создается в проводнике переменным электрическим полем.

Если проводника нет, а есть переменное электрическое поле, существующее в вакууме, тогда около переменного потока (линий напряженности) возникает замкнутая линия индукции.

Поэтому можно сформулировать следующее.

III. Магнитное поле не имеет источника (нет магнитных зарядов).

IV. Магнитное поле создается электрическими потоками и переменным электрическим полем.

Утверждения III и IV образуют *третий и четвертый законы Максвелла*.

Законы Максвелла утверждают, что не может существовать переменное магнитное поле без электрического и переменное электрическое — без магнитного. По этой причине и не разделяют эти два поля, это единое электромагнитное поле.

Электромагнитное поле столь же материально, как и его источник — заряженные частицы и может существовать в вакууме без каких бы то ни было зарядов.

Математическое выражение этих законов определяет полная система уравнений Максвелла, которые записываются в интегральной и дифференциальной форме. *Интегральная форма записи* является более общей, и в этой форме уравнения Максвелла выражаются так:

$$\begin{aligned} \int_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}; \quad \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV; \\ \int_L \vec{H} d\vec{l} &= - \int_S \left( \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0; \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  — напряженность и индукция электрического поля;  $\rho$  — объемная плотность электрических зарядов;  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  — напряженность и индукция магнитного поля;  $\vec{J}$  — вектор плотности тока проводимости;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon$  и  $\mu$  — относительная электрическая и магнитная проницаемости;  $\gamma$  — удельная электропроводность.

Из (2.6) следуют волновые уравнения, которым удовлетворяют векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . В простейшем случае для плоских монохроматических электромагнитных волн волновые уравнения имеют вид

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 E_y}{dt^2}; \quad \frac{d^2 B_z}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 B_z}{dt^2}. \quad (2.7)$$

Соотношения (2.7) между пространственными и временными производными векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в некоторой области пространства характерны для распространяющихся вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v$  поперечных электромагнитных волн.

## 2.4. Основные характеристики электромагнитных волн

**Плоская электромагнитная волна** — волна, в которой векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  зависят только от  $t$  и одной декартовой координаты, например, от  $x$ .

**Плоскость поляризации** электромагнитной волны — плоскость, проведенная через  $\vec{E}$  и луч.

**Линейно-поляризованная электромагнитная волна** — волна, в которой  $\vec{E}$  во всех точках поля колеблется вдоль параллельных прямых.

**Монохроматическая электромагнитная волна** — волна, в которой  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совершают гармонические колебания одинаковой частоты.

Уравнение монохроматической, линейно-поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $X$  в однородной, изотропной, непоглощающей среде

$$\begin{aligned} E &= E_m \sin(\omega t - kx + \varphi_0); \\ B &= B_m \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda$  — длина волны.

Реальные электромагнитные волны не являются монохроматическими, их можно представить в виде совокупности монохроматических электромагнитных волн, называемых группой электромагнитных волн.

Скорость электромагнитной волны  $v$  определяется по формуле

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (2.9)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  — скорость света в вакууме.

Соотношение (2.9) определяет фазовую скорость электромагнитной волны, т. е. скорость, с которой переносится фаза монохроматического колебания. В вакууме  $\epsilon = \mu = 1$  и  $v = c$ .

Скорость распространения фазы определяется из соотношения  $\omega t - kx = \text{const}$ . Дифференцируя это соотношение, получим  $\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$ , но

$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{Tv}{T} = v$  поэтому  $v = \frac{\omega}{k}$  — фазовая скорость монохроматической волны в среде, которая зависит от длины волны. Среда, в которых такое явление происходит, называются диспергирующими.

На рис. 2.3 представлена плоская электромагнитная волна.

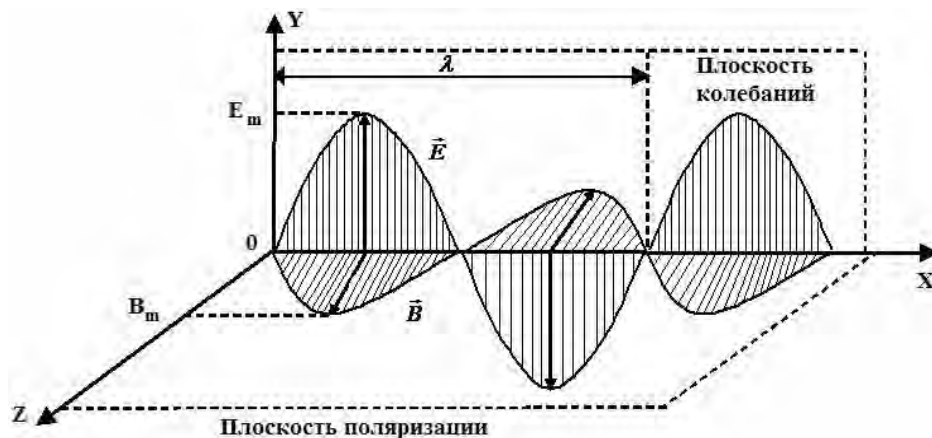


Рис. 2.3

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  колеблются с одинаковой фазой и со  $\vec{v}$  образуют право-винтовую систему: направление распространения электромагнитной волны совпадает с поступательным вращением винта, если вращательное движение винта соответствует направлению его кратчайшего поворота от  $\vec{E}$  к  $\vec{B}$ .

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  связаны между собой соотношением Максвелла:  $\frac{E}{B} = c$ .

Следствие этого соотношения: действие электрической составляющей электромагнитной волны на электрический заряд значительно превышает действие магнитной составляющей

$$F_3 = qE; F_m = qBv_q; c = \frac{E}{B} \rightarrow \frac{F_3}{F_m} = \frac{c}{v_q} \gg 1 \rightarrow F_3 \gg F_m, \quad (2.10)$$

где  $F_3$  и  $F_m$  — электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца, действующей на электрический заряд величиной  $q$ .

Одной из основных характеристик электромагнитных волн является **интенсивность (поверхностная плотность) потока энергии  $I$**  — величина, характеризующая энергию электромагнитной волны, переносимую в единицу времени сквозь поверхность, расположенную перпендикулярно направлению распространения электромагнитной волны, равная отношению энергии электромагнитной волны к произведению площади поверхности и времени, за которое энергия переносится через эту поверхность

$$I = \frac{E_{эм}}{St}. \quad (2.11)$$

**Объемная плотность энергии** электромагнитного поля  $\omega$  — величина, характеризующая энергию, приходящуюся на единицу объема пространства

$$\omega = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (2.12)$$

**Импульс электромагнитного поля  $\vec{p}$**  — векторная величина, характеризующая энергию, переданную электромагнитными волнами препятствию на пути распространения электромагнитной волны, равная отношению энергии  $\Delta E_{эм}$ , переданной электромагнитными волнами за время  $\Delta t$ , к скорости ее распространения.

При распространении в вакууме  $v = c$

$$p = \frac{\Delta E_{эм}}{c}. \quad (2.13)$$

Умножив объемную плотность энергии  $\omega$  на скорость распространения волны в среде, получим  $\omega v = S$ . Используя предыдущие формулы можно установить, что  $S = EN$ , или в общем случае



$$\vec{S} = [\vec{E} \cdot \vec{H}]. \quad (2.14)$$

Векторное произведение  $[\vec{E} \cdot \vec{H}]$  есть вектор Умова — Пойнтинга. Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения волны.

## 2.5. Экспериментальное получение электромагнитных волн. Опыты Г. Герца

В конце 80-х гг. XIX в. Г. Герц подтвердил на опытах выводы теории Максвелла.

Согласно теории Максвелла индукция магнитного поля тем больше, чем быстрее происходит изменение электрического поля, вызывающего магнитное поле. Поэтому для образования интенсивных электромагнитных волн необходима высокая частота электрических колебаний.

В обычном (закрытом) контуре почти все магнитное поле сосредоточено внутри катушки, а электрическое — внутри конденсатора. Вдали от контура электромагнитного поля практически нет. Такой контур очень слабо излучает электромагнитные волны.

Герц использовал простое устройство для получения электромагнитных волн. Оно получило название «вibrator Герца» и представляло собой открытый колебательный контур.

К открытому контуру можно перейти от закрытого, если постепенно раздвигать плоскости конденсатора, уменьшая их площадь и одновременно уменьшая число витков в катушке (рис. 2.4).

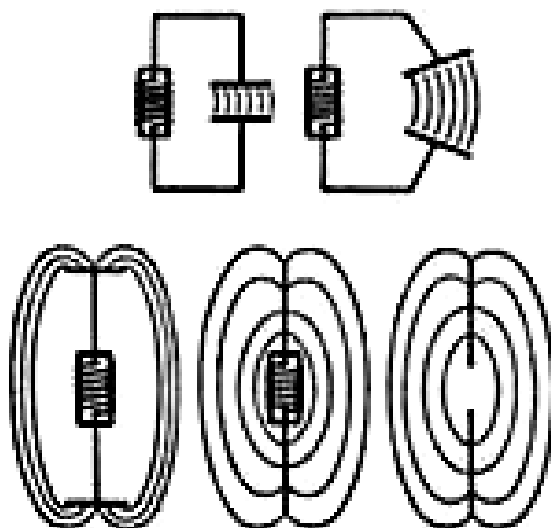


Рис. 2.4

В итоге получится просто прямой провод. Это и есть открытый колебательный контур. Емкость и индуктивность вибратора Герца малы.

В открытом контуре заряды не сосредоточены на концах, а распределены по всему проводнику. Ток в данный момент времени во всех сечениях проводника направлен в одну сторону, но сила тока неодинакова в разных сечениях проводника. На концах она равна нулю, а посередине достигает максимума. Электромагнитное поле охватывает все пространство возле контура.

Для возбуждения колебаний в таком контуре провод разрезали посередине так, чтобы оставался небольшой воздушный промежуток, называемый искровым (рис. 2.5).

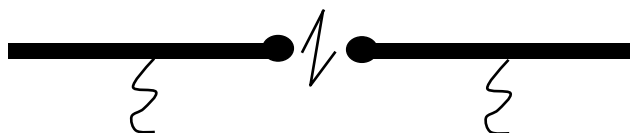


Рис. 2.5

Обе части проводника заряжали до высокой разности потенциалов, при этом проскакивала искра, цепь замыкалась и в открытом колебательном контуре возникали колебания, которые затем затухали.

Для возбуждения электромагнитных волн вибратор Герца подключался к индуктору (рис. 2.6).

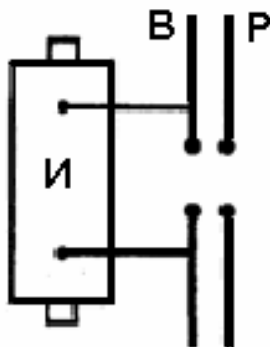


Рис. 2.6

Когда колебания прекращались, индуктор снова заряжал конденсатор, возникала искра и в контуре возникали колебания. Колебания электрических зарядов в вибраторе создают электромагнитную волну. Только колебания в вибраторе совершает не одна частица, а огромное число электронов, движущихся согласованно. В электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны друг другу. Вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости, проходящей через вибратор, а вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен этой плоскости. Излучение волн происходит с максимальной интенсивностью в направлении, перпендикулярном оси вибратора. Вдоль оси изменения не происходят.

Электромагнитные волны регистрировались Герцем с помощью приемного вибратора (резонатора, представляющего собой такое же устройство, как и излучающий вибратор). Такой вибратор — прообраз первой приемной

антенны радиоприемника или телевизора. Под действием переменного электрического поля электромагнитной волны в приемном вибраторе возбуждают колебания тока. Если собственная частота приемника вибратора совпадает с частотой электромагнитной волны, наблюдается резонанс. Герц обнаружил эти колебания, наблюдая искры в очень маленьком промежутке между проводниками приемного вибратора.

Он не только получил электромагнитные волны, но и обнаружил, что они ведут себя подобно другим видам волн. В частности, он наблюдал отражение электромагнитных волн от металлического листа и сложение волн. При сложении волн, перемещая резонатор, можно найти положение максимумов и определить длину волны. В опыте Герца длина волны составляла несколько десятков сантиметров.

Электромагнитное излучение имеет широкий спектр длин волн, причиной такого излучения являются многие природные явления и искусственно созданные научные и промышленные приборы. Поэтому электромагнитные волны делятся на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение. Граница между различными видами электромагнитных волн достаточно условна. Световые волны, к которым относят инфракрасное (его иногда называют тепловым), видимое и ультрафиолетовое излучения, занимают в спектре частот электромагнитных волн сравнительно небольшое место. Однако роль светового излучения и в природе и в различных технических приборах огромна.

### **Вопросы для самостоятельного рассмотрения**

1. Стоячие механические волны: уравнение, координаты узлов и пучностей, графики.
2. Основные отличительные особенности стоячих волн от бегущих.
3. Дифференциальное (волновое) уравнение плоской монохроматической механической волны, распространяющейся в однородной, изотропной, непоглощающей среде (пространственный случай).
4. Вектор Умова: формула, физический смысл, размерность в СИ.
5. Дифференциальное (волновое) уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в однородной, изотропной, непоглощающей среде (пространственный случай).

## Практические занятия 1, 2 МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### Основные законы и формулы

#### 1. Уравнение незатухающих гармонических колебаний

$$S = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $S$  — смещение колеблющейся точки от положения равновесия в произвольный момент времени  $t$ ;  $A$  — амплитуда;  $\omega_0$  — круговая, или циклическая частота:  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi\nu_0$ ;  $T_0$  — период;  $\nu_0$  — частота.

#### 2. Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_0^2 S = 0.$$

#### 3. Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_c + ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

где  $J$  и  $J_c$  — главный и дополнительный моменты инерции;  $l$  — расстояние между осями;  $L$  — приведенная длина физического маятника.

#### 4. Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где  $l$  — длина маятника.

#### 5. Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

где  $m$  и  $k$  — масса и жесткость.

6. Период свободных электромагнитных колебаний — формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где  $L$  и  $C$  — индуктивность и емкость.

7. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2S = 0,$$

где  $\delta$  — коэффициент затухания.

8. Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(T+t)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где  $\tau$  — время релаксации;  $N_e$  — число колебаний, при совершении которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

9. Добротность

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

10. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2S = x_0 \cos \omega t,$$

где внешняя вынуждающая сила  $x$  подчиняется закону  $x = x_0 \cos \omega t$ ;  $x_0$ ,  $\omega$  — амплитуда и круговая частота внешней вынуждающей силы соответственно.

### Примеры решения задач

#### Задача 1.1

Материальная точка массой 10 г колеблется по закону  $x = 0,05\sin(0,6t + 0,8)$ , где все величины выражены в СИ. Найдите максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.

Дано:

$$m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$x = 0,05\sin(0,6t + 0,8), \text{ м}$$

$$F_0, E — ?$$

Решение

Из сопоставления общего вида уравнения гармонических колебаний:  $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$  с уравнением:  $x = 0,05\sin(0,6t + 0,8)$ , данным в задаче, следует, что  $A = 5 \cdot 10^{-2}$  м,  $\omega_0 = 0,6$  рад/с,  $\varphi_0 = 0,8$  рад. Согласно второму закону

Ньютона  $F = ma$ . Ускорение равно  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -mA\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ , где

$$F_0 = mA\omega_0^2.$$

$$F_0 = 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,6^2 = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ (Н)}.$$

Полная энергия колеблющейся точки равна

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Подставляя данные, получим

$$E = \frac{10^{-2} (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (0,6)^2}{2} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ (Дж)} = 4,5 \text{ мкДж}.$$

Ответ:  $F_0 = 1,8 \cdot 10^{-4}$  Н;  $E = 4,5$  мкДж.

### Задача 1.2

Определите, через какой минимальный промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебаний 24 с, начальная фаза равна нулю.

Дано:

$$x_1 = \frac{A}{2}$$

$$T = 24 \text{ с}$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ рад}$$

$$t_1 = ?$$

Решение

Запишем уравнение гармонических колебаний

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right).$$

По условию  $x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{2} A$  или, сокращая на  $A$ ,  $\sin \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{1}{2}$ . Но синус равен  $\frac{1}{2}$ , тогда его аргумент равен  $\frac{\pi}{6}$ , т. е.  $\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6}$ , тогда  $t_1 = \frac{T}{12}$ ,

$$t_1 = \frac{24}{12} = 2 \text{ (с)}.$$

Ответ:  $t_1 = 2$  с.

### Задача 1.3

Маятник состоит из тяжелого шарика массой 100 г, подвешенного на нити длиной 50 см. Определите период колебаний маятника и его энергию, если наибольший угол отклонения от положения равновесия равен  $15^\circ$ .

Дано:

$$m = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг}$$

$$l = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$\alpha = 15^\circ = 0,26 \text{ рад}$$

$$T, E = ?$$

### Решение

Считая шарик математическим маятником, а его колебания гармоническими, находим период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{0,5}{9,8}} \approx 1,42 \text{ (с)}.$$

Полная энергия маятника, отклоненного на угол  $\alpha$ , равна его потенциальной энергии

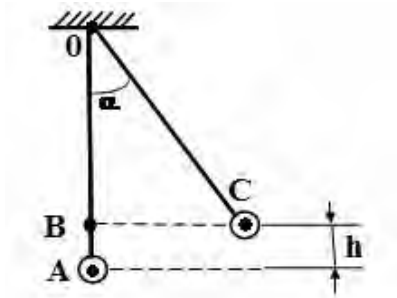
$$E = E_n = mgh. \quad (1)$$

Из рис. следует, что  $h = |AO| - |OB|$ . Так как  $OB = l \cos \alpha$ , то

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$E_n = mgl(1 - \cos \alpha);$$



$$E_n = 0,1 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,97) = 15 \cdot 10^{-3} \text{ (Дж)} = 15 \text{ мДж}.$$

Ответ:  $E \approx 1,42 \text{ с}$ ;  $E_n = 15 \text{ мДж}$ .

### Задача 1.4

Определите, на какое расстояние надо отвести груз массой 640 г, закрепленный на пружине жесткостью 0,4 кН/м, от положения равновесия, чтобы он прошел положение равновесия со скоростью 1 м/с.

Дано:

$$m = 640 \text{ г} = 0,64 \text{ кг}$$

$$k = 0,4 \text{ кН/м} = 400 \text{ Н/м}$$

$$v_0 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$x_0$  — ?

### Решение

Для решения задачи используем закон сохранения энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса груза;  $v$  — скорость груза;  $k$  — жесткость пружины.

Отклонение  $x$  отсчитываем от положения равновесия. В положении равновесия

$$E = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (2)$$

где  $v_0$  — скорость в момент прохождения положения равновесия.

В исходной точке, когда груз отведен от положения равновесия, скорость  $v$  равна нулю. Поэтому

$$E = \frac{kx_0^2}{2}, \quad (3)$$

где  $x_0$  — искомое отклонение.

Приравнивая правые части (2) и (3), получим

$$x_0 = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}.$$

Произведем вычисления

$$x_0 = \sqrt{\frac{0,64 \cdot 1^2}{400}} = 0,04 \text{ (м)} = 4 \text{ см.}$$

*Ответ:*  $x_0 = 4$  см.

### Задача 1.5

Период затухающих колебаний равен 4 с, логарифмический декремент затухания 1,6, начальная фаза равна нулю. При  $t = \frac{T}{4}$  смещение  $x = 4,5$  см.

Напишите уравнение этого колебания в СИ.

*Дано:*

$$T = 4 \text{ с}$$

$$\theta = 1,6$$

$$\varphi_0 = 0 \text{ рад}$$

$$t = \frac{T}{4}$$

$$x = 4,5 \text{ см} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$x(t) \text{ — ?}$$

### Решение

Уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

В нашем случае  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , так как  $T = 4$  с, то  $\omega = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_0 = 0$

$$\text{и } \delta = \frac{\theta}{T} = \frac{1,6}{4} = 0,4 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Амплитуду  $A_0$  находим из условия  $x = 4,5 \cdot 10^{-2}$  м при  $t = T/4 = 4/4 = 1$  (с). Подставив в (1) все известные величины, найдем амплитуду  $A_0$ ,  $A_0 = 6,7 \cdot 10^{-2}$  м. Таким образом, уравнение (1) имеет вид

$$x = 6,7 \cdot 10^{-2} e^{-0,4t} \sin \frac{\pi}{2} t \text{ (м)}.$$

*Ответ:*  $x = 6,7 \cdot 10^{-2} e^{-0,4t} \sin \frac{\pi}{2} t$  м.



### Задача 2.1

В электрической цепи с малым активным сопротивлением, содержащей конденсатор емкостью 0,2 мкФ и катушку индуктивностью 1 мГн, сила тока при резонансе изменяется по закону  $J = 0,02 \sin \omega t$ , где все величины выражены в СИ (рис. 1).

Найдите мгновенные значения силы тока, напряжения на конденсаторе и катушке через  $\frac{1}{3}$  периода от начала возникновения колебаний. Постройте графики зависимости силы тока и напряжения от времени.

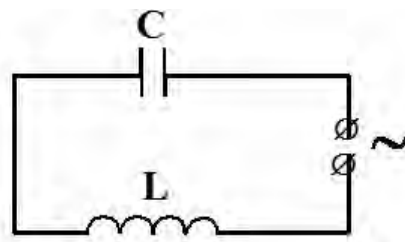


Рис. 1

Дано:

$$C = 0,2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$L = 1 \text{ мГн} = 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$t = \frac{1}{3} T$$

$$J, U_c, U_L \text{ — ?}$$

Решение

Так как активное сопротивление  $R_0 \approx 0$ , то циклическая частота  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , или с учетом формулы Томсона

$$\omega = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-7}}} = 7,1 \cdot 10^4 \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

По закону изменения силы тока

$$J = 0,02 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (1)$$

для  $t = \frac{T}{3}$  мгновенное значение силы тока

$$J = 0,02 \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \frac{1}{3} T \right) = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ (А)}.$$

Напряжение на конденсаторе  $U_c = \frac{q}{C}$ , где  $q$  — заряд конденсатора. По определению сила тока равна  $J = \frac{dq}{dt}$ , откуда  $q = \int_0^t J dt$ . Подставляя в эту формулу подынтегральное выражение (1) и проведя интегрирование, получим

$$q = \int_0^t 0,02 \sin \omega t \cdot dt = -\frac{0,02}{\omega} \cos \omega t.$$

Тогда напряжение на конденсаторе

$$U_c = -\frac{0,02}{C\omega} \cos \omega t = \frac{0,02}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{0,02}{\omega C} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Для  $t = \frac{T}{3}$

$$U_c = \frac{0,02}{7,1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-7}} \sin\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 0,7 \text{ (В)}.$$

Напряжение на катушке

$$U_L = L \frac{dJ}{dt} = L \frac{d}{dt}(0,02 \sin \omega t) = 0,02\omega L \cos \omega t = 0,02\omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Для  $t = \frac{T}{3}$

$$U_L = 0,02 \cdot 7,1 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3} \sin\left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -0,7 \text{ (В)}.$$

Графики зависимости силы тока и напряжения на конденсаторе и катушке показаны на рис. 2.

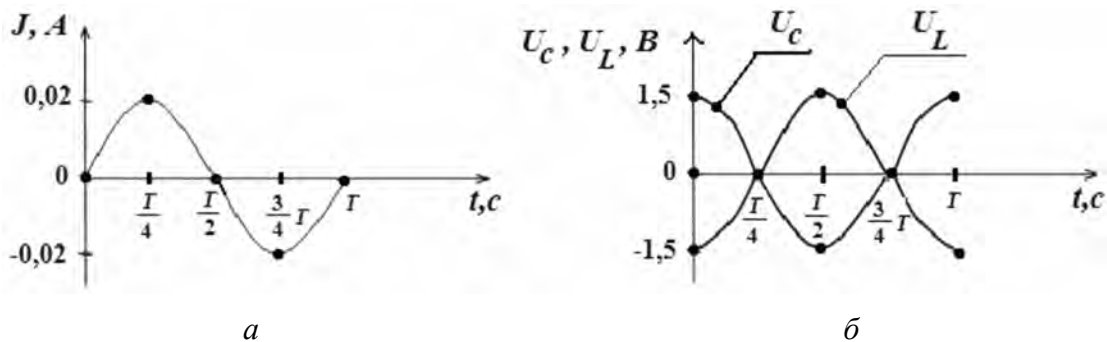


Рис. 2

Ответ:  $J = 1,7 \cdot 10^{-2}$  А;  $U_c = 0,7$  В;  $U_L = -0,7$  В.

### Задача 2.2

Катушка индуктивностью 31 мГн присоединяется к плоскому параллельному конденсатору с площадью каждой пластины 20 см<sup>2</sup> и расстоянием между ними 1 см. Определите диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если амплитуда силы тока в контуре равна 0,2 мА, амплитуда напряжения равна 10 В.

Дано:

$$L = 31 \text{ мГн} = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$S = 20 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

$$d = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$J_0 = 0,2 \text{ мА} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ А}$$

$$U_0 = 10 \text{ В}$$

$\varepsilon$  — ?

### Решение

Запишем закон сохранения энергии, позволяющий установить связь между амплитудными значениями заряда на конденсаторе и силы тока в катушке

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LJ_0^2}{2}.$$

Используя формулу, связывающую заряд и напряжение между обкладками конденсатора  $q_0 = CU_0$ , найдем амплитуду колебаний силы тока

$$J_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (1)$$

Используем формулу емкости плоскопараллельного конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (2)$$

Тогда, подставив (2) в (1), определим диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = \frac{J_0^2 L d}{U_0^2 S \varepsilon_0}.$$

Произведем вычисления

$$\varepsilon = \frac{(2 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}{10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 7.$$

Ответ:  $\varepsilon = 7$ .

### Задачи для самостоятельного решения

12.3; 12.16; 12.20; 12.43; 12.48; 12.77; 12.78; 12.80; 12.82; 14.5 (б, в); 14.10; 14.21.

*Примечание.* Здесь и далее задачи для самостоятельного решения см. *Волькенштейн, В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. — 3-е изд., испр. и доп. — СПб. : Книжный мир, 2005. — 328 с.

## Лекция 3 ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

### 3.1. Интерференция света

Исследования свойств света начались задолго до того, как было установлено, что свет — частный случай электромагнитных волн. Свет — это синоним более физического термина «оптическое излучение». Оптическое излучение — электромагнитные волны с частотой  $3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{16}$  Гц.

В состав оптического излучения входят видимое, инфракрасное и ультрафиолетовое излучения.

Оптику принято делить на волновую и геометрическую.

**Волновая (физическая) оптика** — раздел оптики, изучающий оптические явления, в которых проявляется волновая природа света (интерференция, дифракция, поляризация и т. д.).

**Интерференция** — явление, возникающее при наложении двух или более электромагнитных волн, имеющих одинаковый период колебаний и выражающееся в перераспределении энергии электромагнитных волн в пространстве.

Для объяснения явления интерференции необходимо знать *принцип Гюйгенса*: каждая точка фронта волны может рассматриваться как источник вторичных волн (рис. 3.1).

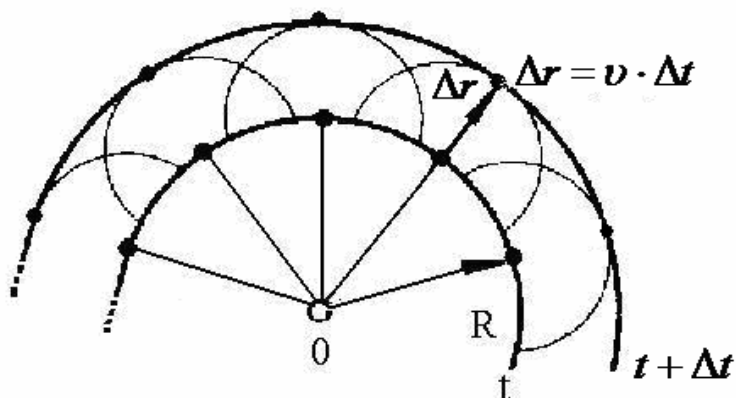


Рис. 3.1

В момент времени  $t$  фронт электромагнитных волн является сферой радиуса  $R$ . От каждой точки фронта вторичные волны пройдут расстояние  $\Delta r = v\Delta t$ . Огибающая вторичных волн будет новым фронтом волны в момент времени  $t + \Delta t$ . В однородной среде, в которой фазовая скорость электромагнитных волн по всем направлениям одинакова, новым фронтом волны будет сфера радиуса  $r + \Delta r$ . При этом предполагается, что вторичные волны излучаются только «вперед», т. е. в направлениях, составляющих острые углы с направлением внешней нормали к фронту вторичной волны.

Необходимым условием интерференции световых волн является их когерентность.

**Когерентные волны** — две электромагнитные волны одинаковой частоты, если разность фаз не зависит от времени.

Этому условию удовлетворяют **монохроматические волны** — не ограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты.

В оптике вводят понятие «**волновой цуг**» — прерывистое излучение света атомами в виде коротких по времени импульсов ( $\approx 10^{-8}$  с), когда амплитуду и фазу колебаний можно считать постоянными. Средняя продолжительность одного цуга — **время когерентности**  $\tau_k$ , а расстояние, на которое распространяется за это же время луч — **длина когерентности**  $l_k = c\tau_k$  ( $c$  — скорость света). Для когерентных источников существуют также понятия «**временная когерентность**» — когерентность, определяемая степенью монохроматичности источника излучения, и «**пространственная когерентность**» (пространственно когерентные источники позволяют при их размерах и взаимном расположении наблюдать интерференцию).

Пусть два источника электромагнитных волн  $S_1$  и  $S_2$  излучают с одинаковыми фазами, амплитудами и частотами (рис. 3.2).

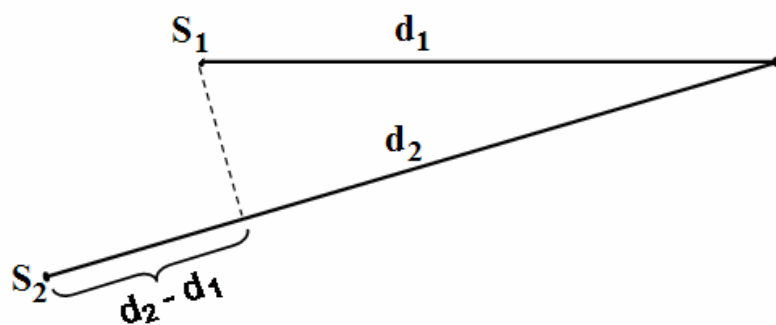


Рис. 3.2

В точке  $C$  наблюдается интерференционная картина. Определим условия возникновения максимумов и минимумов интерференции.

До точки  $C$ , в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна в среде с абсолютным показателем преломления  $n_1$  проходит путь  $d_1$ , вторая в среде с показателем преломления  $n_2$  — путь  $d_2$ . При этом в точке  $C$

первая волна возбуждит колебание  $x = x_{m1} \cos \omega \left( t - \frac{d_1}{v_1} \right)$ , вторая

$x_2 = x_{m2} \cos \omega \left( t - \frac{d_2}{v_2} \right)$ , где  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ , а  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  — фазовая скорость первой

и второй волны. Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке  $C$ , равна

$$\delta = \omega \left( \frac{d_2}{v_2} - \frac{d_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (d_2 n_2 - d_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_{2/1}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

при учете, что  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме. Произведение

геометрической длины  $d$  пути световой волны в данной среде на показатель преломления  $n$  этой среды называется **оптической длиной пути  $L$** , а  $\Delta = L_2 - L_1$ , называется **оптической разностью хода**.

Перечислим условия наблюдения интерференционных максимумов и минимумов:

1. Если

$$\Delta = \pm m \lambda_0,$$

то

$$(3.1)$$

$$\Delta\varphi = \pm 2m\pi,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то колебания в точке  $C$  происходят синфазно (в одной фазе) и наблюдается максимум интенсивности.

2. Если

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2},$$

то

$$(3.2)$$

$$\Delta\varphi = \pm (2m + 1)\pi,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то колебания в точке  $C$  происходят в противофазе и наблюдается минимум интенсивности.

В случае когерентных волн каждому значению фазы соответствует своя изменяющаяся интерференционная картина.

Интерференция волн характеризует широкий спектр электромагнитных волн, в том числе и оптического излучения. Однако интерференция света в реальности наблюдается крайне редко. Любое излучающее тело, например, нить лампы накаливания, свеча и т. д. состоит из многих излучателей-атомов, фазы колебаний которых непрерывно меняются (за время, большее времени волнового цуга). Соответственно беспорядочно меняется и фаза результирующих колебаний — интерференция наблюдаться не будет.

Источником света высокой когерентности является лазер. Когерентные источники можно получить с помощью метода щелей Юнга, бипризмы и биезеркала Френеля.

### 3.2. Дифракция света

**Дифракция электромагнитных волн** — совокупность явлений, наблюдаемых при распространении электромагнитных волн в среде с резко выраженными неоднородностями.

Дифракция, как и интерференция, характерна не только для электромагнитных волн, но и для других волновых процессов, но для ее наблюдения надо создать специальные условия.

Принцип Гюйгенса может быть использован для решения задач о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопрос об интенсивности волн, идущих в разных направлениях. Френель вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его представлением об интерференции волн. Благодаря принципу Гюйгенса — Френеля появилась возможность решить задачу о дифракции.

#### *Принцип Гюйгенса — Френеля*

Каждая точка среды, до которой дошла волна, становится источником когерентных вторичных волн. Новый фронт волны образуется в результате интерференции вторичных волн.

Световая волна, возбуждаемая источником, есть результат суперпозиции вторичных когерентных волн от неких источников. При этом Френель предположил, что обратных вторичных волн нет и если между источником света и точкой наблюдения есть непрозрачный экран с отверстием, то на поверхности экрана интенсивность вторичных волн равна нулю, в отверстии — как при отсутствии экрана.

Первая задача, которую рассмотрел Френель, — задача о прямолинейном распространении света. Она была рассмотрена на основе предложенных Френелем зон.

Френель рассмотрел действие световой волны от источника  $S$  в точке  $M$ . Заменив на основе предложенного им принципа действие источника  $S$  действием воображаемых источников, расположенных на поверхности  $BD$  — поверхность сферы с центром в  $S$  (рис. 3.3).

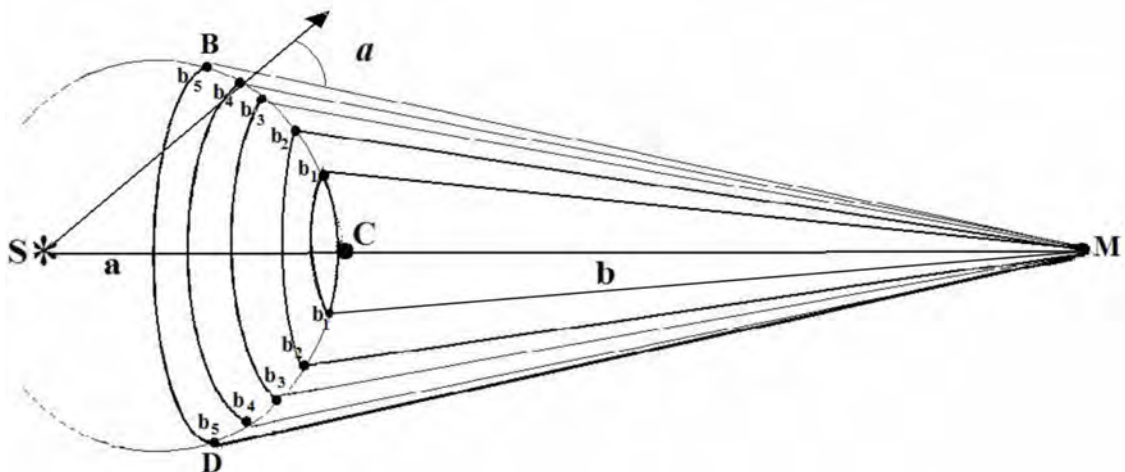


Рис. 3.3

Поверхность  $BD$  разбивают на зоны такого размера, чтобы расстояние от края зоны до точки  $M$  равнялось  $\frac{\lambda}{2}$ , т. е.

$$b_1M - b_0M = b_2M - b_1M = b_3M - b_2M = \dots = \frac{\lambda}{2},$$

где  $\lambda$  — длина волны источника света.

Площадь каждого сферического сегмента, представляющего зону, равна  $\pi \frac{ab}{a+b} \lambda$ , где  $a = SC$ ;  $b = CM$ .

Амплитуда колебаний в точке  $M$ , дошедших от центральной зоны —  $A_0$ , первой зоны —  $A_1$ , второй зоны —  $A_2$  и т. д.

Следует обратить внимание на следующее.

1. Действие отдельных зон на точку  $M$  тем меньше, чем больше угол  $\alpha$  между нормалью к поверхности зоны и направлением на точку  $M$ . Поэтому  $A_0 > A_1 > A_2 > \dots > A_n$ .

2. Действия соседних зон ослабляют друг друга, так как воображаемые источники центральной зоны расположены на  $\frac{\lambda}{2}$  ближе к точке  $M$ , чем источник первой зоны и т. д. А это означает, что колебания от этих зон доходят в противофазе.

Амплитуда результирующего колебания  $A_p = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = A_0 - (A_1 - A_2) - (A_3 - A_4) - \dots$ , так как  $A_0 > A_1 > A_2 > \dots$ , то  $A_p < A_0$  и можно показать, что  $A_p = \frac{A_0}{2}$ .

Полученный с помощью простых рассуждений результат позволяет сделать вывод о том, что если поместить на фронте волны непрозрачный экран, оставив только отверстие на половине центральной зоны, то интенсивность колебаний в точке  $M$  будет примерно такой же, как и при действии всего фронта.

Теперь пусть непрозрачный экран  $EF$  закрывает все зоны до  $k$ -й включительно (рис. 3.4).

Тогда  $A_p = A_{k+1} - A_{k+2} + A_{k+3} - A_{k+4} + \dots$ . Это означает, что за непрозрачным для света экраном интенсивность всех колебаний равна нулю.

Тогда, если бы экран отсутствовал, в точке  $M$  амплитуда колебаний была  $A_p = \frac{A_0}{2}$ . При наличии экрана в точке  $M$  интенсивность света будет меньше и будет падать с увеличением  $k$ . При  $k \rightarrow \infty$  интенсивность в точке  $M$  падает до нуля.

Соотношение между размерами экрана и зонами Френеля будет определять два случая: огибание светом препятствия ( $A_p \neq 0$  в точке  $M$  за экраном) либо прямолинейное распространение света.

Используя рис. 3.4, можно определить  $r_k$ :  $r_k \approx \sqrt{\lambda}$ .



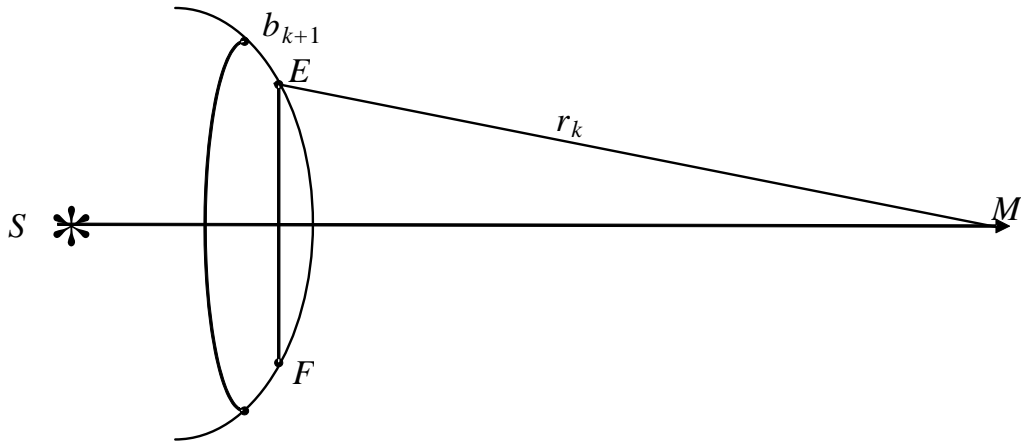


Рис. 3.4

**Дифракция Френеля** — дифракция сферических волн, когда точка наблюдения дифракционной картины находится на конечном расстоянии от препятствия, вызывающего дифракцию.

В практических приложениях обычно используется другой вид дифракции — **дифракция Фраунгофера**, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия. Принципиально дифракция Фраунгофера не отличается от дифракции Френеля. Дифракция Фраунгофера находит широкое применение в различных оптических приборах.

В качестве примера дифракции Фраунгофера рассмотрим дифракцию на щели и дифракционной решетке.

Усиление света (дифракционные максимумы) на узкой щели шириной  $a$  наблюдается для углов дифракции  $\varphi$ , удовлетворяющих условию

$$a \sin \varphi = \pm(2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3.3)$$

где  $m = 1, 2, \dots$

Ослабление света (дифракционные минимумы) подчиняется условию

$$a \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2} = m\lambda, \quad (3.4)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Число  $m$  называется порядком дифракционного максимума или минимума. Величина  $\delta = CD = a \sin \varphi$  представляет собой оптическую разность хода между крайними лучами  $CN$  и  $BM$ , идущими от щели под углом  $\varphi$  (рис. 3.5).

В направлении  $\varphi = 0$  (пунктирные линии) наблюдается самый интенсивный центральный максимум нулевого порядка. В точке  $F_0$  всегда наблюдается усиление света, независимо от длины волны  $\lambda$ .

При наблюдении дифракции на щели в белом свете картина на экране окажется окрашенной. В дифракционном максимуме каждого порядка ( $m = \text{const}$ ) ближе к центральному (неокрашенному) максимуму оказываются дифракционные максимумы с меньшими длинами волн.

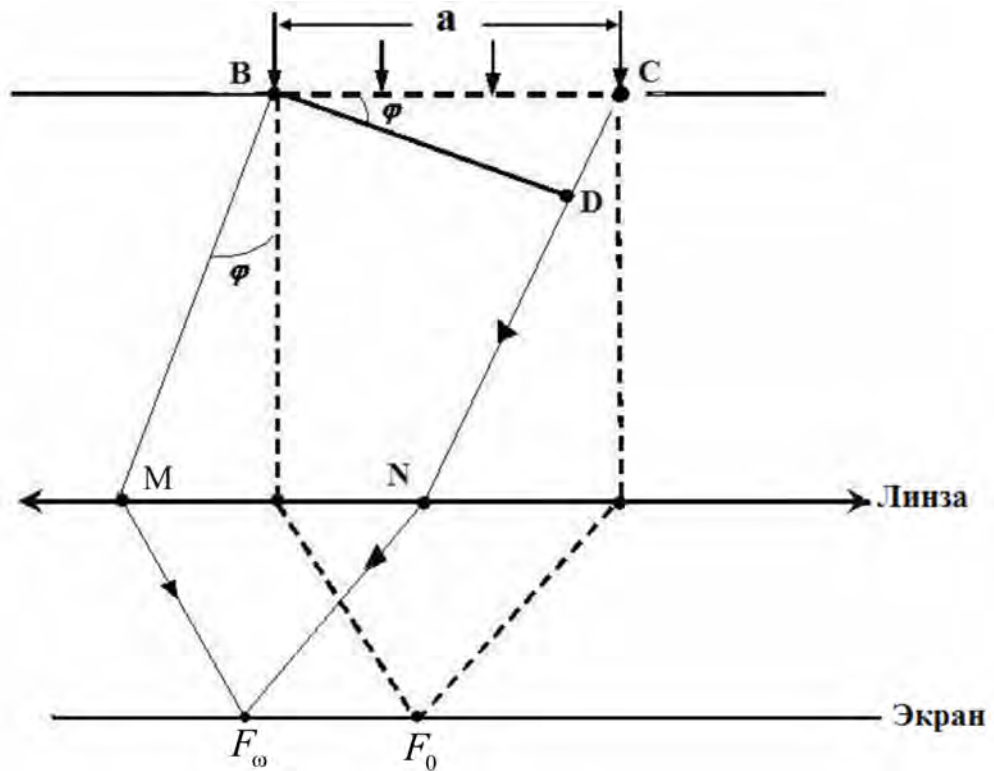


Рис. 3.5

**Дифракционная решетка** — устройство, состоящее из большого числа равномерно расположенных щелей.

**Оптическая дифракционная решетка** — пластина из хорошо отполированного стекла или кварца с нанесенными тонкими штрихами. **Постоянная (период) решетки** — сумма ширины одной щели  $a$  и ширины одной непрозрачной полоски  $b$  между щелями  $d = a + b$ .

Главные максимумы при дифракции на решетке наблюдаются для углов  $\varphi$ , удовлетворяющих условию

$$d \sin \varphi = m \lambda, \quad (3.5)$$

где  $m$  — порядок главного максимума,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Главные минимумы при дифракции на решетке наблюдаются для углов  $\varphi$ , удовлетворяющих условию

$$a \sin \varphi = m \lambda, \quad (3.6)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

С увеличением числа щелей дифракционной решетки уменьшается ширина интерференционных полос, увеличивается их интенсивность и ширина темных промежутков между ними. Дифракционные решетки используются в спектральных приборах для высокоточного определения химического состава различных веществ. Дифракция на пространственных неоднородностях объясняет многие атмосферные явления: радуга, гало и венцы вокруг Солнца и Луны.

### 3.3. Поляризация света

**Поляризация электромагнитных волн** — совокупность явлений, в которых проявляются свойства поперечности электромагнитных волн.

Электромагнитная волна называется поляризованной, если в волне существует выделенное направление колебаний векторов напряженности  $\vec{E}$  электрического поля и магнитной индукции  $\vec{B}$  магнитного поля в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения.

Так как взаимная ориентация векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не изменяется, то можно описать только один из них. Обычно выбирают вектор  $\vec{E}$ .

Не все поперечные волны линейно поляризованы (плоско поляризованы). Существуют электромагнитные волны, в которых колебания совершаются в различных направлениях. Если амплитуда всех таких колебаний одинакова, то волны неполяризованы.

Всякую неполяризованную электромагнитную волну можно представить как совокупность двух неполяризованных волн одинаковой интенсивности, плоскости колебаний которых взаимно перпендикулярны.

**Поляризатор** — устройство, поляризующее естественный свет.

**Анализатор** — устройство, пропускающее поляризованный свет лишь при определенной ориентации кристалла относительно плоскости поляризации.

**Поляроид** — прозрачная пленка, которая может служить поляризатором и анализатором света.

Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых атомами тела, а излучение каждого атома продолжается около  $10^{-8}$  с. За это время успевает образоваться последовательность минимумов и максимумов волны — волновой цуг. Пространственная протяженность образующегося за время  $t$  «высвечивания» атома равна  $l = ct$ ,  $l \approx 3$  м. Через некоторое время происходит новое излучение атома. Однако фаза нового излучения никак не связана с фазой предыдущего цуга. Одновременно излучение осуществляется большим количеством атомов. Возбуждаемые ими цуги волн, налагаясь друг на друга, образуют испускаемую телом световую волну. В этой волне излучение одной группы атомов через  $10^{-8}$  с сменяется излучением другой группы, а фаза результирующей волны претерпевает случайные скачкообразные изменения.

Плоскость колебаний каждого цуга ориентирована случайным образом — в результирующей волне колебания различных направлений представлены с равной вероятностью.

**Поляризованный свет** — свет, в котором направления колебаний упорядочены каким-либо образом.

По историческим причинам плоскостью поляризации была названа не плоскость, в которой колеблется вектор  $\vec{E}$ , а перпендикулярная к ней плоскость.

**Степень поляризации** — величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.7)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ , для полностью плоскополяризованного  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ .

В классическом опыте естественный свет направляется перпендикулярно пластинке турмалина  $T_1$ , вырезанной параллельно так называемой оптической оси  $00'$  (рис. 3.6).

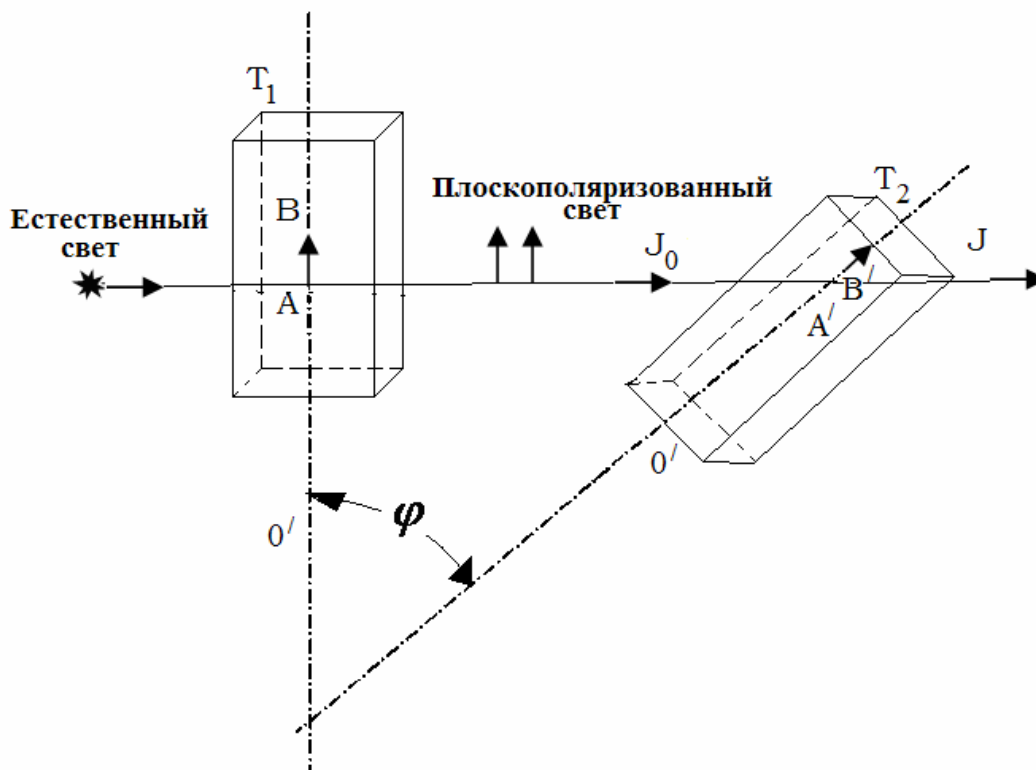


Рис. 3.6

При вращении кристалла  $T_1$  вокруг направления луча никаких изменений интенсивности не происходит. Если на пути луча поставить вторую пластинку турмалина  $T_2$  и вращать ее вокруг направления луча, то интенсивность света, прошедшего через пластинки, меняется в зависимости от угла  $\varphi$  между оптическими осями кристаллов по закону Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (3.8)$$

где  $I_0$  и  $I$  — соответственно интенсивности света, падающего на второй кристалл и вышедшего из него. Следовательно, интенсивность прошедшего через пластинки света изменяется от минимума (полное гашение света) при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (оптические оси пластинок перпендикулярны), до максимума при  $\varphi = 0$  (оптические оси пластинок параллельны).

Некоторые прозрачные кристаллы, например исландский шпат, способны раздваивать падающий луч света — **явление двойного лучепреломления** (рис. 3.7).

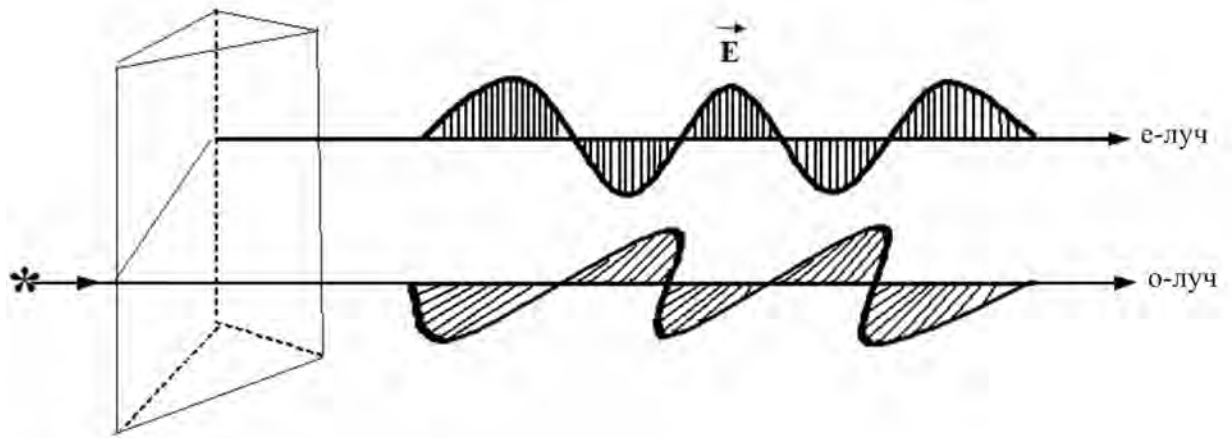


Рис. 3.7

Представлен случай нормального падения светового луча на кристалл и образование обыкновенного луча  $o$ , являющегося продолжением падающего луча, и необыкновенного (экстраординарного) луча  $e$ . Лучи  $o$  и  $e$  поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях и не могут интерферировать. В  $e$ -луче колебание светового вектора происходит в главной плоскости кристалла, а в  $o$ -луче перпендикулярно ей.

Данное явление объясняется тем, что обыкновенный луч распространяется в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью, а необыкновенный — по разным направлениям с разной скоростью, что объясняется анизотропией кристалла.

На основе двойного лучепреломления созданы поляризационные призмы, позволяющие получать полностью плоскополяризованный свет, например, призма Николя.

### 3.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

Перечислим примеры взаимодействия электромагнитных волн с веществом.

1. **Дисперсия** — явление зависимости абсолютного показателя преломления  $n$  от частоты (или длины волны) электромагнитных волн (или явление зависимости скорости электромагнитных волн в среде от их частоты)

$$D = \frac{dn}{d\lambda}. \quad (3.9)$$

При небольшом интервале изменения длин волн выполняется условие

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad (3.10)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные характеристики для каждого вещества.

Ньютон первым начал изучение дисперсии света, используя пучок солнечного света и треугольную призму из стекла (рис. 3.8).

Чем больше показатель преломления призмы, тем сильнее проявляется дисперсия света.

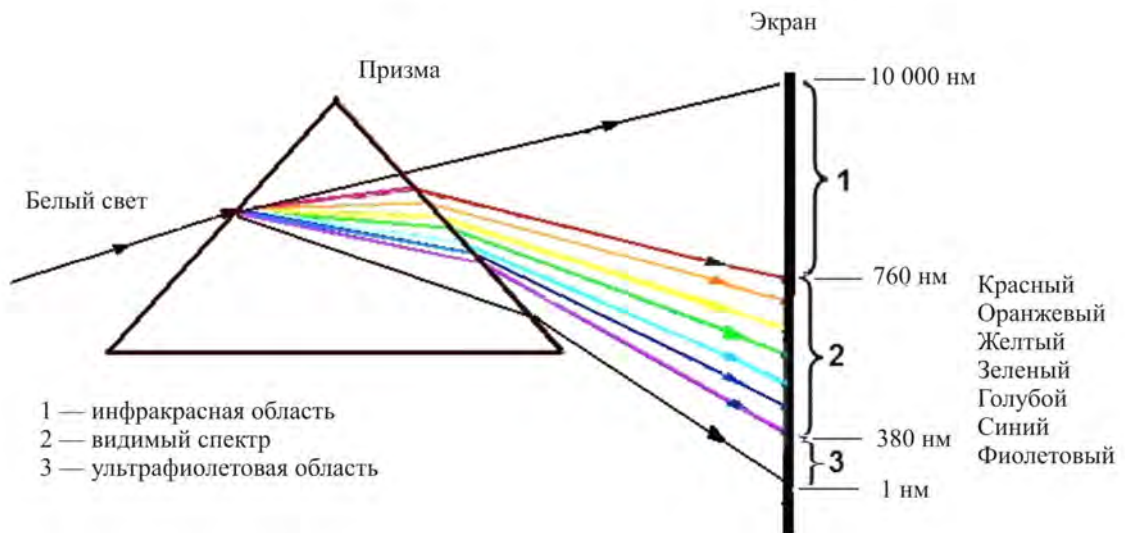


Рис. 3.8

Призма разлагает лучи в спектр по значениям показателя преломления, который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны уменьшается (рис. 3.9).

Поэтому красные лучи отклоняются призмой слабее, чем фиолетовые. Так как показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны увеличивается, то величина  $\frac{dn}{d\lambda}$  по моду-

лю тоже увеличивается с уменьшением  $\lambda$ . Такая дисперсия называется нормальной. Однако вблизи линий и полос поглощения ход кривой будет иным, что видно из рис. 3.10, —  $n$  уменьшается с уменьшением  $\lambda$ . Такой ход зависимости  $n$  от  $\lambda$  называется аномальной дисперсией.

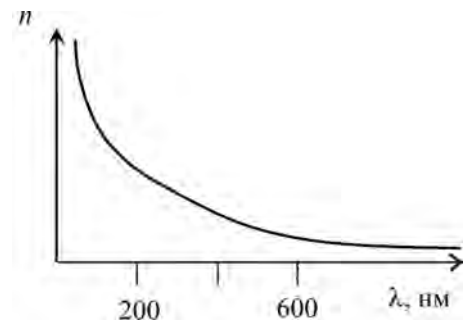


Рис. 3.9

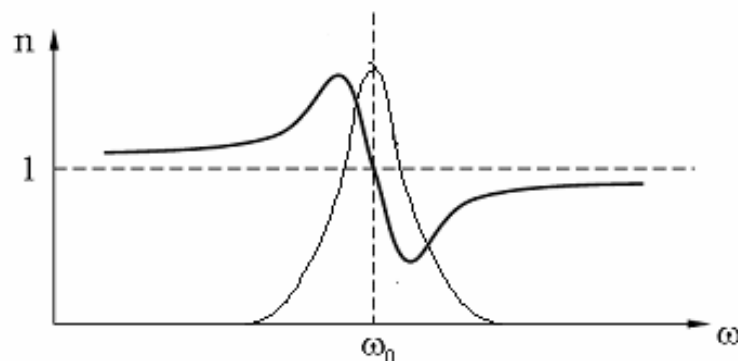


Рис. 3.10

2. Поглощение и отражение света. Если свет проходит через слой вещества, то его интенсивность падает. Световая электромагнитная волна взаимодействует с электронами вещества, передавая им часть своей энергии. Бугер установил эмпирическую связь, которая получила название закона Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (3.11)$$

где  $I$  — интенсивность света, прошедшего через слой вещества толщиной  $x$ ;  $I_0$  — интенсивность падающего света;  $\alpha$  — показатель ослабления, равный  $\alpha = \delta + \mu$ , где  $\delta$  — показатель рассеяния;  $\mu$  — показатель поглощения. Величина  $\alpha$  зависит от длины падающего света и от физической природы вещества.

В *диэлектриках* все электроны связаны. Полученная ими от световой волны энергия частично расходуется на возбуждение вторичных волн, остальная часть путем взаимодействия электронов и ионов переходит в тепло. Амплитуда вынужденных колебаний электронов у диэлектрика невелика, невелик и показатель поглощения. Вблизи частоты собственных колебаний электронов  $\omega_0$ , когда частота падающего света  $\omega \rightarrow \omega_0$ , амплитуда вынужденных колебаний из-за резонанса резко возрастает, возрастает и поглощение, которое имеет избирательный (селективный) характер, на рис. 3.10 это область максимума.

В *металлах* большую часть энергии световой волны забирают свободные электроны. Селективное поглощение света в металлах, в основном в его поверхностном слое, обусловлено связанными электронами. Благодаря большой амплитуде вынужденных колебаний свободных электронов поглощение света в металлах велико.

Показатель преломления представляет относительное уменьшение интенсивности света из-за поглощения в слое единичной толщины.

Появление отраженной световой волны обусловлено тем, что световая волна, достигая поверхности раздела двух сред, приводит электроны в атомах в колебательное движение. Электроны излучают вторичные волны той же частоты, их огибающая определяет фронт отраженной волны, направление ее распространения. В проводящих средах за счет свободных электронов амплитуда вторичных волн велика. Поэтому металлические поверхности прекрасно отражают свет (до 98 % видимого света при специальной обработке поверхности).

Френель, основываясь на волновой теории, показал, что в диэлектриках интенсивность отраженного света зависит от состояния поляризации падающей волны, угла падения и относительного показателя преломления  $n_{21}$ . Для малых углов падения *формулу Френеля* можно записать так:

$$I = I_0 \left( \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} \right)^2, \quad (3.12)$$

где  $I$  — интенсивность отраженного света;  $I_0$  — интенсивность падающего света.

Чем меньше величина  $n_{21}$ , тем меньше света отразится от границы раздела сред. Формула (3.12) свидетельствует о том, что интенсивность отраженного света зависит от угла падения  $\left( \text{так как } n_{21} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)$ . Интенсивность отражен-

ного света зависит и от состояния поляризации. Отраженный свет является частично поляризованным. Степень поляризации отраженного света зависит от угла падения, при определенном угле падения  $\alpha_B$  (угле Брюстера) свет оказывается полностью поляризованным. Угол Брюстера определяется из соотношения (*закон Брюстера*)

$$\operatorname{tg}\alpha_B = n_{21}. \quad (3.13)$$

3. Рассеяние света. При прохождении света через среды, содержащие различные неоднородности, сравнимые с длиной волны, возникает *процесс рассеяния света*. Примерами таких сред являются думы, туманы, коллоидные растворы и др. Частота рассеянного света совпадает с частотой падающего света, вторичные волны с беспорядочно распределенными фазами усиливают друг друга.

В зависимости от размеров частиц и их химического состава рассеяние в пространстве происходит неравномерно, характеристикой такого процесса является индикатриса рассеяния. Эта величина показывает зависимость интенсивности рассеяния света от угла рассеяния.

Частным случаем является молекулярное рассеяние, происходящее на флуктуациях плотности среды. Интенсивность этого рассеяния  $I \sim \frac{1}{\lambda^4}$  — *закон Релея*. В атмосфере молекулярное рассеяние объясняет голубизну неба, так как короткие длины волн рассеиваются интенсивнее, чем длинные.

Показатель рассеяния, характеризующий этот процесс, представляет собой относительное уменьшение интенсивности света из-за рассеяния в слое единичной толщины.

### Вопросы для самостоятельного рассмотрения

1. Способы получения когерентных источников света: опыт Юнга, бипризма и бизеркало Френеля. Оптическая схема наблюдения интерференции, формула расчета ширины интерференционных максимумов и минимумов.
2. Интерференция в тонких пленках: оптическая схема наблюдения в отраженном и проходящем свете; формулы расчета интерференционных максимумов и минимумов.
3. Частные случаи интерференции в тонких пленках: полосы равного наклона и равной толщины; кольца Ньютона.
4. Интерферометр Майкельсона и микроинтерферометр Линника.
5. Дифракция Фраунгофера на решетке — оптическая схема (случай двух и более щелей).
6. Искусственная оптическая анизотропия: фотоупругость; электрооптический (Керра) и магнитооптический (Коттона — Муттона) эффекты.



## Практическое занятие 3 МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### Основные законы и формулы

#### 1. Длина волны

$$\lambda = vT,$$

где  $v$  — скорость распространения фазы волны (фазовая скорость);  $v = \lambda\nu$ ;  $\nu$  — частота колебаний;  $T$  — период колебаний.

2. Уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси  $X$  в однородной, изотропной и непоглощающей среде

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]$$

или, если ввести волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v},$$

то

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $\xi(x, t)$  — смещение точек среды с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $A$  — амплитуда волны;  $\omega$  — циклическая частота;  $\varphi_t = \omega t - kx + \varphi_0$ ;  $\varphi_t$  — фаза колебаний в произвольный момент времени  $t$ ;  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний.

#### 3. Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где  $r$  — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

#### 4. Уравнение стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cdot \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t.$$

#### 5. Координаты пучностей стоячей волны

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$$

или

$$x_n = \pm \frac{m\lambda}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

6. Координаты узлов стоячей волны

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right)$$

или

$$x_{уз} = \pm \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$

7. Волновое уравнение плоской электромагнитной волны

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа;  $v$  — фазовая скорость;  $\vec{E}$  — напряженность электрической составляющей электромагнитной волны;  $\vec{H}$  — напряженность магнитной составляющей электромагнитной волны.

8. Фазовая скорость электромагнитных волн

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  — скорость света в вакууме;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — соответственно электрическая и магнитная постоянная;  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно относительная электрическая и магнитная постоянная.

9. Волновое уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $X$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2},$$

где индексы  $y, z$  при  $E$  и  $H$  указывают, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

10. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси  $X$

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0);$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

где  $E_0, H_0$  — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей.

11. Вектор Умова — Пойнтинга

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}],$$

где  $[\vec{E}\vec{H}]$  — векторное произведение  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$ , направление которого определяется по правилу правого буравчика и совпадает с направлением фазовой скорости.

Вектор Умова — Пойнтинга численно равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

### Примеры решения задач

#### Задача 3.1

Вдоль прямой распространяются колебания с периодом, равным 0,25 с, и скоростью — 48 м/с. По истечении 10 с после возникновения колебаний в исходной точке на расстоянии 43 м от нее, смещение точки оказалось равным 3 см. Определите в этот же момент времени смещение в фазу колебаний в точке, отстоящей на 45 м от источника колебаний.

*Дано:*

$$T = 0,25 \text{ с}$$

$$v = 48 \text{ м/с}$$

$$t = 10 \text{ с}$$

$$r_1 = 43 \text{ м}$$

$$r_2 = 45 \text{ м}$$

$$x_1 = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$$

$$x_2, \varphi_2 — ?$$

*Решение*

Запишем уравнения колебаний точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$

$$x_1 = A \sin \omega \left( t - \frac{r_1}{v} \right);$$

$$x_2 = A \sin \omega \left( t - \frac{r_2}{v} \right).$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , перепишем эти уравнения

$$x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{v} \right); \quad (1)$$

$$x_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{v} \right). \quad (2)$$

Амплитуду колебаний найдем из (1)

$$A = \frac{x_1}{\sin \left[ \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{v} \right) \right]}.$$

Подставляя данные, получим

$$A = \frac{0,03}{\sin \left[ \frac{2\pi}{0,25} \left( 10 - \frac{43}{48} \right) \right]} = 0,06 \text{ (м)}.$$

Из (2) определим фазу колебаний  $\varphi_2$  в точке, отстоящей на расстоянии  $r_2$  от источника колебаний в момент времени  $t$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{v} \right).$$

Подставляя данные, получим

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{0,25} \left( 10 - \frac{45}{48} \right) = 145 \frac{\pi}{2} = 227,65 \text{ (рад)}.$$

Смещение в точке, находящейся на расстоянии  $r_2$  от источника колебаний в момент времени  $t$

$$x_2 = A \sin \varphi_2.$$

Подставляя данные, получим

$$x_2 = 0,06 \sin 145 \frac{\pi}{2} = 0,06 \sin \frac{\pi}{2} = 0,06 \text{ (м)}.$$

*Ответ:*  $x_2 = 0,06$  м;  $\varphi_2 = 227,65$  рад.

### **Задача 3.2**

Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебания точек шнура равен 1,2 с; амплитуда колебаний 2 см. Определите длину волны, фазу и смещение точки, отстоящей на 45 м от источника колебаний через 4 с.

Дано:

$$v = 15 \text{ м/с}$$

$$T = 1,2 \text{ с}$$

$$A = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$$

$$r = 45 \text{ м}$$

$$t = 4 \text{ с}$$

$\lambda, \varphi, x$  — ?

*Решение*

Длину волны определим из формулы

$$\lambda = vT;$$

$$\lambda = 15 \cdot 1,2 = 18 \text{ (м)}.$$

Фазу и смещение любой точки среды найдем из уравнения волны

$$x = A \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right).$$

Фаза колебаний равна аргументу синуса в уравнении волны

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r}{v} \right).$$

Подставляя данные, получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{1,2} \left( 4 - \frac{45}{15} \right) = 5,24 \text{ (рад)}.$$

Определим смещение точки

$$x = 0,02 \sin 5,24 = -0,0173 \text{ (м)}.$$

*Ответ:*  $\lambda = 18 \text{ м}; \varphi = 5,24 \text{ рад}; x = -0,0173 \text{ м}.$

### **Задача 3.3**

Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону  $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ , где все величины выражены в СИ. Емкость конденсатора равна  $0,9 \text{ мкФ}$ . Найдите индуктивность контура; закон изменения со временем силы тока в цепи; длину волны, соответствующую этому контуру.

Дано:

$$U = 50 \cos 10^4 \pi t, \text{ В}$$

$$C = 0,9 \text{ мкФ} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$$

$L, I(t), \lambda$  — ?

*Решение*

Из формулы Томсона

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \quad (1)$$

найдем индуктивность контура

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$$

или учитывая, что  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

$$L = \frac{1}{C\omega^2}. \quad (2)$$

Из уравнения  $U = 50\cos 10^4 \pi t$  видим, что  $\omega = 10^4 \pi$  рад/с. Следовательно, индуктивность контура

$$L = \frac{1}{9 \cdot 10^{-7} (10^4 \cdot 3,14)^2} = 1,12 \cdot 10^{-3} (\text{Гн}) = 1,12 \text{ мГн}.$$

Длина волны  $\lambda = cT$  или с учетом (2)

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Подставляя данные, получим

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8}{10^4 \cdot 3,14} = 6 \cdot 10^4 (\text{м}).$$

По определению сила тока равна  $I = -I_0 \sin \omega t$ , где  $I_0 = \frac{U_0}{R_L} = \frac{U_0}{\omega L}$ . Значения  $U_0$  и  $\omega$  находим из уравнения  $U = 50\cos 10^4 \pi t$ , где  $U_0 = 50$  В,  $\omega = 10^4 \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

Окончательно

$$I = \frac{50}{10^4 \cdot 3,14 \cdot 1,12 \cdot 10^{-3}} \sin 10^4 \pi t = -1,42 \sin 10^4 \pi t.$$

*Ответ:*  $L = 1,12$  мГн;  $I = -1,42 \sin 10^4 \pi t$ ;  $\lambda = 6 \cdot 10^4$  м.

### Задача 3.4

Определите число колебаний, происходящих в электромагнитной волне длиной 300 м за время, равное периоду звуковых колебаний с частотой 2000 Гц.

Дано:

$$\lambda_s = 300 \text{ м}$$

$$\nu = 2000 \text{ Гц}$$

$N = ?$

*Решение*

Период электромагнитной волны

$$T_3 = \frac{\lambda_3}{c},$$

где  $\lambda_3$  — длина электромагнитной волны в вакууме;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Период звуковых волн

$$T_3 = \frac{1}{\nu_3},$$

где  $\nu_3$  — частота звуковых волн.

Из этих формул определим число электромагнитных колебаний за период звукового колебания

$$N = \frac{T_3}{T_3} = \frac{c}{\lambda_3 \nu_3};$$

$$N = \frac{3 \cdot 10^8}{300 \cdot 2000} = 500.$$

*Ответ:*  $N = 500$ .

**Задача 3.5**

Две точки находятся на расстоянии 6 и 12 м от источника колебаний. Определите разности фаз колебаний этих точек, если период колебаний равен 0,04 с, а скорость их распространения — 300 м/с.

*Дано:*

$$r_1 = 6 \text{ м}$$

$$r_2 = 12 \text{ м}$$

$$T = 0,04 \text{ с}$$

$$\nu = 300 \text{ м/с}$$

$$\Delta\varphi = ?$$

*Решение*

Уравнения колебаний точек

$$x_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{\nu} \right);$$

$$x_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{\nu} \right),$$

откуда фазы колебаний этих точек

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{\nu} \right);$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{\nu} \right). \quad (1)$$

Разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  или с учетом (1)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_1}{v} \right) - \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r_2}{v} \right) = \frac{2\pi}{Tv} (r_2 - r_1).$$

Подставляя данные, получим

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{0,04 \cdot 300} (12 - 6) = \pi \text{ (рад)}.$$

*Ответ:*  $\Delta\varphi = \pi$  рад, т. е. точки колеблются в противоположных фазах.

**Задачи для самостоятельного решения**

13.1; 13.2; 13.6; 13.7; 13.9; 15.1.



## Лекция 4 КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ

### 4.1. Тепловое излучение. Законы теплового излучения

Впервые неполное представление о световом излучении как о волновом процессе проявилось при изучении теплового излучения.

**Тепловым** называют излучение нагретых тел. Свечение тел может происходить в результате **хемилюминесценции** — свечение тела при определенных химических реакциях или **электролюминесценции** — свечение газов под действием электрического разряда. Излучение тел всегда сопровождается потерей энергии, и, чтобы поддержать свечение, необходимо пополнить подводимую энергию, например, в случае хемилюминесценции пополнять энергию за счет химической реакции. Но, подводя энергию для поддержания свечения, светящаяся среда все больше удаляется от первоначального состояния. В отличие от названных и многих других видов излучения только тепловое излучение может быть равновесным — распределение энергии между телом и излучением остается постоянным во времени.

Пусть нагретое тело окружено идеально отражающей излучение этого тела оболочкой. Тогда излучение не может выйти за пределы оболочки, отражаясь от ее внутренних зеркальных стенок, оно падает на тело и частично им поглощается. Энергия в такой системе есть сумма энергии электромагнитного излучения и внутренней энергии нагретого тела. В условиях идеально отражающей полости нет потерь энергии в системе «излучающее тело — излучение». Если тело будет больше излучать энергии, чем поглощать, оно будет охлаждаться, и наоборот, большее поглощение приведет к нагреванию тела. В итоге через некоторое время появится устойчивое равновесное состояние, устойчивое потому, что если тело получает большее или меньшее количество излучения, то оно увеличивает или уменьшает интенсивность излучения, и система снова придет к равновесию.

Способности тел поглощать и излучать лучистую энергию подчиняются закону Кирхгофа. Но прежде чем его сформулировать, необходимо ввести некоторые термины.

**Абсолютно черным** называют тело, которое при любой температуре полностью поглощает все падающие на него электромагнитные волны.

В природе не существует абсолютно черных тел, но сажа или кусок черного бархата по своим оптическим свойствам в видимом диапазоне близки к этим телам.

Для исследования зависимости энергии, излученной телом, от температуры и частоты излучения вводят понятие **излучательной способности** — энергии излучения с единицы площади поверхности тел за единицу времени в единичном интервале частот

$$R_{\nu,T} = \frac{dE_{\text{изл}}}{d\nu}. \quad (4.1)$$

Можно отнести излучательную способность к интервалу длин волн. Тогда

$$R_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} R_{\nu,T},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Иногда излучательную способность называют спектральной плотностью энергетической светимости тела.

Поглотив энергию, абсолютно черное тело ее излучает тем больше, чем выше температура. Максимум излучения тела тем выше и тем более смещен в сторону коротких волн, чем выше температура. Например, для Солнца, температура поверхности которого близка к 6000 К, максимум излучения приходится на желто-зеленую область спектра, а излучение электрического утюга или паяльника, нагретого на несколько сотен градусов, уже не видно глазом: максимум излучения расположен в инфракрасной области.

Аналогично вводится понятие **поглощательной способности тела**  $A_{\nu,T}$  — величины, показывающей, какая часть энергии электромагнитной волны данной частоты  $\nu$ , падающей за единицу времени на единицу площади поверхности тела, поглощается этим телом

$$A_{\nu,T} = \frac{dE_{\text{погл}}}{dE_{\text{пад}}}. \quad (4.2)$$

Кроме частоты  $\nu$  и абсолютной температуры  $T$ , поглощательная способность тела  $A_{\nu,T}$  зависит от материала тела и состояния его поверхности.

Теперь можно сформулировать *закон Кирхгофа для теплового излучения*: отношение излучательной способности тела к его поглощательной способности для данных  $\nu$  и  $T$  одинаково для всех тел и равно излучательной способности абсолютно черного тела

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (4.3)$$

Для абсолютно черного тела  $A_{\nu,T} = 1$ . Для серых тел  $A_{\nu,T} < 1$ , но величина  $A_{\nu,T}$  одинакова для всех частот ( $A_{\nu,T} = \text{const} < 1$ ) и зависит от температуры,

материала и поверхности тела. Если ввести **интегральную излучательную способность** (энергия излучения всех возможных частот с единицы поверхности тела за единицу времени)

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu,$$

интегральную излучательную способность абсолютно черного тела

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu,$$

то закон Кирхгофа можно записать в интегральной форме

$$\frac{R_T}{A_T} = R_e. \quad (4.4)$$

Отношение интегральной излучательной способности серого тела к его поглощательной способности равно интегральной излучательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

Закон Кирхгофа имеет общее значение независимо от того, как происходит поглощение, обусловлено оно свойствами поверхности или всей системы. Необходимо помнить, что сравнение поглощения и излучения различными телами следует проводить только при одинаковой температуре.

Определению вида функции  $r_{\nu,T}$  были посвящены многие работы по изучению теплового излучения. Первым этапом стало получение зависимости  $r_{\nu,T}$  от температуры на основании опытных данных. Анализ таких результатов позволил Стефану сформулировать закон, который был затем существенно скорректирован Больцманом и сейчас известен как *закон Стефана — Больцмана*: интегральная излучательная способность абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры

$$R_e = \sigma T^4, \quad (4.5)$$

где  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$  — постоянная Стефана — Больцмана.

Вин получил *первый закон смещения теплового излучения в области коротких длин волн*: длина волны, соответствующая максимальному значению излучательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.6)$$

где  $b \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  — первая постоянная Вина.

Полученная далее *формула Релея — Джинса*

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT \quad (4.7)$$

привела к резкому расхождению с экспериментом, согласуясь только в длинноволновой области спектра.

Законы классической физики говорят о том, что энергия любой системы изменяется непрерывно, т. е. энергия может принимать любые, сколь угодно близкие значения. Так, в классической электродинамике Максвелл считал, что колеблющийся электрический заряд непрерывно излучает электромагнитные волны.

Это означает, что в формуле Релея — Джинса в ультрафиолетовой области спектра величина  $r_{\nu,T}$  резко возрастает. Такое расхождение теории с опытом получило в конце XIX в. название ультрафиолетовой катастрофы. Было указано даже не столько на положение дел в теории излучения, сколько на кризис, возникший в физике в связи с применением законов классической физики при изучении микромира.

Выход из сложившейся ситуации нашел Планк, который в одной из своих работ высказал предположение, что атомы излучают прерывисто, порциями — квантами, энергия которых пропорциональна частоте колебаний

$$\varepsilon = h\nu, \quad (4.8)$$

где  $\varepsilon$  — энергия кванта;  $h$  — постоянная Планка,  $h \approx 6,6260755 \cdot 10^{-34}$  Дж · с.

Гипотеза Планка о прерывистом характере излучения (поглощения) позволила найти зависимость  $r_{\nu,T}$

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) — *формула Планка* дает полное согласие с результатами экспериментов по изучению зависимости излучательной способности черного тела от  $T$  и  $\nu$ .

В области низких частот формула Планка переходит в формулу Релея — Джинса, т. е. классическую электродинамику можно использовать, когда  $h\nu$  весьма мала за счет небольших величин  $\nu$ .

Формула Планка универсальна, из нее следуют законы Стефана — Больцмана и Вина, причем вычисляются константы  $\sigma$  и  $b$ , входящие в математические выражения этих законов.

## 4.2. Фотоэлектрический эффект

Фотоэлектрический эффект, или фотоэффект, как и многие другие наблюдаемые физические явления, связанные со свойствами света, может быть объяснен, благодаря фундаментальным работам Эйнштейна.

В 1905 г. Эйнштейн выдвинул гипотезу, что электромагнитное излучение не только испускается квантами, но и распространяется и поглощается в виде частиц (корпускул) электромагнитного поля — фотонов.

Фотон является реально существующей частицей электромагнитного поля.

Энергия фотона связана с его массой соотношением

$$E = mc^2, \quad (4.10)$$

где  $c$  — скорость электромагнитной волны в вакууме.

Приравнявая  $E = h\nu = mc^2$ , получим массу фотона

$$m_\phi = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (4.11)$$

Фотон не имеет массы покоя, т. е. при рождении он сразу имеет скорость  $c$ . По известной массе и скорости фотона найдем его импульс

$$p_\phi = m_\phi c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (4.12)$$

Фотоэффект был открыт Герцем, а исследован Столетовым. Схема опыта Столетова представлена на рис. 4.1.

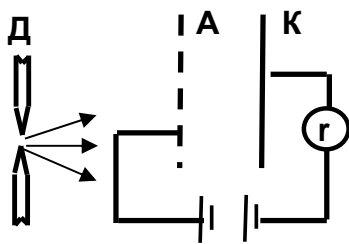


Рис. 4.1

Цинковая пластинка К освещалась светом электрической дуги Д через металлическую сетку А. Ток в цепи возникает, если пластинка К служит катодом. Если пластинка является анодом — ток не возникает, следовательно, с катода при падении на него света вылетают электроны и в цепи возникает электрический ток.

Ток, возникающий в цепи, получил название **фототока**, а цинковая (или иная) пластинка, присоединенная к отрицательному полюсу источника — **фотокатода**. Фототок возникает практически одновременно с освещением фотокатода.

На рис. 4.2 изображен график зависимости фототока от напряжения между электродами при неизменном освещении пластинки, т. е. вольт-амперная характеристика.

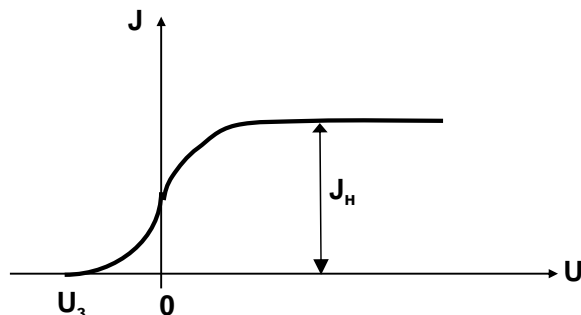


Рис. 4.2

Из графика видно, что фототок растет, а затем, при сравнительно небольшом напряжении, перестает изменяться. Максимальное значение фототока получило название **фототока насыщения**: фототок насыщения (а следовательно, и число вырываемых светом фотоэлектронов) прямо пропорционален интенсивности света, падающего на цинковую пластинку.

Фотоэффект наблюдается только тогда, когда фотокатод облучается светом, длина волны которого меньше некоторой предельной длины волны, получившей название **красной границы фотоэффекта**.

Фототок существует и тогда, когда в цепи нет источника тока, что объясняется тем, что часть электронов покидает катод и достигает анода. Чтобы фототок стал равен нулю, нужно приложить задерживающее отрицательное напряжение  $U_3$ . При этом напряжении электроны, обладающие максимальной скоростью  $v_m$ , не могут достигнуть анода.

Экспериментально были установлены следующие *законы фотоэффекта (законы Столетова)*:

1. Для каждого вещества существует предельная длина волны — красная граница фотоэффекта.

2. Число фотоэлектронов, вырываемых из фотокатода в единицу времени, пропорционально интенсивности светового потока.

3. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов определяется частотой излучения и не зависит от интенсивности светового потока, падающего на фотокатод.

4. Фотоэффект практически безынерционен.

Объяснение фотоэффекта было дано Эйнштейном на основе корпускулярного механизма.

При поглощении света металлом фотон передает свою энергию одному электрону. Часть этой энергии затрачивается на то, чтобы электрон мог покинуть металл, т. е. на совершение работы выхода  $A$ . Если электрон освобождается светом не у самой поверхности, а на некоторой глубине, то часть энергии, равная  $E'$ , может быть потеряна им вследствие случайных столкновений в веществе и идет на нагревание вещества. Остаток энергии образует кинетическую энергию  $E_k$  электрона, покинувшего металл. Энергия вылета электрона будет максимальной, если электрон вырывается светом с поверхности металла. В этом случае  $E' = 0$  и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{m_e v_m^2}{2}. \quad (4.13)$$

Из уравнения следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, а следовательно, и его максимальная начальная скорость зависят от частоты света  $\nu$  и работы выхода  $A$ , но не зависят от мощности светового потока

$$v_m = \sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m_e}}. \quad (4.14)$$

Из уравнения Эйнштейна также следует, что фотоэффект возможен лишь при энергии фотона, большей работы выхода. Энергии фотона должно, по меньшей мере, хватить на то, чтобы оторвать электрон от металла, т. е.  $h\nu \geq A$ .

Обозначив через  $\nu_0$  наименьшую частоту света, при которой возможен фотоэффект (красная граница фотоэффекта), можно записать

$$\nu_0 = \frac{A}{h}. \quad (4.15)$$

Красная граница фотоэффекта зависит от работы выхода электрона, т. е. от химической природы металла.

Находясь на поверхности металла и получив от фотона энергию  $h\nu$ , электрон не испытывает столкновений с частицами металла. Энергия фотоэлектрона в этом случае максимальна, что и записано в уравнении Эйнштейна, т. е.  $\nu = \nu_m$ .

### 4.3. Давление света

Максвелл предположил, что свет, как и любая электромагнитная волна, должен производить давление на расположенные на его пути препятствия.

В 1900 г. Лебедев поставил опыт по измерению давления света (рис. 4.3).

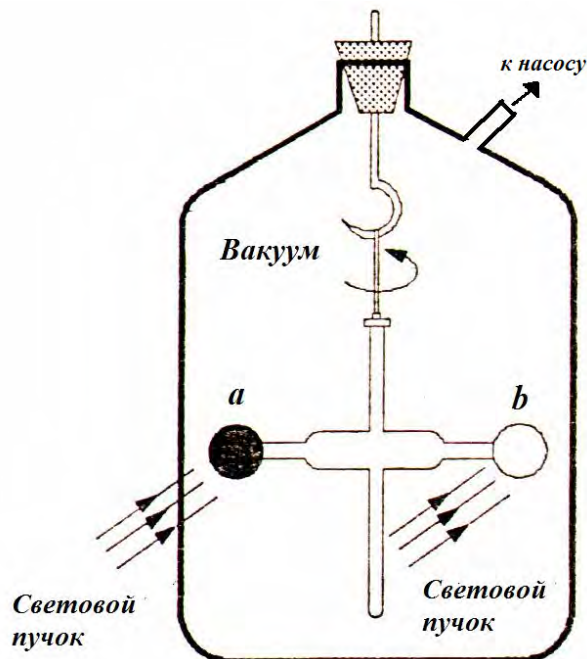


Рис. 4.3

Давление света зависит от коэффициента отражения поверхности: при отражении от зеркальной поверхности крылышко  $b$  получает импульс  $p_2 = 2p$ . Поверхность черного крылышка  $a$  поглощает свет, и  $p_1 = p$ . Для устранения тепловых потоков в сосуде насосом откачивается воздух.

Если за единицу времени на единицу поверхности падает  $N$  фотонов, то при коэффициенте отражения  $\rho$  отразится  $\rho N$  фотонов, а  $(1 - \rho)$  — поглотит-

ся. Каждый поглощенный фотон передает импульс  $p_{\text{пог}} = \frac{h\nu}{c}$ , а отраженный —  $p_{\text{отр}} = \frac{2h\nu}{c}$ . Полное давление света есть импульс от  $N$  фотонов за единицу времени, т. е.

$$p = \frac{2h\nu}{c}\rho N + \frac{h\nu}{c}(1-\rho)N = (1+\rho)\frac{E}{c},$$

где  $E = Nh\nu$  — энергия всех фотонов;  $\omega = \frac{E}{c}$  — объемная плотность энергии излучения.

Окончательно

$$p = \omega(1 + \rho). \quad (4.16)$$

Давление света может быть объяснено и с точки зрения волновой теории. Формула (4.16) получается одинаковой при рассмотрении волновой корпускулярной теории света и хорошо согласуется с данными опытов

$$p \approx 10^{-6} \text{ Н/м}^2.$$

#### 4.4. Эффект Комптона

В 1922 г. Комптон, изучая рассеяние рентгеновских лучей графитом (графит содержит слабо связанные электроны), установил, что частота рассеяния рентгеновских лучей изменяется в зависимости от угла рассеяния. Исследования Комптона имеют принципиальное значение, так как, с волновой точки зрения, вторичные волны, переизлучаемые электронами, должны иметь частоту, одинаковую с падающими.

С квантовой точки зрения, рассеяние есть столкновение квантов с электронами, а значит должны выполняться законы сохранения импульса и энергии. Пусть квант с энергией  $h\nu$  сталкивается с электроном (рис. 4.4).

При этом электрон получает кинетическую энергию и импульс  $\vec{P}_e$  и движется в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , а квант —  $\theta$ . Энергия кванта и его импульс после столкновения уменьшились, а так как  $E = h\nu$ , то уменьшение энергии означает уменьшение частоты кванта до величины  $\nu'$ .

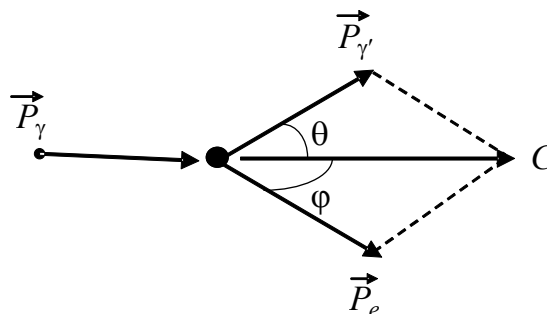


Рис. 4.4



Комптон экспериментально изучил рассеяние рентгеновских лучей следующим образом. Пучок рентгеновских лучей падает на рассеивающее кристаллическое вещество *A* (рис. 4.5).

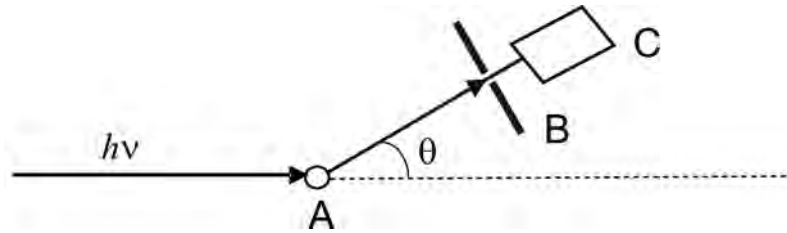


Рис. 4.5

Диафрагма *B* выделяет лучи, рассеянные под углом  $\theta$ . Далее лучи попадают на рентгеновский спектрограф *C*, который может поворачиваться вокруг рассеивающего вещества так, что можно определить длину волны излучения, рассеянного на различных углах. В результате эксперимента Комптон установил, что изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

не зависит от длины волны и от природы вещества. Величину  $\frac{h}{m_e c}$  называют

**комптоновской длиной волны  $\lambda_c$** . Для электрона  $\lambda_c \approx 2,43 \cdot 10^{-12}$  м.

Тогда изменение длины волны имеет вид

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.17)$$

Рассеяние квантов происходит на свободных или слабо связанных электронах, а при взаимодействии квантов со связанными электронами наблюдается фотоэффект.

#### Вопросы для самостоятельного рассмотрения

1. Модель Михельсона абсолютно черного тела.
2. Графические зависимости излучательной способности абсолютно черного тела от длины волны и частоты при различных температурах.
3. Практическое использование основных законов теплового излучения — методы оптической пирометрии.
4. Практическое использование явления внешнего фотоэлектрического эффекта: вакуумные и газонаполненные фотоэлементы; фотоэлектронные умножители и т. д.
5. Объяснение давления света с точки зрения волновой природы света.
6. Вывод формулы Комптона из законов сохранения импульса и энергии.
7. Корпускулярно-волновой дуализм свойств света. Перечислите эффекты, в которых превалируют волновые или корпускулярные (квантовые) свойства света.

## Лекция 5 ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### 5.1. Волновые свойства микрочастиц. Соотношения неопределенностей

В 1924 г. де Бройль высказал предположение о том, что электрону при-  
сущи волновые свойства. По мнению де Бройля, электрон массой  $m_e$ , движу-  
щийся со скоростью  $v_e$ , характеризуется длиной волны

$$\lambda_B = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v_e}. \quad (5.1)$$

Волновые свойства света были известны с давних времен. Почему же  
свойства электрона не были обнаружены ранее?

Можно для примера вычислить длину волны, соответствующую электро-  
ну, движущемуся в электрическом поле, которое обладает достаточно боль-  
шой разностью потенциалов, например,  $10^4$  В.

Под действием такого поля электрон приобретает кинетическую энергию

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU,$$

откуда скорость электрона

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Движению этого электрона соответствует волновой процесс, определяе-  
мый длиной волны, равной

$$\lambda = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}} = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}}. \quad (5.2)$$

При заданной разности потенциалов  $10^4$  В электрон приобретает сравни-  
тельно небольшую скорость, поэтому релятивистское изменение массы мож-  
но не учитывать ввиду ее малости. Расчеты показывают, что  $\lambda \approx 1,2 \cdot 10^{-11}$  м.

При достаточно больших линейных размерах измерительных приборов, когда  $l \gg \lambda$ , волновые свойства электрона практически не проявляются. Однако эти свойства легко обнаружить при прохождении электронов через дифракционную решетку, период которой того же порядка, что и длина волны.

В 1928 г. Девиссону и Джермеру удалось обнаружить явление дифракции электронов, изучая рассеяние пучка электронов на различных телах. Позже другим физикам удалось показать, что отражение других пучков атомов и ионов происходит по законам дифракции.

Схема опыта Дэвиссона и Джермера приведена на рис. 5.1.

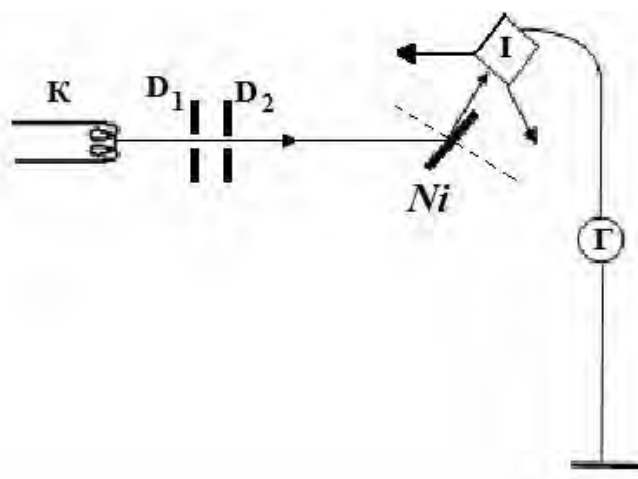


Рис. 5.1

Поток электронов из электронной пушки К ускорялся электрическим полем с разностью потенциалов  $U$ , проходил через диафрагмы  $D_1$  и  $D_2$  и в виде узкого параллельного пучка падал на монокристалл Ni, структура которого была к тому времени уже исследована. Рассеянные от кристалла никеля электроны попадали в ионизационную камеру I, соединенную с чувствительным гальванометром Г. Перемещая камеру можно было улавливать электроны, рассеянные под различными углами. По силе возникающего тока можно было подсчитать число электронов, отраженных от кристалла под разными углами. Оказалось, что сила тока не меняется монотонно, а дает ряд максимумов. Аналогичная картина наблюдалась при дифракции рентгеновских лучей. Известно, что максимум интенсивности рентгеновских лучей на кристаллах возникает при соблюдении условия:  $2d\sin\alpha = m\lambda$  (формула Вульфа — Брэггов), где  $\lambda$  — длина волны рентгеновских лучей;  $d$  — постоянная решетки кристалла;  $m$  — целое число. В результате проведенного опыта длина волны оказалась равной  $\approx 1,67 \cdot 10^{-10}$  м.

Совпадение результатов свидетельствует о справедливости гипотезы де Бройля.

Одним из свойств электрона является его неделимость: никогда не наблюдается передача от одного тела к другому дробного заряда электрона. А волны не обладают признаком неделимости. Так, при дифракции волна разлагается на ряд волн, распространяющихся в направлении дифракцион-

ных максимумов. Можно модифицировать опыт Дэвиссона — Джермера: уменьшая число электронов в пучке до тех пор, пока не появится возможность наблюдать поведение одного электрона. Такие опыты были в свое время проведены Тартаковским. Оказалось, что наблюдаемая дифракция от одного электрона ничем не отличается от дифракционной картины, создаваемой большим количеством электронов. Другими словами, вероятность нахождения электрона максимальна там, где интенсивность (квадрат модуля амплитуды) волнового поля максимальна. Именно такое поведение электронов возможно учитывать, если формально приписать электрону волну вероятности — волну де Бройля.

Трудности, возникшие в понимании природы электронов и других микрочастиц, связаны с тем, что приходится пользоваться представлениями о них то как о корпускулах, то как о волнах, а эти свойства во многом исключают друг друга. Поэтому микрочастицам нельзя приписывать все свойства корпускул или все свойства волн.

В классической механике в определенный момент времени тело (частица) занимает определенное место в пространстве (известны  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты частицы). Наличие волновых свойств у микрочастиц делает невозможным такое описание.

Степень пригодности приближенного представления микрочастицы как механической частицы (описываемой совокупностью координат и скоростью) была установлена в 1927 г. Гейзенбергом и названа **соотношениями неопределенностей**: микрочастица не может иметь одновременно определенную координату и определенную проекцию импульса, неопределенность этих величин удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\Delta p_x \Delta x &\geq h/2\pi, \\ \Delta p_y \Delta y &\geq h/2\pi, \\ \Delta p_z \Delta z &\geq h/2\pi\end{aligned}\tag{5.3}$$

или

$$\Delta E \Delta t \geq h/2\pi,$$

где  $\Delta E$  — неопределенность энергии состояния;  $\Delta t$  — неопределенность во времени пребывания частицы в этом энергетическом состоянии.

Из (5.3) следует, что чем точнее определяется координата частицы, тем с большей неопределенностью устанавливается ее скорость; чем точнее определение энергии состояния, тем неопределеннее время пребывания в нем и наоборот.

Соотношение (5.3) есть мера пригодности представлений о микрочастицах, как о частицах, описываемых классической механикой. Из этого соотношения вытекает принципиальное следствие: для микрочастиц непригодно понятие траектории, они «размазаны» в пространстве. Можно только констатировать, что с такой же вероятностью микрочастица будет находиться в определенном месте через определенное время. Поэтому понятия «сила»,

действующая на частицу, «скорость» и «ускорение» лишаются смысла. Вероятностный подход требует введения нового уравнения движения, принципиально отличного от уравнения движения классической механики.

## 5.2. Волновая функция. Уравнение Шредингера

Описание состояния микрочастиц требует вероятностного подхода. В квантовой механике состояние микросистемы характеризуется волновой функцией  $\psi$ , зависящей от координат и времени, а квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2$  есть плотность вероятности того, что эти координаты окажутся при их определении равными вычисленным величинам. Величина  $|\psi|^2$  задает интенсивность волн де Бройля.

Для установления физического смысла функции  $\psi$  используем аналогию с электромагнитной волной. Известно, что плотность электрической энергии электромагнитной волны пропорциональна квадрату напряженности электрического поля  $\left( \omega_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} \right)$ , а плотность магнитной энергии про-

порциональна квадрату индукции магнитного поля  $\left( \omega_m = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} \right)$ . Аналогич-

но этому, квадрат модуля  $|\psi|^2$  характеризует вероятность обнаружения микрочастицы в единице объема. Это толкование как раз и связано с тем, что квантовая механика не дает однозначных предсказаний о поведении микрочастицы, а лишь определяет вероятность того или иного поведения. Следовательно,  $|\psi|^2 dV$  определяет вероятность обнаружения электрона (и любой микрочастицы) в объеме  $dV$ , а  $\int |\psi|^2 dV$  по всему пространству есть вероятность обнаружения электрона (микрочастицы) где-либо в пространстве. Поскольку существование микрочастицы где-либо в пространстве есть событие достоверное, то условие нормировки волновой функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1. \quad (5.4)$$

Математический аппарат квантовой механики резко отличается от аппарата классической физики. Вместо прямого определения динамических переменных  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ , как функции времени  $t$ , квантовая механика находит волновую функцию  $\psi$ , описывающую состояние частицы.

Уравнение для волновой функции было предложено в 1926 г. Шредингером. Для многих физических явлений, происходящих в микромире, это уравнение можно упростить, исключив зависимость  $\psi$  от времени, иными словами, найти уравнение Шредингера для стационарных состояний — состояний с фиксированным значением энергии

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad (5.5)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — сокращенная запись оператора Лапласа;  $m$  — масса частицы;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — приведенная постоянная Планка;  $E$  — полная энергия микрочастицы;  $U$  — потенциальная энергия микрочастицы.

Однако (5.5) недостаточно для определения  $\psi$ . Следует еще учесть, что эта функция должна подчиняться некоторым условиям, вытекающим из ее физического смысла. Функция  $\psi$  характеризует вероятность обнаружения микрочастицы в данном элементе объема и должна быть конечной, поскольку вероятность не может быть больше единицы, однозначной, так как вероятность не может быть неоднозначной величиной, и непрерывной, ибо вероятность не может изменяться скачкообразно.

Из уравнения Шредингера и условий, налагаемых на волновую функцию, непосредственно вытекают правила квантования энергии для некоторых частных случаев.

### 5.3. Решение уравнения Шредингера для различных состояний микрочастиц

#### 5.3.1. Движение свободной частицы

**Свободная частица** — частица, движущаяся в отсутствии внешних полей. Так как на свободную частицу (пусть она движется вдоль оси  $x$ ) сила не действует, то потенциальная энергия частицы  $U(x) = \text{const}$  и ее можно принять равной нулю. Тогда полная энергия частицы совпадает с ее кинетической энергией. В этом случае уравнение Шредингера примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (5.6)$$

Прямой подстановкой можно убедиться в том, что частным решением (5.6) является функция  $\psi(x) = A e^{ikx}$ , где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $A = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ , а собственное значение энергии

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (5.7)$$

Полное решение уравнения Шредингера

$$\psi(x, t) = A e^{-i\omega t + ikx} = A e^{-\left(\frac{i}{\hbar}\right)(Et - p_x x)}, \quad (5.8)$$

где  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  и  $k = \frac{p_x}{\hbar}$ . Функция вида (5.8) описывает плоскую монохроматическую волну де Бройля.

Из (5.7) следует, что зависимость энергии от импульса

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{P_x^2}{2m} \quad (5.9)$$

оказывается обычной для нерелятивистских частиц, следовательно, энергия свободной частицы может принимать любые значения (так как волновое число  $k$  может принимать любое положительное значение), т. е. ее энергетический спектр является непрерывным.

Таким образом, свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Этому соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства

$$|\psi|^2 = |A|^2,$$

т. е. все положения свободной частицы в пространстве являются равновероятными.

### 5.3.2. Микрочастица в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками»

Проведем качественный анализ решений уравнения Шредингера применительно к частице в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками». Такая «яма» описывается потенциальной энергией вида (для простоты принимаем, что частица движется вдоль оси  $x$ )

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq l \\ \infty, & x > l, \end{cases}$$

где  $l$  — ширина «ямы», а энергия отсчитывается от ее дна (рис. 5.2).

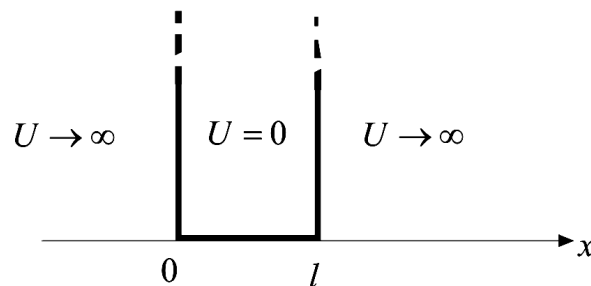


Рис. 5.2

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Так как «стенки» бесконечно высокие, то частица не проникает за пределы «ямы», поэтому вероятность ее обнаружения (а следовательно, и волновая функция) за пределами «ямы» равна нулю. На границе «ямы» (при  $x = 0$  и  $x = l$ ) непрерывная волновая функция также обращается в ноль. Следовательно, граничные условия имеют вид

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (5.10)$$

В пределах «ямы» ( $0 \leq x \leq l$ ) уравнение Шредингера сведется к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \quad (5.11)$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (5.12)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.10)

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

Так как  $\psi(0) = 0$ , то  $B = 0$ , тогда

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad (5.13)$$

Условие (5.10)  $\psi(l) = A \sin kl = 0$  выполняется только при  $kl = n\pi$ , где  $n$  – целые числа, т. е. необходимо, чтобы

$$k = \frac{n\pi}{l}. \quad (5.14)$$

Из (5.12) и (5.14) следует, что

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad (5.15)$$

где  $n = 1, 2, \dots$ , т. е. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками», удовлетворяется только при собственных значениях  $E_n$ , зависящих от целого числа  $n$ . Следовательно, энергия  $E_n$  частицы в потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками» принимает лишь определенные дискретные значения, т. е. квантуется. Квантовые значения энергии  $E_n$  называются **уровнями энергии**, а число  $n$ , определяющее энергетические уровни частицы, называется **главным квантовым числом**.

Таким образом, микрочастица в потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками» может находиться только на определенном энергетическом уровне  $E_n$  или частица находится в квантовом состоянии  $n$ .



Энергетический интервал между двумя соседними уровнями равен

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (2n + 1) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n. \quad (5.16)$$

С увеличением квантового числа  $n$  энергетический интервал между соседними уровнями возрастает. Кроме того, этот интервал обратно пропорционален ширине  $l$  потенциальной «ямы».

Пусть, например, электрон находится в металлическом образце, линейные размеры которого порядка 1 см. В этом случае энергетический интервал между соседними уровнями равен примерно  $(2n + 1)6 \cdot 10^{-34}$  Дж.

Средняя кинетическая энергия электрона при комнатной температуре согласно классической электронной теории будет  $\left( E = \frac{3}{2} kT \right) \approx 7 \cdot 10^{-21}$  Дж.

Отсюда видно, что по сравнению со средней кинетической энергией значение энергетических интервалов чрезвычайно мало (в  $10^{13}$  раз меньше). Следовательно, можно считать, что энергия электрона в металле меняется непрерывно.

Иной результат получается, если линейные размеры «ямы» порядка размеров атома, т. е.  $l \approx 10^{-10}$  м, тогда  $\Delta E = (2n + 1)6 \cdot 10^{-18}$  Дж.

В этом случае энергетический интервал между уровнями оказывается в 1000 раз больше энергии электронов, т. е. сильно выражено квантование.

### 5.3.3. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект

Принципиальное различие в поведении классической и квантовой частицы особенно сильно проявляется в том случае, когда частица встречает потенциальный барьер (рис. 5.3).

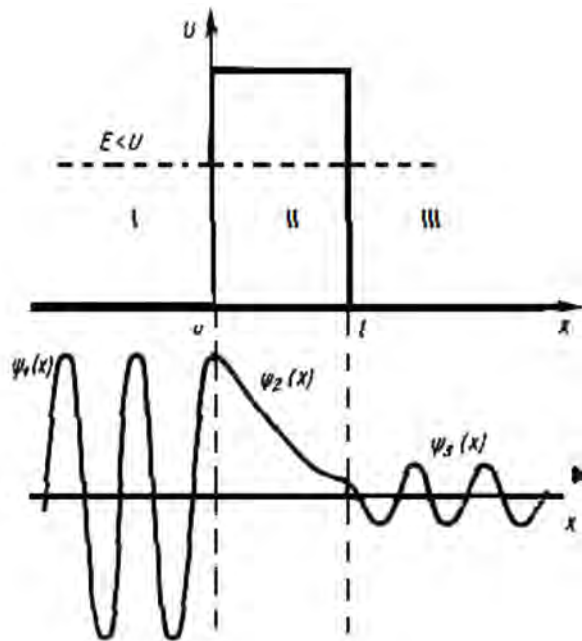


Рис. 5.3

Пусть частица совершает движение вдоль оси  $x$ , причем ее потенциальная энергия равна нулю при значениях  $x < 0$  и  $x > l$  и отлична от нуля при движении в интервале  $0 \leq x \leq l$ , т. е.

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 & \text{I область} \\ U, & 0 \leq x \leq l & \text{II область} \\ 0, & x > l & \text{III область.} \end{cases}$$

Иными словами, при движении частицы вдоль оси  $x$  слева направо или справа налево путь ее преграждается потенциальным барьером высотой  $U$ . Классическая частица может преодолеть этот барьер только при условии, что ее кинетическая энергия  $E_k > U$ . В противном случае эта частица может находиться либо в области I или в области III. Квантовомеханическая частица ведет себя по-другому. Решение уравнения Шредингера показывает, что  $\psi$  функция имеет отличное от нуля значение и при условии, если  $0 \leq x \leq l$ , т. е. в области II. Это значит, что существует конечная вероятность обнаружить действие частиц внутри барьера (см. рис. 5.3). Следовательно, квантовомеханическая частица может пройти, т. е. «просочиться» сквозь потенциальный барьер. Это явление носит название **туннельного эффекта**. Оно наблюдается, например, при радиоактивном распаде, когда из ядер вылетают  $\alpha$ -частицы.

#### 5.3.4. Линейный гармонический осциллятор в квантовой механике

Гармонический осциллятор в квантовой механике, или квантовый осциллятор, описывается уравнением Шредингера, учитывая выражение  $U = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}$  для потенциальной энергии. Тогда стационарное состояние квантового осциллятора определяется уравнением Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (5.17)$$

где  $E$  — полная энергия осциллятора.

Уравнение (5.17) имеет решение при собственных значениях энергии

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0. \quad (5.18)$$

Формула (5.18) показывает, что энергия квантового осциллятора может иметь только дискретные значения, т. е. квантуется. Минимальное значение энергии  $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$  называется энергией нулевых колебаний и является типичной для квантовых систем, представляя собой прямое следствие соотношения неопределенностей.

Наличие нулевых колебаний означает, что частица не может находиться на дне потенциальной «ямы», причем этот вывод не зависит от ее формы.

В самом деле, падение на дно «ямы» связано с обращением в ноль импульса частицы, а вместе с тем и его неопределенности. Тогда неопределенность координаты становится сколь угодно большой, что противоречит, в свою очередь, к пребыванию частицы в потенциальной «яме».

Из (5.18) также следует, что уровни энергии линейного гармонического осциллятора расположены на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 5.4).

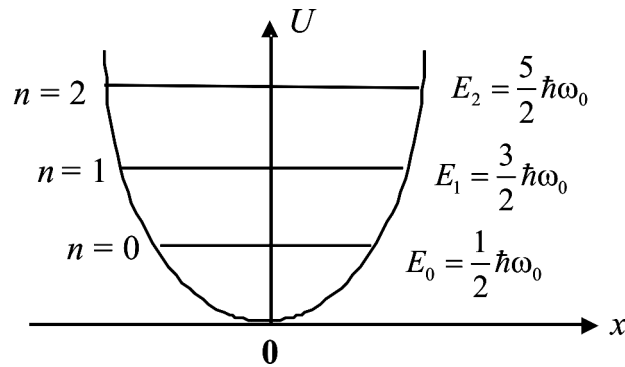


Рис. 5.4

Расстояние между соседними энергетическими уравнениями равно  $\hbar\omega_0$ , причем минимальное значение энергии  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ .

#### Вопросы для самостоятельного рассмотрения

1. Каким образом при известной волновой функции определить среднее значение физической величины?
2. Общее (временное) уравнение Шредингера.
3. Использование условия нормировки для определения постоянной  $A$ , входящей в волновую функцию  $\psi$  микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками».
4. Графические зависимости  $\psi$  и  $|\psi|^2$  для микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» шириной  $l$  с бесконечно высокими «стенками» ( $n = 1, 2, 3$ ).
5. Принцип соответствия Бора на примере энергетических уровней микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками».
6. Коэффициент «прозрачности» потенциального барьера произвольной и прямоугольной формы.
7. Графические зависимости плотности вероятности обнаружения линейного гармонического осциллятора в определенной области в классическом и квантовом ( $n = 1, 10$ ) случаях.

## Практические занятия 4, 5 ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

### Основные законы и формулы

#### 1. Оптическая длина пути

$$L = nS,$$

где  $n$  — абсолютный показатель преломления среды;  $S$  — геометрическая длина пути.

#### 2. Оптическая разность хода

$$\Delta = L_2 - L_1,$$

где  $L_2$  — оптическая длина пути во второй среде с абсолютным показателем преломления  $n_2$ ;  $L_1$  — оптическая длина пути в первой среде с абсолютным показателем преломления  $n_1$ .

#### 3. Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке наблюдения

$$\delta = \omega \left( \frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ;  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме.

#### 4. Условие наблюдения интерференционных максимумов

$$\Delta = m\lambda_0,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , или

$$\Delta = \pm 2m\pi.$$

#### 5. Условие наблюдения интерференционных минимумов

$$\Delta = \pm (2m + 1)\lambda_0,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , или

$$\Delta = \pm (2m + 1)\pi.$$

Ширина интерференционных полос в опыте Юнга, бизеркале и бипризме Френеля

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0,$$

где  $l$  — расстояние от источника до экрана;  $d$  — расстояние между источниками.

6. Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

где  $d$  — толщина пленки;  $n$  — абсолютный показатель преломления пленки;  $i$  — угол падения;  $\pm \frac{\lambda_0}{2}$  обусловлено потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если  $n > n_0$ , то необходимо выбрать знак «плюс»; если  $n < n_0$  — знак «минус»;  $n_0$  — абсолютный показатель преломления среды, в которой находится пленка.

7. Радиус  $m$ -го светлого кольца Ньютона в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda_0 R},$$

где  $m = 1, 2, \dots$ ;  $R$  — радиус кривизны плосковыпуклой линзы.

8. Радиус  $m$ -го темного кольца Ньютона в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{m \lambda_0 R},$$

где  $m = 1, 2, \dots$

9. Радиус  $m$ -й зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m \lambda},$$

где  $a$  — расстояние от источника до вершины фронта волны;  $b$  — расстояние от вершины фронта волны до точки наблюдения;  $\lambda$  — длина волны света.

10. Число зон Френеля

$$N = \frac{2\pi a^2}{\pi ab \lambda} (a + b).$$

11. Условие наблюдения дифракционных максимумов от щели

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где  $a$  — ширина щели;  $\varphi$  — угол дифракции;  $m$  — номер максимума;  $m = 1, 2, 3, \dots$

12. Условие наблюдения дифракционных минимумов от щели

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda,$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$

13. Условие наблюдения главных максимумов дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda,$$

где  $d$  — период дифракционной решетки;  $\varphi$  — угол дифракции;  $m$  — номер максимума;  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

14. Число максимумов, даваемых дифракционной решеткой

$$m \leq \frac{d}{\lambda}.$$

15. Период дифракционной решетки

$$d = a + b,$$

где  $a$  — ширина каждой щели решетки;  $b$  — ширина непрозрачных участков между щелями.

16. Число щелей, приходящихся на единицу длины решетки

$$d = \frac{1}{N_0}.$$

17. Условие наблюдения главных минимумов дифракционной решетки

$$a \sin \varphi = \pm m\lambda,$$

где  $a$  — ширина каждой щели решетки;  $\varphi$  — угол дифракции;  $m = 1, 2, 3, \dots$

18. Условие наблюдения дополнительных минимумов дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = \pm \frac{m'\lambda}{N},$$

где  $m' = 1, 2, 3, \dots$ , кроме  $0; N; 2N; \dots$

В случае  $N$  щелей между двумя главными максимумами располагается  $N - 1$  дополнительных максимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими весьма слабый фон.

19. Формула Вульфа — Брэггов

$$2d \sin \theta = m\lambda,$$

где  $d$  — расстояние между кристаллографическими плоскостями;  $\lambda$  — длина волны рентгеновского излучения;  $\theta$  — угол скольжения;  $m = 1, 2, 3, \dots$

20. Дисперсия вещества

$$D = \frac{dn}{d\lambda}.$$

21. Зависимость показателя преломления от частоты  $\omega$  падающего света

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где  $e$  — заряд электрона;  $n_0$  — концентрация атомов в диэлектрике;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $m$  — масса электрона;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний электрона.

#### 22. Закон Бугера — Ламберта

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где  $I_0$  и  $I$  — интенсивности плоской монохроматической волны на входе и выходе из вещества соответственно;  $\alpha$  — коэффициент поглощения;  $x$  — толщина слоя вещества.

#### 23. Степень поляризации света

$$p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  — максимальная и минимальная интенсивность частично поляризованного света.

#### 24. Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где  $I_0$  и  $I$  — интенсивность плоскополяризованного света, падающего и прошедшего анализатор соответственно;  $\alpha$  — угол между главными плоскостями анализатора и поляризатора.

#### 25. Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

где  $i_{\text{Бр}}$  — угол падения (угол Брюстера);  $n_1$  и  $n_2$  — абсолютные показатели преломления первой и второй среды соответственно;  $n_{21}$  — относительный показатель преломления; угол между отраженным и преломленным лучами равен  $90^\circ$ .

#### 26. Закон преломления света

$$n_{21} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2},$$

где  $i_1$  и  $i_2$  — угол падения и преломления соответственно.

### Примеры решения задач

#### Задача 4.1

Два когерентных источника  $S_1$  и  $S_2$  с длиной волны  $0,5$  мкм находятся на расстоянии  $2$  мм друг от друга. Параллельно линии, соединяющей источники, расположен экран на расстоянии  $2$  м от них. Определите, что будет наблюдаться в точке  $A$  экрана.

Дано:

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

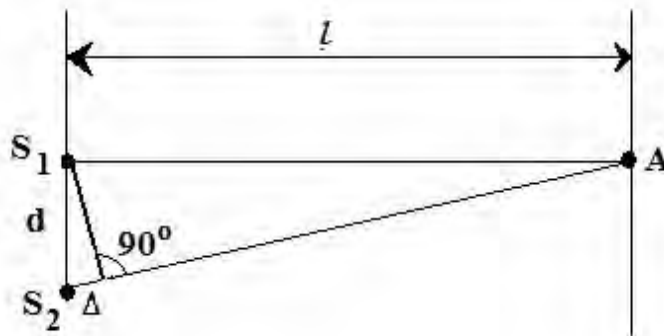
$$d = 2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$l = 2 \text{ м}$$

$$\Delta = ?$$

### Решение

В точке  $A$  экрана наблюдается максимум интенсивности, если разность хода двух лучей, исходящих из источников  $S_1$  и  $S_2$ , равна целому числу длин волн, и минимум интенсивности, если эта разность хода равна нечетному числу полуволен (рис.).



Вычислим разность хода лучей

$$\Delta = |S_2A| - |S_1A|;$$

$$|S_2A| = \sqrt{l^2 + d^2};$$

$$|S_1A| = l.$$

$$\text{Следовательно, } \Delta = \sqrt{l^2 + d^2} - l = l \sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2} - l.$$

Так как  $\frac{d}{l} \ll 1$ , то используя формулу приближенного вычисления, получим

чим

$$\Delta \approx l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{l}\right)^2 \right] - l = \frac{d^2}{2l}.$$

$$\text{Подставляя данные, получим } \Delta \approx \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 2} = 10^{-6} \text{ (м)}.$$

Сравнив значения  $\Delta$  и  $\lambda$ , видим, что разность хода  $\Delta$  равна целому числу длин волн, следовательно, в точке  $A$  освещенность будет максимальной.

*Ответ:* в точке  $A$  наблюдается максимум освещенности.



### Задача 4.2

Определите радиус кривизны линзы, используемой для наблюдения колец Ньютона в отраженном свете с длиной волны  $5,5 \cdot 10^{-7}$  м, если расстояние между вторым и третьим светлыми кольцами равно 0,5 мм.

Дано:

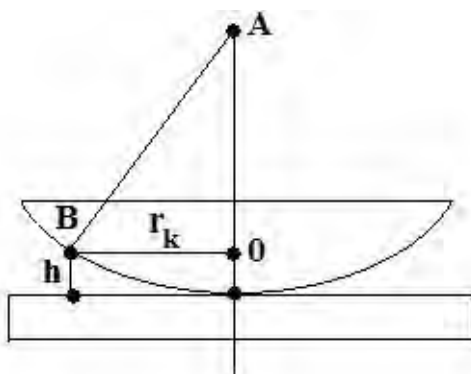
$$\Delta r_{2,3} = 0,5 \text{ мм} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\lambda = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$R$  — ?

Решение

Делаем поясняющий рис.



Из  $\triangle AOB$ :  $|BA|^2 = |BO|^2 + |AO|^2$  или

$$R^2 = r_m^2 + (R - h)^2,$$

откуда

$$r_m^2 - 2Rh + h^2 = 0.$$

Пренебрегая малой величиной  $h^2$  по сравнению с другими слагаемыми, получаем  $r_m = \sqrt{R2h}$ . Для светлого  $m$ -го кольца в отраженном свете разность хода равна

$$\Delta_m = 2hn - \frac{\lambda}{2} = 2m \frac{\lambda}{2},$$

откуда  $2h = (2m + 1) \frac{\lambda}{2n}$ . Тогда  $r_m = \sqrt{(2m + 1) \frac{\lambda R}{2n}}$ .

Для  $m = 2$  и  $m = 3$  получим

$$r_2 = \sqrt{(2 \cdot 2 + 1) \frac{\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{5\lambda R}{2n}};$$

$$r_3 = \sqrt{(2 \cdot 3 + 1) \frac{\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{7\lambda R}{2n}}.$$

Тогда

$$r_{23} = r_3 - r_2 = \sqrt{\frac{7\lambda R}{2n}} - \sqrt{\frac{5\lambda R}{2n}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2n}} (\sqrt{7} - \sqrt{5}) = 0,4 \sqrt{\frac{\lambda R}{2n}},$$

откуда

$$R = \frac{\Delta r_{32}^2 n}{0,08\lambda} = \frac{(0,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 1}{0,08 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}} = 5,7 \text{ (м)}.$$

Показатель преломления считаем равным 1, так как никаких дополнительных условий в задаче нет.

*Ответ:*  $R = 5,7 \text{ м}$ .

### Задача 4.3

На плоскую щель шириной 0,01 мм перпендикулярно к щели падает пучок монохроматического света с длиной волны 589 нм. Определите углы, под которыми на экране будут наблюдаться три первых дифракционных максимума.

*Дано:*

$$\begin{aligned} a &= 0,01 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м} \\ \lambda &= 589 \text{ нм} = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м} \\ m &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — ?

*Решение*

Условие наблюдения максимума освещенности при дифракции на щели имеет вид  $a \sin \varphi = m\lambda$ , где  $m$  — порядок дифракционного максимума.

Для максимума первого порядка  $m = 1$ , поэтому

$$\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{5,89 \cdot 10^{-7}}{10^{-5}} = 0,0589 \text{ и } \varphi_1 = 3^\circ 23'.$$

Для максимума второго порядка  $m = 2$ , поэтому

$$\sin \varphi_2 = \frac{2\lambda}{a} = \frac{2 \cdot 5,89 \cdot 10^{-7}}{10^{-5}} = 0,119 \text{ и } \varphi_2 = 6^\circ 50'.$$

Для максимума третьего порядка  $m = 3$

$$\sin \varphi_3 = \frac{3\lambda}{a} = \frac{3 \cdot 5,89 \cdot 10^{-7}}{10^{-5}} = 0,177 \text{ и } \varphi_3 = 10^\circ 12'.$$

*Ответ:*  $\varphi_1 = 3^\circ 23'$ ,  $\varphi_2 = 6^\circ 50'$ ,  $\varphi_3 = 10^\circ 12'$ .

### Задача 5.1

Определите наибольший порядок спектра, который может образовать дифракционная решетка, имеющая 500 штрихов на 1 мм, если длина волны падающего света равна 590 нм. Определите, какую наибольшую длину волны можно наблюдать в спектре этой решетки.

Дано:

$$N = 500 \text{ мм}^{-1} = 5 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$$

$$\lambda = 590 \text{ нм} = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$m_{\max}, \lambda_{\max} \text{ — ?}$$

Решение

Из формулы для определения положения максимума дифракционной решетки

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (1)$$

находим  $m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}$ .

Учтя, что  $d = \frac{1}{N}$ , преобразуем (1)

$$m = \frac{\sin \varphi}{\lambda N}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что при заданных  $\lambda$  и  $N$  наибольший порядок спектра  $m_{\max}$  можно наблюдать при наибольшем значении  $\sin \varphi_{\max} = 1$ , т. е.

$$m_{\max} = \frac{\sin \varphi_{\max}}{\lambda N} = \frac{1}{\lambda N};$$

$$m_{\max} = \frac{1}{5,9 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^5} \approx 3.$$

Наибольшая длина волны, которую можно наблюдать с помощью этой решетки

$$\lambda_{\max} = \frac{d \sin \varphi_{\max}}{m_{\max}} = \frac{1}{m_{\max} N};$$

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 10^5} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Ответ:  $m_{\max} = 3$ ;  $\lambda_{\max} = 6,67 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

### Задача 5.2

Показатель преломления для красного света в стекле равен 1,6444, для фиолетового — 1,6852. Определите разницу углов преломления в стекле данного сорта при угле падения  $80^\circ$ .

Дано:

$$n_{\text{к}} = 1,6444$$

$$n_{\text{ф}} = 1,6852$$

$$\alpha = 80^\circ$$

$$\Delta\beta \text{ — ?}$$

*Решение*

Угол преломления определяем из закона преломления света  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ , от-

сюда  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$ , угол  $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)$ .

Тогда для красного света  $\beta_{\text{к}} = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n_{\text{к}}}\right)$ ,  $\beta_{\text{к}} = \arcsin\left(\frac{\sin 80^\circ}{1,6444}\right) = 36^\circ 47'$ .

Для фиолетового света

$$\beta_{\text{ф}} = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n_{\text{ф}}}\right),$$

$$\beta_{\text{ф}} = \arcsin\left(\frac{\sin 80^\circ}{1,6852}\right) = 35^\circ 46'.$$

$$\Delta\beta = \beta_{\text{к}} - \beta_{\text{ф}},$$

$$\Delta\beta = 36^\circ 47' - 35^\circ 46' = 1^\circ 01'.$$

*Ответ:*  $\Delta\beta = 1^\circ 01'$ .

**Задача 5.3**

Естественный свет прошел через поляризатор и анализатор, при этом его интенсивность упала в 3 раза. Определите угол между плоскостями поляризатора и анализатора

*Дано:*

$$I_3 = \frac{1}{3} I_1$$

$\varphi = ?$

*Решение*

После прохождения поляризатора интенсивность света уменьшилась в два раза, если интенсивность естественного света была  $I_1$ , то после поляризатора интенсивность равна  $I_2 = \frac{1}{2} I_1$ .

После анализатора его интенсивность, согласно закону Малюса, определяется соотношением  $I_3 = I_2 \cos^2 \varphi$ , или  $I_3 = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 \varphi$ .

Согласно условию задачи  $I_3 = \frac{1}{3} I_1$ , т. е.  $\frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 \varphi$ .

Окончательно  $\varphi = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35^\circ 16'$ .

*Ответ:*  $\varphi \approx 35^\circ 16'$ .

### Задача 5.4

Определите, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы лучи, отраженные от поверхности озера, были максимально поляризованы.

Дано:

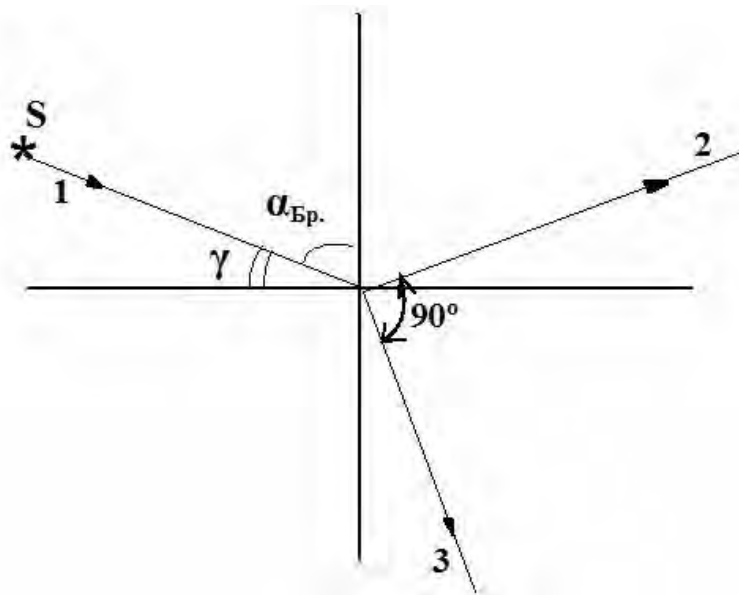
$$n_{21} = 1,33$$

$\gamma - ?$

#### Решение

Максимальная поляризация отраженного луча наблюдается при выполнении закона Брюстера:  $\operatorname{tg} \alpha_{\text{Бр}} = n_{21}$ .

Для определения угла  $\gamma$  делаем поясняющий рис.



Луч 2 полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, луч 3 частично поляризован в плоскости падения и  $\gamma = 90^\circ - \alpha_{\text{Бр}}$ . Тогда  $\alpha_{\text{Бр}} = \operatorname{arctg} n_{21}$ ,  $\alpha_{\text{Бр}} = \operatorname{arctg} 1,33 \approx 53^\circ$ , искомый угол  $\gamma = 90 - 53 = 37^\circ$ .

Ответ:  $\gamma = 37^\circ$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

15.12; 15.14; 15.17; 15.20; 16.13; 16.26; 16.28; 16.29; 16.38; 16.43; 16.67; 16.68.

## Лекция 6 ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

### 6.1. Атом водорода в квантовой механике

Решение задачи об энергетических уровнях электрона для атома водорода и водородоподобных систем: ионов гелия  $\text{He}^+$ , лития  $\text{Li}^{++}$  и других, — сводится к задаче о движении электрона в кулоновском поле ядра.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром зарядом  $Z/e$  (для атома водорода  $Z = 1$ )

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (6.1)$$

где  $r$  — расстояние между электроном и ядром.

Графически функция  $U(r)$  изображена кривой на рис. 6.1.

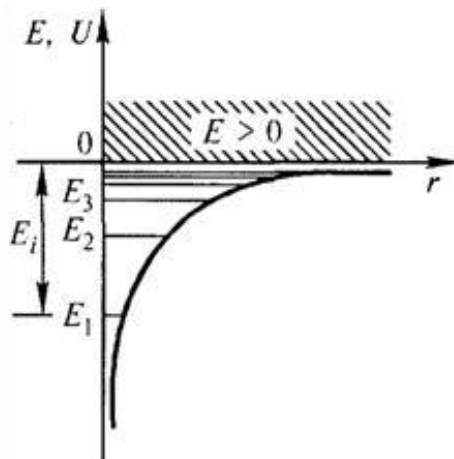


Рис. 6.1

Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией  $\psi$ , удовлетворяющей стационарному уравнению Шредингера, учитывающему (6.1)

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (6.2)$$

где  $m$  — масса электрона;  $E$  — полная энергия электрона в атоме.

В теории дифференциальных уравнений доказываем, что уравнения типа (6.2) имеют решения, удовлетворяющие требованиям однозначности, конечности и непрерывности волновой функции  $\psi$ , только при собственных значениях энергии

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Zme^4}{8h^2 \epsilon_0^2}, \quad (6.3)$$

где  $n$  — главное квантовое число,  $n = 1, 2, \dots$ , т. е. для дискретного набора отрицательных значений энергии.

Таким образом, как и в случае потенциальной «ямы» и гармонического осциллятора решение уравнения Шредингера для атома водорода приводит к появлению дискретных энергетических уровней. Возможные значения  $E_1, E_2, E_3, \dots$  показаны на рис. 6.1 в виде горизонтальных прямых. Самый нижний уровень  $E_1$ , отвечающий минимальной возможной энергии, — основной. Все остальные ( $E_n > E_1, n = 2, 3, \dots$ ) — возбужденные. При  $E < 0$  движение электрона является связанным — он находится внутри гиперболической потенциальной «ямы». По мере роста главного квантового числа  $n$  энергетические уровни располагаются теснее и при  $n = \infty, E_\infty = 0$ . При  $E > 0$  движение электрона является свободным, область непрерывного спектра  $E > 0$  соответствует ионизированному атому. Энергия ионизации атома водорода равна  $E_i = -E_1 \approx 13,55$  эВ.

Число  $n$ , полученное при нахождении величины  $E_n$  из уравнения Шредингера, есть то же самое главное квантовое число, что и в теории Бора. Однако квантовая механика, основанная на уравнении Шредингера, не рассматривает движение электрона по орбитам, как это происходит в теории Бора. Теперь электрон не есть некий заряженный шарик, который движется по орбитам вокруг ядра атома, а есть некое электронное облако вокруг ядра атома. Решение уравнения Шредингера показывает, что волновую функцию определяет набор квантовых чисел. Иногда в целях наглядности квантовым числам приписывают некий геометрический смысл, как числам, характеризующим электронное облако: его размер, форму, ориентацию в пространстве относительно заданной оси, например, заданного направления внешнего магнитного поля. Модельное представление в физике весьма удобно для разъяснения различных физических явлений без детализации, без более глубоких представлений о самом процессе. Поэтому можно воспользоваться наглядной моделью строения атома — векторной моделью.

**Векторной** — потому, что основные характеристики заданы векторами, определяющими моменты импульса микрочастиц, из которых состоит атом. Эти моменты выражаются в квантовой теории величиной  $\hbar$ , умноженной на некоторый коэффициент, связанный с квантовыми числами. Из всех возможных энергетических состояний через значения квантовых чисел выделяются стационарные состояния.

**Главное квантовое число  $n$**  определяет энергетические уровни электрона в атоме,  $n = 1, 2, \dots$ . Здесь и далее вводится следующий формализм. Считается, что принадлежность электронов к группе  $K$  соответствует  $n = 1$ , к группе  $L - n = 2$ , к группе  $M - n = 3$  и т. д. Говорят, что совокупность электронов с одинаковым значением  $n$  образует электронную оболочку.

**Орбитальное квантовое число  $l$**  определяет величину момента импульса электрона. Момент импульса электрона равен

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (6.4)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$ .

Основное или  $S$ -состояние определяется следующими параметрами:  $l = 0$ ;  $p - l = 1$ ;  $d - l = 2$ ;  $f - l = 3$  и т. д.

Для орбитального квантового числа существуют правила отбора (изменения)  $\Delta l = \pm 1$ . Говорят, что совокупность электронов с одинаковым  $l$  образует **электронную подоболочку**.

Числа  $n$  и  $l$  не могут выделить все стационарные состояния из всех возможных энергетических состояний. Так как движение электрона совершается в трехмерном пространстве, необходимо еще одно квантовое число, которое определяет положение электрона (еще одну степень свободы) — **магнитное квантовое число  $m_l$** , определяющее величину проекции момента импульса электрона на направление внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l, \quad (6.5)$$

где  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , всего  $(2l+1)$  значений.

Соответствующее правило отбора:  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ .

Знак величины  $m_l$  может изменяться, что показано на рис. 6.2.

Проекция  $L_{lz}$  может быть направлена по полю и против поля.

В квантовой механике вводится понятие вырождения: различному набору квантовых чисел соответствует одна и та же энергия. Атом водорода имеет один электрон:  $n = 1, l = m_e = 0$  — только одно состояние. Для  $n = 2$  возможны состояния, определяемые различными состояниями квантовых чисел:  $l = 1, m_e = 0, \pm 1$  — всего четыре состояния — вырождение будет четырехкратным.

Движение электрона можно представить в пространстве, как движение по поверхности сферы. Сферические координаты точки описывают ее положение радиус-вектором, проведенным из центра сферы к точке, и углами  $\varphi$  и  $\theta$ . Вырождение связано с эквивалентностью движений электрона, связанных с углами  $\varphi$  и  $\theta$ .

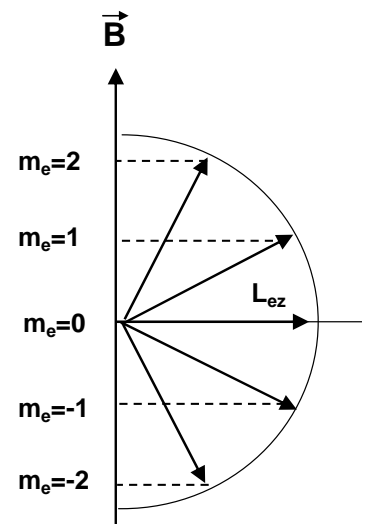


Рис. 6.2



Во внешнем магнитном поле такая эквивалентность исчезает, движения вдоль или перпендикулярно вектору  $\vec{B}$  станут различными — вместо одного уровня будет наблюдаться ряд близко расположенных подуровней энергии. В этом случае вырождение снимается.

Необходимо учесть еще одну квантовую характеристику электрона. Различные экспериментальные факты свидетельствуют о том, что электрон обладает собственным моментом импульса величиной

$$L_s = \hbar \sqrt{S(S+1)}, \quad (6.6)$$

где  $S$  — спиновое квантовое число;  $S = \frac{1}{2}$ .

Проекция  $L_s$  на направление внешнего магнитного поля

$$L_{s,z} = \hbar m_s, \quad (6.7)$$

где  $m_s = \pm \frac{1}{2}$  — магнитное спиновое квантовое число.

Вектор  $\vec{L}_s$  может принимать  $2S + 1$  ориентаций. Спину электрона соответствует собственный магнитный момент; спин микрочастиц — внутреннее свойство микрочастиц, не имеющее аналога в классической механике.

Итак, состояние электрона в атоме характеризуется набором четырех квантовых чисел:  $n, l, m_l, m_s$ . При этом соблюдается *принцип запрета Паули*: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел.

Векторная модель атома прекрасно используется для объяснения экспериментальных данных по спектрам различных элементов, периодической системы Менделеева и т. д. На самом деле векторная модель искусственно сочетает классическую механику с принципом квантования, поэтому такая модель есть не физическая модель атома, а удобный формальный прием, позволяющий объяснить многие наблюдаемые явления.

## 6.2. Строение многоэлектронных атомов и периодический закон Менделеева

В многоэлектронном атоме каждый электрон находится в одном из разрешенных состояний, которое характеризуется определенными значениями квантовых чисел  $n, l, m_l, m_s$  — принцип запрета Паули. При распределении электронов по состояниям существует некоторая периодичность, поэтому известно, что физические и химические свойства атома подчиняются периодическому закону Менделеева, а эти свойства как раз и определяются характером распределения электронов атома по различным состояниям. Необходимо иметь в виду два важных принципа, которым подчиняется поведение электронов.

**Первый принцип** состоит в том, что при прочих равных условиях, электрон находится в том состоянии, в котором его энергия минимальна.

**Второй принцип** — это принцип запрета Паули о невозможности нахождения двух электронов (в атоме, молекуле, кристалле) в одинаковом состоянии.

На основе этих двух принципов можно установить связь между распределением электронов в атоме по энергетическим состояниям и положение атома в периодической системе.

Первый элемент в периодической системе — водород, в котором один электрон. Согласно принципу минимальной энергии его главное квантовое число  $n = 1$ . Так как орбитальное квантовое число  $l$  может принимать значения  $0 \dots n - 1$ , то для этого электрона возможно лишь одно значение  $l = 0$ . Магнитное квантовое число  $m_l$  может иметь только одно значение, равное 0, а спиновое квантовое число — произвольное значение:  $+\frac{1}{2}$  или  $-\frac{1}{2}$ . Согласно общепринятой записи, состояние единственного электрона в атоме водорода обозначается  $1S$ .

В следующем атоме гелия два электрона, оба находятся в состоянии  $1S$ , но согласно принципу Паули, их спиновые квантовые числа различны:  $+\frac{1}{2}$  и  $-\frac{1}{2}$ .

Если изобразить положительный спин стрелкой, направленной вверх, а отрицательный — вниз, то можно представить состояние атомов H и He, как показано на рис. 6.3.

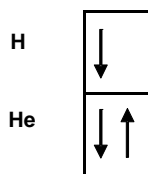


Рис. 6.3

Атом Li имеет три электрона, два из них находятся в состоянии  $1S$ , с различными спинами, а третий в этом состоянии, согласно принципу Паули, находиться уже не может. Очевидно, что его энергия должна быть более высокой. Она попадает в состояние  $2S$ .

Атом Be имеет уже четыре электрона. Два из них находятся в состоянии  $1S$  с различными спинами, два в состоянии  $2S$ , но с противоположными спинами (рис. 6.4).

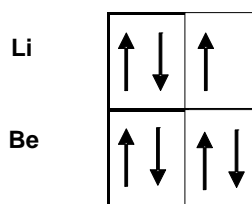


Рис. 6.4

В атоме В пять электронов. Четыре первые распределяются по энергетическим состояниям так же, как четыре электрона в атоме Ве, т. е. занимают состояния  $1S$  и  $2S$ . Пятый уже не может находиться ни в одном из этих состояний — это запрещено принципом Паули. Однако при главном квантовом числе  $n = 2$ , орбитальное квантовое число  $l$  может иметь не только нулевое значение, но и значение, равное 1. При  $l=0$  число  $m_l=0$ ; при  $l=1$   $m_l = -1, 0, +1$ . Соответственно состояние с  $n = 2, l=1$ , т. е.  $2p$  — состоянию соответствуют уже три клеточки, в каждой из которых может поместиться по два электрона с противоположными спинами (рис. 6.5).

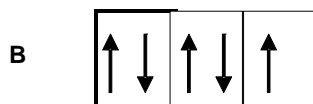


Рис. 6.5

Распределение максимального числа электронов по электронным оболочкам и подоболочкам можно представить в виде табл. 6.1

Таблица 6.1

$n \backslash l$		0	1	2	3	4	Минимальное число электронов $N_{\max} = 2n^2$
		$S$	$p$	$d$	$f$	$g$	
1	$K$	2	—	—	—	—	2
2	$L$	2	6	—	—	—	8
3	$M$	2	6	10	—	—	18
4	$N$	2	6	10	14	—	32
5	$O$	2	6	10	14	18	50

Периодическая система элементов Менделеева построена по принципу периодов и групп. Использование электронной конфигурации атома приводит к следующим выводам:

1. Порядковый (атомный) номер элемента показывает общее число электронов в атоме и, следовательно, заряд ядра.
2. Номер периода, к которому относится элемент, показывает число электронных оболочек.
3. Номер группы, занимаемый элементом, определяет число электронов во внешнем слое — валентных электронов.

### 6.3. Молекулярные спектры

**Молекула** — наименьшая частица вещества, состоящая из одинаковых или различных атомов, соединенных между собой химическими связями и являющаяся носителем его основных физических и химических свойств.

Молекула является квантовой системой, она описывается уравнением Шредингера, учитывающим движение электронов в молекуле, колебания атомов, молекул, вращение молекул.

Энергия изолированной молекулы

$$E \approx E_{\text{эл}} + E_{\text{кол}} + E_{\text{вр}}, \quad (6.8)$$

где  $E_{\text{эл}}$  — энергия колебания электронов относительно ядер;  $E_{\text{кол}}$  — энергия колебаний ядер, в результате которых периодически изменяется относительное положение ядер;  $E_{\text{вр}}$  — энергия вращения ядер, в результате которых периодически изменяется ориентация молекулы в пространстве.

Отношения  $E_{\text{эл}} : E_{\text{кол}} : E_{\text{вр}} = 1 : \sqrt{\frac{m}{M}} : \frac{m}{M}$ , где  $m$  — масса электрона,  $M$  — величина, имеющая порядок массы ядер атомов в молекуле,  $\frac{m}{M} \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$ , поэтому  $E_{\text{эл}} \gg E_{\text{кол}} \gg E_{\text{вр}}$ . Рассчитано, что  $E_{\text{эл}} \approx 1 \dots 10$  эВ;  $E_{\text{кол}} \approx 10^{-3} \dots 10^{-2}$  эВ;  $E_{\text{вр}} \approx 10^{-5} \dots 10^{-3}$  эВ.

Каждая из входящих в выражение (6.8) энергий квантуется. При переходе из одного энергетического состояния в другое поглощается или испускается энергия  $\Delta E = h\nu$ . При таких переходах одновременно изменяется энергия движения электронов, энергия колебаний и вращения. Из теории и эксперимента следует, что расстояние между вращательными уровнями  $\Delta E_{\text{вр}}$  гораздо меньше расстояния между колебательными уровнями  $\Delta E_{\text{кол}}$ , которое в свою очередь меньше расстояния между электронными уровнями  $\Delta E_{\text{эл}}$ . На рис. 6.6 показана структура энергетических уровней молекул, определяющая спектр излучения, возникающий при квантовых переходах между соответствующими энергетическими уровнями.

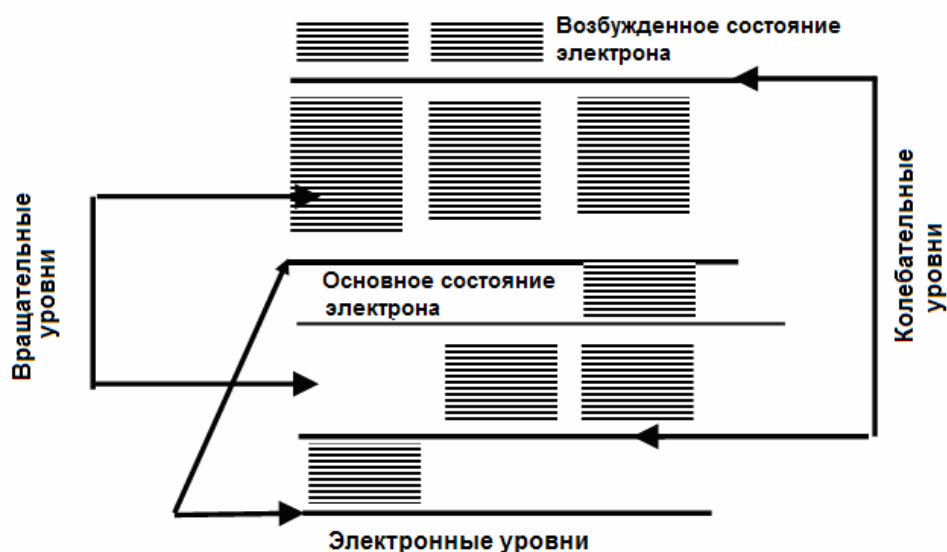


Рис. 6.6

При различных типах переходов между уровнями возникают различные типы молекулярных спектров. Частоты спектральных линий, испускаемых молекулами, могут соответствовать переходам с одного электронного уровня на другой (электронный спектр) или с одного колебательного (вращательного) на другой колебательный (вращательные спектры). Кроме того, возможны переходы с одними значениями  $E_{\text{кол}}$  и  $E_{\text{вр}}$  на уровни, имеющие другие значения всех трех компонентов, в результате чего возникают электронно-колебательные и колебательно-вращательные спектры. Поэтому спектр молекул довольно сложный.

Структура молекулярных спектров различна для различных молекул и с увеличением числа атомов в молекуле усложняется. Колебательными и вращательными спектрами обладают только многоатомные молекулы, а двухатомные их не имеют.

Молекулярные спектры применяются для исследования строения и свойств молекул, используются в молекулярном спектральном анализе, лазерной и квантовой электронике.

#### 6.4. Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучение. Оптические квантовые генераторы (лазеры)

Атомы могут находиться лишь в квантовых состояниях с дискретными значениями энергии  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . Для простоты рассмотрения можно ограничиться двумя состояниями (1 и 2) с энергией  $E_1$  и  $E_2$ . Если атом находится в состоянии 1, то под действием внешнего излучения может перейти в возбужденное состояние 2 (рис. 6.7, а).

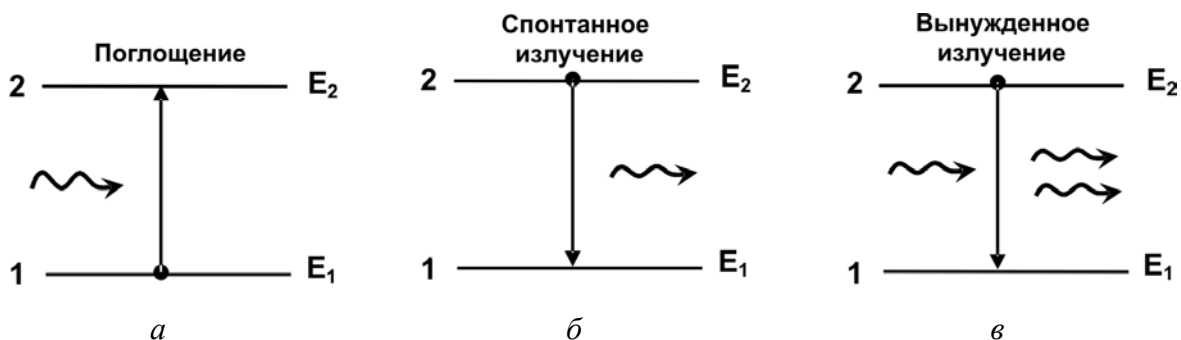


Рис. 6.7

Вероятность подобных переходов пропорциональна плотности излучения, вызывающего эти переходы.

Атом, находясь в возбужденном состоянии, может через некоторый промежуток времени спонтанно, без каких-либо внешних воздействий, перейти в состояние с низшей энергией (уровень 1), отдавая избыточную энергию в виде электромагнитного излучения (испуская фотон с энергией  $h\nu = E_2 - E_1$ ). Процесс испускания фотона возбужденным атомом без каких-либо внешних воздействий называется **спонтанным** или **самопроизвольным**. Так как спонтанные переходы не связаны, то и спонтанное излучение некогерентно.

В 1916 г. Эйнштейн для объяснения наблюдавшегося на опыте термодинамического равновесия между веществом и испускаемым и поглощаемым излучением постулировал, что помимо поглощения и спонтанного излучения должен существовать третий тип взаимодействия. Если на атом, находящийся в возбужденном состоянии 2, действует внешнее излучение с частотой, удовлетворяющей условию  $h\nu = E_2 - E_1$ , то возникает вынужденный (индуцированный) переход в состояние 1 с излучением фотона той же энергии  $h\nu = E_2 - E_1$  (рис. 6.7, в). При подобном переходе происходит излучение фотона дополнительно к тому фотону, под действием которого произошел этот переход. Возникающее в результате таких переходов излучение называется вынужденным (индуцированным) излучением. Существенно, что вторичные фотоны неотличимы от первичных.

Испускаемые фотоны, двигаясь в одном направлении и встречая другие возбужденные атомы, стимулируют дальнейшие индуцированные переходы, и число фотонов растет лавинообразно. Однако, наряду с вынужденным излучением, возможен и конкурирующий процесс — поглощение. Поэтому для усиления падающего излучения необходимо создать состояние с инверсной (обратной) населенностью. Процесс создания инверсного состояния вещества называется **накачкой**. Накачку можно осуществить оптическими, электрическими и другими способами.

Практически инверсное состояние среды осуществлено в принципиально новых источниках излучения — **оптических квантовых генераторах (ОКГ)**, или лазерах.

Лазер имеет три основных компонента (рис. 6.8):

- 1) активная среда, в которой создаются состояния с инверсной населенностью;
- 2) система накачки — устройство для создания инверсии в активной среде;
- 3) оптический резонатор — устройство, выделяющее в пространство избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок.

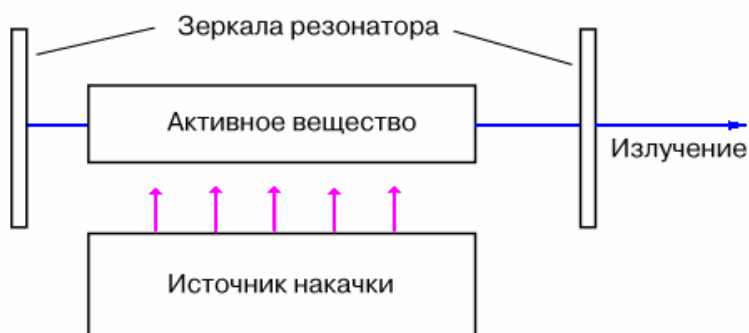


Рис. 6.8

Первым твердотельным лазером (1960, США), работающим в видимой области спектра (длина волны излучения 0,6943 мкм), был рубиновый лазер. В нем инверсная населенность уровней осуществлялась по трехуровневой

схеме. Для оптической накачки использовалась импульсная газоразрядная лампа. При интенсивном облучении рубина (оксид алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , в кристаллической решетке которого некоторые из атомов  $\text{Al}$  заменены трехвалентными ионами хрома  $\text{Cr}^{3+}$ ) атомы хрома переходят с нижнего уровня 1 на уровень широкой полосы 3 (рис. 6.9).

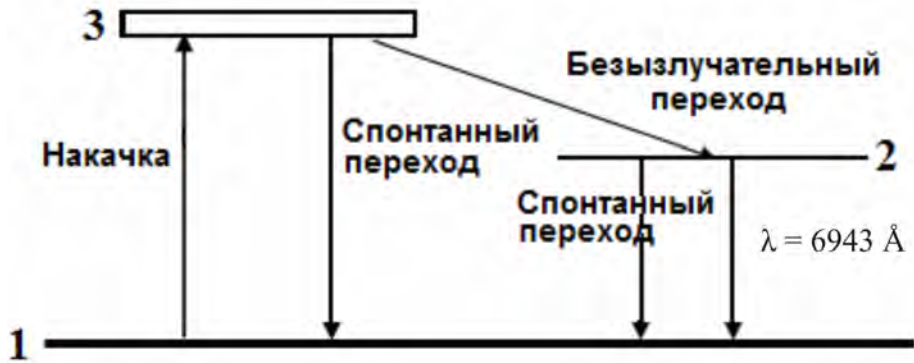


Рис. 6.9

Так как время жизни атома хрома в возбужденном состоянии мало (меньше  $10^{-7}$  с), то осуществляются либо спонтанные переходы  $3 \rightarrow 1$  (они незначительны), либо наиболее вероятны безызлучательные переходы на уровень 2 (он называется **метастабильным**), с передачей энергии решетке кристалла рубина. Переход  $2 \rightarrow 1$  запрещен правилами отбора, поэтому длительность возбужденного состояния 2 атомов хрома порядка  $10^{-3}$  с. Это приводит к «накоплению» атомов хрома на уровне 2. При достаточной мощности накачки их концентрация на уровне 2 будет гораздо больше, чем на уровне 1, т. е. возникает среда с инверсной населенностью уровня 2. Каждый фотон, случайно родившийся при спонтанных переходах, может вызвать лавину вторичных фотонов, но это излучение не обладает высокими когерентными свойствами.

Для выделения направления генерации используется принципиально важный элемент лазера — **оптический резонатор**: в простейшем случае это пара зеркал, обращенных друг к другу параллельно на общей оптической оси, между которыми помещается активная среда. Фотоны, движущиеся под углами, выходят из активной среды через ее боковую поверхность. Фотоны, движущиеся вдоль оси, многократно отражаются от противоположных зеркал, каждый раз вызывая вынужденное испускание вторичных фотонов, которые в свою очередь вызывают вынужденное излучение.

Лазерное излучение обладает следующими основными свойствами:

- 1) высокая временная и пространственная когерентность. Время когерентности составляет  $10^{-3}$  с, что соответствует длине когерентности порядка  $10^5$  м, т. е. на семь порядков выше, чем для обычного источника света;
- 2) строгая монохроматичность ( $\Delta\lambda < \pm 10^{-11}$  м);
- 3) большая плотность потока энергии;
- 4) очень малое угловое расхождение.

КПД лазера колеблется в широких пределах: 0,01 % (гелий-неоновый лазер) до 75 % (для лазера на стекле с неодимом), хотя у большинства лазеров КПД составляет 0,1...1 %.

#### **Вопросы для самостоятельного рассмотрения**

1. 1S-состояние электрона в атоме водорода.
2. Атом водорода и водородоподобные атомы (ионы с одним электроном) по Бору. Постулаты Бора.
3. Линейчатый спектр излучения атома водорода — формирование серий Лаймана, Бальмера, Пашена, Брэкета, Пфунда и Хэмфри. Формула Бальмера.
4. Рентгеновские спектры.
5. Явление комбинационного рассеяния света.
6. Принцип действия и устройство гелий-неонового лазера.
7. Голография.



## Практическое занятие 6 КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА ИЗЛУЧЕНИЯ

### Основные законы и формулы

1. Закон Кирхгофа для теплового излучения

$$r_{\nu, T} = \frac{R_{\nu, T}}{A_{\nu, T}},$$

где  $r_{\nu, T}$  — спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела;  $R_{\nu, T}$  — спектральная плотность энергетической светимости любого тела;  $A_{\nu, T}$  — спектральная поглощательная способность любого тела.

2. Энергетическая светимость абсолютно черного тела

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu.$$

3. Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4,$$

где  $R_e$  — энергетическая светимость абсолютно черного тела;  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $\approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ;  $T$  — термодинамическая температура.

4. Первый закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где  $\lambda_{\max}$  — длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\nu, T}$  абсолютно черного тела;  $b$  — первая постоянная Вина,  $\approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

5. Второй закон смещения Вина

$$r_{\lambda_{\max}} = CT^5,$$

где  $r_{\lambda_{\max}}$  — максимальная спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела;  $C$  — вторая постоянная Вина,  $\approx 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

6. Формула Релея — Джинса (для больших длин волн:  $\lambda \rightarrow \infty$ )

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

где  $r_{\nu,T}$  — спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела;  $\nu$  — собственная частота колебаний осциллятора;  $c$  — скорость света в вакууме  $\approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}}$ ;  $kT$  — средняя энергия осциллятора,  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ .

7. Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{kT} - 1},$$

где  $h\nu$  — энергия кванта;  $h \approx 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  — постоянная Планка.

8. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{m\nu^2}{2},$$

где  $h\nu$  — энергия кванта;  $A$  — работа выхода электрона из металла;  $m$  — масса электрона;  $\nu$  — скорость электрона.

9. Энергия фотона

$$\varepsilon_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где  $\nu$  — частота фотона;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\lambda$  — длина волны фотона.

10. Масса фотона

$$m_{\phi} = \frac{\varepsilon_{\phi}}{c^2}.$$

11. Импульс фотона

$$p_{\phi} = \frac{\varepsilon_{\phi}}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

12. Давление света при его нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = \omega(1 + \rho),$$

где  $E_e$  — энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности;  $\omega$  — объемная плотность энергии излучения;  $\rho$  — коэффициент отражения.

### 13. Изменение длины волны при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ ;  $\lambda$  и  $\lambda'$  — длина волны, падающего и рассеянного фотонов соответственно;  $m_0$  — масса покоя электрона;  $\theta$  — угол рассеяния;  $\lambda_k$  — длина волны Комптона,  $\lambda_k = \frac{h}{m_0c}$ .

#### Примеры решения задач

##### Задача 6.1

Определите, во сколько раз увеличится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения передвигается от красной границы видимого спектра ( $\lambda_{кр} = 0,76$  мкм) к его фиолетовой границе ( $\lambda_{ф} = 0,38$  мкм).

Дано:

$$\lambda_{кр} = 0,76 \text{ мкм} = 7,6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\lambda_{ф} = 0,38 \text{ мкм} = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$n = \frac{\Phi_{эф}}{\Phi_{екр}} \text{ — ?}$$

Решение

Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, определяется из первого закона смещения Вина

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}. \quad (1)$$

Из (1) определим температуру, соответствующую красной ( $T_{кр}$ ) и фиолетовой ( $T_{ф}$ ) границам видимой области спектра

$$T_{кр} = \frac{b}{\lambda_{кр}};$$

$$T_{ф} = \frac{b}{\lambda_{ф}}. \quad (2)$$

Поток излучения абсолютно черного тела

$$\Phi_e = R_e S,$$

где  $R_e$  — энергетическая светимость;  $S$  — площадь поверхности тела.

В соответствии с законом Стефана — Больцмана  $R_e = \sigma T^4$ . Таким образом,

$$\Phi_{екр} = \sigma T_{кр}^4 S; \quad \Phi_{эф} = \sigma T_{ф}^4 S. \quad (3)$$

Находим отношение  $n = \frac{\Phi_{\text{эф}}}{\Phi_{\text{екр}}}$  и, учитывая (2), определяем  $n$ :

$$n = \frac{\sigma S \frac{b^4}{\lambda_{\phi}^4}}{\sigma S \frac{b^4}{\lambda_{\text{кр}}^4}} = \left( \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\phi}} \right)^4; \quad n = \left( \frac{7,6 \cdot 10^{-7}}{3,8 \cdot 10^{-7}} \right)^4 = 2^4 = 16.$$

*Ответ:* поток излучения увеличится в 16 раз.

### Задача 6.2

Определите длину волны света, вызывающего фотоэффект в цезии, если известно, что максимальная скорость фотоэлектронов равна  $2 \cdot 10^6$  м/с.

*Дано:*

$$v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$\lambda$  — ?

*Решение*

Уравнение, описывающее явление внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Для длины электромагнитной волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим  $\lambda = \frac{hc}{A + \frac{mv^2}{2}}$ .

Работу выхода электрона из цезия найдем из справочника

$$A = 2,88 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

$$\lambda \approx \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2,88 \cdot 10^{-19} + \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (2 \cdot 10^6)^2}{2}} \approx 94,4 \cdot 10^{-9} \text{ (м)} \approx 94,4 \text{ нм.}$$

*Ответ:*  $\lambda \approx 94,4$  нм.

### Задача 6.3

Давление монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм на абсолютно черную поверхность равно  $10^{-7}$  Па. Определите число фотонов, падающих каждую секунду на  $1 \text{ м}^2$  этой поверхности.

<p>Дано:</p> $p = 10^{-7} \text{ Па}$ $\lambda = 0,6 \text{ мкм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $t = 1 \text{ с}$ $S = 1 \text{ м}^2$
$N — ?$

*Решение*

Давление света определим из формулы

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho),$$

где  $E_e$  — энергия всех фотонов, падающих на единицу площади;  $\rho$  — коэффициент отражения.

$$E_e = \frac{N h \nu}{S}.$$

Для абсолютно черной поверхности  $\rho = 0$ , поэтому

$$p = \frac{N h \nu}{c S}.$$

Учтя, что  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  определим  $N$ ,

$$N = \frac{p \lambda S}{h}.$$

Подставляя данные, получим

$$N \approx \frac{10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{6,62 \cdot 10^{-34}} \approx 9,05 \cdot 10^{19}.$$

Ответ:  $N \approx 9,05 \cdot 10^{19}$ .

#### Задача 6.4

Определите изменение длины рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии под углом  $60^\circ$ , если длина волны Комптона  $\approx 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ .

<p>Дано:</p> $\theta = 60^\circ$ $\lambda_k \approx 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
$\Delta\lambda — ?$

*Решение*

При рассеянии рентгеновского фотона на электронах (эффект Комптона) происходит увеличение длины волны излучения на величину

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где  $m_0$  — масса покоя электрона;  $\theta$  — угол между направлением первичного и рассеянного фотонов;

$$\lambda_{\kappa} = \frac{h}{m_0 c}.$$

Поэтому  $\Delta\lambda = 2\lambda_{\kappa} \sin^2 \frac{\theta}{2}$ .

Подставляя данные, получим

$$\Delta\lambda \approx 2 \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \sin^2 \left( \frac{60^\circ}{2} \right) \approx 1,21 \cdot 10^{-12} (\text{м}) \approx 1,21 \text{ пм.}$$

*Ответ:*  $\Delta\lambda \approx 1,21 \text{ пм.}$

### **Задачи для самостоятельного решения**

18.9; 18.10; 18.21; 19.2; 19.11; 19.25.

## Лекция 7 ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

### 7.1. Основные составляющие атомного ядра. Энергия связи ядра

**Ядерная физика** — раздел, в котором изучаются структура и свойства атомных ядер. Ядерная физика исследует взаимопревращения атомных ядер, происходящие как в результате радиоактивных распадов, так и в результате различных ядерных реакций. Основная ее задача связана с выяснением природы ядерных сил, действующих между нуклонами, и особенностей движения нуклонов в ядрах.

Атомное ядро состоит из элементарных частиц — **протонов** и **нейтронов** (или **нуклонов**). Протон имеет положительный заряд, равный заряду электрона, а нейтрон — нейтральная частица.

Атомные ядра характеризуются зарядом  $Z/e$ , где  $Z$  — зарядовое число ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов Менделеева. В настоящее время известно 107 элементов таблицы Менделеева.

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом:  ${}^A_Z X$ , где  $X$  — символ химического элемента,  $Z$  — атомный номер,  $A$  — массовое число (число нуклонов в ядре).

Так как атом нейтрален, то заряд ядра определяет и число электронов в атоме, от которого, в свою очередь, зависят химические свойства атома. Следовательно, заряд ядра определяет специфику данного химического элемента, т. е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию их электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Ядра с одинаковыми  $Z$ , но разными  $A$  (разными числами нейтронов  $N = A - Z$ ) называются **изотопами**, а ядра с одинаковыми  $A$ , но разными  $Z$  — **изобарами**. Например, водород имеет три изотопа:  ${}^1_1H$  — протий ( $N = 0$ );  ${}^2_1H$  — дейтерий ( $N = 1$ );  ${}^3_1H$  — тритий ( $N = 2$ ), олово — десять и т. д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами (исключение составляют, например, изотопы водорода). В настоящее время известно более 2500 ядер, отличающихся либо  $Z$ , либо тем и другим.

**Радиус ядра** задается эмпирической формулой

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}, \quad (7.1)$$

где  $R_0 \approx (1,3...1,7) \cdot 10^{-15}$  м.

Однако при употреблении этого понятия необходимо соблюдать осторожность из-за его неоднозначности, например, из-за размытости границ ядра. Из (7.1) вытекает, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества одинакова для всех ядер:  $\approx 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>.

Атомы ядра являются устойчивыми образованиями.

Массу ядер очень точно можно определить с помощью масс-спектрометров. Измерения показывают, что масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих нуклонов. Но любому изменению массы должно соответствовать изменение энергии. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны без сообщения им кинетической энергии, называется **энергией связи**.

Энергия связи нуклонов в ядре можно определить из формулы

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2, \quad (7.2)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$ , — соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводится не масса ядер  $m_{\text{я}}$ , а масса атомов  $m$ . Поэтому для энергии связи ядра пользуются формулой

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2, \quad (7.3)$$

где  $m_{\text{H}}$  — масса атома водорода. Так как  $m_{\text{H}}$  больше массы  $m_p$  на величину  $m_e$ , то первый член в квадратных скобках включает в себя массу  $Z$  электронов. Но так как масса атомов  $m$  отличается от массы ядра  $m_{\text{я}}$ , как раз на массу  $Z$  электронов, то вычисления по (7.2) и (7.3) приводят к одинаковым результатам.

Величина

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}} \quad (7.4)$$

называется **дефектом массы ядра**. На эту величину изменяется масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

Часто вместо энергии связи рассматривают **удельную энергию связи**  $\delta E_{\text{св}}$  — энергию связи, отнесенную к одному нуклону. Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер, т. е. чем больше  $\delta E_{\text{св}}$ , тем устойчивее ядро. Удельная энергия связи зависит от массового числа  $A$  элемента. Для масс ядер ( $A \leq 12$ ) удельная энергия связи возрастает до 6...7 МэВ/нуклон, претерпевая целый ряд скачков (например, для  ${}^2_1\text{H}$   $\delta E_{\text{св}} = 1,1$  МэВ/нуклон; для  ${}^4_2\text{He}$  — 7,1 МэВ/нуклон;  ${}^6_3\text{Li}$  — 5,3 МэВ/нуклон), затем более медленно



возрастает до максимальной величины 8,7 МэВ/нуклон у элементов с  $A = 50 \dots 60$ , далее постепенно уменьшается у тяжелых элементов (например, для  ${}^{238}_{92}\text{U}$  она составляет 7,6 МэВ/нуклон).

Уменьшение энергии связи у тяжелых элементов объясняется тем, что с возрастанием числа протонов в ядре увеличивается и энергия их кулоновского отталкивания. Поэтому связь между нуклонами становится менее сильной, а сами ядра менее прочными.

Наиболее устойчивыми оказываются так называемые магические ядра, у которых число протонов или нейтронов равно одному из магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особенно стабильны дважды магические ядра, у которых магическими являются число протонов и число нейтронов:  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ .

Наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы:

- 1) деление тяжелых ядер на более легкие — **реакции деления**;
- 2) синтез легких ядер в более тяжелые — **термоядерные реакции**.

Прочная связь ядерных частиц не может быть объяснена силами тяготения, которая в атомах ничтожно мала. Кулоновские силы, действующие между электрически заряженными протонами, являются силами отталкивания. Силы притяжения принципиально иной природы, чем силы тяготения или кулоновские, получили название **ядерных сил**. Они действуют между любыми нуклонами. Ядерные силы короткодействующие, они заметно проявляются на расстоянии около  $10^{-15}$  м, превосходя примерно в 100 раз силы электрического взаимодействия.

Наиболее важными являются следующие особенности ядерных сил:

- 1) короткодействие;
- 2) зарядовая независимость — не зависят от зарядов нуклонов;
- 3) насыщенность — каждый нуклон взаимодействует с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов;
- 4) обменный характер — взаимодействие осуществляется посредством частицы-посредника;
- 5) нецентральность, т. е. они не действуют вдоль прямой, соединяющей центры взаимодействия частиц;
- б) зависимость от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов;
- 7) взаимное притяжение.

Сложный характер ядерных сил и трудность точного решения уравнений движения всех нуклонов ядра не позволили до настоящего времени разработать единую последовательную теорию ядра. Поэтому рассматривают ядерные модели, в которых ядро заменяется некоей модельной системой, довольно хорошо описывающей только определенные свойства ядра и допускающей более или менее простую математическую трактовку. Из большого

числа моделей, каждая из которых обязательно использует подобранные произвольные параметры, согласующиеся с экспериментом, рассмотрим две: капельную и оболочечную.

Капельная модель является исторически первой. Она основана на аналогии между поведением нуклонов в ядре и молекул в капле жидкости. Капельная модель ядра позволила получить полуэмпирическую формулу для энергии связи нуклонов в ядре, объяснила механизм ядерных реакций и особенно реакции деления ядер. Однако эта модель не смогла, например, объяснить повышенную устойчивость ядер, содержащих магические числа протонов и нейтронов.

Оболочечная модель предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней. Считается, что ядра с полностью заполненными оболочками являются наиболее устойчивыми.

Оболочечная модель ядра позволила объяснить спины и магнитные моменты ядер, различную устойчивость ядер, а также периодичность изменения их свойств. Эта модель особенно хорошо применима для описания легких и средних ядер, а также ядер, находящихся в основном (невозбужденном) состоянии.

## 7.2. Радиоактивное излучение и его виды

**Радиоактивность** — самопроизвольное превращение одних ядер в другие, сопровождаемое испусканием различных частиц.

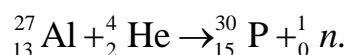
Различают естественную и искусственную радиоактивность.

**Естественной** называют радиоактивность, наблюдающуюся у существующих в природе неустойчивых изотопов.

Такая радиоактивность наблюдается у ядер химических элементов, расположенных в периодической системе элементов за свинцом и у небольшого количества легких ядер, расположенных в ее средней части.

**Искусственной** называют радиоактивность изотопов, полученных в результате ядерных реакций.

Искусственная радиоактивность была открыта в 1934 г. Ирен и Фредериком Жолио-Кюри. Из общего числа (около 2000) известных в настоящее время радионуклидов (атомы радиоактивных веществ) около 30 природные, остальные получены искусственным путем. Пример искусственной радиоактивности — облучение  $\alpha$ -частицами ядер алюминия. В результате такой бомбардировки образуется радиоактивный изотоп фосфора



Явление радиоактивности было открыто Беккерелем в 1896 г. Изучая это явление М. Склодовская-Кюри и П. Кюри в 1889 г. открыли радиоактивные элементы полоний и радий. Годом позже Резерфорд обнаружил в радиоактивном излучении две составляющие, названные  $\alpha$ - и  $\beta$ -лучами. Позже была

обнаружена и третья составляющая:  $\gamma$ -лучи, представляющие электромагнитные волны, длина которых меньше, чем у рентгеновских лучей. Энергия  $\gamma$ -квантов составляет от 10 кэВ до нескольких МэВ.

В 1930 г. Резерфорд и Содди показали, что радиоактивность сопровождается превращением одного химического элемента в другой, например, радия в радон.

Явление радиоактивности всегда сопровождается выделением энергии. На радиоактивность не оказывают влияния внешние воздействия: электрические и магнитные поля, нагревание, давление, агрегатное состояние и т. д.

Все три вида излучения сильно отличаются друг от друга по проникающей способности, т. е. по интенсивности поглощения различными веществами. Наибольшей проникающей способностью обладает  $\gamma$ -излучение.

Наличие электрического заряда следует из различных траекторий  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -излучения в магнитном и электрическом полях. В магнитном поле (рис. 7.1)  $\gamma$ -излучение не отклоняется,  $\alpha$ - и  $\beta$ -излучение отклоняются в противоположные стороны, причем  $\beta$ -излучение отклоняется сильнее, чем  $\alpha$ -излучение.

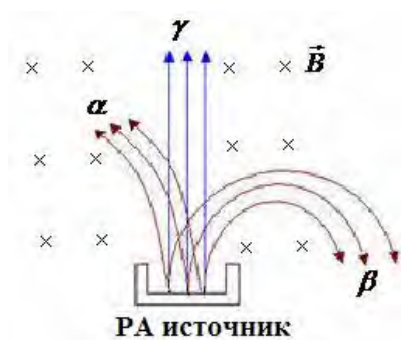


Рис. 7.1

Если  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения пересекают электрическое поле, то  $\beta$ -частицы испытывают отклонение в сторону положительной пластины конденсатора,  $\alpha$ -отрицательной пластины,  $\gamma$ -излучение отклонения не испытывает, так как  $\gamma$ -квант не обладает электрическим зарядом.

Установлено, что  $\alpha$ -частицы (ядро атома гелия) имеют положительный заряд, равный двум элементарным зарядам. Заряд  $\beta$ -частицы (электрон) равен одному элементарному отрицательному заряду.

### Особенности $\alpha$ -распада:

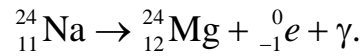
- 1) наблюдается только для тяжелых ядер;
- 2) период полураспада составляет  $10^{-6} \dots 10^{17}$  лет;
- 3) период полураспада зависит от энергии вылетающих  $\alpha$ -частиц. Период полураспада тем больше, чем меньше энергия  $\alpha$ -частиц;
- 4)  $\alpha$ -частицы, вылетающие из ядер одного и того же вещества, имеют одну и ту же энергию 2...9 МэВ.

$\alpha$ -распад тяжелых ядер обусловлен тем, что  $\alpha$ -частица при ее рождении из нуклонов получает дополнительную энергию и ей легче покинуть ядро.

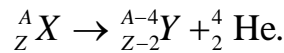
Изучение  $\beta$ -распада показало, что он сопровождается появлением частицы, уносящей часть энергии и импульса. Эта частица, предсказанная Паули, была названа Ферми *нейтрино*. Участие нейтрино в  $\beta$ -распаде обеспечивает выполнение закона сохранения энергии и импульса. Нейтрино — нейтральная частица чрезвычайно слабо взаимодействующая с веществом. Экспериментально установлено, что существует два типа нейтрино: нейтрино  $\nu$  и антинейтрино  $\bar{\nu}$ .

Ядро атома, как и атом, может находиться как в основном энергетическом состоянии, так и в возбужденном. Переход ядра в возбужденное состояние

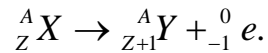
можно вызвать, например, бомбардировкой  $\alpha$ -частицами или фотонами. Возвращаясь в основное энергетическое состояние, ядро испускает  $\gamma$ -квант. Испускание  $\gamma$ -кванта не сопровождается распадом атома, при этом  $\gamma$ -квант излучается не атомом, а ядром. Примером  $\gamma$ -излучения является распад натрия



Превращения ядер подчиняются *правилу смещения Фаянса — Содди*: при  $\alpha$ -распаде ядро теряет положительный заряд  $2|e|$  и масса его убывает приблизительно на четыре атомных единицы массы. В результате элемент смещается на две клетки к началу периодической системы элементов. Символически это можно записать так:



При  $\beta^-$ -распаде заряд ядра увеличивается на одну единицу, а масса остается почти неизменной. После  $\beta^-$ -распада элемент смещается на одну клетку ближе к концу периодической системы элементов. Символически это можно записать



$\gamma$ -излучение не сопровождается изменением заряда, масса же ядра изменяется ничтожно мало.

Все основные характеристики  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадов, а также аналогичные данные для других наблюдаемых типов радиоактивности представим в виде табл. 7.1

Таблица 7.1

Тип радиоактивности	Изменение заряда $Z$	Изменение массового числа $A$	Характер процесса
$\alpha$ -распад	$Z - 2$	$A - 4$	Вылет $\alpha$ -частицы ( ${}_2^4\text{He}$ ), представляющей собой систему двух протонов ( ${}_1^1p$ ) и двух нейтронов ( ${}_0^1n$ ), связанных воедино: $2{}_1^1p + 2{}_0^1n \rightarrow {}_2^4\text{He}$
$\beta$ -распад	$Z \pm 1$	$A$	Взаимное превращение в ядре: ${}_0^1n$ и ${}_1^1p$
$\beta^-$ -распад	$Z + 1$	$A$	${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}_{-1}^0e + {}_0^0\bar{\nu}_e$
$\beta^+$ -распад	$Z - 1$	$A$	${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_{+1}^0e + {}_0^0\nu_e$
Электронный захват	$Z - 1$	$A$	${}_1^1p + {}_{-1}^0e \rightarrow {}_0^1n + {}_0^0\nu$
Спонтанное деление	$Z - \frac{1}{2}Z$	$A - \frac{1}{2}A$	Деление ядра обычно на два осколка, имеющих приблизительно равные заряды и массы
Протонная радиоактивность	$Z - 1$	$A - 1$	Вылет из ядра протона
Двухпротонная радиоактивность	$Z - 2$	$A - 2$	Одновременный вылет из ядра двух протонов

В табл. 7.1. указано, что при  $\beta^+$ -распаде из ядра вылетает  ${}_{+1}^0e$ -античастица — позитрон.

Радиоактивный распад явление статистическое. Ядра радиоактивного элемента распадаются независимо друг от друга.

Время, за которое распадается половина первоначального числа радиоактивных ядер, называется **периодом полураспада**  $T_{1/2}$ .

Число радиоактивных распадов в единицу времени называется **активностью радиоактивного изотопа**

$$A = \frac{dN}{dt}, \quad (7.5)$$

где  $dN$  — число распадов за время  $dt$ .

Допустим, в радиоактивном препарате в произвольный момент времени  $t_0$  имелось  $N_0$  нераспавшихся ядер атомов. Чем больше число  $N$  радиоактивных атомов, тем больше число распавшихся: т. е.  $dN \sim N$ . Из-за самопроизвольного и хаотического распада радиоактивных ядер можно считать, что число распавшихся ядер атомов в интервале времени  $t \dots t + dt$  пропорционально времени  $dt$ , т. е.  $dN \sim dt$ .

Таким образом,  $dN \sim Ndt$ , или  $dN \sim -\lambda Ndt$ , где  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности, называемый **постоянной радиоактивного распада**. Величина  $\lambda$  различна для различных веществ. Знак минус в правой части означает, что происходит уменьшение числа нераспавшихся ядер.

Разделив переменные  $dN$  и  $dt$ , получим

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Проинтегрировав это равенство

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

получим  $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$ .

*Закон радиоактивного распада*

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (7.6)$$

число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненте (рис. 7.2).

Интенсивность радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада и среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра. Период полураспада можно определить из (7.6)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}. \quad (7.7)$$

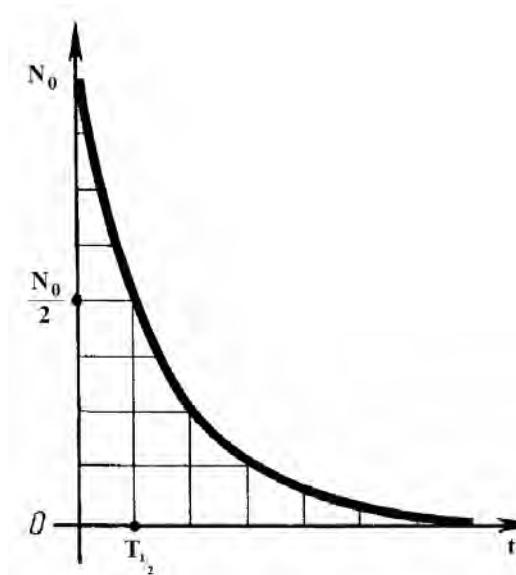


Рис. 7.2

Суммарная продолжительность жизни  $dN$  ядер равна  $t \cdot dN = \lambda \cdot Nt \cdot dt$ . Проинтегрировав это выражение по всем возможным  $t$  (т. е.  $0 \dots \infty$ ) и разделив на начальное количество ядер  $N_0$ , можно получить среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра

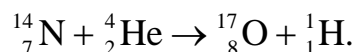
$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N_0 \cdot t e^{-\lambda t} = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (7.8)$$

Таким образом, среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра есть величина, обратная постоянной радиоактивного распада  $\lambda$ .

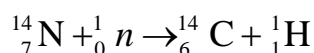
### 7.3. Ядерные реакции

**Ядерные реакции** — превращения ядер при их взаимодействии с различными частицами, в том числе с  $\gamma$ -квантами, или друг с другом.

Первая ядерная реакция наблюдалась Резерфордом



Уравнения ядерных реакций иногда записывают в сокращенном виде, например, реакцию



можно записать в виде  ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$ . Символы химических элементов слева и справа от скобок указывают, соответственно, исходное и конечное ядра. Символы внутри скобок: налетающую частицу — первый символ, в данном случае нейтрон и испускаемую частицу — второй символ, в данном случае протон.

Ядерная реакция характеризуется энергией ядерной реакции, равной разности кинетической энергии конечных и исходных ядер и частиц в реакции.

Если энергия ядерной реакции отрицательна, реакция идет с поглощением энергии. Примером такой эндотермической реакции является расщепление ядер атомов азота  $\alpha$ -частицами. **Экзотермическая реакция**, когда энергия ядерной реакции положительна, идет с выделением тепла — реакция деления ядер атомов тяжелых элементов, термоядерная реакция.

При всех ядерных реакциях соблюдаются законы сохранения электрического заряда, числа нуклонов, импульса, энергии.

Это означает, что при ядерных реакциях нуклоны не уничтожаются и не видоизменяются, происходит только их переход к другому ядру. Поэтому для электронных реакций остается неизменным суммарное массовое число и суммарный заряд ядер.

Скорость ядерных реакций отличается от скорости протекания химических реакций. Химические реакции протекают со значительной скоростью при обычных температурах. Скорость ядерных реакций при обычных температурах практически равна нулю. Две причины обуславливают это обстоятельство:

1. Размер ядер мал по сравнению с размерами атома. Поэтому встречи ядер, необходимые для возникновения реакции, происходят со значительно меньшей вероятностью.

2. Атомные ядра окружены высоким потенциальным барьером, для преодоления которого заряженные частицы должны обладать большой, по сравнению с энергией теплового движения, кинетической энергией.

Ускорить протекание ядерных реакций можно двумя следующими путями:

1. Значительно увеличить температуру. При температуре порядка десятков миллионов градусов энергия теплового движения становится столь значительной, что вероятность проникновения легких ядер через потенциальный барьер становится заметной величиной.

2. Использовать заряженные частицы, специальным образом ускоренные для того, чтобы их энергия оказалась достаточной для преодоления потенциального барьера.

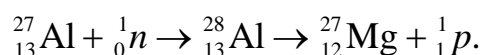
Когда в ядро проникает частица (или группа частиц), то под воздействием нуклонов, имеющих в ядре, она резко изменяет характер своего движения. Вместо того, чтобы быстро «пробежать ядро», попавшая в ядро частица обменивается энергией с другими ядерными частицами, в результате чего «запутывается» в ядре среди других частиц. Энергия частицы распределяется между всеми ядерными частицами. Частицы, попавшие в ядро, вместе с нуклонами, имевшимися в ядре, образуют единую систему — составное, или **компаунд-ядро**.

Такое ядро всегда возбуждено, так как проникшие в ядро частицы приносят с собой избыток энергии, слагающийся из энергии связи и кинетической энергии вступивших в ядро частиц (или частицы). Энергия возбуждения распределяется между всеми нуклонами составного ядра. Средняя кинетическая энергия частиц составного ядра характеризует «ядерную температуру».

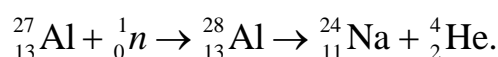
У такого «нагретого ядра» может произойти явление, аналогичное испарению молекул из капли обычной жидкости. Избыток энергии и ее доля могут со временем сосредоточиться у одной какой-либо частицы и эта частица «испарится», т. е. покинет ядро.

Время, прошедшее с момента образования составного ядра до его превращения, значительно превышает время, затраченное частицей на «пробег» ядра со скоростью, которую она имела при подлете к нему. Иногда отношение этих времен превышает  $10^6$ . Именно по этой причине и говорят о компунд-ядре, как о реальном образовании.

Рассмотрим превращение, испытываемое ядром. Для определенности предположим, что в ядро  ${}_{13}^{27}\text{Al}$  попадает нейтрон большой энергии. В образовавшемся составном ядре избыток энергии, необходимый для «испарения», может сосредоточиться, например, у одного из протонов — тогда из ядра вылетит протон и произойдет превращение

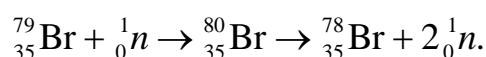


Избыток энергии может оказаться у группы частиц, состоящей из двух протонов и двух нейтронов, тогда произойдет «испарение» всей группы в целом и вылетит  $\alpha$ -частица



Эти две реакции представляют пример ядерных реакций с излучением заряженных частиц.

Может оказаться так, что значительная часть энергии сосредоточится у нейтрона, тогда из ядра вылетит нейтрон. Если энергия возбуждения велика, может «испариться» еще одна частица, например, еще один нейтрон

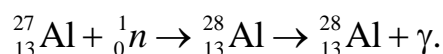


Эта реакция представляет пример ядерной реакции с испусканием нейтронов.

Ядерные реакции с излучением заряженных частиц и испусканием нейтронов протекают существенно различно.

Чтобы из ядра вылетел протон или  $\alpha$ -частица, необходима значительная энергия этих частиц, равная или превосходящая высоту потенциального барьера.

Может быть и так, что ядро излучает  $\gamma$ -квант, причем раньше, чем избыток энергии сосредоточится у одной из частиц. Тогда после излучения  $\gamma$ -кванта оставшейся у ядра энергии возбуждения будет недостаточно для выбрасывания какой-либо частицы, и нейтрон, попавший в ядро, в нем и остается. Произойдет радиоактивный захват



К ядерным реакциям относятся реакции деления и синтеза легких ядер.



### **Вопросы для самостоятельного рассмотрения**

1. Спин ядра и его магнитный момент.
2. Ядерные реакции деления, цепные ядерные реакции.
3. Реакции синтеза легких ядер (термоядерные реакции).
4. Практическое использование ядерных реакций.
5. Виды фундаментальных взаимодействий.
6. Классификация элементарных частиц.
7. Современные модели строения атомных ядер.

## Практическое занятие 7 ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

### Основные законы и формулы

#### 1. Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\nu},$$

где  $h$  — постоянная Планка  $\approx 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с;  $p$  — импульс частицы.

#### 2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq h / 2\pi \\ \Delta y \Delta p_y &\geq h / 2\pi \\ \Delta z \Delta p_z &\geq h / 2\pi \\ \Delta E \Delta t &\geq h / 2\pi \end{aligned} \right\},$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — неопределенность координат;  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$ ,  $\Delta p_z$  — неопределенность проекций импульса на соответствующие оси координат;  $\Delta E$  — неопределенность энергии;  $\Delta t$  — неопределенность времени нахождения в данном энергетическом состоянии.

#### 3. Вероятность нахождения частицы в элементарном объеме

$$dW = |\psi|^2 dV,$$

где  $|\psi|^2$  — квадрат модуля волновой функции;  $dV$  — элементарный объем.

#### 4. Условие нормировки вероятностей (нормировки волновой функции)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

#### 5. Общее (временное) уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  — приведенная постоянная Планка;  $m$  — масса частицы;  $\Delta$  —

оператор Лапласа,  $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ ;  $i$  — мнимая единица;  $i = \sqrt{-1}$ ;

$U(x, y, z, t)$  — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется;  $\psi(x, y, z, t)$  — волновая функция частицы.

6. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

где  $E$  — собственная энергия частицы;  $U$  — потенциальная энергия частицы.

7. Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками»

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $l$  — ширина «ямы», в которой находится частица.

8. Собственные значения энергии частицы в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками»

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2},$$

где  $n$  — главное квантовое число,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $m$  — масса частицы.

9. Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D = D_0 \exp \left\{ -\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \right\},$$

где  $D_0$  — постоянный множитель;  $l$  — ширина барьера;  $U$  — высота потенциального барьера;  $E$  — энергия частицы.

10. Энергия квантового осциллятора

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\omega_0$  — собственная циклическая частота колебаний осциллятора.

## Примеры решения задач

### Задача 7.1

Определите длину волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона равна 0,5 кэВ.

Дано:

$$1 \text{ эВ} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

$$E_k = 0,5 \text{ кэВ} \approx 0,8 \cdot 10^{-16} \text{ Дж}$$

$$\lambda_0 = ?$$

Решение

Длину волны де Бройля определим по формуле

$$\lambda_0 = \frac{h}{m\nu}. \quad (1)$$

Из выражения кинетической энергии найдем скорость электрона, т. е.

$$E_r = \frac{m\nu^2}{2},$$

тогда

$$\nu = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$\lambda_0 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{0,8 \cdot 10^{-16} \cdot 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ (м)}.$$

Ответ:  $\lambda_0 = 5,5 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ .

### Задача 7.2

Электрон движется в атоме, размер которого равен  $10^{-10} \text{ м}$ . Можно ли в этом случае использовать описание системы электрон — атом на основе законов классической физики?

Дано:

$$d = 10^{-10} \text{ м}$$

$$A = \frac{\Delta p_x}{p} = ?$$

Решение

В классической механике условие движения электрона по круговой орбите радиусом  $R$  (второй закон Ньютона) имеет вид

$$\frac{m_e \nu^2}{R} = k \frac{e^2}{R^2}.$$

Правая часть этой формулы — закон Кулона. Из этой формулы выразим скорость электрона  $\nu = e \sqrt{\frac{k}{Rm_e}}$  и найдем импульс

$$p = e \sqrt{k \frac{m_e}{R}}. \quad (1)$$

С помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга можно убедиться, что если неопределенность в значении координаты электрона  $\Delta x$  не превосходит размеров атома, то соответствующая неопределенность в значении импульса

$$\Delta p_x = \frac{h}{2\pi\Delta x} = \frac{h}{2\pi d}. \quad (2)$$

Если подставить конкретные величины  $h$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $m_e$  и  $R$ , а величину диаметра орбиты  $2R$  считать равной размеру атома  $d$ , то, разделив (2) на (1), получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{h}{2\pi e d \sqrt{k \frac{m_e}{R}}} = \frac{h}{2\pi e d \sqrt{\frac{2km_e}{d}}} \approx \\ &\approx \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}{10^{-10}}}} \approx 0,5, \end{aligned}$$

поэтому  $A \approx 1$ . Это означает, что для электрона в атоме классическое описание непригодно.

*Ответ:*  $A \approx 1$ , поэтому классическое описание поведения электрона в атоме непригодно.

### Задача 7.3

Зная, что собственное значение энергии частицы в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками» равно

$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}$ , определите энергетический интервал между двумя соседними уровнями. Оцените этот интервал для электрона, находящегося в «яме» шириной  $l = 10^{-10}$  м.

*Дано:*

$$L = 10^{-10} \text{ м}$$

$$m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$\Delta E_n = ?$$

*Решение*

Энергетический интервал между соседними уровнями

$$\Delta E_n = \Delta E_{n+1} - E_n = \frac{(n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} - \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2}.$$

После преобразований получим

$$\Delta E_n = (2n+1) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \approx n \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}.$$

Для предложенного случая, т. е.  $l = 10^{-10}$  м

$$\Delta E_n = \frac{3,14^2 \cdot (1,02 \cdot 10^{-34})^2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^{-10})^2} n \approx 10^{-17} \cdot n (\text{Дж}) = 10^2 \cdot n \text{ эВ.}$$

Ответ:  $\Delta E_n \approx n \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}$ ;  $\Delta E_n (l = 10^{-10} \text{ м}) = 10^2 \cdot n \text{ эВ.}$

#### Задача 7.4

Пучок электронов движется вдоль оси  $X$  со скоростью  $v = 10^8$  м/с, определяемой с точностью до 0,01 %. Оцените точность определения координаты электрона. Подчиняется ли движение электрона законам квантовой механики?

Дано:

$$v = 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Точность измерения 0,01 %

$$m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$\Delta x$  — ?

#### Решение

Для определения точности измерения координаты электрона воспользуемся принципом неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h. \quad (1)$$

Неопределенность проекции импульса

$$\Delta p_x = m \Delta v_x. \quad (2)$$

Так как точность измерения скорости электрона равна 0,01 %, то неопределенность проекции скорости  $\Delta v_x = 10^4$  м/с.

Подставив (2) в (1), определим

$$\Delta x = \frac{h}{m \Delta v_x};$$

$$\Delta x = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^4} = 7,27 \cdot 10^{-6} \text{ (м)}.$$

Положение электрона определяется с точностью до тысячных долей миллиметра. Такая точность достаточна, чтобы говорить о движении электрона по определенной траектории и в данном случае электрон не является квантовой частицей.

Ответ:  $\Delta x = 7,27 \cdot 10^{-6}$  м и в данном случае электрон можно считать классической частицей.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Определите, при каком значении скорости микрочастицы длина волны де Бройля равна ее комптоновской длине волны.

2. Пуля массой 12 г вылетает из ружейного ствола радиусом 0,55 см со скоростью 450 м/с. Определите длину волны, соответствующую пуле, и минимальную неопределенность ее скорости.

3. При движении вдоль оси  $X$  скорость оказывается определенной с точностью  $\Delta v_x = 1$  см/с. Оцените неопределенность координаты  $\Delta x$  для: а) электрона; б) броуновской частицы массой  $m \approx 10^{-13}$  г; в) дробинок массой  $m \approx 0,1$  г.

4. Параллельный пучок электронов, движущихся со скоростью  $1,00 \cdot 10^6$  м/с проходит через щель шириной 0,100 мм. Определите ширину  $\Delta x$  центрального дифракционного максимума, наблюдаемого на экране, отстоящем от щели на расстоянии 10,0 см. Сравните  $\Delta x$  с шириной щели.

5. Частица, движущаяся в одномерной прямоугольной потенциальной «яме» с бесконечно высокими «стенками», находится в основном состоянии, т. е. имеет минимальную энергию. Определите вероятность  $W$  того, что координата  $x$  частицы имеет значение, заключенное в пределах  $pl \dots l(1 - p)$ , где  $p = 0,3676$ ;  $l$  — ширина потенциальной «ямы».

6. Оцените минимальную энергию нейтрона в ядре радиусом  $10^{-15}$  м.

*Примечание.* Задачи для самостоятельного решения к практическим занятиям 7 и 8 см. в нижеперечисленных пособиях.

1. Савельев, И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике : учебное пособие. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 272 с.

2. Джанколи, Д. К. Физика : В 2 т. Т. 2 : Пер. с англ. — М. : Мир, 1989. — 667 с.

## Практическое занятие 8 ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

### Основные законы и формулы

#### 1. Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $R$  — постоянная Ридберга, равная  $3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ ;  $R = R'c$ ;  $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ ;  $m$  — номер, определяющий серию,  $m = 1, 2, \dots$ ;  $n$  — номер, определяющий отдельные линии соответствующей серии,  $n = m + 1, m + 2, \dots$

#### 2. Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний)

$$m_e \nu_n r_n = n\hbar,$$

где  $m_e$  — масса электрона;  $\nu_n$  — скорость электрона на  $n$ -й орбите;  $r_n$  — радиус  $n$ -й орбиты;  $n$  — номер электронной орбиты,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  —

приведенная постоянная Планка.

#### 3. Второй постулат Бора (постулат переходов)

$$h\nu = E_n - E_m,$$

где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота излучения фотона;  $E_n$  и  $E_m$  — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

#### 4. Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2},$$

где  $n$  — главное квантовое число,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $Z$  — заряд ядра атома (порядковый номер элемента);  $m_e$  — масса электрона;  $e$  — заряд электрона;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная  $\approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ; знак «—» указывает на то, что электрон и ядро связаны силами взаимного притяжения.



## 5. Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} \psi = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$ ;  $m$  — масса электрона;  $E$  — полная энергия электрона в атоме;  $r$  — расстояние между ядром и электроном;  $\psi$  — волновая функция.

### 6. Квантовые числа

6.1. Главное квантовое число  $n$  определяет энергетические уровни электрона в атоме,  $n = 1, 2, \dots$

6.2. Орбитальное квантовое число  $l$  определяет момент импульса электрона в атоме,  $l = 1, 2, \dots, (n-1)$ .

Момент импульса электрона (механический орбитальный момент)

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}.$$

6.3. Магнитное квантовое число  $m_l$  определяет проекцию момента импульса электрона на заданное направление  $Z$ , например, на индукцию внешнего магнитного поля,  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , всего  $(2l+1)$  значений.

Вектор  $L_l$  момента импульса электрона имеет лишь такие ориентации в пространстве, при которых их проекции на направление индукции внешнего магнитного поля  $B$  принимают квантовые значения, кратные  $\hbar$ :

$$L_{lz} = \hbar m_l.$$

6.4. Спиновое квантовое число  $s$  определяет спиновый момент электрона в атоме,  $s = 1/2$ .

Спиновый момент электрона в атоме

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}.$$

6.5. Магнитное спиновое квантовое число  $m_s$  определяет проекцию спинового момента электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ .

Вектор  $L_s$  спинового момента электрона в атоме имеет лишь такие ориентации в пространстве, при которых их проекции на направление индукции внешнего магнитного поля  $B$  принимают квантовые значения, кратные  $\hbar$ :

$$L_{sz} = \hbar m_s.$$

7. Правила отбора ограничивают число возможных переходов электронов, связанных с испусканием и поглощением света

$$\Delta l = \pm 1; \Delta m_l = 0, \pm 1.$$

8. Принцип запрета Паули: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел  $n, l, m_l, m_s$ .

9. Максимальное число электронов  $Z(n)$ , находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом  $n$

$$Z(n) = \sum_0^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

### Примеры решения задач

#### Задача 8.1

При переходе электрона с некоторой орбиты на вторую атом водорода испускает свет с длиной волны  $4,34 \cdot 10^{-7}$  м. Определите номер неизвестной орбиты.

<p>Дано:</p> <p><math>\lambda = 4,34 \cdot 10^{-7}</math> м</p> <p><math>m = 2</math></p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <p><math>n = ?</math></p>
--

#### Решение

Вспользуемся формулой для определения длины волны света, излучаемого атомом водорода при переходе с одной орбиты на другую

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

откуда

$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{\lambda R}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4,34 \cdot 10^{-7} \cdot 1,1 \cdot 10^7}}} = 5.$$

Ответ:  $n = 5$ .

#### Задача 8.2

Определите, какую минимальную скорость должен иметь электрон, чтобы перевести ударом атом водорода из первого энергетического состояния в пятое.

<p>Дано:</p> <p><math>n_1 = 1</math></p> <p><math>n_2 = 5</math></p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> <p><math>v = ?</math></p>
---

#### Решение

В соответствии с формулой для определения энергии в атоме водорода

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$$

для первого и пятого энергетического состояния запишем

$$E_1 = -\frac{m_e e^4}{1^2 8h^2 \epsilon_0^2}; \quad E_5 = -\frac{m_e e^4}{5^2 8h^2 \epsilon_0^2}.$$

Изменение энергии при переходе атома водорода из первого энергетического состояния в пятое

$$\Delta E = E_5 - E_1 = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{24m_e e^4}{25 \cdot 8h^2 \epsilon_0^2}.$$

Налетающие электроны должны иметь кинетическую энергию  $\Delta E$ , поэтому

$$\frac{m_e v^2}{2} = \Delta E,$$

откуда и определим скорость электронов

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_e}} = \sqrt{\frac{48e^4}{25 \cdot 8h^2 \epsilon_0^2}} = \frac{e^2 \sqrt{6}}{5\epsilon_0 h};$$

$$v = \frac{\sqrt{6} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{5 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 2,14 \cdot 10^6 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

*Ответ:*  $v = 2,14 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

### Задача 8.3

Гелий-неоновый газовый лазер, работающий в непрерывном режиме, дает излучение монохроматического света с длиной волны 630 нм при мощности 60 мВт. Определите число фотонов, излучаемых лазером за 1 с.

*Дано:*

$$\lambda = 630 \text{ нм} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$P = 60 \text{ мВт} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$N = ?$

*Решение*

Энергия одного фотона, излучаемого гелий-неоновым лазером, равна

$$\varepsilon = h\nu = h \frac{c}{\lambda}.$$

Число фотонов, излучаемых лазером за 1 с, равно отношению энергии излучения  $E = Pt$  к энергии одного фотона

$$N = \frac{E}{\varepsilon} = \frac{Pt\lambda}{hc}.$$

Подставив численные значения, получим

$$N = \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 1 \cdot 6,3 \cdot 10^{-7}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1,9 \cdot 10^{17}.$$

Ответ:  $N = 1,9 \cdot 10^{17}$ .

#### Задача 8.4

Определите максимальное число возможных электронных состояний для уровней с квантовыми числами  $n$  от 1 до 5.

*Решение*

Так как максимальное число возможных электронных состояний равно

$$Z(n) = 2n^2,$$

то для  $n = 1$  эта величина равна 2.

Для  $n = 2 - 8$ ; для  $n = 3 - 18$ ; для  $n = 4 - 32$ ; для  $n = 5 - 50$ .

Ответ:  $Z(n = 1) = 2$ ;  $Z(n = 2) = 8$ ;  $Z(n = 3) = 18$ ;  $Z(n = 4) = 32$ ;  $Z(n = 5) = 50$ .

#### Задача 8.5

Определите число возможных электронных состояний в подболочках с квантовыми числами  $l$  от 0 до 3.

*Решение*

Поскольку максимальное число возможных электронных состояний в подболочках равно  $2(2l + 1)$ , то для  $l = 0$  эта величина равна 2; для  $l = 1 - 6$ ; для  $l = 2 - 10$ ; для  $l = 3 - 14$ .

Ответ:  $Z(l = 0) = 2$ ;  $Z(l = 1) = 6$ ;  $Z(l = 2) = 10$ ;  $Z(l = 3) = 14$ .

#### Задачи для самостоятельного решения

1. Волновая функция основного состояния атома водорода имеет вид  $\psi = A \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$ , где  $r_0$  — радиус первой боровской орбиты. Определите значение константы  $A$ .
2. Рассчитайте длины волн спектральных линий, появившихся при переводе атома водорода в состояние  $3S$ .
3. Вычислите величину момента импульса электрона в состоянии атома водорода с  $n = 3$  и  $l = 2$ .
4. Определите полное количество электронов, находящихся в подболочке с  $n = 4$  и  $l = 3$ .
5. В микрохирургической операции приваривания отслоившейся сетчатки глаза используется лазер, генерирующий свет с длиной волны 640 нм, длительностью 25 мс, средней энергией 0,50 Вт в импульсе. Определите выделенную в импульсе энергию и количество фотонов.
6. Оцените угловое расхождение лазерного пучка с длиной волны 694 нм, обусловленное дифракцией, если он выходит через зеркало диаметром 5,0 мм. Рассчитайте диаметр этого пучка на искусственном спутнике, находящемся на высоте  $10^3$  км над Землей.

## Практическое занятие 9 ЭЛЕМЕНТЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

### Основные законы и формулы

#### 1. Радиус ядра

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}},$$

где  $R_0 = (1,3 \dots 1,7) \cdot 10^{-15}$  м;  $\frac{A}{Z} X$  — символическое обозначение элемента;  $Z$  — зарядовое число, равное числу протонов в ядре, совпадает с порядковым номером химического элемента в периодической системе;  $A$  — массовое число, равное числу нуклонов в ядре (числу протонов  $Z$  и нейтронов  $N$ ).

#### 2. Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2,$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  — соответственно массы протона, нейтрона, ядра;  $A - Z = N$  — число нейтронов в ядре;  $c$  — скорость света в вакууме.

#### 3. Дефект массы

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}.$$

#### 4. Основной закон радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где  $\lambda$  — постоянная радиоактивного распада;  $N_0$  — начальное число ядер (в момент времени  $t = 0$  с);  $N$  — число нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ .

#### 5. Период полураспада

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda}.$$

#### 6. Активность нуклида $A$ — число распадов, происходящих с ядром в 1 с

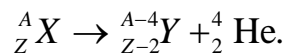
$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N.$$

#### 7. Среднее время жизни $\tau$ радиоактивного ядра

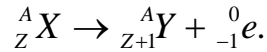
$$\tau = 1/\lambda.$$

## 8. Правила смещения Фаянса — Содди

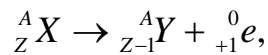
### 8.1. Для $\alpha$ -распада



### 8.2. Для $\beta^-$ -распада



### 8.3. Для $\beta^+$ -распада



где  ${}^A_Z X$  и  ${}^A_Z Y$  — материнское и дочернее ядро соответственно;  ${}^4_2 \text{He}$  — символическая запись  $\alpha$ -частицы;  ${}^0_{-1} e$  и  ${}^0_{+1} e$  — символическая запись электрона и позитрона соответственно.

## 9. Символическая запись ядерной реакции



Первая стадия — захват материнским ядром частицы  $a$  и образование промежуточного ядра  $C$ , называемого составным или компаунд-ядром.

Вторая стадия — распад составного ядра на дочернее ядро  $Y$  и частицу  $b$ .

## Примеры решения задач

### Задача 9.1

Определите энергию связи ядра изотопа лития  ${}^7_3 \text{Li}$ .

Дано:



$$m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$m_{\text{я}} = 11,6475 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$E_{\text{св}} = ?$$

Решение

Определим энергию связи атомного ядра

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2. \quad (1)$$

Из символической записи изотопа лития  ${}^7_3 \text{Li}$  видим, что  $A = 7$  и  $Z = 3$ .

Подставив значения  $A$  и  $Z$  в (1), получим

$$E_{\text{св}} = [3m_p + 4m_n - m_{\text{я}}]c^2.$$

$$\begin{aligned} E_{\text{св}} &= [3 \cdot 1,6724 \cdot 10^{-27} + 4 \cdot 1,6748 \cdot 10^{-27} - 11,6475 \cdot 10^{-27}] (3 \cdot 10^8)^2 = \\ &= 6,201 \cdot 10^{-12} \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $E_{\text{св}} = 6,201 \cdot 10^{-12}$  Дж.

### Задача 9.2

Радиоактивный  ${}_{11}^{24}\text{Na}$ , период полураспада которого равен 14,8 ч, испытывает  $\beta$ -распад. Определите количество атомов, распавшихся в 1 мг данного радиоактивного препарата за 10 ч.

Дано:



$$m = 1 \text{ мг} = 10^{-6} \text{ кг}$$

$$T_{1/2} = 14,8 \text{ ч}$$

$$t = 10 \text{ ч}$$

$$\Delta N = ?$$

Решение

Число распавшихся атомов за время  $t$

$$\Delta N = N_0 - N, \quad (1)$$

где  $N_0$  — число нераспавшихся атомов в начальный момент времени, равное числу всех атомов в 1 мг  ${}_{11}^{24}\text{Na}$ ;  $N$  — число нераспавшихся атомов через время  $t$ .

Поскольку  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , то (1) приводим к виду

$$\Delta N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2)$$

Учтя, что  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ , преобразуем (2)

$$\Delta N = N_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{-t \ln 2}{T_{1/2}}\right) \right]. \quad (3)$$

Так как в одном моле  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  содержится число атомов, равное числу Авогадро  $N_A$ , то в данной массе  $m$  содержится  $N_0$  атомов, равное

$$N_0 = \frac{m}{\mu} N_A, \quad (4)$$

где  $\mu$  — молярная масса натрия, равная  $24 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

Подставив (4) в (3), получим

$$\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A \left( 1 - \exp\left(\frac{-t \ln 2}{T_{1/2}}\right) \right);$$

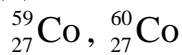
$$\Delta N = \frac{10^{-6} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{24 \cdot 10^{-3}} \left( 1 - \exp\left(\frac{-0,693 \cdot 10}{14,8}\right) \right) = 9,3 \cdot 10^{18}.$$

Ответ:  $\Delta N = 9,3 \cdot 10^{18}$ .

### Задача 9.3

Определите энергию ядерной реакции  ${}_{27}^{59}\text{Co} + {}_0^1n \rightarrow {}_{27}^{60}\text{Co} + \gamma$ .

Дано:



$$m_1 ({}_{27}^{59}\text{Co}) = 58,95182 \text{ а.е.м.}$$

$$m_2 ({}_{27}^{60}\text{Co}) = 59,95250 \text{ а.е.м.}$$

$$m_n = 1,00893 \text{ а.е.м.}$$

$$\Delta E (\text{МэВ}) \text{ — ?}$$

#### Решение

Для вычисления энергии ядерной реакции определим дефект массы  $\Delta m$  этой реакции, выразив его в а.е.м., тогда  $\Delta E (\text{МэВ}) \approx 931 \Delta m$  (а.е.м.).

Дефект массы

$$\Delta m = (m_1 + m_n) - m_2.$$

Поскольку число электронов при реакции не изменяется, воспользуемся значением масс атомов

$$\Delta m = [(58,95182 + 1,00893) - 59,95250] = 0,00825 \text{ а.е.м.},$$

поэтому реакция — экзотермическая.

Далее вычислим  $\Delta E$

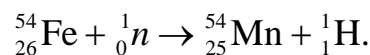
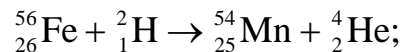
$$\Delta E = 931 \cdot 0,00825 = 7,66 \text{ (МэВ)}.$$

Ответ:  $\Delta E = 7,66$  МэВ; реакция экзотермическая.

### Задача 9.4

Радиоактивный марганец  ${}_{25}^{54}\text{Mn}$  получают двумя способами. Первый состоит в облучении изотопа железа  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$  дейтронами, второй — в облучении железа  ${}_{26}^{54}\text{Fe}$  нейтронами. Напишите эти реакции.

#### Решение



При написании ядерных реакций должны выполняться законы сохранения массовых и зарядовых чисел.

#### Задачи для самостоятельного решения

21.6; 21.26; 21.27; 22.11; 22.13; 22.42.



### Список рекомендуемой литературы

1. *Бабаев, В. С.* Корректирующий курс физики : учебное пособие / В. С. Бабаев, Ф. Ф. Легуша. — СПб. : Лань, 2011. — 160 с.
2. *Бухман, Н. С.* Упражнения по физике : учебное пособие. — 2-е изд., испр. / Н. С. Бухман. — СПб. : Лань, 2008. — 96 с.
3. *Калашников, Н. П.* Физика. Интернет-тестирование базовых знаний : учебное пособие. — 2-е изд., стер. / Н. П. Калашников, Н. М. Кожевников. — СПб. : Лань, 2010. — 160 с.
4. *Калашников, Н. П.* Графические методы решения задач по молекулярно-кинетической теории идеальных газов : учебное пособие. — 2-е изд., испр. / Н. П. Калашников, В. П. Красин. — СПб. : Лань, 2011. — 192 с.
5. *Оселедчик, Ю. С.* Физика. Модульный курс (для технических вузов) : учебное пособие для вузов / Ю. С. Оселедчик, П. И. Самойленко, Т. Н. Точилина. — М. : Юрайт, 2010. — 526 с.
6. *Тополов, В. Ю.* Анализ ответов при решении задач по общей физике : учебное пособие / В. Ю. Тополов, А. С. Богатин. — СПб. : Лань, 2011. — 80 с.
7. *Трофимова, Т. И.* Краткий курс физики с примерами решения задач / Т. И. Трофимова. — М. : КноРус, 2010. — 280 с.
8. *Трофимова, Т. И.* Физика : учебник для образовательных учреждений высшего профессионального образования / Т. И. Трофимова. — М. : Академия, 2012. — 320 с.
9. *Трофимова, Т. И.* Физика в таблицах и формулах : учебное пособие для вузов по техническим специальностям / Т. И. Трофимова. — М. : Академия, 2010. — 325 с.
10. *Фирганг, Е. В.* Руководство к решению задач по курсу общей физики : учебное пособие. — 4-е изд., испр. / Е. В. Фирганг. — СПб. : Лань, 2009. — 352 с.

**Контрольное задание по теме «Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Физика атома и атомного ядра»**

№ варианта	§ 12		§ 14	§ 16		§ 18	§ 19	§ 20	§ 21	§ 22
	1	21	33	1	20	57	17	38	39	24
2	2	34	11(а)	19	54	15	39	40	3	41
3	5	41	15	18	51	12	37	4	35	15
4	26	42	5(а)	17	61	1	34	24	16	1
5	7	44	12	16	66(а)	13(а,б)	8	25	4	18
6	8	46	9	15	21	7	29	26	20	10
7	29	54	14	14	64	6	28	28	13	5
8	11	55	18	12	65	13(в)	27	30	7	8(в,г)
9	23	56	7	11	52	4	19	41	32	14(а-в)
10	14	57	1	9	58	20	18	18(а)	23	21
11	15	58	15	8	55(а,б)	2	13	19(б)	15	4
12	17	59	17	7	64	1	12	20	9	1
13	28	60	13	6	65	18	6	22	22	20(а)
14	19	61	7	5	22	14(а)	5	23	14	9
15	1	63(а)	14	30	27	16	3	11	34	6
16	22	76	18	31	62	19	1(а,б)	3	18	8(ж,з)
17	13	68	16(б)	32	10	11	18	16	5	14(г-е)
18	24	67	2	33	69	8	7	17	11	3
19	6	69(а)	4	36	59	23	10	19(а)	31	43(а,б)
20	27	70	16(а)	39	63	6	34	5	8	12(а,б)
21	18	71	6(а,б)	40	65	5	28	6	36(а,б)	2
22	10	72	8	41	4	4	27	7	12	36(а)
23	4	73	14	42	53	3	26	10	2	8(д,е)
24	12	74	18	44	60	24	1(в)	1	33	24
25	9	75	3	45	63	22	30	2	1	7

**Вариант тестовых заданий коллоквиума «Колебания и волны.  
Волновые и квантовые свойства света. Строение атома и атомного ядра.  
Элементы квантовой теории твердого тела»**

**Задание 1 (1,5 балла)**

Точка совершает гармонические колебания, подчиняющиеся синусоидальному закону с периодом, равным 6 с без начальной фазы. Определите время, считая от начала движения, за которое точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды.

- I. 0,5 с.      II. 1,0 с.      III. 1,5 с.      IV. 2,0 с.

**Задание 2 (1 балл)**

Определите изменение периода собственных колебаний в контуре, активным сопротивлением которого можно пренебречь, при увеличении его емкости в 2 раза и уменьшении индуктивности вдвое.

- I. Увеличится в 2 раза.      II. Уменьшится в 2 раза.  
III. Увеличится в 4 раза.      IV. Не изменится.

**Задание 3 (0,5 балла)**

Как должна двигаться заряженная частица, чтобы она излучала электромагнитные волны?

- I. С постоянной скоростью, значительно меньшей скорости света.  
II. Ускоренно.  
III. С постоянной скоростью, приблизительно равной скорости света.  
IV. С постоянной скоростью, равной скорости света.

**Задание 4 (1 балл)**

Определите наибольший порядок спектра для желтой линии натрия с длиной волны  $5,89 \cdot 10^{-7}$  м, если период дифракционной решетки равен 2 мкм. 1 мкм =  $10^{-6}$  м.

- I. 10.      II. 6.      III. 3.      IV. 5.

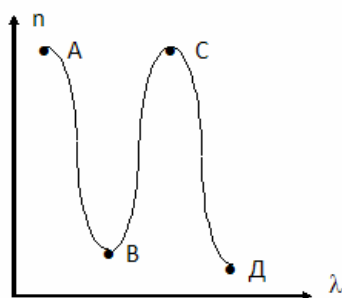
**Задание 5 (0,5 балла)**

Двойное лучепреломление света обусловлено...

- I. ...дисперсией света.  
II. ...анизотропией строения кристаллов.  
III. ...зависимостью показателя преломления от угла падения.  
IV. ...рассеянием света.

**Задание 6 (0,5 балла)**

Укажите, какие участки зависимости показателя преломления света  $n$  от длины волны  $\lambda$  соответствуют области нормальной дисперсии.



- I.  $AB$  и  $BC$ .  
II.  $BC$  и  $CD$ .  
III.  $AB$  и  $CD$ .  
IV.  $BC$ .

**Задание 7 (1,5 балла)**

Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна  $\lambda_0$ . Определите максимальную скорость электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны  $\lambda$ .

- I.  $\sqrt{\frac{m}{2hc} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}$ .    II.  $\sqrt{\frac{m}{2hc} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)}$ .    III.  $\sqrt{\frac{2hc}{m} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)}$ .    IV.  $\sqrt{\frac{2hc}{m} \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right)}$ .

**Задание 8 (1 балл)**

Определите частоту спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую.  $R \approx 1,1 \cdot 10^7$  1/м;  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с.

I.  $\approx 3,4 \cdot 10^{17}$  Гц. II.  $\approx 1,8 \cdot 10^{16}$  Гц. III.  $\approx 8,5 \cdot 10^{15}$  Гц. IV.  $\approx 7,3 \cdot 10^{14}$  Гц.

**Задание 9 (0,5 балла)**

Что определяет квадрат модуля волновой функции  $|\psi|^2$ , описывающей поведение свободного электрона?

- I. Энергию электрона в данной точке пространства.  
 II. Координату электрона в данной точке пространства.  
 III. Плотность вероятности нахождения электрона в данной точке пространства.  
 IV. Вероятность нахождения электрона в данной точке пространства.

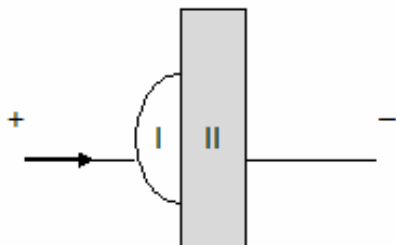
**Задание 10 (0,5 балла)**

Напишите возможные значения орбитального квантового числа для главного квантового числа  $n = 4$ .

I. 0, 1, 2, 3. II. 1, 2, 3, 4. III. 2, 3, 4, 5. IV. 2, 4, 6, 8.

**Задание 11 (0,5 балла)**

Определите тип проводимости полупроводников I и II, образующих диод, если через диод проходит ток так, как показано на рис.



- I. I-*n*-типа; II-*p*-типа.  
 II. I и II-*p*-типа.  
 III. I и II-*n*-типа.  
 IV. I-*p*-типа; II-*n*-типа.

**Задание 12 (1 балл)**

Жолио-Кюри облучал алюминий  ${}_{13}^{27}\text{Al}$   $\alpha$ -частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственное радиоактивное ядро, испускающее позитрон. Определите конечный продукт такого превращения.

I.  ${}_{14}^{30}\text{Si}$ . II.  ${}_{15}^{30}\text{P}$ . III.  ${}_{15}^{31}\text{P}$ . IV.  ${}_{14}^{31}\text{Si}$ .

**Календарные планы проведения всех видов учебных занятий  
с указанием точек текущего и итогового контроля**

**1 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 1. Механические и электромагнитные колебания  
1-е занятие натурального лабораторного практикума в лаборатории В405 «Оптика и атомная физика»

**График выполнения работ лабораторного практикума в лаборатории В405**

50→43→51→45→48→53→3→55→54

**2 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** 1-е занятие виртуального лабораторного практикума в дисплейном классе «Открытая физика 1.1». Л. р. 1.3. Механические колебания

**3 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 2. Механические и электромагнитные волны.

Практическое занятие 1. Механические колебания

**4 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 2. Электромагнитные колебания

**5 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 3. Волновая оптика.

2-е занятие натурального лабораторного практикума в лаборатории В405 «Оптика и атомная физика»

**6 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 3. Механические и электромагнитные волны

**7 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 4. Квантовые свойства излучения

2-е занятие виртуального лабораторного практикума в дисплейном классе «Открытая физика 1.1». Л. р. 2.6. Свободные колебания в контуре

**8 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 4. Волновая оптика

**9 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 5. Элементы квантовой механики

Практическое занятие 5. Волновая оптика

**10 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 6. Квантовые свойства излучения

**11 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 6. Элементы современной физики атомов и молекул.

3-е занятие натурального лабораторного практикума в лаборатории В405 «Оптика и атомная физика» — отчетное, 1-я точка текущего контроля

**12 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 7. Элементы квантовой механики

**13 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Лекция 7. Элементы ядерной физики.

Практическое занятие 8. Элементы современной физики атомов и молекул

**14 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** 3-е занятие виртуального лабораторного практикума в дисплейном классе «Открытая физика 1.1». Л. р. 2.8. Дифракция и интерференция

**15 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** 4-е занятие натурального лабораторного практикума в лаборатории В405 «Оптика и атомная физика»

**16 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 9. Элементы ядерной физики

**17 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** Практическое занятие 10. Сдача контрольного задания «Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Физика атома и атомного ядра», 2-я точка текущего контроля

**18 УЧЕБНАЯ НЕДЕЛЯ.** 5-е занятие натурального лабораторного практикума в лаборатории В405 «Оптика и атомная физика» — отчетное, 3-я точка текущего контроля.

Практическое занятие 11. Коллоквиум «Колебания и волны. Волновые и квантовые свойства света. Строение атома и атомного ядра. Элементы квантовой теории твердого тела». 4-я точка текущего контроля

**Чеботарева** Надежда Евгеньевна  
**Федорихин** Владимир Анатольевич  
**Бурханов** Анвер Идрисович

Учебное издание

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ВОЛНОВЫЕ И КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА.  
СТРОЕНИЕ АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА.  
ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Учебно-практическое пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*  
Редактор *О. А. Шипунова*  
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Подписано в свет 31.07.2013.  
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 7,3. Объем данных 13,6 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
Редакционно-издательский отдел  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)