

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный аграрный университет»

На правах рукописи



Ищанов Тлек Рахметолович

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ
ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ
АППРОКСИМАЦИИ УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

05.23.17 – Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

Клочков Юрий Васильевич

доктор технических наук, профессор

Волгоград 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. НАУЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА.....	11
3. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВАНИИ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА-ЛЯВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ НОВОЖИЛОВА В.В.....	21
2.1. Геометрия срединной поверхности до деформирования	21
2.2. Геометрия срединной поверхности в деформированном состоянии	25
2.3. Физические соотношения произвольных оболочек	29
2.4. Общий алгоритм расчета методом конечных элементов.....	29
2.5. Скалярная интерполяция полей перемещений при использовании матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента 72×72	31
2.6. Матрица жесткости четырехузлового элемента 72×72 при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений..	42
2.7. Примеры расчетов	53
2.8. Выводы по второй главе	66
3. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ УЗЛОВЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ КАК СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН	67
3.1. Геометрия тонкой оболочки до деформирования	67
3.2. Геометрия эллиптического цилиндра в исходном состоянии	71
3.3. Геометрия оболочки в деформированном состоянии	74
3.4. Физические соотношения тонких оболочек	77
3.5. Интерполяция полей перемещений как скалярных величин при использовании матрицы жесткости размерностью 44×44 четырехузлового оболочечного элемента дискретизации с учетом сдвиговых деформаций	82
3.6. Примеры расчетов	92
3.7. Выводы по третьей главе	108

4. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНВАРИАНТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	109
4.1. Матрица жесткости размерностью 44x44 четырехузлового оболочечного элемента дискретизации при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений.....	109
4.2 Примеры расчетов.....	122
4.3. Выводы по четвертой главе.....	141
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	142
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	144
Приложение А. Свидетельства о регистрации программ на ЭВМ.....	166
Приложение Б. Акт о внедрении результатов диссертационной работы	168

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы и степень ее разработанности. Предъявляемые практикой требования надежности и экономичности при создании инженерных конструкций приводят к необходимости использования оболочек различных конфигураций. Это объясняется тем, что оболочечные конструкции обладают высокими прочностными свойствами, небольшим весом и устойчивостью.

Область применения оболочечных конструкций весьма обширна, это промышленное и гражданское строительство, машиностроение, судостроение, авиастроение. Такие оболочечные системы применяются в виде корпусов кораблей, конструкций типа реакторов, гидротехнических сооружений, аппаратов нефтяной, газовой и химической промышленности. В процессе эксплуатации оболочки подвергаются воздействию внутренних и внешних силовых факторов, поэтому расчеты на прочность и их совершенствование выходят на первый план.

Большой вклад в развитие общей теории тонких оболочек внесли отечественные ученые [20; 21; 22; 23 и другие]. В виду сложности систем дифференциальных уравнений, к которым приводили решения задач по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек, использовались упрощенные и приближенные методы [119; 132]. Стремительный рост компьютерной техники, увеличение их производительности, появление множества прикладных программ определило развитие численных методов расчета оболочек [4; 29].

Основным методом современной строительной механики, применяемым для расчета НДС тонких оболочек в настоящее время является метод конечных элементов (МКЭ) [14; 25; 28; 29; 31 и другие]. Суть метода заключается в том, что реальная конструкция заменяется дискретной моделью, которая определяется совокупностью элементов, взаимодействующих между собой посредством конечного числа параметров в узловых точках. Функционал энергии дискретной модели, представляющую собой совокупность конечных элементов (КЭ), равен сумме функционалов отдельных конечных элементов. Аппроксимация по области

каждого КЭ выполняется на основании специально подобранных аппроксимирующих функций. Посредством этих функций искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения) можно выразить через узловые перемещения и напряжения в пределах каждого конечного элемента, а соответствующую нагрузку – узловыми усилиями.

Быстрому росту популярности МКЭ и становлению его ведущим методом численного решения поставленных задач способствовал ряд преимуществ перед другими численными методами, таких как:

- создание алгоритмов, позволяющих автоматизировать процесс формирования матриц жесткости отдельных элементов и всей конструкции посредством компьютерных программ;

- создание универсальных алгоритмов расчета, которые позволяют влиять на значения граничных условий и вид нагрузки, изменяя исходные данные;

- учет воздействия температурных условий на элементы конструкции при эксплуатации [13; 105];

- возможность учитывать физическую и геометрическую нелинейность оболочки.

В настоящее время широкое распространение получила классическая теория, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява. Недостатком данной теории является необходимость введения поперечной силы Кирхгофа, для его устранения необходимо учитывать деформации поперечного сдвига. Сдвиговые теории типа С. П. Тимошенко более корректны и в большей степени соответствуют физическому смыслу решаемой задачи.

Цель работы - создание алгоритмов конечно-элементного анализа НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основе реализации пакета авторских прикладных программ по расчету на прочность оболочечных конструкций произвольной геометрии при инвариантной векторной аппроксимации полей перемещений. Обоснование необходимости учета деформаций поперечного сдвига при определении НДС короткопролетных, жестко защемленных оболочек.

Достижение поставленной цели предусматривает выполнение следующих задач исследования:

1. Вывод геометрических соотношений тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла поворота нормали.

2. Разработка конечно-элементных моделей тонких оболочек при различных условиях опирания и видах заданной нагрузки.

3. Разработка алгоритма формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений. Разработка алгоритма программы вычислений напряжений.

4. Выполнение численного анализа НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования для скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений. В первом варианте компоновки матрицы жесткости четырехугольного КЭ отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния, во втором – от ее деформированного состояния.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Получены основные геометрические соотношения между деформациями и перемещениями при альтернативном общепринятому варианту отсчета угла поворота нормали.

2. Разработан алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при общепринятом и альтернативном вариантах отсчета угла поворота нормали для расчета тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основании скалярной конечно-элементной интерполяционной процедуры.

3. Разработан алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при общепринятом и альтернативном

отсчете угла поворота нормали для расчета тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основании векторной конечно-элементной интерполяционной процедуры.

4. Выполнен численный анализ НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования с использованием скалярной аппроксимации перемещений, показавший преимущества альтернативного способа отсчета угла поворота нормали.

5. Выполнен численный анализ НДС оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования при использовании векторной аппроксимации полей перемещений, показавший существенные преимущества расчетов с векторной интерполяционной процедурой.

Практическая значимость исследовательской работы заключается в разработке алгоритмов и компьютерных программ для расчета на прочность тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, которые могут быть использованы проектными, научно-исследовательскими и эксплуатационными организациями при анализе НДС элементов сооружений, моделируемых оболочками различной конфигурации при произвольном характере воздействий и условий закрепления на границах.

Теоретическая и методологическая основа исследования. Основой диссертационного исследования являются положения вариационного метода строительной механики – МКЭ, классическая теория тонких оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа-Лява, сдвиговая теория типа С. П. Тимошенко, описанные в трудах отечественных и зарубежных авторов. Проведен теоретический анализ литературных источников и материалов сети интернет.

Диссертация соответствует паспорту специальности 05.23.17 – Строительная механика, в частности, пункту 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их

расчета» и пункту 4 «Численные методы расчета сооружений и их элементов» области исследований.

Методы исследования. Автором в ходе исследования использовались следующие методы: логический анализ, векторный и тензорный анализ, статистический анализ (сопоставления, сравнения), системный подход, табличный и графический методы.

Положения, выносимые на защиту

1. Геометрические соотношения между деформациями и перемещениями при различных вариантах отсчета угла поворота нормали.

2. Алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота нормали для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига на основании скалярной аппроксимации перемещений.

3. Алгоритм формирования матриц жесткостей четырехугольных конечных элементов при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота нормали для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига с векторной аппроксимацией полей перемещений.

4. Результаты исследования НДС при альтернативном и общепринятом отсчетах угла поворота нормали с использованием скалярной и векторной форм интерполяционной процедуры, показавшие существенное повышение точности расчетов по разработанным алгоритмам.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается математической обоснованностью вывода основных геометрических соотношений, корректной математической постановкой задач с использованием векторного и тензорного анализа, геометрических соотношений оболочек, относящихся к классу тонких, дифференциальной геометрии, положений теории интерполяции искомых величин, соответствием качественных результатов расчета физической картине исследуемых процессов, совпадением количественных результатов, полученных при использовании разработанных

алгоритмов, с результатами исследований других авторов, результатами, полученными по аналитическим формулам. Во всех примерах расчета оболочек контролировалась сходимость вычислительного процесса, как необходимого условия адекватности любого численного метода.

Структура и объем диссертации. Основные положения диссертационной работы изложены на 168 страницах, состоят из введения, четырех глав, заключения, выводов, списка литературы и 2 приложений. Работа иллюстрирована 19 таблицами и 37 рисунками. Список литературы содержит 189 источников, в том числе 53 зарубежных авторов.

Во введении отражены актуальность темы исследования, цели и задачи, научная новизна, практическая значимость работы, методы исследования, методология исследования, положения, выносимые на защиту.

В первой главе были проанализированы работы отечественных и зарубежных авторов, в которых исследовалось НДС оболочек согласно теории Кирхгофа-Лява и с учетом сдвиговых деформаций на основе МКЭ.

Во второй главе на основании теории тонких оболочек Новожилова В.В. были выполнены расчеты по определению НДС эллиптического цилиндра при различном характере воздействий (сосредоточенные и распределенные силы, внутреннее давление) и условий закрепления на границах (свободный край, шарнирное опирание, жесткая заделка). Расчеты проводились при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений. Анализ результатов расчетов показал, что скалярная аппроксимация не позволяет получать удовлетворительные по точности решения при расчете эллиптических цилиндров, в то время как использование векторной аппроксимации приводит к достижению приемлемых по точности значений параметров НДС с автоматическим учетом смещений КЭ как жесткого целого.

В третьей главе изложены два алгоритма расчета тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании скалярной интерполяции полей перемещений. В первом варианте расчета отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния, во втором – от ее деформированного

состояния. На основании проведенного сравнительного анализа двух вариантов расчета эллиптического цилиндра был сделан вывод, что второй вариант позволяет получить удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации. В то же время следует отметить, что и первый вариант компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента с учетом деформации поперечного сдвига позволяет получать приемлемые результаты, но только при весьма существенном сгущении сетки дискретизации рассчитываемой оболочки.

В четвертой главе изложены два алгоритма расчета тонких оболочек с учетом сдвиговых деформаций при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений. В данной главе был выполнен сравнительный анализ первого и второго вариантов отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций. Показано, что векторная аппроксимация позволяет учесть смещения четырехугольного элемента дискретизации как жесткого целого.

Далее изложены выводы по диссертационной работе и приведен список используемой литературы.

Диссертация соответствует тематическому плану научно-исследовательских работ Волгоградского государственного аграрного университета.

1. НАУЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Для решения задач проектирования конструкций оболочечного типа принято использовать численные методы. На протяжении многих лет метод конечных элементов доказывает свою эффективность, вследствие чего получил широкое распространение. МКЭ основан на дискретизации оболочки на конечное множество элементов и кусочно-элементной аппроксимации функций. Основными достоинствами данного метода, определяющие его главенствующее положение, являются независимость расчета от конструктивных особенностей исследуемого объекта, простой алгоритм, позволяющий учесть взаимодействия расчетных конструкций и окружающей их среды, автоматизация расчетов на каждом этапе разработки, ясная геометрическая, конструктивная и физическая интерпретация.

Данный метод зародился на стыке строительной механики и теории упругости, по истечении некоторого времени было получено его математическое обоснование. Широкое распространение метод конечных элементов получил в 1963 году, когда было показано, что его можно рассматривать как вариант метода Ритца.

Существует три формы МКЭ: метод сил, метод перемещений и смешанный метод. Метод конечных элементов в форме метода перемещений основан на принципе Лагранжа. В методе перемещений основными неизвестными выступают перемещения узлов КЭ. К плюсам данного метода можно отнести достаточно простой алгоритм реализации, приемлемая точность вычислений и устойчивость решения с гарантированной сходимостью к нижней границе. К недостаткам можно отнести заниженную точность определения напряжений и перемещений.

В методе сил основными неизвестными выступают напряжения. В данном методе используется принцип Кастилиано, при котором значения напряжений завышены. Завышенная оценка при расчетах на прочность лучше, чем заниженная

оценка. Основным недостатком метода сил является отсутствие простых и устойчивых алгоритмов, которые обеспечивают сходимость для ряда задач.

Смешанный метод основывается на функционале Рейсснера. Принцип минимума дополнительной энергии дает возможность на базе вариационного подхода непосредственно построить соотношение податливости элемента, т.е. выражения для параметров перемещения элемента в терминах силовых параметров. Основным достоинством данного метода является совместная аппроксимация перемещений и напряжений, что позволяет получать более точное решение.

У данного метода имеются следующие недостатки: поверхность функционала Рейсснера обладает вырожденной седлообразной формой в точке стационарности, система уравнений, описывающих смешанный метод, не является положительно определенной. Вышеперечисленные положения значительно осложняют использование функционала Рейсснера в МКЭ [44].

МКЭ в совокупности с современными компьютерными технологиями создаёт возможности для моделирования и расчёта конструкций любой сложности. Расчетный анализ конструкций, состоящих из тонкостенных оболочек, до настоящего времени остается предметом исследований.

Одномерные КЭ применялись на начальном этапе анализа НДС разного рода сооружений. Для решения задач теории упругости использовались двух- и трехмерные КЭ. В работах [138; 188] применялись прямоугольные и треугольные плоские конечные элементы.

В работе [129] предлагается вариационный метод расчета трехмерных упругих конструкций, использующий функции с различной степенью интерполяции, позволяющих определять напряженно-деформированное состояние конструкций с криволинейными граничными поверхностями, а также составных конструкций.

В работе [3] описывается методика конечно-элементного моделирования стрижней таврового сечения, основанная на использовании трехмерной теории и суперэлементной технологии. Дается краткая сводка расчетных формул и

приводится описание алгоритма, реализованного в программе ПРИНС. Рассматривается тестовая задача. Результаты расчета, полученные по программе ПРИНС, сравниваются с аналитическим решением.

В работе [61] рассмотрен вопрос влияния размеров конечных элементов на расчетное напряженно-деформированное состояние арочной плотины применительно к математическому обоснованию эффективности конструктивных решений, направленных на усиление сооружения.

В работе [130] производится расчет подкрепленной оболочки и пластины стержнями коробчатого квадратного сечения с использованием конечных элементов с узлами по контурам сечений, соответствующим узлам крепления стержня. Исследования проводятся на основе метода конечных элементов с использованием дискретных расчетных схем и программных средств.

В [64] проведены численные исследования методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния плоской оболочки. Показана возможность моделирования армированных плоских оболочек с пересекающимися нитями корда плоскими конечными элементами.

Для расчета цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами жесткости, в работе [1] предложен полуаналитический метод конечных элементов. С помощью предложенного метода численно исследуются свойства напряженно-деформированного состояния оболочек.

В работе [104] рассмотрен метод экспорта оболочковых конструкций из Revit в SCAD, с использованием на промежуточных этапах Autocad и сателлита SCAD - Форум. Метод рассмотрен на примере оболочки двоякой положительной гауссовой кривизны. Результатом применения метода является конечно-элементная модель железобетонной оболочки, которая полностью подготовлена для дальнейшего расчёта и анализа.

Вопросы расчета тонких упругих оболочек в форме косоугольного геликоида полуаналитическим методом рассмотрены в [127]. Получены квадратичные формы поверхности в несопряженной неортогональной системе координат,

основные геометрические и физические соотношения, уравнения равновесия для случая полой оболочки.

В [116] представлена прикладная расчетная методика нелинейного анализа конструктивных соединений в виде пересекающихся оболочек с применением метода конечных элементов, теории оболочек, теории пластичности в варианте теории течения с изотропным деформационным упрочнением и геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. Описан четырехугольный оболочечный конечный элемент на основе смешанного вариационного принципа для нелинейного анализа оболочек.

В работе [72] авторами рассматривается и предлагается методика построения математической модели для осесимметричного конечного элемента многослойных элементов конструкций. Для проведения расчетов предлагается осесимметричный конечный элемент, использующий соотношения для внутренней работы каждого слоя в отдельности, что позволяет учитывать геометрическую и физическую нелинейности, а также неоднородность по слоям оболочки. На основе метода конечных элементов с использованием принципа возможных перемещений и гипотез Кирхгофа-Лява построена дискретная математическая модель.

В работах [34; 177] предлагается метод разложения в ряды Фурье использовать для описания сильно локализованных механических нагрузок, которые могут действовать на тонкостенные оболочечные конструкции в виде тел вращения. Приведены результаты расчетов для оболочек нагруженных различными видами локальных нагрузок. Проведено сопоставление результатов расчета напряженного состояния, полученного с применением рядов Фурье и МКЭ.

В [13] разработан алгоритм расчета плосконагруженного тонкостенного элемента с учетом геометрической нелинейности на основании смешанного метода. Описана процедура компоновки матрицы деформирования четырехузлового КЭ, где учитывалось пошаговое нагружение.

В [152] исследовано механическое поведение пластинчатых полукристаллов Cu-Ag при однослойном сжатии с помощью трехмерного моделирования методом КЭ. Метод для определения стадий ползучести и оценки поля напряжений вершины трещины предложен в работе [159].

В работе [177] разработан эффективный метод для получения реакции цилиндров произвольно нагруженных распределенной нагрузкой с помощью волн и метода конечных элементов.

В работе [10] приведены результаты исследования динамического выпучивания свинцовой оболочки в скафандре при взрывном нагружении. Изложена конечно-элементная методика решения двумерных (осесимметричных) задач упругопластического деформирования элементов конструкций.

В описанных выше работах используется классическая теория пластин и оболочек, которая проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического применения. Однако физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы Кирхгофа. Избавиться от этого недостатка можно путем учета деформаций поперечного сдвига. Сдвиговая теория более точна и физически последовательнее классической теории. Впервые сдвиговый вариант теории пластин был построен Э. Рейснером.

В [5] была решена задача по расчету НДС цилиндрической оболочки из функционально-градиентного материала с учетом сдвиговых деформаций. В качестве нагрузки выступало внутреннее и внешнее давление. Для решения задач при произвольном законе распределения свойств материала по толщине оболочки была выведена система дифференциальных уравнений второго порядка. В ее основу легли энергетический метод и процедура осреднения характеристик материала по толщине оболочки.

Распространение трещины по линии раздела сред в составном кусочно-однородном материале со структурой рассматривается в работе [63]. Под действием касательного (сдвигового) напряжения, приложенного на бесконечности, реализуется вторая мода разрушения. Подробно анализируется

случай, когда упругие характеристики материалов совпадают, а прочностные существенно различаются. Дано описание построения диаграммы квазихрупкого разрушения для плосконапряженного состояния и плоского деформированного состояния при поперечном сдвиге.

В работе [107] выполнен расчет на прочность железобетонных конструкций оболочечного типа, внешнее армирование которых было выполнено композитными материалами. Теоретические результаты расчета были подтверждены экспериментально. Проведен анализ прочности оболочечных железобетонных сооружений, усиление которых осуществлялось посредством внешнего армирования на основании углеродных лент и углеродных композитных ламелей при учете поперечных сил.

В работе [126] был рассчитан гиперболический параболоид при различных условиях закрепления. В данном алгоритме расчета использовались соотношения теории оболочек, учитывающих геометрическую нелинейность и сдвиговые деформации. Приведены различные виды конструкций оболочечного типа. Нелинейная задача решается методом продолжения решения по параметру, решение краевой задачи основывается на вариационно-разностном методе.

В [91] представлено математическое описание тонкостенного стержня открытого профиля, в котором показано влияние сдвиговых перемещений и углов поворота поперечных сечений на величину и характер распределения внутренних нагрузок. Для динамического расчета оболочечных конструкций МКЭ получены математические формулы, которые позволяют определять матрицы масс тонкостенного стержня открытого профиля.

В работе [6] представлены новые математические модели, предназначенные для прогнозирования НДС композитных упругих элементов конструкций летательных аппаратов и учитывающие деформации поперечного сдвига и влияние механических воздействий. При помощи указанных систем уравнений обеспечивается возможность получения решений задач прочности и устойчивости объектов математического моделирования с заданной точностью.

Новая двумерная математическая модель, описывающая НДС композитного стержневого упругого элемента конструкции космического аппарата с учетом сдвиговых деформаций, которые возникают в упругом теле при деформировании, зависимость напряженно-деформированного состояния оболочки от термических и механических воздействий представлена в работе [32]. С целью определения вида и параметров колебаний КЭ конструкции космического аппарата была реализована система разрешающих уравнений.

В работе [185] разработано семейство конечных элементов для анализа сморщивания тонких пленок на податливых подложках.

В [89] проведен анализ конструктивных вариантов исполнения трехслойных элементов конструкций в виде пластин и оболочек с наполнителем, относящимся к классу трансверсально-мягких, и с внешними слоями, имеющими на внешнем контуре подкрепляющие стержни, предназначенные для обеспечения передачи нагрузки на несущие слои при взаимодействии с другими элементами конструкций.

Модельные задачи равнонапряженного армирования подвергаемых цилиндрическому изгибу прямоугольных удлиненных пластин при различных типах нагружения одной из продольных кромок и жестком закреплении другой рассмотрены в [136]. Выявлены краевые эффекты, возникающие при наличии приложенного к кромке крутящего момента, который оказывает существенное влияние не только на напряженно-деформированное состояние связующего материала, но и на структуру армирования.

В [76] рассмотрены основные уравнения и соотношения геометрически нелинейной теории трансверсально-изотропных гибких длинных пологих некруговых цилиндрических оболочек типа Тимошенко, а на их основе построено решающее уравнение относительно прогиба оболочки. Исследовано деформирование длинных некруговых цилиндрических панелей в закритической области.

В работе [120] изучается разрешимость геометрически нелинейных, физически линейных краевых задач для упругих пологих изотропных однородных

оболочек с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П.Тимошенко. Метод исследования состоит в сведении исходной системы уравнений равновесия к одному нелинейному дифференциальному уравнению относительно прогиба.

Закономерности, оказывающие влияние на равновесие и функционал энергии пластины в зависимости от возмущения поверхности, которая представлена в виде наклонной трещины, исследуются в работе [73]. Математическая модель берегов трещины с условием взаимного непроникания описана неравенствами, которые определяют нелинейность задачи. В ходе исследования была определена корреляция между решением задачи и возмущением длины трещины.

Анализ процитированных выше работ, использующих сдвиговую теорию, показывает, что на данный момент для расчета конструкций оболочечного типа в различных постановках (линейной и нелинейной) нашли применение КЭ различной конфигурации, различающихся между собой геометрией, количеством степеней свободы в узлах, интерполяционными функциями, ориентацией на срединной поверхности. Исследования, проведенные авторами научных работ по расчету НДС оболочек различной конфигурации, показывают, что разработанные на данный момент КЭ позволяют решать достаточно широкий круг задач.

В подавляющем большинстве работ отсчет угла поворота нормали осуществляется от исходного состояния [22; 105], в то же время если рассматривать процесс деформации во времени, то более логично рассматривать вариант, когда угол отсчитывается от деформированного состояния нормали [57].

В настоящее время не решена проблема смещения КЭ как жесткого целого. Алгоритм, позволяющий в неявном виде при расчетах учитывать жесткие смещения, освещается в работах [28; 35; 188], но он не позволяет решить данную проблему при использовании криволинейной системы координат, поэтому не может претендовать на общее решение проблемы.

При использовании декартовой системы координат проблема учета смещения элемента как жесткого тела отсутствует, она возникает при

использовании криволинейной системы координат. Однако, сама оболочка как физическое тело представляет собой криволинейную поверхность и вполне естественно использовать криволинейную систему координат (цилиндрическую, сферическую, тороидальную), так как в декартовой системе координат такие поверхности задавать не вполне удобно [53]. Для учета смещения элемента как жесткого целого в криволинейной системе координат необходимо использовать векторную аппроксимацию полей перемещений, в декартовой системе координат можно применять скалярную аппроксимацию, как более простую.

В работах [52; 83; 84] проблему смещения КЭ как жесткого целого предложено решать в неявном виде при использовании инвариантной интерполяционной процедуры полей перемещений. В научной школе Волгоградского государственного аграрного университета исследуется учет смещения КЭ как жесткого целого при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений [прил. А, Б]. Однако, вопрос определения НДС тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, допускающих жесткое смещение в процессе эксплуатации изучен недостаточно, что требует дополнительного исследования.

Выводы по первой главе

1. Классическая теория пластин и оболочек проверена временем и для ее использования имеется широкое поле практического применения. Однако физическую стройность классической теории нарушает необходимость введения поперечной силы Кирхгофа. Избавиться от этого недостатка можно путем учета деформаций поперечного сдвига. Сдвиговая теория более точна и физически последовательнее классической теории.

2. Актуальными являются задачи исследования НДС тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, срединная поверхность которых задана в криволинейных координатах, допускающих жесткое смещение.

3. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВАНИИ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА-ЛЯВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ НОВОЖИЛОВА В.В.

2.1. Геометрия срединной поверхности до деформирования

Срединная поверхность произвольной оболочки может быть задана радиус-вектором

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}, \quad (2.1)$$

где $z = z(x, y)$ – уравнение поверхности в декартовой системе координат.

Ковариантные векторы базиса могут быть получены дифференцированием (2.1) по криволинейным координатам

$$\vec{a}_1^o = \vec{R}_{,\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_2^o = \vec{R}_{,\lambda_2}^o, \quad (2.2)$$

где λ_1, λ_2 – используемые криволинейные координаты.

Орт нормали может быть получен по формуле

$$\vec{a}^o = \frac{\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o}{\sqrt{a^o}}, \quad (2.3)$$

где a^o – детерминант метрического тензора.

Дифференцированием (2.2) получим производные векторов текущей точки поверхности

$$\vec{a}_{1,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_{1,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_1}^o. \quad (2.4)$$

В известной монографии академика Новожилова В. В. [86] производные базисных нормированных векторов (2.4) записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \vec{e}_{1,\lambda_1}^o &= -\frac{A_{1,\lambda_2}}{A_2} \vec{e}_2^o - \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_n^o; & \vec{e}_{1,\lambda_2}^o &= \frac{A_{2,\lambda_1}}{A_1} \vec{e}_2^o; \\ \vec{e}_{2,\lambda_1}^o &= \frac{A_{1,\lambda_2}}{A_2} \vec{e}_1^o; & \vec{e}_{2,\lambda_2}^o &= -\frac{A_{2,\lambda_1}}{A_1} \vec{e}_1^o - \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_n^o; \\ \vec{e}_{n,\lambda_1}^o &= \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_1^o; & \vec{e}_{n,\lambda_2}^o &= \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_2^o, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где A_1 и A_2 - параметры Ляме, R_1 и R_2 - радиусы главных кривизн.

Соотношения Коши в соответствии с [86] определяются выражениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \lambda_2} v^2 + \frac{v}{R_1}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1} v^1 + \frac{v}{R_2}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(\frac{v^1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{v^2}{A_2} \right), \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} - \frac{v^1}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \lambda_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} - \frac{v^2}{R_2} \right), \\ \kappa_{22} &= -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} - \frac{v^2}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} - \frac{v^1}{R_1} \right), \\ \kappa_{12} &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \lambda_2} \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1} \frac{\partial v}{\partial \lambda_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial v^1}{\partial \lambda_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \lambda_2} v^1 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial v^2}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \lambda_1} v^2 \right),\end{aligned}\quad (2.6)$$

где $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ - относительные удлинения и сдвиг срединной поверхности; $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}$ - искривления и кручение срединной поверхности оболочки в процессе деформирования; v^1, v^2, v - компоненты вектора перемещения по векторам локального базиса.

Уточненный вид основных соотношений зависит от формы срединной поверхности, от выбранных криволинейных координат и других исходных параметров.

Для эллиптического цилиндра радиус-вектор может быть записан в следующем виде [55]

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + b \cdot \cos(t)\vec{j} + c \cdot \sin(t)\vec{k}, \quad (2.7)$$

где b и c - полуоси поперечного сечения эллиптического цилиндра ($y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$), t - параметр, который отсчитывается от оси OZ против хода часовой стрелки.

Осуществляя поиск производных по глобальным координатам x и t , получим векторы текущей точки поверхности

$$\vec{a}_1^o = \vec{R}_{,x}^o = \vec{i};$$

$$\vec{a}_2^o = \vec{R}_{,t}^o = -b \cdot \sin(t) \vec{j} + c \cdot \cos(t) \vec{k}. \quad (2.8)$$

Выполним нормализацию векторов, входящих в соотношения (2.8)

$$\vec{e}_1^o = \vec{i}; \quad \vec{e}_2^o = \frac{-b \cdot \sin(t)}{\sqrt{c^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}} \vec{j} + \frac{c \cdot \cos(t)}{\sqrt{c^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}} \vec{k}. \quad (2.9)$$

Орт нормали к срединной поверхности вычисляется с помощью векторного произведения:

$$\vec{e}_n^o = \vec{e}_1^o \times \vec{e}_2^o;$$

$$\vec{e}_n^o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} & \frac{c \cdot \cos(t)}{d} \end{vmatrix} = \frac{-c \cdot \cos(t)}{d} \vec{j} + \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} \vec{k}, \quad (2.10)$$

где $d = \sqrt{c^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}$.

Таким образом орт нормали определится выражением

$$\vec{e}_n^o = \frac{-c \cdot \cos(t)}{\sqrt{c^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}} \vec{j} + \frac{-b \cdot \sin(t)}{\sqrt{c^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}} \vec{k}. \quad (2.11)$$

Дифференцируя (2.9) и (2.11) по x и t , получим производные ортов локального базиса

$$\vec{e}_{1,x}^o = 0; \quad \vec{e}_{1,t}^o = 0; \quad \vec{e}_{2,x}^o = 0; \quad \vec{e}_{n,x}^o = 0;$$

$$\vec{e}_{2,t}^o = \left(\frac{-b \cdot c^2 \cdot \cos(t)}{d^3} \right) \vec{j} + \left(\frac{-b^2 \cdot c \cdot \sin(t)}{d^3} \right) \vec{k}; \quad (2.12)$$

$$\vec{e}_{n,t}^o = \left(\frac{b^2 \cdot c \cdot \sin(t)}{d^3} \right) \vec{j} + \left(\frac{-b \cdot c^2 \cdot \cos(t)}{d^3} \right) \vec{k}.$$

Воспользовавшись соотношениями (2.12), составим матричные зависимости

$$\{\vec{e}^o\} = [p^o] \{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}_{,x}^o\} = [p_{,x}^o] \{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}_{,t}^o\} = [p_{,t}^o] \{\vec{l}\}, \quad (2.13)$$

где

$$\{\vec{e}^o\}^T = \{\vec{e}_1^o \vec{e}_2^o \vec{e}_n^o\}; \quad \{\vec{e}_{,x}^o\}^T = \{\vec{e}_{1,x}^o \vec{e}_{2,x}^o \vec{e}_{n,x}^o\}; \quad \{\vec{e}_{,t}^o\}^T = \{\vec{e}_{1,t}^o \vec{e}_{2,t}^o \vec{e}_{n,t}^o\}; \quad \{\vec{l}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\};$$

$$[p^o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} & \frac{c \cdot \cos(t)}{d} \\ 0 & \frac{-c \cdot \cos(t)}{d} & \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} \end{bmatrix}; \quad [p_{,x}^o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[p_{,t}^o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b \cdot c^2 \cdot \cos(t)}{d^3} & \frac{-b^2 \cdot c \cdot \sin(t)}{d^3} \\ 0 & \frac{-b^2 \cdot c \cdot \sin(t)}{d^3} & \frac{-b \cdot c^2 \cdot \cos(t)}{d^3} \end{bmatrix}.$$

Из (2.13) можно получить следующее обратное матричное соотношение

$$\{\vec{l}\} = [p^o]^{-1} \{\vec{e}^o\}, \quad (2.14)$$

$$\text{где } [p^o]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} & \frac{-c \cdot \cos(t)}{d} \\ 0 & \frac{c \cdot \cos(t)}{d} & \frac{-b \cdot \sin(t)}{d} \end{bmatrix}.$$

Производные векторов текущей точки поверхности с учетом зависимостей (2.14) можно записать с помощью матричных соотношений

$$\{\vec{e}_{,x}^o\} = [p_{,x}^o][p^o]^{-1} \{\vec{e}^o\} = [n_1] \{\vec{e}^o\};$$

$$\{\vec{e}_{,t}^o\} = [p_{,t}^o][p^o]^{-1} \{\vec{e}^o\} = [n_2] \{\vec{e}^o\}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } [n_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[n_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b \cdot c^3 \cdot \cos^2(t) + c \cdot b^3 \cdot \sin^2(t)}{d^4} \\ 0 & \frac{-b^3 \cdot c \cdot \sin^2(t) - b \cdot c^3 \cdot \cos^2(t)}{d^4} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b \cdot c}{d^2} \\ 0 & \frac{-b \cdot c}{d^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2. Геометрия срединной поверхности в деформированном состоянии

При деформировании точка M^o , находящаяся на срединной поверхности, переходит в точку M , положение которой определится вектором перемещения

$$\vec{v} = v^1 \vec{e}_1^o + v^2 \vec{e}_2^o + v \vec{e}_n^o, \quad (2.16)$$

где v^1, v^2, v – компоненты вектора перемещения по векторам локального базиса.

Продифференцировав (2.16) по глобальным координатам x и t , получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= v_{,x}^1 \vec{e}_1^o + v^1 \vec{e}_{1,x}^o + v_{,x}^2 \vec{e}_2^o + v^2 \vec{e}_{2,x}^o + v_{,x} \vec{e}_n^o + v \vec{e}_{n,x}^o = v_{,x}^1 \vec{e}_1^o + v^1 (\vec{0}) + \\ &+ v_{,x}^2 \vec{e}_2^o + v^2 (\vec{0}) + v_{,x} \vec{e}_n^o + v (\vec{0}) = v_{,x}^1 \vec{e}_1^o + v_{,x}^2 \vec{e}_2^o + v_{,x} \vec{e}_n^o = t_x^1 \vec{e}_1^o + t_x^2 \vec{e}_2^o + t_x \vec{e}_n^o; \\ \vec{v}_{,t} &= v_{,t}^1 \vec{e}_1^o + v^1 \vec{e}_{1,t}^o + v_{,t}^2 \vec{e}_2^o + v^2 \vec{e}_{2,t}^o + v_{,t} \vec{e}_n^o + v \vec{e}_{n,t}^o = v_{,t}^1 \vec{e}_1^o + v^1 (\vec{0}) + \\ &+ v_{,t}^2 \vec{e}_2^o + v^2 k \vec{e}_n^o + v_{,t} \vec{e}_n^o + v (-k) \vec{e}_2^o = v_{,t}^1 \vec{e}_1^o + (v_{,t}^2 - vk) \vec{e}_2^o + \\ &+ (v^2 k + v_{,t}) \vec{e}_n^o = t_t^1 \vec{e}_1^o + t_t^2 \vec{e}_2^o + t_t \vec{e}_n^o; \\ \vec{v}_{,xx} &= v_{,xx}^1 \vec{e}_1^o + v_{,xx}^2 \vec{e}_2^o + v_{,xx} \vec{e}_n^o = t_{xx}^1 \vec{e}_1^o + t_{xx}^2 \vec{e}_2^o + t_{xx} \vec{e}_n^o; \\ \vec{v}_{,tt} &= t_{,tt}^1 \vec{e}_1^o + t_t^1 \vec{e}_{1,t}^o + t_{,tt}^2 \vec{e}_2^o + t_t^2 k \vec{e}_n^o + t_{,tt} \vec{e}_n^o + t_t \vec{e}_{n,t}^o = t_{,tt}^1 \vec{e}_1^o + (\vec{0}) + t_{,tt}^2 \vec{e}_2^o + \\ &+ t_{,tt}^2 \vec{e}_2^o + t_{,tt} \vec{e}_n^o + t_t (-k) \vec{e}_2^o = v_{,tt}^1 \vec{e}_1^o + (v_{,tt}^2 - v_{,t} k - vk_{,t}) \vec{e}_2^o + (v_{,t}^2 - vk) k \vec{e}_n^o + \\ &+ (v_{,t}^2 k + v^2 k_{,t} + v_{,tt}) \vec{e}_n^o + (v^2 k + v_{,t}) (-k \vec{e}_2^o) = v_{,tt}^1 \vec{e}_1^o + \\ &+ (v_{,tt}^2 - v_{,t} k - vk_{,t} - v^2 k^2 - v_{,t} k) \vec{e}_2^o + (v_{,t}^2 k - vk^2 + v_{,t}^2 k + v^2 k_{,t} + v_{,tt}) \vec{e}_n^o = \\ &= v_{,tt}^1 \vec{e}_1^o + (v_{,tt}^2 - 2v_{,t} k - vk_{,t} - v^2 k^2) \vec{e}_2^o + (v_{,tt} + 2v_{,t}^2 k - vk^2 + v^2 k_{,t}) \vec{e}_n^o; \\ \vec{v}_{,tx} &= v_{,tx}^1 \vec{e}_1^o + (v_{,tx}^2 - v_{,x} k) \vec{e}_2^o + (v_{,x}^2 k + v_{,tx}) \vec{e}_n^o = t_{tx}^1 \vec{e}_1^o + t_{tx}^2 \vec{e}_2^o + t_{tx} \vec{e}_n^o, \end{aligned}$$

где $k = bc/d^2$ – кривизна дуги поперечного сечения эллиптического цилиндра.

Компоненты производных вектора перемещения, входящие в (2.17), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} t_x^1 &= v_{,x}^1; \quad t_x^2 = v_{,x}^2; \quad t_x = v_{,x}; \\ t_t^1 &= v_{,t}^1; \quad t_t^2 = v_{,t}^2 - vk; \quad t_t = v^2 k + v_{,t}; \end{aligned}$$

$$t_{xx}^1 = v_{,xx}^1; \quad t_{xx}^2 = v_{,xx}^2; \quad t_{xx} = v_{,xx}; \quad (2.18)$$

$$t_{tt}^1 = v_{,tt}^1; \quad t_{tt}^2 = v_{,tt}^2 - 2v_{,t}k - vk_{,t} - v^2k^2; \quad t_{tt} = v_{,tt} + 2v_{,t}^2k - vk^2 + v^2k_{,t};$$

$$t_{tx}^1 = v_{,tx}^1; \quad t_{tx}^2 = v_{,tx}^2 - v_{,x}k; \quad t_{tx} = v_{,x}^2k + v_{,tx}.$$

Траектория движения точки срединной поверхности M^0 к точке M в процессе деформирования определяется радиус-вектором \vec{R} (рис 2.1)

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}. \quad (2.19)$$

Определим векторы локального базиса в точке M , продифференцировав с учетом (2.18) выражение (2.19) по криволинейным координатам x и t

$$\vec{a}_1 = \vec{R}_{,x} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x} = \vec{a}_1^0 + t_x^1 \vec{e}_1^0 + t_x^2 \vec{e}_2^0 + t_x \vec{e}_n^0;$$

$$\vec{a}_2 = \vec{R}_{,t} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,t} = \vec{a}_2^0 + t_t^1 \vec{e}_1^0 + t_t^2 \vec{e}_2^0 + t_t \vec{e}_n^0. \quad (2.20)$$

Применяя векторное произведение, найдем орт нормали к поверхности в деформированном состоянии

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \quad (2.21)$$

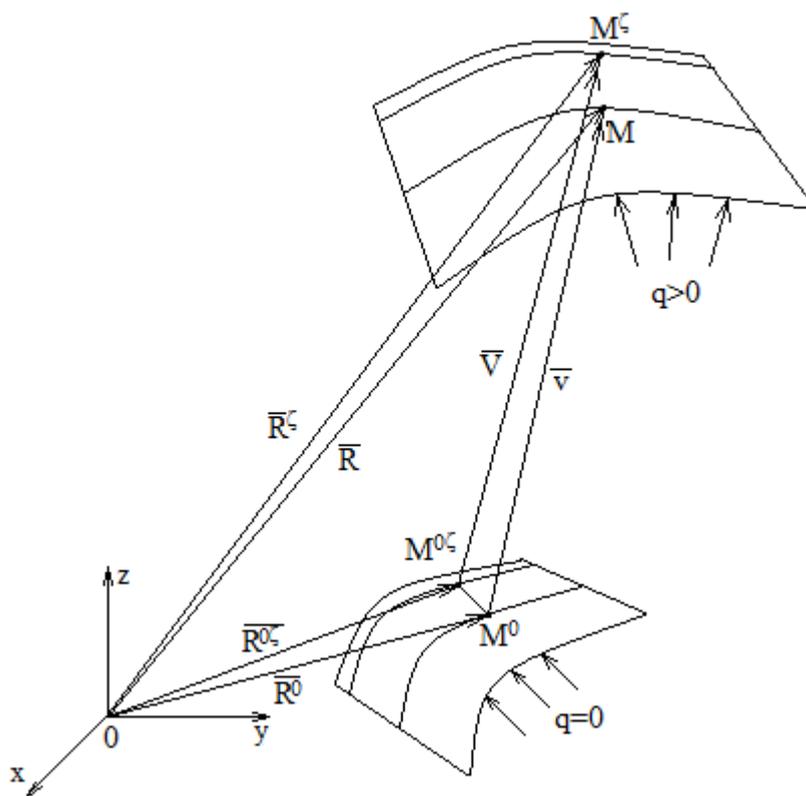


Рис. 2.1 - Схема перемещений точек M^0 и $M^{0\zeta}$ в процессе деформирования

Используя (2.20), вычислим векторное произведение

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = & (-t_x d - t_x t_t^2 + t_x^2 t_t) \vec{e}_1^o + (t_x t_t^1 - t_t - t_x^1 t_t) \vec{e}_2^o + \\ & + (d + t_x^1 d - t_x^2 t_t^1 + t_t^2 + t_x^1 t_t^2) \vec{e}_n^o. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пренебрегая произведениями многочленов $t_i^j t_i^j$ и $t_i^j t_i$, где $i = x, t$, а $j = 1..2$, окончательно получим

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = -t_x d \vec{e}_1^o - t_t \vec{e}_2^o + (d + t_x^1 d + t_t^2) \vec{e}_n^o. \quad (2.23)$$

Согласно формуле для вычисления длины вектора найдем

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{(-t_x d)^2 + (-t_t d)^2 + (d + t_x^1 d + t_t^2)^2} = d + t_x^1 d + t_t^2. \quad (2.24)$$

На основании соотношений (2.23) и (2.24), зависимость (2.21) запишется в следующем виде

$$\vec{e}_n = \frac{-t_x d \vec{e}_1^o - t_t \vec{e}_2^o + (d + t_x^1 d + t_t^2) \vec{e}_n^o}{d + t_x^1 d + t_t^2}. \quad (2.25)$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на d , получим

$$\vec{e}_n = \frac{-t_x \vec{e}_1^o - (t_t/d) \vec{e}_2^o + (1 + t_x^1 + t_t^2/d) \vec{e}_n^o}{1 + t_x^1 + t_t^2/d}. \quad (2.26)$$

Принимая во внимание приближенную формулу $1/(1 + \alpha) \approx 1 - \alpha$, запишем выражения для орта нормали в деформированном состоянии

$$\vec{e}_n = (-t_x \vec{e}_1^o - (t_t/d) \vec{e}_2^o + (1 + t_x^1 + t_t^2/d) \vec{e}_n^o)(1 - t_x^1 - t_t^2/d). \quad (2.27)$$

После преобразований окончательно получим

$$\vec{e}_n = -t_x \vec{e}_1^o - (t_t/d) \vec{e}_2^o + \vec{e}_n^o. \quad (2.28)$$

Дифференцированием (2.28) по криволинейным координатам x и t получим производные орта нормали

$$\begin{aligned} \vec{e}_{n,x} &= -v_{,xx} \vec{e}_1^o - \vec{e}_2^o (v_{,x}^2 k + v_{,tx})/d; \\ \vec{e}_{n,t} &= -v_{,xt} \vec{e}_1^o - \left(\frac{(v_{,t}^2 + v^2 k_{,t} + v_{,tt})d - t_1 d_{,t}}{d^2} - k \right) \vec{e}_2^o - \frac{t_t}{d} k \vec{e}_n^o, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где

$$d_{,t} = \frac{(b^2 - c^2) \sin 2t}{2d}; \quad k_{,t} = \frac{b \cdot c (c^2 - b^2) \sin(2t)}{d^4}. \quad (2.30)$$

Радиус-вектор $\vec{R}^{o\zeta}$ определяет положение точки $M^{o\zeta}$, которая находится на расстоянии ζ от срединной поверхности в исходном состоянии (рис. 2.1)

$$\vec{R}^{o\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{e}_n^o. \quad (2.31)$$

После деформации точка $M^{o\zeta}$ перейдет в точку M^ζ и ее положение определится радиус-вектором

$$\vec{R}^\zeta = \vec{R}^{o\zeta} + \vec{V}, \quad (2.32)$$

где \vec{V} – вектор, который определяет перемещение точки $M^{o\zeta}$.

Принимая во внимание гипотезу о прямой нормали можно записать следующее равенство

$$\zeta \vec{e}_n^o + \vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{e}_n. \quad (2.33)$$

Из (2.33) выразим вектор перемещения точки $M^{o\zeta}$

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{e}_n - \vec{e}_n^o). \quad (2.34)$$

Соотношения для деформаций в произвольном слое можно представить в следующем виде [86]

$$\varepsilon_{11}^\zeta = \varepsilon_{11} + \zeta \kappa_{11}; \quad \varepsilon_{22}^\zeta = \varepsilon_{22} + \zeta \kappa_{22}; \quad \varepsilon_{12}^\zeta = \varepsilon_{12} + \zeta \kappa_{12}. \quad (2.35)$$

Входящие в (2.35) деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и искривления $\kappa_{\alpha\beta}$ точки срединной поверхности определяются соотношениями (2.36), которые получены на основании зависимостей (2.6). Если в качестве криволинейных координат λ_1 и λ_2 выбрать осевую координату x и t - параметр эллипса, являющегося поперечным сечением эллиптического цилиндра, то соотношения Коши примут следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial v^1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial t} - kv; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v^1}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial x}; \\ \kappa_{11} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial v^2}{\partial x} k; \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\kappa_{22} = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{A_2} \right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{1}{A_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial t} k - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} v^2,$$

где $A_2 = \sqrt{(\varphi_{,t}')^2 + (\psi_{,t}')^2}$; $\varphi = b \cdot \cos(t)$; $\psi = c \cdot \sin(t)$.

2.3. Физические соотношения произвольных оболочек

Соотношения между напряжениями и деформациями произвольного слоя согласно [86] могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11}^{\zeta} + \mu\varepsilon_{22}^{\zeta}); \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22}^{\zeta} + \mu\varepsilon_{11}^{\zeta}); \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12}^{\zeta},\end{aligned}\tag{2.36^a}$$

где E - модуль Юнга, μ - коэффициент Пуассона.

2.4. Общий алгоритм расчета методом конечных элементов

Метод конечных элементов основан на том, что реальный объект заменяется математической моделью, а его НДС описывается системой алгебраических уравнений.

Суть метода заключается в том, что конструкция разбивается на некоторые, конечные по размерам части, которые называются конечными элементами. Процесс разбивки называется дискретизацией.

В дискретной модели взаимодействие между КЭ происходит только в узловых точках, посредством независимых параметров.

Основные этапы статического расчета конструкции методом конечных элементов.

1. Дискретизация. Составляется конечно-элементная схема дискретной модели конструкции. Рассматриваемая область разбивается на конечные элементы, взаимодействующие между собой узловыми параметрами (степенями свободы). Размеры и форма КЭ могут быть различны. Выбор типа, формы и

размера КЭ зависит от конфигурации и НДС исследуемого тела, характера внешних воздействий, точности вычислений.

2. Выбор узловых неизвестных. В качестве степеней свободы выступают перемещения и их производные. Число степеней свободы определяется общим числом узловых неизвестных.

3. Построение матрицы жесткости и вектора внешней нагрузки. Перемещения внутренней точки КЭ определяются посредством узловых перемещений через аппроксимирующие функции. Для получения матрицы жесткости и вектора внешней нагрузки дискретного элемента минимизируем функционал, выражающий потенциальную энергию деформации. Матрица индексов позволяет сформировать матрицу жесткости и вектор внешней нагрузки всей конструкции, используя матрицы жесткости и столбцы внешней нагрузки отдельных КЭ.

4. Решение системы уравнений равновесия. Общая система уравнений равновесия всей конечно-элементной модели исследуемого деформируемого тела является системой алгебраических уравнений, которые имеют ленточную структуру. При решении линейных задач используются прямые методы: Гаусса, разложения Холецкого, Гивенса, Хаусхолдера, блочного разложения. В нелинейных задачах используются итерационные методы: Якоби, Гаусса-Зейделя, градиентные методы.

5. Вычисление значений перемещений внутренних точек КЭ через значения узловых параметров. Узловые компоненты вектора перемещения будут получены в результате решения системы алгебраических уравнений. Поиск перемещений внутренней точки КЭ осуществляется на основании узловых значений перемещений посредством аппроксимирующих функций.

2.5. Скалярная интерполяция полей перемещений при использовании матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента 72x72

При скалярной интерполяции искомых величин каждая из компонент вектора перемещения внутренней точки КЭ аппроксимируется через узловые перемещения этой же компоненты [14, 26, 29, 57, 98, 99, 188].

$$v^1 = \{\chi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^{1l}\}_{24 \times 1}, \quad v^2 = \{\chi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^{2l}\}_{24 \times 1}, \quad v = \{\chi\}_{1 \times 24}^T \{v_y^l\}_{24 \times 1}, \quad (2.36 \text{ б})$$

где $\{\chi\}_{1 \times 24}^T$ - строка функций формы, $\{m_y^l\}_{1 \times 24}^T = \{m^i \dots m^l m_{,\alpha}^i \dots m_{,\alpha}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l m_{,\alpha\alpha}^i \dots m_{,\alpha\alpha}^l m_{,\beta\beta}^i \dots m_{,\beta\beta}^l m_{,\alpha\beta}^i \dots m_{,\alpha\beta}^l\}$,

m принимает значения v^1 , v^2 или v .

В конечно-элементных расчетах часто применяются четырехугольные элементы, при компоновке матрицы жесткости которых, используется процедура интерполяции отдельных компонент вектора перемещений [109].

Конечным элементом является четырехугольная область оболочки, произвольно расположенная на ее срединной поверхности с узлами i, j, k, l . Криволинейный конечный (рис. 2.2) элемент отображается на квадрат (рис. 2.3) с локальными координатами α и β , введенными для выполнения численного интегрирования.

Зависимость, которая связывает глобальные координаты x , t и локальные координаты α , β точки, находящейся на срединной поверхности КЭ, описывается формулами

$$x = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} X^i + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} X^j + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} X^k + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} X^l;$$

$$t = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} T^i + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} T^j + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} T^k + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} T^l, \quad (2.37)$$

где $X^i \dots X^l, T^i \dots T^l$ – узловые значения глобальных координат.

Получить первые и вторые производные глобальных координат в локальной системе можно дифференцированием соотношений (2.37) по α и β

$$\begin{aligned}
x_{,\alpha} &= -\frac{1-\beta}{4}X^i + \frac{1-\beta}{4}X^j + \frac{1+\beta}{4}X^k - \frac{1+\beta}{4}X^l; \\
x_{,\beta} &= -\frac{1-\alpha}{4}X^i - \frac{1+\alpha}{4}X^j + \frac{1+\alpha}{4}X^k + \frac{1-\alpha}{4}X^l; \\
x_{,\alpha\beta} &= x_{,\beta\alpha} = \frac{1}{4}X^i - \frac{1}{4}X^j + \frac{1}{4}X^k - \frac{1}{4}X^l; \\
t_{,\alpha} &= -\frac{1-\beta}{4}T^i + \frac{1-\beta}{4}T^j + \frac{1+\beta}{4}T^k - \frac{1+\beta}{4}T^l; \\
t_{,\beta} &= -\frac{1-\alpha}{4}T^i - \frac{1+\alpha}{4}T^j + \frac{1+\alpha}{4}T^k + \frac{1-\alpha}{4}T^l; \\
t_{,\alpha\beta} &= t_{,\beta\alpha} = \frac{1}{4}T^i - \frac{1}{4}T^j + \frac{1}{4}T^k - \frac{1}{4}T^l; \\
x_{,\alpha\alpha} &= x_{,\beta\beta} = t_{,\alpha\alpha} = t_{,\beta\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Для удобства дальнейшего изложения представим соотношения (2.37) и (2.38) в матричном виде

$$x = \{h\}^T \{X_y\}; \quad t = \{h\}^T \{T_y\}; \tag{2.39}$$

$$x_{,\alpha} = \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\}; \quad x_{,\beta} = \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\}; \quad t_{,\alpha} = \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\}; \quad t_{,\beta} = \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\},$$

$$x_{,\alpha\beta} = x_{,\beta\alpha} = \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{X_y\}; \quad t_{,\alpha\beta} = t_{,\beta\alpha} = \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{T_y\}, \tag{2.40}$$

где
$$\{h\}^T = \left\{ \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2}; \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2}; \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2}; \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} \right\};$$

$$\{X_y\}^T = \{X^i X^j X^k X^l\}; \quad \{T_y\}^T = \{T^i T^j T^k T^l\};$$

$$\{h_{,\alpha}\}^T = \left\{ -\frac{1-\beta}{4}; \frac{1-\beta}{4}; \frac{1+\beta}{4}; -\frac{1+\beta}{4} \right\};$$

$$\{h_{,\beta}\}^T = \left\{ -\frac{1-\alpha}{4}; -\frac{1+\alpha}{4}; \frac{1+\alpha}{4}; \frac{1-\alpha}{4} \right\}.$$

Преобразуем выражение (2.39) к следующему виду

$$x - \{h\}^T \{X_y\} = 0; \quad t - \{h\}^T \{T_y\} = 0. \tag{2.41}$$

Дифференцированием выражения (2.41) по координатам x и t можно получить следующие соотношения

$$\begin{aligned}
1 - \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \alpha_{,x} - \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \beta_{,x} &= 0; \\
0 - \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} \alpha_{,x} - \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,x} &= 0; \\
0 - \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \alpha_{,t} - \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \beta_{,t} &= 0; \\
1 - \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} \alpha_{,t} - \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,t} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

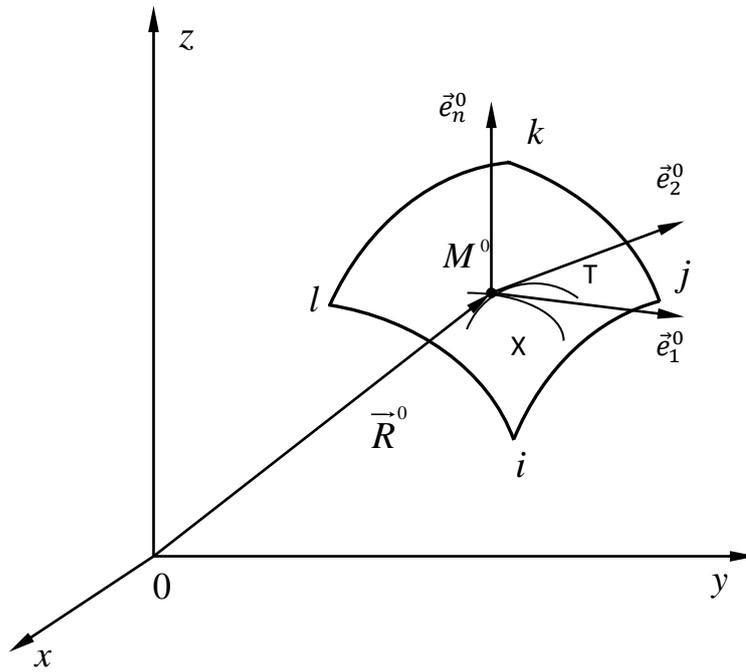


Рис. 2.2 - Криволинейный конечный элемент в глобальной системе координат

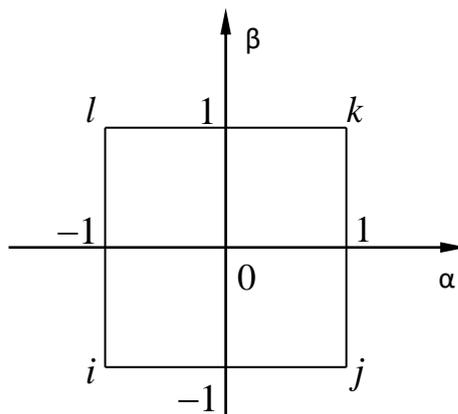


Рис. 2.3 - Конечный элемент в локальной системе координат

Запишем равенства (2.42) в матричном виде

$$[R] \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; [R] \begin{Bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (2.43)$$

$$\text{где } [R] = \begin{bmatrix} \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} & \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \\ \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} & \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} \end{bmatrix}.$$

Производные локальных координат в глобальной системе запишутся следующим образом

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{Bmatrix} = [R]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$\text{где } \det R = \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} - \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\};$$

$$[R]^{-1} = \frac{1}{\det R} \begin{bmatrix} \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} & -\{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \\ -\{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} & \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы в правых частях равенств (2.44) и воспользовавшись соотношениями (2.40), получим производные локальных координат по глобальным координатам

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\{h_{,\beta}\}^T \{T_y\}}{\det R} = \frac{t_{,\beta}}{\det R}; \quad \alpha_t = \frac{-\{h_{,\beta}\}^T \{X_y\}}{\det R} = \frac{-x_{,\beta}}{\det R}; \\ \beta_x &= \frac{-\{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\}}{\det R} = \frac{-t_{,\alpha}}{\det R}; \quad \beta_t = \frac{\{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\}}{\det R} = \frac{x_{,\alpha}}{\det R}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Продифференцировав (2.45) по координатам x и t найдем вторые производные локальных координат по глобальным

$$\begin{aligned} \alpha_{,xx} &= \frac{\left(\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \{T_y\} + \{h_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \{T_y\} \right) \det R - \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} (\det R)_{,x}}{(\det R)^2} = \\ &= \left(\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}}{\det R} - \frac{\{h_{,\beta}\}^T (\det R)_{,x}}{(\det R)^2} \right) \{T_y\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{,xt} &= \frac{\left(\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\{T_y\} + \{h_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}\{T_y\}\right) \det R - \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\}(\det R)_{,t}}{(\det R)^2} = \\
&= \left(\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}}{\det R} - \frac{\{h_{,\beta}\}^T (\det R)_{,t}}{(\det R)^2}\right) \{T_y\}; \\
\beta_{,xx} &= \frac{\left(-\{h_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\{T_y\} + \{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,x}\{T_y\}\right) \det R + \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\}(\det R)_{,x}}{(\det R)^2} = \\
&= \left(-\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,x}}{\det R} + \frac{\{h_{,\alpha}\}^T (\det R)_{,x}}{(\det R)^2}\right) \{T_y\}; \tag{2.46} \\
\beta_{,xt} &= \frac{\left(-\{h_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}\{T_y\} - \{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,t}\{T_y\}\right) \det R + \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\}(\det R)_{,t}}{(\det R)^2} = \\
&= \left(-\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,t}}{\det R} + \frac{\{h_{,\alpha}\}^T (\det R)_{,t}}{(\det R)^2}\right) \{T_y\}; \\
\alpha_{,tt} &= \frac{\left(-\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\{X_y\} + \{h_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}\{X_y\}\right) \det R - \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\}(\det R)_{,t}}{(\det R)^2} = \\
&= \left(-\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}}{\det R} + \frac{\{h_{,\beta}\}^T (\det R)_{,t}}{(\det R)^2}\right) \{X_y\}; \\
\beta_{,tt} &= \frac{\left(\{h_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}\{X_y\} + \{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,t}\{X_y\}\right) \det R + \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\}(\det R)_{,t}}{(\det R)^2} = \\
&= \left(\frac{\{h_{,\alpha\beta}\}^T \beta_{,t}}{\det R} - \frac{\{h_{,\alpha}\}^T (\det R)_{,t}}{(\det R)^2}\right) \{X_y\}.
\end{aligned}$$

Используя соотношения (2.40), запишем производные для $\det R$ по x и t

$$\begin{aligned}
(\det R)_{,x} &= \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,x} + \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{T_y\} \alpha_{,x} - \\
&- \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} \alpha_{,x} - \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,x} = x_{,\alpha\beta t, \beta} \beta_{,x} + \\
&+ x_{,\alpha t, \alpha\beta} \alpha_{,x} - x_{,\alpha\beta t, \alpha} \alpha_{,x} - x_{,\beta t, \alpha\beta} \beta_{,x}; \tag{2.47}
\end{aligned}$$

$$(\det R)_{,t} = \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,t} + \{h_{,\alpha}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{T_y\} \alpha_{,t} -$$

$$-\{h_{,\alpha\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha}\}^T \{T_y\} \alpha_{,t} - \{h_{,\beta}\}^T \{X_y\} \{h_{,\alpha\beta}\}^T \{T_y\} \beta_{,t} = x_{,\alpha\beta} t_{,\beta} \beta_{,t} + \\ + x_{,\alpha} t_{,\alpha\beta} \alpha_{,t} - x_{,\alpha\beta} t_{,\alpha} \alpha_{,t} - x_{,\beta} t_{,\alpha\beta} \beta_{,t}.$$

Столбец узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат был выбран в следующем виде

$$\{U_y^l\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{v_y^{1l}\}^T \\ \{v_y^{2l}\}^T \\ \{v_y^l\}^T \end{matrix} \right\}; \quad \{U_y^r\}^T = \left\{ \begin{matrix} \{v_y^{1r}\}^T \\ \{v_y^{2r}\}^T \\ \{v_y^r\}^T \end{matrix} \right\}; \quad (2.48)$$

$$\{m_y^l\}^T = \{m^i \dots m^l m_{,\alpha}^i \dots m_{,\alpha}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l m_{,\alpha\alpha}^i \dots m_{,\alpha\alpha}^l m_{,\beta\beta}^i \dots m_{,\beta\beta}^l m_{,\alpha\beta}^i \dots m_{,\alpha\beta}^l\};$$

$$\{m_y^r\}^T = \{m^i \dots m^l m_{,x}^i \dots m_{,x}^l m_{,t}^i \dots m_{,t}^l m_{,xx}^i \dots m_{,xx}^l m_{,tt}^i \dots m_{,tt}^l m_{,xt}^i \dots m_{,xt}^l\},$$

где m - это первая, вторая, третья координата вектора перемещения (v^1, v^2 или v).

Выразим перемещения внутренней точки четырехузлового элемента через векторы узловых перемещений

$$m = \begin{matrix} \{\chi\}^T \\ 1 \times 24 \end{matrix} \begin{matrix} \{m_y^l\} \\ 24 \times 1 \end{matrix}, \quad (2.49)$$

где $\{\chi\}^T = \{\chi_1 \dots \chi_{24}\}$ - матрица-строка, которая составлена из полиномов Эрмита пятой степени.

Представим соотношение (2.49) в развернутом виде

$$m = f_1(\alpha) f_1(\beta) m^i + f_2(\alpha) f_1(\beta) m^j + f_2(\alpha) f_2(\beta) m^k + f_1(\alpha) f_2(\beta) m^l + \\ + f_3(\alpha) f_1(\beta) m_{,\alpha}^i + f_4(\alpha) f_1(\beta) m_{,\alpha}^j + f_4(\alpha) f_2(\beta) m_{,\alpha}^k + f_3(\alpha) f_2(\beta) m_{,\alpha}^l + \\ + f_1(\alpha) f_3(\beta) m_{,\beta}^i + f_2(\alpha) f_3(\beta) m_{,\beta}^j + f_2(\alpha) f_4(\beta) m_{,\beta}^k + f_1(\alpha) f_4(\beta) m_{,\beta}^l + \quad (2.50) \\ + f_5(\alpha) f_1(\beta) m_{,\alpha\alpha}^i + f_6(\alpha) f_1(\beta) m_{,\alpha\alpha}^j + f_6(\alpha) f_2(\beta) m_{,\alpha\alpha}^k + f_5(\alpha) f_2(\beta) m_{,\alpha\alpha}^l + \\ + f_1(\alpha) f_5(\beta) m_{,\beta\beta}^i + f_2(\alpha) f_5(\beta) m_{,\beta\beta}^j + f_2(\alpha) f_6(\beta) m_{,\beta\beta}^k + f_1(\alpha) f_6(\beta) m_{,\beta\beta}^l + \\ + f_3(\alpha) f_3(\beta) m_{,\alpha\beta}^i + f_4(\alpha) f_3(\beta) m_{,\alpha\beta}^j + f_4(\alpha) f_4(\beta) m_{,\alpha\beta}^k + f_3(\alpha) f_4(\beta) m_{,\alpha\beta}^l,$$

где f_1, \dots, f_6 – полиномы Эрмита пятой степени.

$$\begin{aligned}
f_1 &= (-15q + 10q^3 - 3q^5 + 8)/16; \quad f_2 = (15q - 10q^3 + 3q^5 + 8)/16; \\
f_3 &= (5 - 7q - 6q^2 + 10q^3 + q^4 - 3q^5)/16; \\
f_4 &= (-5 - 7q + 6q^2 + 10q^3 - q^4 - 3q^5)/16; \\
f_5 &= (1 - q - 2q^2 + 2q^3 + q^4 - q^5)/16; \\
f_6 &= (1 + q - 2q^2 - 2q^3 + q^4 + q^5)/16,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

где q принимает значения локальных координат α или β .

Продифференцировав соотношение (2.49) по глобальным координатам x и t , найдем первые и вторые производные компонент вектора перемещения

$$\begin{aligned}
m_{,x} &= \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{m_y^{\text{л}}\}; \quad m_{,t} = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{m_y^{\text{л}}\}; \\
m_{,xx} &= \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) \{m_y^{\text{л}}\}; \\
m_{,tt} &= \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) \{m_y^{\text{л}}\}; \\
m_{,xt} &= \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \right. \\
&\quad \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) \{m_y^{\text{л}}\}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Используя соотношение (2.49), запишем связь между компонентами вектора перемещений внутри элемента и соответствующими компонентами в его узлах

$$\{U\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 72} \{U_y^{\text{л}}\}_{72 \times 1}, \tag{2.53}$$

$$\text{где } \{U\}_{1 \times 3}^T = \{v^1 v^2 v\}, \quad [A]_{3 \times 72} = \begin{bmatrix} \{\chi\}^T_{1 \times 24} & \{0\}_{1 \times 24} & \{0\}_{1 \times 24} \\ \{0\}_{1 \times 24} & \{\chi\}^T_{1 \times 24} & \{0\}_{1 \times 24} \\ \{0\}_{1 \times 24} & \{0\}_{1 \times 24} & \{\chi\}^T_{1 \times 24} \end{bmatrix}.$$

Введем матричные обозначения

$\{\varepsilon^\zeta\}^T = \{\varepsilon_{11}^\zeta \quad \varepsilon_{22}^\zeta \quad \varepsilon_{12}^\zeta\}$; $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{12}\}$ – столбец деформаций и столбец напряжений в слое оболочки, отстоящем от срединной поверхности на расстоянии ζ ;

$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{12} \varkappa_{11} \varkappa_{22} \varkappa_{12}\}$ – матрица-строка, содержащая деформации точки срединной поверхности; $\{P\}^T = \{P^1 P^2 P^3\}$ – матрица-столбец узловых усилий от действия внешней нагрузки.

На основании соотношений (2.36), (2.36^a), (2.50) запишем следующие зависимости

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U_y^l\}; \{\varepsilon^\zeta\} = [\Gamma] \{\varepsilon\}; \{\sigma\} = [C] \{\varepsilon^\zeta\}, \quad (2.54)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 72 & 72 \times 1 & 3 \times 1 & 3 \times 66 \times 1 & 3 \times 1 & 3 \times 3 & 3 \times 1 \end{matrix}$

где $[\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix}$; $[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} \end{bmatrix}$.

Элементы матрицы $[B]$ имеют вид

$$b_{11} = \{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,x}; \quad b_{12} = 0; \quad b_{13} = 0;$$

$$b_{21} = 0; \quad b_{22} = \frac{1}{A_2} \left(\{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,t} \right); \quad b_{23} = -k \{\chi\}_{1 \times 24}^T;$$

$$b_{31} = \frac{1}{A_2} \left(\{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,t} \right); \quad b_{32} = \{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,x}; \quad b_{33} = 0;$$

$$b_{41} = 0; \quad b_{42} = 0;$$

$$b_{43} = - \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}_{1 \times 24}^T (\alpha_{,x})^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}_{1 \times 24}^T (\beta_{,x})^2 + \{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,xx} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,xx} \right);$$

$$b_{51} = 0; \quad b_{52} = -\frac{1}{A_2} k \left(\{\chi_{,\alpha}\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}_{1 \times 24}^T \beta_{,t} \right) - \frac{1}{A_2} k_{,t} \{\chi\}_{1 \times 24}^T; \quad (2.55)$$

$$b_{53} = -\left(\frac{1}{A_2}\right)^2 \left(\left\{ \chi_{,\alpha\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T (\alpha_{,t})^2 + 2 \left\{ \chi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \left\{ \chi_{,\beta\beta} \right\}_{1 \times 24}^T (\beta_{,t})^2 + \left\{ \chi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,tt} + \left\{ \chi_{,\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,tt} \right) -$$

$$-\frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \right)_{,t} \left(\left\{ \chi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,t} + \left\{ \chi_{,\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,t} \right);$$

$$b_{61} = 0; \quad b_{62} = -k \left(\left\{ \chi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} + \left\{ \chi_{,\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,x} \right);$$

$$b_{63} = -\frac{1}{A_2} \left(\left\{ \chi_{,\alpha\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \left\{ \chi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \left\{ \chi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 24}^T \alpha_{,xt} + \left\{ \chi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,x} \alpha_{,t} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \chi_{,\beta\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \left\{ \chi_{,\beta} \right\}_{1 \times 24}^T \beta_{,xt} \right).$$

Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента формируются на основе функционала Лагранжа [99]

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ij}^{\zeta} \right\}^T \left\{ \sigma^{ij} \right\} dV = \int_F \left\{ U \right\}^T \left\{ P \right\} dF, \quad (2.56)$$

где

$\left\{ U \right\}^T = \{v^1 v^2 v\}$; $\left\{ P \right\}^T = \{p_1 p_2 p\}$ - столбцы компонент вектора перемещения и внешней нагрузки.

С учетом (2.54) функционал (2.56) может быть преобразован к виду

$$\left\{ U_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 72}^T \left[PR \right]_{72 \times 72}^T \int_V \left[B \right]_{72 \times 6}^T \left[\Gamma \right]_{6 \times 3}^T \left[C \right]_{3 \times 3} \left[\Gamma \right]_{3 \times 6} \left[B \right]_{6 \times 72} dV \left[PR \right]_{72 \times 72} \left\{ U_y^{\Gamma} \right\}_{72 \times 1} =$$

$$= \left\{ U_y^{\Gamma} \right\}_{1 \times 72}^T \left[PR \right]_{72 \times 72}^T \int_F \left[A \right]_{72 \times 3}^T \left\{ P \right\}_{3 \times 1} dF, \quad (2.57)$$

где $\left[PR \right]_{72 \times 72}$ - матрица перехода от столбца $\left\{ U_y^u \right\}$ к столбцу $\left\{ U_y^{\Gamma} \right\}$.

В результате минимизации (2.57) по $\left\{ U_y^{\Gamma} \right\}^T$ можно получить следующее матричное выражение

$$\left[K^{\Gamma} \right]_{72 \times 72} \left\{ U_y^{\Gamma} \right\}_{72 \times 1} = \left[R^{\Gamma} \right]_{72 \times 1}, \quad (2.58)$$

где $[K^I] = [PR]^T \int_V [B]^T [\Gamma]^T [C] [\Gamma] [B] dV [PR]$ - матрица жесткости;

$[R^I] = [PR]^T \int_F [A]^T \{P\} dF$ - столбец узловых усилий четырехугольного

конечного элемента в глобальной системе координат.

Интегрирование по объему конечного элемента выполняем по формуле

$$[K^I] = \int_V [B]^T \left(\int_{-l/2}^{l/2} [\Gamma]^T [C] [\Gamma] d\zeta \right) [B] dF, \quad (2.59)$$

где l - толщина оболочки. На основании формулы Симпсона [18] было осуществлено интегрирование по толщине оболочки

$$\int_{-l/2}^{l/2} f(\zeta) d\zeta = \frac{l}{6k} [y_0 + y_{2k} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1})], \quad (2.60)$$

где $n = 2k$ - число частей, на которые разбивается отрезок $[-l/2; l/2]$.

При численном интегрировании конечного элемента по площади применялась квадратурная формула Гаусса [18]

$$\begin{aligned} \iint_F f(x, t) dXdT &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta)) \times |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j f[x(\alpha_i, \beta_j), t(\alpha_i, \beta_j)] |J(\alpha_i, \beta_j)|, \end{aligned} \quad (2.61)$$

где a, a_j - весовые коэффициенты; α_i, β_j - координаты; n^2 - количество точек интегрирования; $|J(\alpha_i, \beta_j)|$ - Якобиан.

Чтобы получить матрицу жесткости и вектор внешней нагрузки в глобальной системе координат используется матрица перехода $[PR]$, формирование которой происходит на основе соотношений

$$\begin{aligned}
v_{,\alpha}^{1w} &= v_{,x}^{1w} X_{,\alpha}^w + v_{,t}^{1w} T_{,\alpha}^w; & v_{,\beta}^{1w} &= v_{,x}^{1w} X_{,\beta}^w + v_{,t}^{1w} T_{,\beta}^w; \\
v_{,\alpha}^{2w} &= v_{,x}^{2w} X_{,\alpha}^w + v_{,t}^{2w} T_{,\alpha}^w; & v_{,\beta}^{2w} &= v_{,x}^{2w} X_{,\beta}^w + v_{,t}^{2w} T_{,\beta}^w; \\
v_{,\alpha}^w &= v_{,x}^w X_{,\alpha}^w + v_{,t}^w T_{,\alpha}^w; & v_{,\beta}^w &= v_{,x}^w X_{,\beta}^w + v_{,t}^w T_{,\beta}^w; \\
v_{,\alpha\alpha}^{1w} &= v_{,xx}^{1w} (X_{,\alpha}^w)^2 + 2v_{,xt}^{1w} X_{,\alpha}^w T_{,\alpha}^w + v_{,tt}^{1w} (T_{,\alpha}^w)^2; \\
v_{,\alpha\alpha}^{2w} &= v_{,xx}^{2w} (X_{,\alpha}^w)^2 + 2v_{,xt}^{2w} X_{,\alpha}^w T_{,\alpha}^w + v_{,tt}^{2w} (T_{,\alpha}^w)^2; \\
v_{,\alpha\alpha}^w &= v_{,xx}^w (X_{,\alpha}^w)^2 + 2v_{,xt}^w X_{,\alpha}^w T_{,\alpha}^w + v_{,tt}^w (T_{,\alpha}^w)^2; \\
v_{,\beta\beta}^{1w} &= v_{,xx}^{1w} (X_{,\beta}^w)^2 + 2v_{,xt}^{1w} X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w + v_{,tt}^{1w} (T_{,\beta}^w)^2; \\
v_{,\beta\beta}^{2w} &= v_{,xx}^{2w} (X_{,\beta}^w)^2 + 2v_{,xt}^{2w} X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w + v_{,tt}^{2w} (T_{,\beta}^w)^2; \\
v_{,\beta\beta}^w &= v_{,xx}^w (X_{,\beta}^w)^2 + 2v_{,xt}^w X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w + v_{,tt}^w (T_{,\beta}^w)^2; \\
v_{,\alpha\beta}^{1w} &= v_{,xx}^{1w} X_{,\alpha}^w X_{,\beta}^w + v_{,xt}^{1w} X_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,xt}^{1w} X_{,\beta}^w T_{,\alpha}^w + \\
&\quad + v_{,tt}^{1w} T_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,x}^{1w} X_{,\alpha\beta}^w + v_{,t}^{1w} T_{,\alpha\beta}^w; \\
v_{,\alpha\beta}^{2w} &= v_{,xx}^{2w} X_{,\alpha}^w X_{,\beta}^w + v_{,xt}^{2w} X_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,xt}^{2w} X_{,\beta}^w T_{,\alpha}^w + \\
&\quad + v_{,tt}^{2w} T_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,x}^{2w} X_{,\alpha\beta}^w + v_{,t}^{2w} T_{,\alpha\beta}^w; \\
v_{,\alpha\beta}^w &= v_{,xx}^w X_{,\alpha}^w X_{,\beta}^w + v_{,xt}^w X_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,xt}^w X_{,\beta}^w T_{,\alpha}^w + \\
&\quad + v_{,tt}^w T_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + v_{,x}^w X_{,\alpha\beta}^w + v_{,t}^w T_{,\alpha\beta}^w,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

где индекс w принимает значения i, j, k, l .

2.6. Матрица жесткости четырехузлового элемента 72x72 при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений

При векторной интерполяционной процедуре столбец векторных узловых неизвестных для четырехугольного элемента в локальной и глобальной системах координат будет определяться следующим образом [53]

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{v}_y^l \right\}_{1 \times 24}^T &= \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\alpha}^i \vec{v}_{,\alpha}^j \vec{v}_{,\alpha}^k \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \vec{v}_{,\beta}^j \vec{v}_{,\beta}^k \vec{v}_{,\beta}^l \right. \\ &\left. \vec{v}_{,\alpha\alpha}^i \vec{v}_{,\alpha\alpha}^j \vec{v}_{,\alpha\alpha}^k \vec{v}_{,\alpha\alpha}^l \vec{v}_{,\beta\beta}^i \vec{v}_{,\beta\beta}^j \vec{v}_{,\beta\beta}^k \vec{v}_{,\beta\beta}^l \vec{v}_{,\alpha\beta}^i \vec{v}_{,\alpha\beta}^j \vec{v}_{,\alpha\beta}^k \vec{v}_{,\alpha\beta}^l \right\}; \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{v}_y^r \right\}_{1 \times 24}^T &= \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l \right. \\ &\left. \vec{v}_{,xx}^i \vec{v}_{,xx}^j \vec{v}_{,xx}^k \vec{v}_{,xx}^l \vec{v}_{,tt}^i \vec{v}_{,tt}^j \vec{v}_{,tt}^k \vec{v}_{,tt}^l \vec{v}_{,xt}^i \vec{v}_{,xt}^j \vec{v}_{,xt}^k \vec{v}_{,xt}^l \right\}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где $\vec{v}^i \dots \vec{v}^l$ – векторы перемещения точек, находящихся в узлах элемента;

$\vec{v}_{,\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta}^l \vec{v}_{,\alpha\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\alpha}^l \vec{v}_{,\beta\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta\beta}^l \vec{v}_{,\alpha\beta}^i \dots \vec{v}_{,\alpha\beta}^l$ – первые и вторые производные вектора перемещения точек, находящихся в узлах элемента, в локальной системе координат;

$\vec{v}_{,x}^i \dots \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \dots \vec{v}_{,t}^l \vec{v}_{,xx}^i \dots \vec{v}_{,xx}^l \vec{v}_{,tt}^i \dots \vec{v}_{,tt}^l \vec{v}_{,xt}^i \dots \vec{v}_{,xt}^l$ – первые и вторые производные вектора перемещения точек, находящихся в узлах элемента, в криволинейной системе координат.

Определим матричную зависимость между векторами $\left\{ \vec{v}_y^l \right\}_{1 \times 24}^T$ и $\left\{ \vec{v}_y^r \right\}_{1 \times 24}^T$

$$\left\{ \vec{v}_y^l \right\}_{24 \times 1} = [GL]_{24 \times 24} \left\{ \vec{v}_y^r \right\}_{24 \times 1}. \quad (2.65)$$

Элементы матрицы $[GL]_{24 \times 24}$ определяются из выражений

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,\alpha}^w &= \vec{v}_{,x}^w X_{,\alpha}^w + \vec{v}_{,t}^w T_{,\alpha}^w; \quad \vec{v}_{,\beta}^w = \vec{v}_{,x}^w X_{,\beta}^w + \vec{v}_{,t}^w T_{,\beta}^w; \\ \vec{v}_{,\alpha\alpha}^w &= \vec{v}_{,xx}^w (X_{,\alpha}^w)^2 + 2\vec{v}_{,xt}^w X_{,\alpha}^w T_{,\alpha}^w + \vec{v}_{,tt}^w (T_{,\alpha}^w)^2; \\ \vec{v}_{,\beta\beta}^w &= \vec{v}_{,xx}^w (X_{,\beta}^w)^2 + 2\vec{v}_{,xt}^w X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w + \vec{v}_{,tt}^w (T_{,\beta}^w)^2; \\ \vec{v}_{,\alpha\beta}^w &= \vec{v}_{,xx}^w X_{,\alpha}^w X_{,\beta}^w + \vec{v}_{,xt}^w X_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + \vec{v}_{,xt}^w X_{,\beta}^w T_{,\alpha}^w + \\ &+ \vec{v}_{,tt}^w T_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w + \vec{v}_{,x}^w X_{,\alpha\beta}^w + \vec{v}_{,t}^w T_{,\alpha\beta}^w, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где индекс w принимает значения i, j, k, l .

Представим матрицу $[GL]$ в виде $[GL] = \begin{bmatrix} [GL_{11}] & [GL_{12}] \\ [GL_{21}] & [GL_{22}] \end{bmatrix}$.

Распишем подматрицы, входящие в матрицу $[GL]$. Подматрица GL_{12} - нулевая, $[GL_{11}]$, $[GL_{22}]$ и $[GL_{21}]$ имеют следующий вид соответственно

1.0											
	1.0										
		1.0									
			1.0								
				$X_{,\alpha}^i$				$T_{,\alpha}^i$			
					$X_{,\alpha}^j$				$T_{,\alpha}^j$		
						$X_{,\alpha}^k$				$T_{,\alpha}^k$	
							$X_{,\alpha}^l$				$T_{,\alpha}^l$
				$X_{,\beta}^i$				$T_{,\beta}^i$			
					$X_{,\beta}^j$				$T_{,\beta}^j$		
						$X_{,\beta}^k$				$T_{,\beta}^k$	
							$X_{,\beta}^l$				$T_{,\beta}^l$

$(X_{,\alpha}^i)^2$				$(T_{,\alpha}^i)^2$				$2X_{,\alpha}^i T_{,\alpha}^i$			
	$(X_{,\alpha}^j)^2$				$(T_{,\alpha}^j)^2$				$2X_{,\alpha}^j T_{,\alpha}^j$		
		$(X_{,\alpha}^k)^2$				$(T_{,\alpha}^k)^2$				$2X_{,\alpha}^k T_{,\alpha}^k$	
			$(X_{,\alpha}^l)^2$				$(T_{,\alpha}^l)^2$				$2X_{,\alpha}^l T_{,\alpha}^l$
$(X_{,\beta}^i)^2$				$(T_{,\beta}^i)^2$				$2X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w$			
	$(X_{,\beta}^j)^2$				$(T_{,\beta}^j)^2$				$2X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w$		
		$(X_{,\beta}^k)^2$				$(T_{,\beta}^k)^2$				$2X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w$	
			$(X_{,\beta}^l)^2$				$(T_{,\beta}^l)^2$				$2X_{,\beta}^w T_{,\beta}^w$
$X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^i$				$T_{,\alpha}^i T_{,\beta}^i$				g^i			
	$X_{,\alpha}^j X_{,\beta}^j$				$T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j$				g^j		
		$X_{,\alpha}^k X_{,\beta}^k$				$T_{,\alpha}^k T_{,\beta}^k$				g^k	
			$X_{,\alpha}^l X_{,\beta}^l$				$T_{,\alpha}^l T_{,\beta}^l$				g^l

				$X_{,\alpha}^i$				$T_{,\alpha}^i$			
					$X_{,\alpha}^j$				$T_{,\alpha}^j$		
						$X_{,\alpha}^k$				$T_{,\alpha}^k$	
							$X_{,\alpha}^l$				$T_{,\alpha}^l$
				$X_{,\beta}^i$				$T_{,\beta}^i$			
					$X_{,\beta}^j$				$T_{,\beta}^j$		
						$X_{,\beta}^k$				$T_{,\beta}^k$	
							$X_{,\beta}^l$				$T_{,\beta}^l$

				$X_{,\alpha\beta}^i$				$T_{,\alpha\beta}^i$			
					$X_{,\alpha\beta}^j$				$T_{,\alpha\beta}^j$		
						$X_{,\alpha\beta}^k$				$T_{,\alpha\beta}^k$	
							$X_{,\alpha\beta}^l$				$T_{,\alpha\beta}^l$

$(X_{,\alpha}^i)^2$				$(T_{,\alpha}^i)^2$				∇_3^y		
	$(X_{,\alpha}^j)^2$				$(T_{,\alpha}^j)^2$				∇_3^y	
		$(X_{,\alpha}^k)^2$				$(T_{,\alpha}^k)^2$				∇_3^y
			$(X_{,\alpha}^l)^2$				$(T_{,\alpha}^l)^2$			∇_3^y
$(X_{,\beta}^i)^2$				$(T_{,\beta}^i)^2$				∇_2^i		
	$(X_{,\beta}^j)^2$				$(T_{,\beta}^j)^2$				∇_2^j	
		$(X_{,\beta}^k)^2$				$(T_{,\beta}^k)^2$				∇_2^k
			$(X_{,\beta}^l)^2$				$(T_{,\beta}^l)^2$			∇_2^l
$X_{,\alpha}^i X_{,\beta}^i$				$T_{,\alpha}^i T_{,\beta}^i$				∇_1^i		
	$X_{,\alpha}^j X_{,\beta}^j$				$T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j$				∇_1^j	
		$X_{,\alpha}^k X_{,\beta}^k$				$T_{,\alpha}^k T_{,\beta}^k$				∇_1^k
			$X_{,\alpha}^l X_{,\beta}^l$				$T_{,\alpha}^l T_{,\beta}^l$			∇_1^l

Где $\nabla_1^w = 2X_{,\alpha}^w T_{,\beta}^w$; $\nabla_2^w = 2T_{,\beta}^w X_{,\alpha}^w$; $\nabla_3^w = 2X_{,\alpha}^w T_{,\alpha}^w$; $w = i, j, k, l$.

Ячейка матрицы $[GH]$ представляет собой подматрицу размерности $[3 \times 3]$ вида

$$[X_{,\alpha}^i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} X_{,\alpha}^i & 0 & 0 \\ 0 & X_{,\alpha}^i & 0 \\ 0 & 0 & X_{,\alpha}^i \end{bmatrix}; \quad [T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j & 0 & 0 \\ 0 & T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j & 0 \\ 0 & 0 & T_{,\alpha}^j T_{,\beta}^j \end{bmatrix}.$$

На основании формул (2.70) и (2.71) вектор перемещения внутренней точки дискретного элемента можно представить матричным произведением

$$\vec{v} = \{\chi\}_{1 \times 24}^T [\vec{A}]_{24 \times 72} [GR]_{72 \times 72} \{n_y\}_{72 \times 1}. \quad (2.73)$$

Выразим векторы локальных координат узловых точек, которые входят в структуру матрицы $[\vec{A}]$, через векторы базиса внутренней точки КЭ

$$\begin{aligned} \{\vec{e}^i\} &= [r_1]\{\vec{e}\}; \quad \{\vec{e}^j\} = [r_2]\{\vec{e}\}; \\ \{\vec{e}^k\} &= [r_3]\{\vec{e}\}; \quad \{\vec{e}^l\} = [r_4]\{\vec{e}\}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где $\{\vec{e}^i\}^T = \{\vec{e}_1^{oi} \ \vec{e}_2^{oi} \ \vec{e}_n^{oi}\}$; $\{\vec{e}^j\}^T = \{\vec{e}_1^{oj} \ \vec{e}_2^{oj} \ \vec{e}_n^{oj}\}$; $\{\vec{e}^k\}^T = \{\vec{e}_1^{ok} \ \vec{e}_2^{ok} \ \vec{e}_n^{ok}\}$;
 $\{\vec{e}^l\}^T = \{\vec{e}_1^{ol} \ \vec{e}_2^{ol} \ \vec{e}_n^{ol}\}$; $\{\vec{e}\}^T = \{\vec{e}_1^o \ \vec{e}_2^o \ \vec{e}_n^o\}$.

Элементы матриц $[r_1] \dots [r_4]$ находятся на основе следующих зависимостей

$$\begin{aligned} \{\vec{e}\} &= [p]\{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}^i\} = [p^i]\{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}^j\} = [p^j]\{\vec{l}\}; \\ \{\vec{e}^k\} &= [p^k]\{\vec{l}\}; \quad \{\vec{e}^l\} = [p^l]\{\vec{l}\}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Таким образом можно записать матричные выражения для $[r_1] \dots [r_4]$

$$\begin{aligned} [r_1] &= [p^i][p]^{-1}; \quad [r_2] = [p^j][p]^{-1}; \quad [r_3] = [p^k][p]^{-1}; \\ [r_4] &= [p^l][p]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Квазидиагональная матрица $[\vec{A}]$, составленная из векторов локального базиса может быть представлена суммой

$$[\vec{A}]_{24 \times 72} = \vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]. \quad (2.77)$$

Соотношение (2.73) с учетом (2.77) примет вид

$$v^1 \vec{e}_1^o + v^2 \vec{e}_2^o + v \vec{e}_n^o = \{\chi\}^T (\vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]) \{Q_y\}, \quad (2.78)$$

где $\{Q_y\} = [GR]\{n_y\}$.

Зависимости для компонент вектора перемещения получим приравнявая коэффициенты при векторах текущей точки поверхности в левой и правой частях тождества (2.78),

$$v^1 = \{\chi\}^T [A_1] \{Q_y\}; \quad v^2 = \{\chi\}^T [A_2] \{Q_y\}; \quad v = \{\chi\}^T [A_3] \{Q_y\}. \quad (2.79)$$

Продифференцировав (2.73) по x и t , с учетом (2.77), получим производные вектора перемещения точки срединной поверхности

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) (\vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]) \{Q_y\}; \\ \vec{v}_{,t} &= \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) (\vec{e}_1^o [A_1] + \vec{e}_2^o [A_2] + \vec{e}_n^o [A_3]) \{Q_y\}; \\ \vec{v}_{,xx} &= \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \quad (2.80) \\
\bar{v}_{,tt} & = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \\
\bar{v}_{,xt} & = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}.
\end{aligned}$$

Заменив производные вектора перемещения по глобальным координатам, расположенные в левых частях равенств (2.80), их компонентами в локальном базисе (2.17), получим

$$\begin{aligned}
t_x^1 \bar{e}_1^0 + t_x^2 \bar{e}_2^0 + t_x \bar{e}_n^0 & = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \\
t_t^1 \bar{e}_1^0 + t_t^2 \bar{e}_2^0 + t_t \bar{e}_n^0 & = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \\
t_{xx}^1 \bar{e}_1^0 + t_{xx}^2 \bar{e}_2^0 + t_{xx} \bar{e}_n^0 & = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \\
t_{tt}^1 \bar{e}_1^0 + t_{tt}^2 \bar{e}_2^0 + t_{tt} \bar{e}_n^0 & = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}; \\
t_{xt}^1 \bar{e}_1^0 + t_{xt}^2 \bar{e}_2^0 + t_{xt} \bar{e}_n^0 & = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) \left(\bar{e}_1^0[A_1] + \bar{e}_2^0[A_2] + \bar{e}_n^0[A_3] \right) \{Q_y\}. \quad (2.81)
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при векторах текущей точки поверхности в левых и правых частях тождеств (2.81) и воспользовавшись зависимостями (2.18), получим производные компонент вектора перемещения по глобальным координатам x и t

$$v_{,x}^1 = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$v_{,x}^2 = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_2] \{Q_y\};$$

$$v_{,x} = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_3] \{Q_y\};$$

$$v_{,t}^1 = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$v_{,t}^2 = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_2] \{Q_y\} + vk;$$

$$v_{,t} = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_3] \{Q_y\} - v^2 k;$$

$$v_{,xx}^1 = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$v_{,xx}^2 = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_2] \{Q_y\};$$

$$v_{,xx} = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_3] \{Q_y\};$$

$$v_{,tt}^1 = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$v_{,tt}^2 = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_2] \{Q_y\} + 2v_{,t}k + vk_{,t} + v^2 k^2;$$

$$v_{,tt} = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_3] \{Q_y\} - 2v_{,t}k + vk^2 - v^2 k_{,t};$$

$$v_{,xt}^1 = \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$\begin{aligned}
& + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt}) [A_1] \{Q_y\}; \\
v_{,xt}^2 = & \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_2] \{Q_y\} + v_{,x}k; \\
v_{,xt} = & \left(\{\chi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
& \left. + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_3] \{Q_y\} - v_{,x}^2 k. \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Из выражений (2.79) и (2.82) видно, что каждая компонента вектора перемещения и ее производные по глобальным координатам зависят от узловых значений всех трех компонент вектора перемещения и их производных в глобальной системе координат. В этом и состоит отличие инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений от общепринятой скалярной интерполяции перемещений.

Для формирования матриц $[B]$ и $[A]$ необходимы соотношения (2.79), (2.82). Данные матрицы входят в матрицу жесткости и вектор сил четырехузлового КЭ

$$\begin{aligned}
[A]_{3 \times 72} &= \begin{bmatrix} \{\chi\}^T [A_1] [GR] \\ \{\chi\}^T [A_2] [GR] \\ \{\chi\}^T [A_3] [GR] \end{bmatrix}; \\
[B]_{6 \times 72} &= \begin{bmatrix} [b_{11}] \\ [b_{21}] \\ [b_{31}] \\ [b_{41}] \\ [b_{51}] \\ [b_{61}] \end{bmatrix}, \tag{2.83}
\end{aligned}$$

где

$$b_{11} = \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_1] \{Q_y\};$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= \frac{1}{A_2} \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_2] \{Q_y\}; \\
b_{31} &= \frac{1}{A_2} \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_1] \{Q_y\} + \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_2] \{Q_y\}; \\
b_{41} &= - \left(\{\chi_{,,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \right. \\
&\quad \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_3] \{Q_y\}; \\
b_{51} &= - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{A_2} \right)}{\partial t} \left(\left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_3] \{Q_y\} - v^2 k \right) - \\
&\quad - \left(\frac{1}{A_2} \right)^2 \left(\left(\{\chi_{,,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2 \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_3] \{Q_y\} - 2v_{,t} k + vk^2 - v^2 k_{,t} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{A_2} \left(\left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_2] \{Q_y\} + vk \right) k - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} v^2; \\
b_{61} &= - \frac{1}{A_2} \left(\left(\{\chi_{,,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\chi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \{\chi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_3] \{Q_y\} - v_{,x}^2 k \right) - \\
&\quad - \left(\{\chi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\chi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_2] \{Q_y\} k. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

2.7. Примеры расчетов

Пример расчета 2.1

В качестве примера приводятся результаты расчета НДС бесконечно длинного эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейной нагрузкой, приложенной вдоль образующей, интенсивности q , с шарнирными опорами, препятствующие вертикальному смещению, которые находятся на диаметрально противоположной образующей цилиндра (рис. 2.4). Исходные данные имели следующие значения: $q = 5 \cdot 10^{-3}$ МПа; $b = 0,1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$

МПа; $\nu = 0,3$; $h=0,001$ м. Величина малой полуоси эллипса c варьировалась от 0,1 до 0,025 м. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитываемая оболочка моделировалась полоской конечных элементов шириной $\Delta x=0,01$ м. Расчеты проводились в двух вариантах: в первом варианте использовалась скалярная аппроксимация искомых величин; во втором варианте была реализована инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений. Первоначально величина параметра c была принята равной 0,1 м, то есть цилиндр был круговым.

Результаты расчетов при $c=0,1$ м занесены в таблицу 2.1. В таблице приведены численные значения напряжений на внутренней σ_{tt}^B и наружной σ_{tt}^H поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 в зависимости от густоты сетки дискретизации оболочки.

Из табличного материала (таблица 2.1) видно, что результаты расчетов при использовании скалярной и векторной аппроксимаций полей перемещений для кругового цилиндра, практически совпадают между собой. Кроме того, следует отметить полное совпадение значений напряжений в точках 1 и 2 в обоих вариантах расчета.

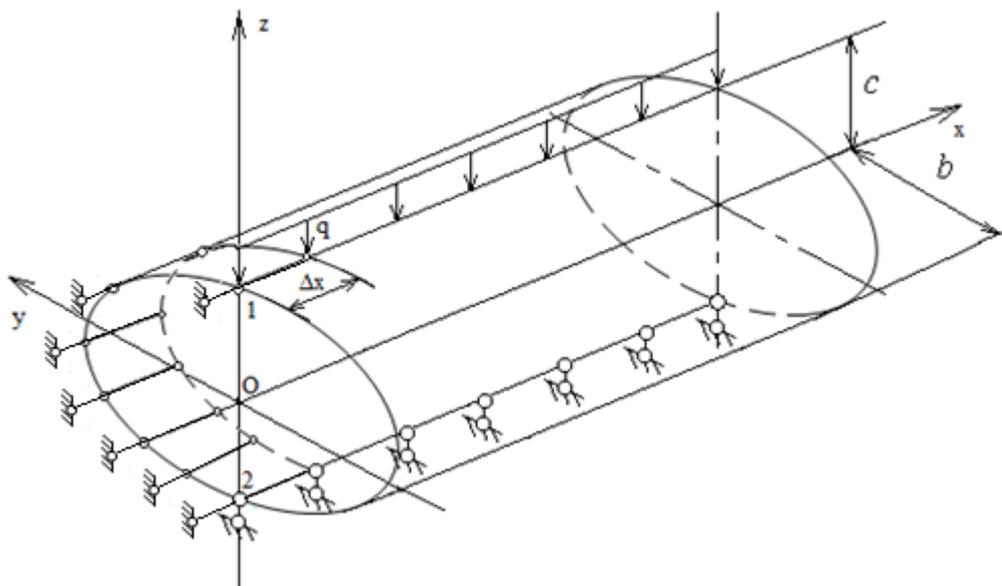


Рис. 2.4 - Расчетная схема эллиптического цилиндра с линейно распределенной нагрузкой

Таблица 2.1 - Сравнение результатов расчета эллиптического цилиндра при различных вариантах аппроксимации

Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Варианты аппроксимации					
		Скалярная			Векторная		
		Сетка узлов					
		17x2	33x2	65x2	17x2	33x2	65x2
Точка (1) приложения силы $(0; \frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	190,98	190,97	190,99	190,98	190,99	190,99
	σ_{tt}^H	-190,99	-190,97	-190,99	-190,99	-190,99	-190,99
Точка (2) шарнирного опирания $(0; -\frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	190,98	190,97	190,99	190,98	190,99	190,99
	σ_{tt}^H	-190,99	-190,97	-190,99	-190,99	-190,99	-190,99

Пример расчета 2.2

Если параметр c последовательно уменьшать, то цилиндр будет принимать все более выраженную эллиптическую форму.

Результаты повариантных расчетов эллиптического цилиндра при сетке дискретизации (81x2) представлены на диаграммах (рис. 2.5 и 2.6), в которых приняты следующие обозначения: $n = b/c$; $\lambda = \sigma_{tt}^{1B} / \sigma_{tt}^{2B}$; $\mu = \sigma_{tt}^{1H} / \sigma_{tt}^{2H}$, где верхние индексы 1 и 2 указывают на номер точки оболочки, в которой контролируется НДС эллиптического цилиндра.

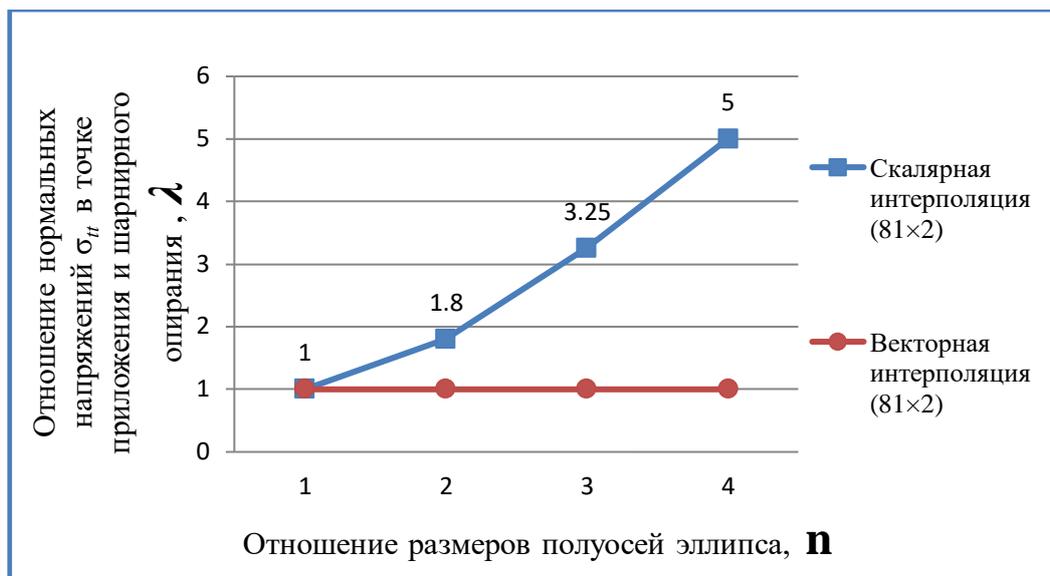


Рис. 2.5 - Повариантный расчет нормальных напряжений σ_{tt}^B на внутренней поверхности эллиптического цилиндра при сетке дискретизации (81x2)

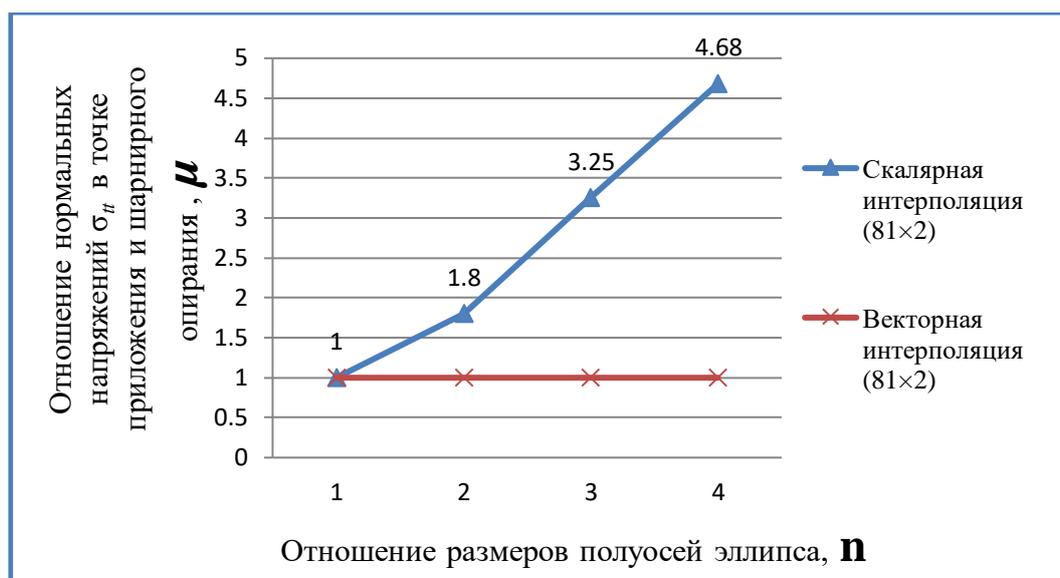


Рис. 2.6 - Повариантный расчет нормальных напряжений σ_{tt}^H на наружной поверхности эллиптического цилиндра при сетке дискретизации (81x2)

Из анализа диаграмм видно, что по мере увеличения отношения параметров b/c значения коэффициентов λ и μ при векторной аппроксимации остаются постоянными и равными единице, а при скалярной аппроксимации искомых величин значения коэффициентов λ и μ возрастают с увеличением n .

Согласно общепринятому в МКЭ положению, погрешность конечно-элементных решений должна уменьшаться при последовательном сгущении

сетки, поэтому значительный интерес представляет попытка получить удовлетворительные результаты при скалярном варианте аппроксимации при весьма значительном сгущении сетки. В таблице 2.2 представлены значения напряжений при густоте сетки большей, чем представленной на диаграмме. Из таблицы видно, что несмотря на значительное сгущение сетки приемлемых результатов получить не удалось.

Анализируя данные таблиц и диаграмм, можно сделать вывод, что при использовании соотношений Новожилова В.В. векторная аппроксимация эффективна как для оболочек вращения, так и для оболочек произвольной геометрии. Скалярная аппроксимация дает удовлетворительные результаты только при круговом цилиндре, т.е. когда рассчитываемая оболочка является оболочкой вращения. При расчете эллиптического цилиндра результаты не удовлетворяют условию равновесия, сгущение сетки дискретизации не устраняет погрешности данного способа аппроксимации.

Таблица 2.2 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от числа элементов дискретизации

Координаты точек, (x, t)	Напряжения, МПа	Варианты аппроксимации					
		Скалярная			Векторная		
		Сетка узлов					
		65x2	129x2	257x2	65x2	129x2	257x2
Точка (1) приложения силы $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	σ_{tt}^B	223,29	223,29	223,29	158,51	158,51	158,51
	σ_{tt}^H	-226,98	-226,98	-226,98	-158,51	-158,51	-158,51
Точка (2) шарнирного опирания $\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$	σ_{tt}^B	44,61	44,61	44,61	158,51	158,51	158,51
	σ_{tt}^H	-48,45	-48,45	-48,45	-158,51	-158,51	-158,51

Пример расчета 2.3

Исследовалось НДС кругового цилиндра, нагруженного в середине двумя диаметрально противоположными сосредоточенными силами (рис. 2.7). Исходные данные имели следующие значения: $L = 26,289 \cdot 10^{-2}$ м; $b = c = 12,58 \cdot 10^{-2}$ м; $t = 0,24 \cdot 10^{-2}$ м; $F = 453,6$ Н; $E = 0,738 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3125$.

Вследствие наличия плоскостей симметрии была рассчитана 1/8 кругового цилиндра. Расчеты проводились в двух вариантах: в первом варианте реализована скалярная аппроксимация искомых величин; во втором варианте использовалась инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений в четырехугольном КЭ.

Результаты расчетов приведены в таблице 2.3, в которой показаны значения прогиба под силой F в метрах в зависимости от густоты сетки дискретизации. В правой крайней колонке приведены значения прогиба, полученного зарубежными исследователями из монографии Секуловича [109].

Значения напряжений, приведенные в таблице 2.3, практически совпадают между собой и близки к значениям, полученными зарубежными авторами. Результаты расчетов позволяют сделать вывод, что для кругового цилиндра оба варианта аппроксимации полей перемещений в четырехугольном конечном элементе дают примерно одинаковые результаты.

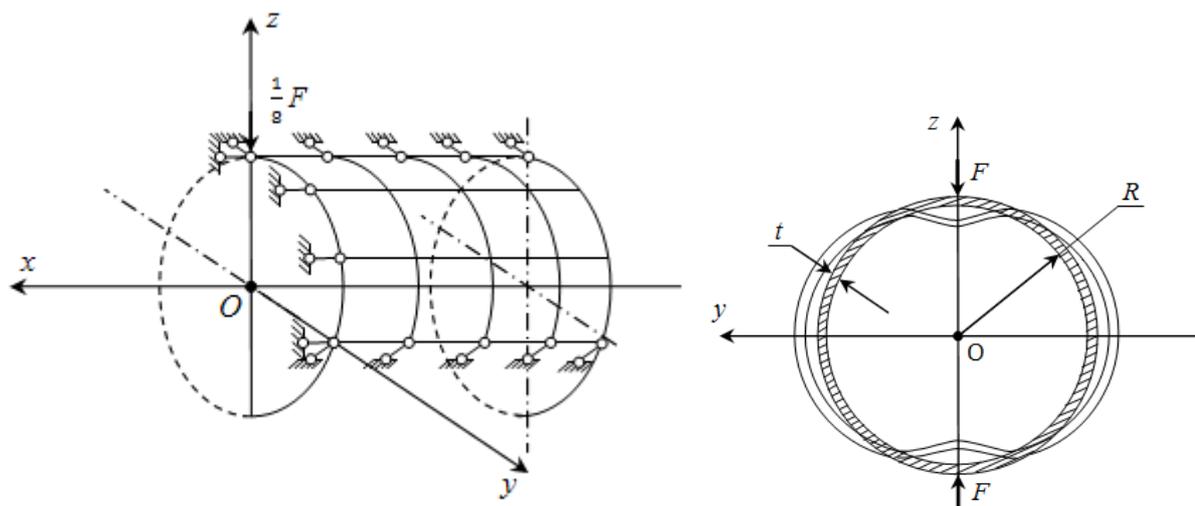


Рис. 2.7 - Расчетная схема кругового цилиндра, нагруженного двумя сосредоточенными силами

Таблица 2.3 - Значения прогиба в зависимости от густоты сетки дискретизации при различных вариантах интерполяции

Сетка узлов	Скалярная интерполяция	Векторная интерполяция	Известное решение [109] Богнер, Фокс, Шмидт $0,2889 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ Кантин, Клауф $0,2865 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ Ашвел, Сабир $0,2888 \cdot 10^{-2} \text{ м}$
	Прогиб, 10^{-2} м		
5x5	0,2875	0,2872	
7x7	0,2882	0,2880	
10x10	0,2885	0,2884	

Пример расчета 2.4.

Был рассчитан эллиптический цилиндр, нагруженный сосредоточенной силой F и имеющий на диаметрально противоположной стороне шарнирную опору, препятствующую вертикальному смещению (рис. 2.8). Исходные данные соответствовали примеру 2.3. Отношение параметров $n = b/c$ поперечного сечения эллиптического цилиндра варьировалось от 1 до 4.

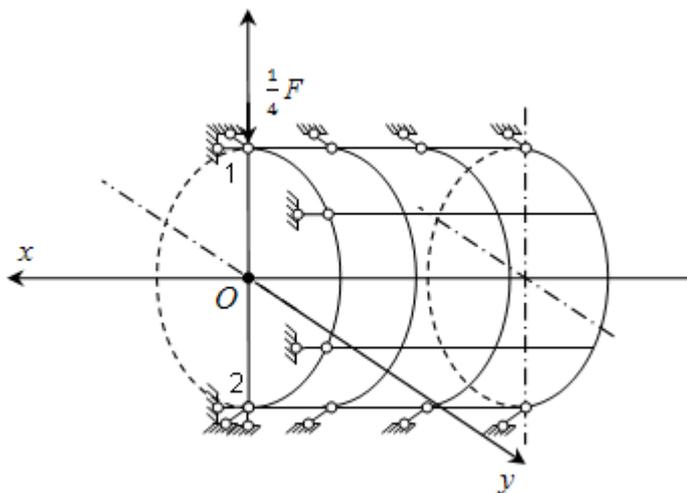


Рис. 2.8 - Расчетная схема $\frac{1}{4}$ части эллиптического цилиндра, нагруженного сосредоточенной силой

При выбранной расчетной схеме напряжения в точке приложения сосредоточенной силы (точка 1) и в точке шарнирного опирания (точка 2) должны быть равны. Для удобства анализа конечно-элементных решений были использованы следующие обозначения

$$\gamma^B = \frac{\sigma_{xx}^{B1}}{\sigma_{xx}^{B2}}; \quad \gamma^H = \frac{\sigma_{xx}^{H1}}{\sigma_{xx}^{H2}}; \quad \omega^B = \frac{\sigma_{tt}^{B1}}{\sigma_{tt}^{B2}}; \quad \omega^H = \frac{\sigma_{tt}^{H1}}{\sigma_{tt}^{H2}}, \quad (2.85)$$

где верхние индексы «в» и «н» указывают, что напряжения вычислены на внутренней и наружной поверхностях эллиптического цилиндра соответственно.

Результаты повариантных расчетов представлены в виде диаграмм (рис. 2.9 и 2.10), на которых показаны изменения коэффициентов γ и ω (2.85) в зависимости от отношения $n = b/c$ при сетке дискретизации 10×10 . Как видно из диаграмм при векторном варианте аппроксимации перемещений значения коэффициентов γ и ω равны единице при любых отношениях b/c . При использовании скалярного варианта аппроксимации перемещений γ и ω равны единице лишь при $b/c = 1$, т.е. при расчете кругового цилиндра.

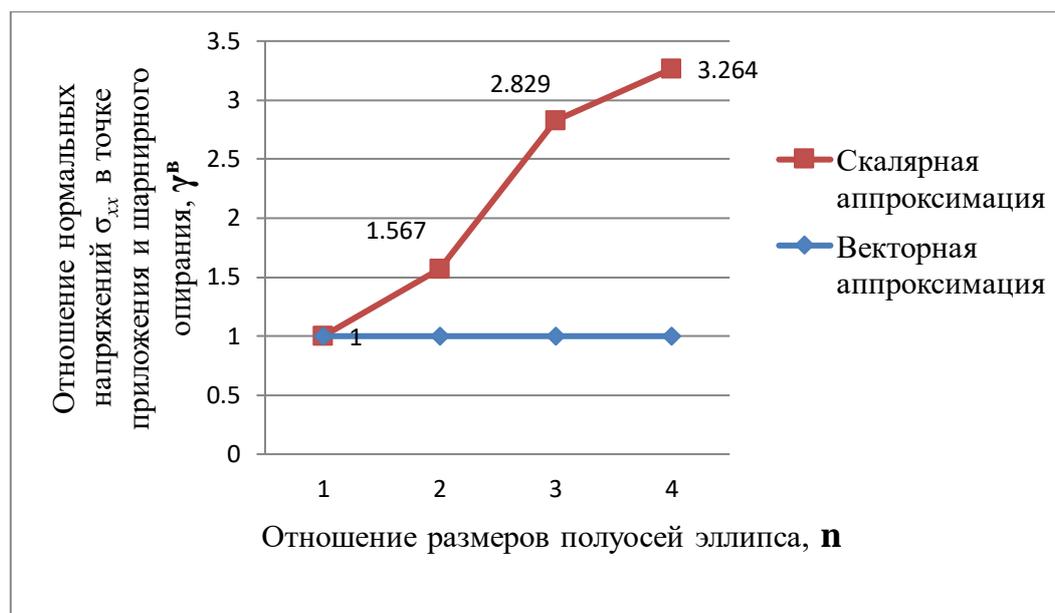


Рис. 2.9 - Повариантный расчет нормальных напряжений σ_{xx}^B на внутренней поверхности эллиптического цилиндра

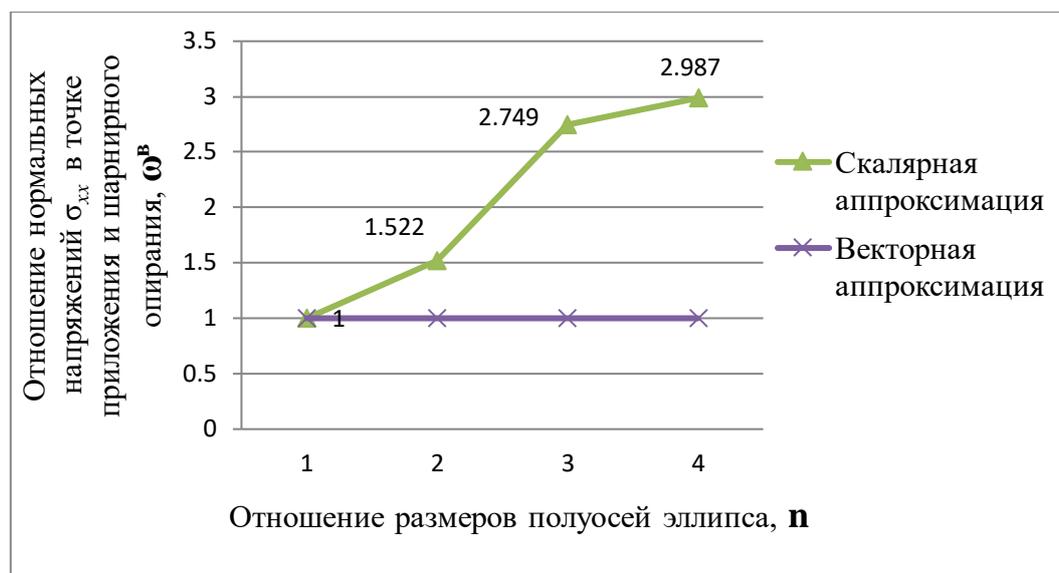


Рис. 2.10 - Повариантный расчет нормальных напряжений σ_{tt}^B на внутренней поверхности эллиптического цилиндра

При увеличении отношения $n = b/c$ (т.е. когда цилиндр приобретает все более выраженную эллиптическую форму) отклонения значений коэффициентов γ и ω от единицы становятся все более значительными.

Результаты, представленные на диаграммах (рис. 2.9 и 2.10), получены при фиксированной сетке дискретизации 10×10 . Поэтому значительный интерес представляет изменение значений напряжений при скалярном варианте аппроксимации перемещений при значительном сгущении сетки дискретизации. Результаты расчетов эллиптического цилиндра при $n = b/c = 3$ представлены также в виде диаграмм (рис. 2.11 и 2.12), на которых приведены значения γ и ω в зависимости от числа элементов дискретизации n_z . Как видно из диаграмм, несмотря на значительное сгущение сетки, значения γ и ω весьма далеки от единицы.

Итак, можно сделать вывод, что для расчета эллиптического цилиндра необходимо использовать векторный вариант аппроксимации перемещений, так как применение скалярного варианта аппроксимации перемещений в этом случае не позволяет получить удовлетворительный результат даже при мелкой сетке дискретизации.

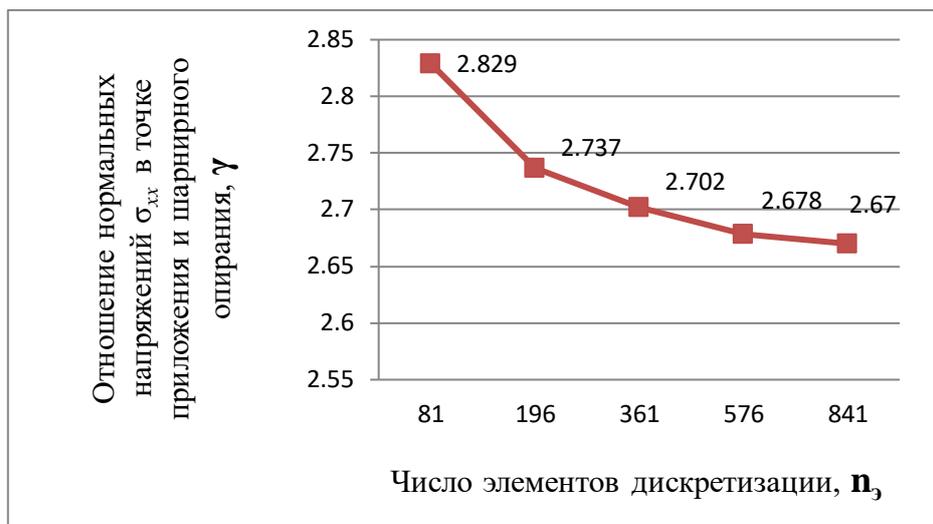


Рис. 2.11 - Значения напряжений σ_{xx} в зависимости от числа элементов дискретизации при скалярном варианте аппроксимации

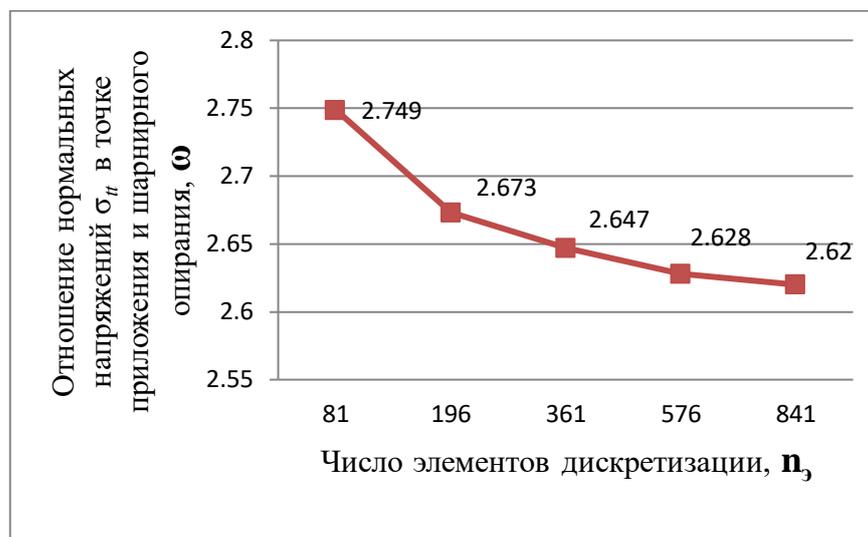


Рис. 2.12 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от числа элементов дискретизации при скалярном варианте аппроксимации

Пример расчета 2.5.

В качестве примера приводятся результаты расчета НДС эллиптического цилиндра, загруженного в середине сосредоточенной силой F и имеющего на противоположной стороне две опоры (шарнирные рис. 2.13 а и пружинные рис.

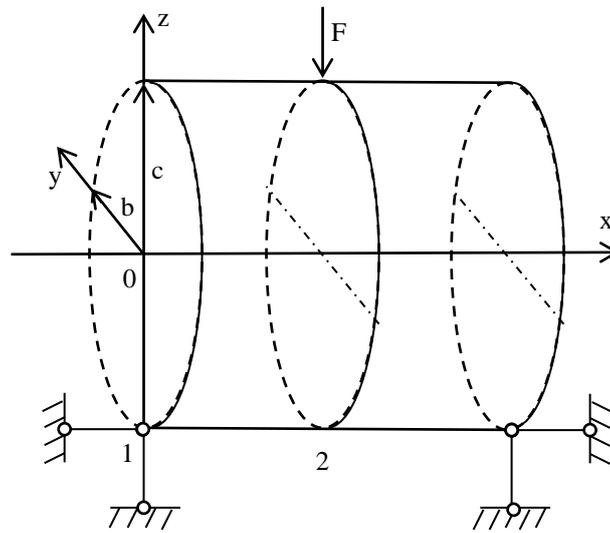
2.13 б) по торцам. Исходные данные имели следующие значения: $L = 26,289 \cdot 10^{-2}$ м; $b = 12,58 \cdot 10^{-2}$ м; $c = 6,29 \cdot 10^{-2}$ м; $t = 0,24 \cdot 10^{-2}$ м; $F = 453,6$ Н; $E = 0,738 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3125$. Эллиптический цилиндр был рассчитан двумя способами: в первом варианте применялась скалярная аппроксимация перемещений; во втором – векторная аппроксимация полей перемещений.

Для удобства анализа конечно-элементных решений было использовано следующее обозначение $\alpha = \sigma_{xx}^{\text{ш}} / \sigma_{xx}^{\text{пр}}$, где верхние индексы «ш» и «пр» указывают, что напряжения вычислены на внутренней поверхности эллиптического цилиндра в точке 2 при наличии шарнирных и пружинных опор соответственно. Результаты повариантных расчетов представлены на диаграмме (рис. 2.14), на которой показаны изменения коэффициента α в зависимости от величины жесткого смещения при указанных сетках дискретизации.

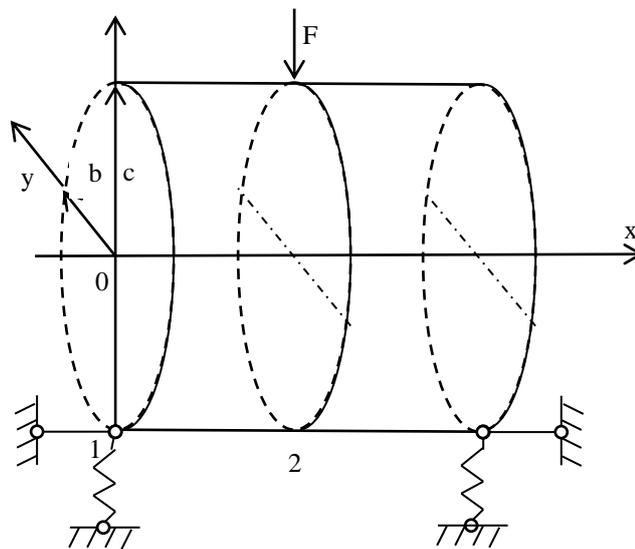
На диаграмме видно, что при векторной аппроксимации полей перемещений значения коэффициента α остаются неизменными и равными единице. При скалярном варианте аппроксимации перемещений значения коэффициента α существенно изменяются и остаются весьма далекими от единицы, несмотря на значительное сгущение сетки дискретизации.

Как известно из теории МКЭ наличие жесткого смещения не оказывает влияния на напряженно-деформированное состояние сооружения, т.е. коэффициент α должен оставаться равным единице, что и наблюдается в первом варианте расчета.

Таким образом, учет смещения КЭ как жесткого тела реализуется посредством инвариантной векторной интерполяции. Использование скалярной аппроксимации в расчетах конструкций с жестким смещением приводит к существенным погрешностям вычислений.



a)



б)

Рис. 2.13 - Расчетная схема эллиптического цилиндра с шарнирными (а) и пружинными (б) опорами, нагруженного сосредоточенной силой

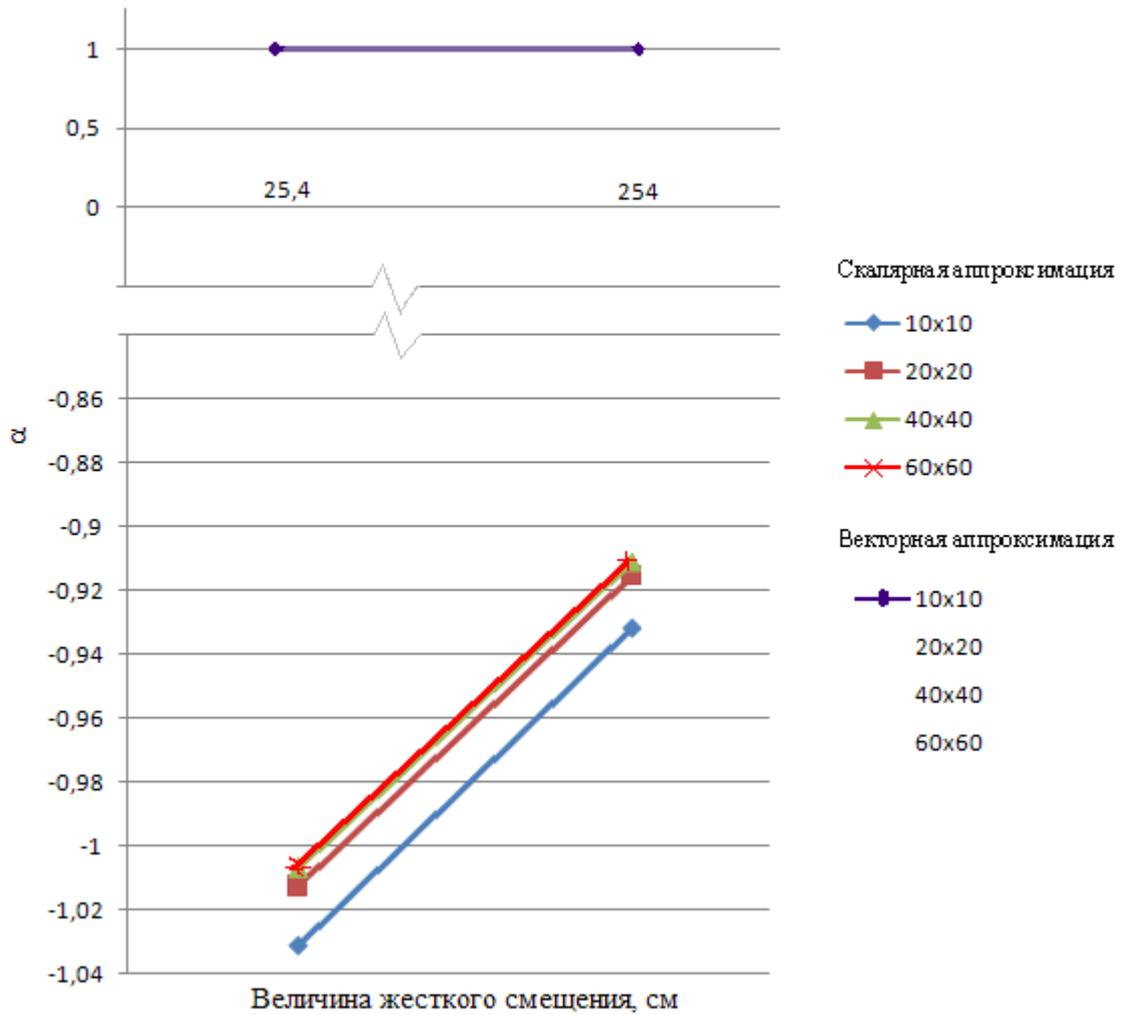


Диаграмма 2.14 - Графики зависимостей коэффициента α от величины жесткого смещения при указанных сетках дискретизации

2.8. Выводы по второй главе

1. С использованием геометрических соотношений Новожилова В. В. разработан алгоритм компоновки матрицы жесткости четырехузлового оболочечного элемента дискретизации с узловыми неизвестными, которые представлены компонентами вектора перемещения и их производными при использовании скалярной и векторной интерполяций полей перемещений.

2. На примерах расчета оболочек при различных нагрузках и видах опирания была выполнена верификация разработанного алгоритма, о чем свидетельствует совпадение численных результатов с аналитическими решениями, полученными из условия равновесия оболочки.

3. При решении тестовой задачи по определению НДС эллиптического цилиндра нагруженного вдоль образующей линейно распределенной нагрузкой было показано, что векторная аппроксимация при использовании соотношений Новожилова В. В. эффективна как для оболочек вращения, так и для оболочек произвольной геометрии. Скалярная аппроксимация дает удовлетворительные результаты только при круговом цилиндре, т.е. когда рассчитываемая оболочка является оболочкой вращения.

4. Инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений решает проблему учета смещения КЭ как жесткого тела. Использование скалярной аппроксимации в расчетах конструкций с жестким смещением приводит к существенным погрешностям вычислений.

3. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ УЗЛОВЫХ НЕИЗВЕСТНЫХ КАК СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. Геометрия тонкой оболочки до деформирования

Радиус-вектор срединной поверхности тонкой оболочки определяется формулой

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}. \quad (3.1)$$

Векторы текущей точки поверхности и их производные по криволинейным координатам описываются формулами

$$\vec{a}_1^o = \vec{R}_{,\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_2^o = \vec{R}_{,\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_n^o = \vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o / |\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o|; \quad (3.2)$$

$$\vec{a}_{1,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_1}^o; \quad \vec{a}_{1,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_1\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_2}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_2}^o; \quad \vec{a}_{2,\lambda_1}^o = \vec{R}_{,\lambda_2\lambda_1}^o. \quad (3.3)$$

Связь между ковариантными векторами базиса и их производными по глобальным координатам определяются следующими матричными зависимостями

$$\begin{aligned} \{a_{\lambda_1}^o\} &= [m]\{\vec{a}^o\}; \\ \{a_{\lambda_2}^o\} &= [n]\{\vec{a}^o\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{где } \{a_{\lambda_1}^o\} = \begin{Bmatrix} \vec{a}_{1,\lambda_1}^o \\ \vec{a}_{2,\lambda_1}^o \\ \vec{a}_{,\lambda_1}^o \end{Bmatrix}; \quad [m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}; \quad \{\vec{a}^o\} = \begin{Bmatrix} \vec{a}_1^o \\ \vec{a}_2^o \\ \vec{a}_n^o \end{Bmatrix};$$

$$\{a_{\lambda_2}^o\} = \begin{Bmatrix} \vec{a}_{1,\lambda_2}^o \\ \vec{a}_{2,\lambda_2}^o \\ \vec{a}_{,\lambda_2}^o \end{Bmatrix}; \quad [n] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Вектор перемещения точки срединной поверхности определяется следующим образом

$$\vec{v} = v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o. \quad (3.6)$$

Найдем производные вектора перемещения произвольной точки срединной поверхности по глобальным координатам дифференцированием (3.6)

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{,\lambda_1} &= v_{,\lambda_1}^1 \vec{a}_1^0 + v^1 \vec{a}_{1,\lambda_1}^0 + v_{,\lambda_1}^2 \vec{a}_2^0 + v^2 \vec{a}_{2,\lambda_1}^0 + v_{,\lambda_1} \vec{a}_n^0 + v \vec{a}_{n,\lambda_1}^0 = v_{,\lambda_1}^1 \vec{a}_1^0 + \\
&+ v^1 (m_{11} \vec{a}_1^0 + m_{12} \vec{a}_2^0 + m_{13} \vec{a}_n^0) + v_{,\lambda_1}^2 \vec{a}_2^0 + v^2 (m_{21} \vec{a}_1^0 + m_{22} \vec{a}_2^0 + m_{23} \vec{a}_n^0) + \\
&+ v_{,\lambda_1} \vec{a}^0 + v (m_{21} \vec{a}_1^0 + m_{22} \vec{a}_2^0 + m_{23} \vec{a}_n^0); \\
\vec{v}_{,\lambda_1} &= \vec{a}_1^0 (v_{,\lambda_1}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v m_{31}) + \vec{a}_2^0 (v_{,\lambda_1}^2 + v^1 m_{12} + v^2 m_{22} + v m_{32}) + \\
&+ \vec{a}_n^0 (v_{,\lambda_1} + v^1 m_{31} + v^2 m_{23} + v m_{33}) = f_1^1 \vec{a}_1^0 + f_1^2 \vec{a}_2^0 + f_1^n \vec{a}_n^0; \\
\vec{v}_{,\lambda_2} &= \vec{a}_1^0 (v_{,\lambda_2}^1 + v^1 n_{11} + v^2 n_{21} + v n_{31}) + \vec{a}_2^0 (v_{,\lambda_2}^2 + v^1 n_{12} + v^2 n_{22} + v n_{32}) + \\
&+ \vec{a}^0 (v_{,\lambda_2} + v^1 n_{13} + v^2 n_{23} + v n_{33}) = f_2^1 \vec{a}_1^0 + f_2^2 \vec{a}_2^0 + f_2^n \vec{a}_n^0, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1^1 &= v_{,\lambda_1}^1 + v^1 m_{11} + v^2 m_{21} + v m_{31}; \\
f_1^2 &= v_{,\lambda_1}^2 + v^1 m_{12} + v^2 m_{22} + v m_{32}; \\
f_1^n &= v_{,\lambda_1} + v^1 m_{31} + v^2 m_{23} + v m_{33}; \\
f_2^1 &= v_{,\lambda_2}^1 + v^1 n_{11} + v^2 n_{21} + v n_{31}; \\
f_2^2 &= v_{,\lambda_2}^2 + v^1 n_{12} + v^2 n_{22} + v n_{32}; \\
f_2^n &= v_{,\lambda_2} + v^1 n_{13} + v^2 n_{23} + v n_{33}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Орт нормали к поверхности в деформированном состоянии определяется следующей зависимостью

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{1}{\sqrt{a^0}} (\vec{a}_1^0 + \vec{v}_{,\lambda_1}) \times (\vec{a}_2^0 + \vec{v}_{,\lambda_2}) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^0}} (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 + \vec{a}_1^0 \times \vec{v}_{,\lambda_2} + \vec{v}_{,\lambda_1} \times \vec{a}_2^0 + \vec{v}_{,\lambda_1} \times \vec{v}_{,\lambda_2}). \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Векторные произведения, входящие в соотношения (3.9), определяются следующим образом

$$\vec{a}_1^0 \times \vec{v}_{,\lambda_2} = \vec{a}_1^0 \times (f_2^1 \vec{a}_1^0 + f_2^2 \vec{a}_2^0 + f_2^n \vec{a}_n^0) = f_2^2 (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0) + f_2^n (\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_n^0) =$$

$$= (f_2^2 \sqrt{a^0}) \vec{a}_n^0 - \left(f_2^n \frac{\sqrt{a_{11}^0}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0; \quad (3.10)$$

$$\vec{v}_{,\lambda_1} \times \vec{a}_2^0 = (f_1^1 \vec{a}_1^0 + f_1^2 \vec{a}_2^0 + f_1^n \vec{a}_n^0) \times \vec{a}_2^0 = (f_1^1 \sqrt{a^0}) \vec{a}_n^0 - \left(f_1^3 \sqrt{\frac{a_{22}^0}{a_{11}^0}} \right) \vec{a}_1^0.$$

Вектор углов поворота нормалей описывается соотношением [131]

$$\vec{\gamma} = -\gamma^2 \vec{a}_1^0 + \gamma^1 \vec{a}_2^0 + \Omega_n \vec{a}_n^0. \quad (3.11)$$

Вектор, определяющий положение точки, которая находится от срединной поверхности на расстоянии ζ , определяется одним из следующих соотношений

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{\gamma}'; \quad (3.12)$$

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{v}^{n'} + \zeta \vec{\gamma}', \quad (3.13)$$

где

$$\vec{\gamma}' = \vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0;$$

$$\vec{v}^{n'} = \vec{v}^n \times \vec{a}_n^0. \quad (3.14)$$

Вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях, входящий в формулу (3.14), можно определить формулой

$$\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0; \quad (3.15)$$

$$\vec{v}^n = \frac{1}{\sqrt{a^0}} \left(\sqrt{a^0} \vec{a}_n^0 + f_2^2 \sqrt{a^0} \vec{a}_n^0 - f_2^3 \sqrt{\frac{a_{11}^0}{a_{22}^0}} \vec{a}_2^0 + f_1^1 \sqrt{a^0} \vec{a}_n^0 - f_1^3 \sqrt{\frac{a_{22}^0}{a_{11}^0}} \vec{a}_1^0 \right) - \vec{a}_n^0.$$

Окончательно получаем

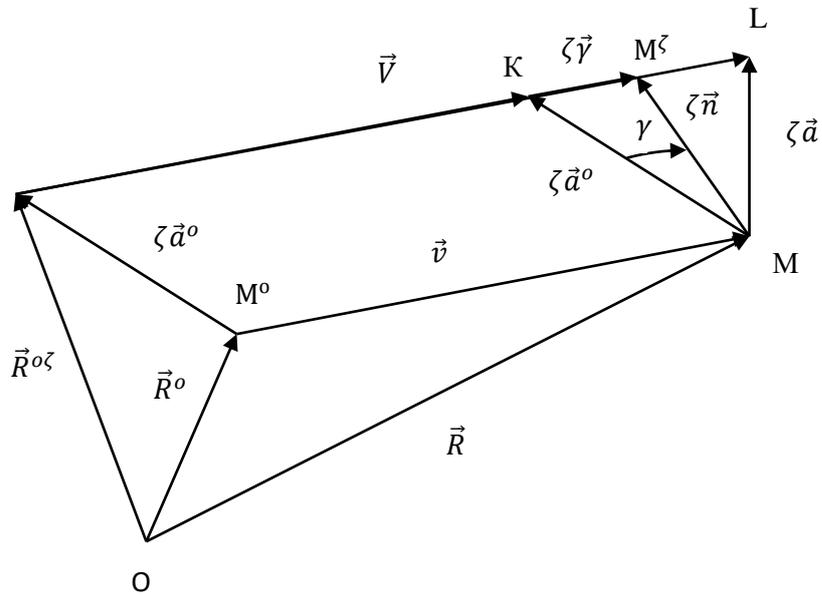
$$\vec{v}^n = \left(-\frac{f_1^3}{a_{11}^0} \right) \vec{a}_1^0 - \left(\frac{f_2^3}{a_{22}^0} \right) \vec{a}_2^0 + (f_2^2 + f_1^1) \vec{a}_n^0. \quad (3.16)$$

На основании уравнения механики сплошной среды [108] можно получить деформации в произвольной точке оболочки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ

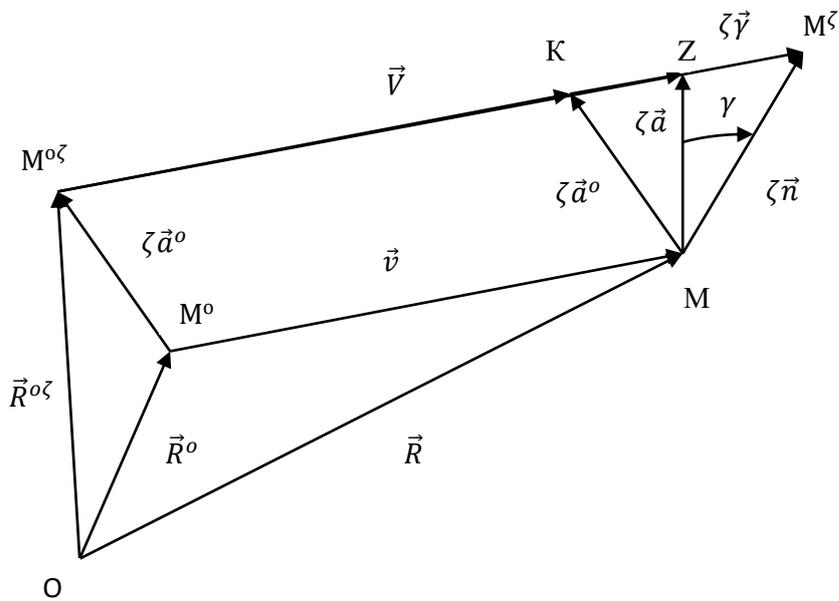
$$\varepsilon_{ij}^\zeta = (g_{ij} - g_{ij}^0)/2. \quad (3.17)$$

Ковариантные компоненты метрического тензора в деформированном g_{ij} и исходном g_{ij}^0 состояниях, входящие в (3.17), определяются с помощью скалярного произведения соответствующих базисных векторов

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j; \quad g_{ij}^0 = \vec{g}_i^0 \cdot \vec{g}_j^0. \quad (3.18)$$



а)



б)

Рис. 3.1 - Отсчет угла поворота нормали от ее исходного (а) и деформированного (б) состояний

На основании формул (3.17) и (3.18) получим деформации в точке, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{\zeta} &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\lambda_1}; \\ \varepsilon_{22}^{\zeta} &= \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\lambda_2}; \\ \varepsilon_{12}^{\zeta} &= (\vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\lambda_2} + \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\lambda_1})/2; \\ \varepsilon_{13}^{\zeta} &= (\vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,\lambda_1})/2; \\ \varepsilon_{23}^{\zeta} &= (\vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,\lambda_2})/2.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Базисные векторы в точке, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ , входящие в структуру соотношений (3.19), найдем дифференцированием по криволинейным координатам соответствующих радиус-векторов

$$\begin{aligned}\vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,\lambda_1}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_2^0 = \vec{R}_{,\lambda_2}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta}; \\ \vec{g}_1^{\zeta} &= \vec{R}_{,\lambda_1}^{\zeta}; \quad \vec{g}_2^{\zeta} = \vec{R}_{,\lambda_2}^{\zeta}; \quad \vec{g}_3^{\zeta} = \vec{R}_{,\zeta}^{\zeta},\end{aligned}\quad (3.20)$$

где $\vec{R}^{0\zeta}$ и \vec{R}^{ζ} – радиус-векторы, определяющие положение точки в произвольном слое в исходном и деформированном состояниях.

3.2. Геометрия эллиптического цилиндра в исходном состоянии

Для эллиптического цилиндра радиус-вектор может быть записан в следующем виде [57]

$$\vec{R}^o = x\vec{i} + b \cdot \sin(t)\vec{j} + c \cdot \cos(t)\vec{k}.\quad (3.21)$$

Продифференцировав (3.21) по глобальным координатам x и t , получим векторы локального базиса

$$\begin{aligned}\vec{a}_1^o &= \vec{R}_{,x}^o = \vec{i}; \\ \vec{a}_2^o &= \vec{R}_{,t}^o = b \cdot \cos(t)\vec{j} - c \cdot \sin(t)\vec{k}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Продифференцировав соотношения (3.22) по x и t , получим производные векторов локального базиса

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{1,x}^o &= \vec{R}_{,xx}^o = 0; \\
\vec{a}_{1,t}^o &= \vec{R}_{,xt}^o = 0; \\
\vec{a}_{2,x}^o &= \vec{R}_{,tx}^o = 0; \\
\vec{a}_{2,t}^o &= \vec{R}_{,tt}^o = -b \cdot \sin(t) \vec{j} - c \cdot \cos(t) \vec{k}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Для определения орта нормали к срединной поверхности эллиптического цилиндра воспользуемся векторным произведением

$$\vec{a}_n^o = \frac{\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o}{|\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o|} = \frac{\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o}{\sqrt{a_n^o}}, \tag{3.24}$$

где $a_n^o = a_{11}^o a_{22}^o - (a_{12}^o)^2$ - детерминант метрического тензора, для определения компонент которого необходимо найти скалярные произведения векторов текущей точки поверхности

$$\begin{aligned}
a_{11}^o &= \vec{a}_1^o \cdot \vec{a}_1^o = 1; \quad a_{12}^o = \vec{a}_1^o \cdot \vec{a}_2^o = 0; \\
a_{22}^o &= \vec{a}_2^o \cdot \vec{a}_2^o = c^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Найдем входящее в структуру (3.24) векторное произведение

$$\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot \cos(t) & -c \cdot \sin(t) \end{vmatrix} = c \cdot \sin(t) \vec{j} + b \cdot \cos(t) \vec{k}. \tag{3.26}$$

На основании (3.26) формула (3.24) примет вид

$$\vec{a}_n^o = \frac{c \cdot \sin(t)}{\sqrt{a_n^o}} \vec{j} + \frac{b \cdot \cos(t)}{\sqrt{a_n^o}} \vec{k}. \tag{3.27}$$

Продифференцируем орт нормали к срединной поверхности по глобальным координатам

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{n,t}^o &= \left(\frac{2a_n^o \cos(t) - (c^2 - b^2) \sin(t) \sin(2t)}{2a_n^o \sqrt{a_n^o}} \right) c \vec{j} + \\
&+ \left(\frac{-2a_n^o \sin(t) - (c^2 - b^2) \cos(t) \sin(2t)}{2a_n^o \sqrt{a_n^o}} \right) b \vec{k}; \\
\vec{a}_{n,x}^o &= 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Используя соотношения (3.22), (3.23), (3.27) и (3.28) составим матричные зависимости

$$\{\vec{a}^o\} = [r^o] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,x}^o\} = [r_{,x}^o] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,t}^o\} = [r_{,t}^o] \{\vec{i}\}, \tag{3.29}$$

где

$$\begin{aligned}
\{\vec{a}^o\}^T &= \{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}; \{\vec{a}_{,x}^o\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^o \vec{a}_{2,x}^o \vec{a}_{n,x}^o\}; \\
\{\vec{a}_{,t}^o\}^T &= \{\vec{a}_{1,t}^o \vec{a}_{2,t}^o \vec{a}_{n,t}^o\}; \{\vec{l}\}^T = \{\vec{ij}\vec{k}\}; \\
[r^o] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot \cos(t) & -c \cdot \sin(t) \\ 0 & \frac{c \cdot \sin(t)}{\sqrt{a_n^o}} & \frac{b \cdot \cos(t)}{\sqrt{a_n^o}} \end{bmatrix}; [r_{,x}^o] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
[r_{,t}^o] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b \cdot \sin(t) & -c \cdot \cos(t) \\ 0 & \left(\frac{2a_n^o \cos(t) - l \cdot \sin(t)}{2a_n^o \sqrt{a_n^o}} \right) c & \left(\frac{-2a_n^o \sin(t) - l \cdot \cos(t)}{2a_n^o \sqrt{a_n^o}} \right) b \end{bmatrix}; \\
l &= (c^2 - b^2) \sin(2t).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

На основании (3.29) можно записать следующее соотношение

$$\{\vec{l}\} = [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\}, \tag{3.31}$$

где

$$[r^o]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b \cdot \cos(t)}{a_n^o} & \frac{c \cdot \sin(t)}{\sqrt{a_n^o}} \\ 0 & \frac{-c \cdot \sin(t)}{a_n^o} & \frac{b \cdot \cos(t)}{\sqrt{a_n^o}} \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

С учетом (3.31) представим производные векторов локального базиса по глобальным координатам в исходном базисе

$$\begin{aligned}
\{\vec{a}_{,x}^o\} &= [r_{,x}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [q_1] \{\vec{a}^o\}; \\
\{\vec{a}_{,t}^o\} &= [r_{,t}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [q] \{\vec{a}^o\},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

где

$$[q_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(c^2 - b^2) \cdot \sin(2t)}{2a_n^o} & \frac{-cb}{\sqrt{a_n^o}} \\ 0 & \frac{cb}{a_n^o \sqrt{a_n^o}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

3.3. Геометрия оболочки в деформированном состоянии

Продифференцировав (3.6) по x и t , найдем производные вектора перемещения точки срединной поверхности по криволинейным координатам

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{,x} &= v_{,x}^1 \vec{a}_1^o + v^1 \vec{a}_{1,x}^o + v_{,x}^2 \vec{a}_2^o + v^2 \vec{a}_{2,x}^o + v_{,x} \vec{a}_n^o + v \vec{a}_{n,x}^o = \\
&= v_{,x}^1 \vec{a}_1^o + v_{,x}^2 \vec{a}_2^o + v_{,x} \vec{a}_n^o = t_x^1 \vec{a}_1^o + t_x^2 \vec{a}_2^o + t_x \vec{a}_n^o; \\
\vec{v}_{,t} &= v_{,t}^1 \vec{a}_1^o + v^1 \vec{a}_{1,t}^o + v_{,t}^2 \vec{a}_2^o + v^2 \vec{a}_{2,t}^o + v_{,t} \vec{a}_n^o + v \vec{a}_{n,t}^o = \\
&= v_{,t}^1 \vec{a}_1^o + (v_{,t}^2 + v^2 \cdot q_{22} + v \cdot q_{32}) \vec{a}_2^o + (v^2 \cdot q_{23} + v_{,t}) \vec{a}_n^o = \\
&= t_t^1 \vec{a}_1^o + t_t^2 \vec{a}_2^o + t_t \vec{a}_n^o; \\
\vec{v}_{,xx} &= v_{,xx}^1 \vec{a}_1^o + v_{,xx}^2 \vec{a}_2^o + v_{,xx} \vec{a}_n^o = t_{xx}^1 \vec{a}_1^o + t_{xx}^2 \vec{a}_2^o + t_{xx} \vec{a}_n^o; \\
\vec{v}_{,tt} &= v_{,tt}^1 \vec{a}_1^o + v_{,t}^1 \vec{a}_{1,t}^o + t_{t,t}^2 \vec{a}_2^o + t_t^2 \vec{a}_{2,t}^o + t_{t,t} \vec{a}_n^o + t_t \vec{a}_{n,t}^o = \\
&= v_{,tt}^1 \vec{a}_1^o + (t_{t,t}^2 + t_t^2 q_{22} + t_t q_{32}) \vec{a}_2^o + (t_t^2 q_{23} + t_{t,t}) \vec{a}_n^o = \\
&= t_{tt}^1 \vec{a}_1^o + t_{tt}^2 \vec{a}_2^o + t_{tt} \vec{a}_n^o; \\
\vec{v}_{,tx} &= v_{,tx}^1 \vec{a}_1^o + (v_{,tx}^2 + v_{,x}^2 q_{22} + v_{,x} q_{32}) \vec{a}_2^o + (v_{,x}^2 q_{23} + v_{,tx}) \vec{a}_n^o = \\
&= t_{tx}^1 \vec{a}_1^o + t_{tx}^2 \vec{a}_2^o + t_{tx} \vec{a}_n^o,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

где q_{22}, q_{23}, q_{32} - элементы матрицы $[q]$, формула (3.34).

Выражения для компонент производных вектора перемещения имеют вид

$$\begin{aligned}
t_x^1 &= v_{,x}^1; \quad t_x^2 = v_{,x}^2; \quad t_x = v_{,x}; \\
t_t^1 &= v_{,t}^1; \quad t_t^2 = v_{,t}^2 + v^2 \cdot q_{22} + v \cdot q_{32}; \quad t_t = v^2 \cdot q_{23} + v_{,t}; \\
t_{xx}^1 &= v_{,xx}^1; \quad t_{xx}^2 = v_{,xx}^2; \quad t_{xx} = v_{,xx}; \quad t_{tt}^1 = v_{,tt}^1; \\
t_{tt}^2 &= t_{t,t}^2 + t_t^2 q_{22} + t_t q_{32} = (q_{23} q_{32} + (q_{22})^2) v^2 + v_{,tt}^2 + 2q_{32} v_{,t} + q_{32} q_{22} v; \\
t_{tt} &= t_t^2 q_{23} + t_{t,t} = q_{32} q_{23} v - v^2 q_{22} q_{23} + 2q_{23} v_{,t}^2 + v_{,tt}; \\
t_{tx}^1 &= v_{,tx}^1; \quad t_{tx}^2 = v_{,tx}^2 + v_{,x}^2 q_{22} + v_{,x} q_{32}; \quad t_{tx} = v_{,x}^2 q_{23} + v_{,tx}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Положение точки срединной поверхности в процессе деформации определится соотношением

$$\vec{R} = \vec{R}^o + \vec{v}. \tag{3.37}$$

Векторы текущей точки поверхности в деформированном состоянии найдем дифференцированием (3.37) по глобальным координатам x и t

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \vec{R}_{,x} = (\vec{R}^o + \vec{v})_{,x} = \vec{a}_1^o + t_x^1 \vec{a}_1^o + t_x^2 \vec{a}_2^o + t_x \vec{a}_n^o; \\ \vec{a}_2 &= \vec{R}_{,t} = (\vec{R}^o + \vec{v})_{,t} = \vec{a}_2^o + t_t^1 \vec{a}_1^o + t_t^2 \vec{a}_2^o + t_t \vec{a}_n^o.\end{aligned}\quad (3.38)$$

Используя векторное произведение, найдем орт нормали к поверхности в деформированном состоянии

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \quad (3.39)$$

Пренебрегая произведениями многочленов $t_i^j t_i^j$ и $t_i^j t_i$, где $i = x, t$, а $j = 1..2$, с учетом (3.38), найдем векторное произведение

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = -t_x \vec{a}_1^o - t_t \vec{a}_2^o + (1 + t_x^1 + t_t^2) \vec{a}_n^o. \quad (3.40)$$

Модуль векторного произведения найдем следующим образом

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{(-t_x)^2 + (-t_t)^2 + (1 + t_x^1 + t_t^2)^2} = 1 + t_x^1 + t_t^2. \quad (3.41)$$

С учетом (3.40) и (3.41), соотношение (3.39) запишется следующим образом

$$\vec{a}_n = \frac{-t_x \vec{a}_1^o - t_t \vec{a}_2^o + (1 + t_x^1 + t_t^2) \vec{a}_n^o}{1 + t_x^1 + t_t^2}. \quad (3.42)$$

Почленно разделив числитель на знаменатель, и используя формулу $1/(1 + \alpha) \approx 1 - \alpha$, получим

$$\vec{a}_n = -t_x \vec{a}_1^o - t_t \vec{a}_2^o + \vec{a}_n^o. \quad (3.43)$$

Найдем производные орта нормали дифференцированием (3.43) по криволинейным координатам x и t

$$\begin{aligned}\vec{a}_{n,x} &= -t_{xx} \vec{a}_1^o - t_{tx} \vec{a}_2^o; \\ \vec{a}_{n,t} &= -t_{xt} \vec{a}_1^o + (-t_{tt} - t_t q_{22} + q_{32}) \vec{a}_2^o + q_{23} \vec{a}_n^o.\end{aligned}\quad (3.44)$$

Радиус-векторы точки, находящейся на расстоянии ζ от срединной поверхности, в исходном и деформированном состояниях оболочки можно представить формулами

$$\vec{R}^{o\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{o\zeta} + \vec{V}, \quad (3.45)$$

где вектор \vec{V} соответствует первому варианту отсчета угла поворота нормали (3.12).

Используя векторное произведение, найдем $\vec{\gamma}'$

$$\vec{\gamma}' = \vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0 = (-\gamma^2 \vec{a}_1^0 + \gamma^1 \vec{a}_2^0) \times \vec{a}_n^0 = \left(\frac{\gamma^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0. \quad (3.46)$$

Продифференцировав (3.46) по глобальным координатам, получим

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0)_{,x} &= \left(\frac{\gamma_{,x}^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(\gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0; \\ (\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0)_{,t} &= \left(\gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{\gamma_{,t}^2 + \gamma^2 q_{22}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(\frac{\gamma^2 q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Используя формулы (3.35) и (3.47), найдем производные вектора перемещения, описанного соотношением (3.12), по ζ, x, t

$$\begin{aligned} \vec{V}_{,\zeta} &= \left(\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{\gamma^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0; \\ \vec{V}_{,x} &= \left(t_x^1 + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_x^2 + \frac{\zeta \gamma_{,x}^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \\ \vec{V}_{,t} &= \left(t_t^1 + \zeta \gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_t^2 + \frac{\zeta \gamma_{,t}^2 + \zeta \gamma^2 q_{22}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(t_t + \frac{\zeta \gamma^2 q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

С учетом зависимостей (3.48), дифференцированием (3.45) по x, t, ζ можно найти векторы базиса в исходном и деформированном состояниях

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0\zeta} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{a}_n^0)_{,x} = \vec{R}^0_{,x} + \zeta \vec{a}_{n,x}^0 = \vec{a}_1^0; \\ \vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^{0\zeta} = (\vec{R}^0 + \zeta \vec{a}_n^0)_{,t} = \vec{R}^0_{,t} + \zeta \vec{a}_{n,t}^0 = \vec{a}_2^0 (1 + \zeta \cdot q_{32}); \\ \vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta} = \vec{a}_n^0; \\ \vec{g}_1 &= \left(1 + t_x^1 + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_x^2 + \frac{\zeta \gamma_{,x}^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \\ \vec{g}_2 &= \left(t_t^1 + \zeta \gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_t^2 + 1 + \zeta \cdot q_{32} + \frac{\zeta \gamma_{,t}^2 + \zeta \gamma^2 q_{22}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \\ &\quad + \left(t_t + \frac{\zeta \gamma^2 q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_n^0; \\ \vec{g}_3 &= \left(\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{\gamma^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

С учетом формул (3.19) деформации в произвольном слое цилиндра будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^{\zeta} &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,x} = t_x^1 + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0}; \\
\varepsilon_{22}^{\zeta} &= \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,t} = a_{22}^0 t_t^2 + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0} + \zeta \left(\gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_t^2 q_{32} \right); \\
2\varepsilon_{12}^{\zeta} &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,t} + \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,x} = t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2 + \zeta \left(\gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \frac{\gamma^1 a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32} \right); \\
2\varepsilon_{13}^{\zeta} &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,x} = \gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} + t_x; \\
2\varepsilon_{23}^{\zeta} &= \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,t} = \gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_t.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Представим выражения (3.50) в следующем виде

$$\varepsilon_{ij}^{\zeta} = \varepsilon_{ij} + \zeta \kappa_{ij}, \tag{3.51}$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= t_x^1; \quad \kappa_{11} = \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0}; \\
\varepsilon_{22} &= a_{22}^0 t_t^2 + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0}; \quad \kappa_{22} = \gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_t^2 q_{32}; \\
\varepsilon_{12} &= (t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2)/2; \quad \kappa_{12} = \left(\gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \frac{\gamma^1 a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32} \right)/2; \\
\varepsilon_{13} &= (\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} + t_x)/2; \quad \kappa_{13} = 0; \\
\varepsilon_{23} &= (\gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_t)/2; \quad \kappa_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

3.4. Физические соотношения тонких оболочек

Контравариантные компоненты тензора напряжений в произвольном слое оболочки связаны с ковариантными компонентами тензора деформаций соотношениями

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu g^{ik} g^{jm} \varepsilon_{km}^{\zeta}, \tag{3.53}$$

где λ, μ – параметры, содержащие прочностные характеристики материала оболочки; g^{ij} – значения контравариантных компонент метрического тензора, $I_1(\varepsilon)$ – первый инвариант тензора деформаций.

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \varepsilon_{km}^{\zeta} g^{ij} = g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + g^{13} \varepsilon_{13}^{\zeta} + g^{21} \varepsilon_{21}^{\zeta} + g^{22} \varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ &+ g^{23} \varepsilon_{23}^{\zeta} + g^{31} \varepsilon_{31}^{\zeta} + g^{32} \varepsilon_{32}^{\zeta} + g^{33} \varepsilon_{33}^{\zeta} = g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{22} \varepsilon_{22}^{\zeta} + g^{33} \varepsilon_{33}^{\zeta} + \\ &+ 2g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + 2g^{13} \varepsilon_{13}^{\zeta} + 2g^{23} \varepsilon_{23}^{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

С учетом (3.54) представим (3.53) в развернутом виде

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \lambda(g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{22} \varepsilon_{22}^{\zeta} + g^{33} \varepsilon_{33}^{\zeta} + 2g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + 2g^{13} \varepsilon_{13}^{\zeta} + 2g^{23} \varepsilon_{23}^{\zeta})g^{11} + \\ &+ 2\mu(g^{11}g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{11}g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + g^{11}g^{13} \varepsilon_{13}^{\zeta} + g^{12}g^{11} \varepsilon_{21}^{\zeta} + g^{12}g^{12} \varepsilon_{22}^{\zeta} + g^{12}g^{13} \varepsilon_{23}^{\zeta} + \\ &+ g^{13}g^{11} \varepsilon_{31}^{\zeta} + g^{13}g^{12} \varepsilon_{32}^{\zeta} + g^{13}g^{13} \varepsilon_{33}^{\zeta}) = \lambda g^{11}(g^{11}g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{12}g^{12} \varepsilon_{12}^{\zeta} + \\ &+ g^{11}g^{13} \varepsilon_{13}^{\zeta} + g^{12}g^{11} \varepsilon_{21}^{\zeta} + g^{12}g^{12} \varepsilon_{22}^{\zeta} + g^{12}g^{13} \varepsilon_{23}^{\zeta} + g^{13}g^{11} \varepsilon_{31}^{\zeta} + g^{13}g^{12} \varepsilon_{32}^{\zeta} + \\ &+ g^{13}g^{13} \varepsilon_{33}^{\zeta}) + 2\mu(g^{11}g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{12}g^{12} \varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ &+ g^{13}g^{13} \varepsilon_{33}^{\zeta} + 2g^{12}g^{11} \varepsilon_{12}^{\zeta} + 2g^{13}g^{11} \varepsilon_{13}^{\zeta} + 2g^{12}g^{13} \varepsilon_{23}^{\zeta}) = \\ &= \lambda g^{11}g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + \lambda g^{22}g^{11} \varepsilon_{22}^{\zeta} + \lambda g^{33}g^{11} \varepsilon_{33}^{\zeta} + 2\lambda g^{12}g^{11} \varepsilon_{12}^{\zeta} + 2\lambda g^{13}g^{11} \varepsilon_{13}^{\zeta} + \\ &+ 2\lambda g^{23}g^{11} \varepsilon_{23}^{\zeta} + 2\mu g^{11}g^{11} \varepsilon_{11}^{\zeta} + 2\mu g^{12}g^{12} \varepsilon_{22}^{\zeta} + 2\mu g^{13}g^{13} \varepsilon_{33}^{\zeta} + 4\mu g^{12}g^{11} \varepsilon_{12}^{\zeta} + \\ &+ 4\mu g^{13}g^{11} \varepsilon_{13}^{\zeta} + 4\mu g^{12}g^{13} \varepsilon_{23}^{\zeta} = g^{11}g^{11}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^{\zeta} + (\lambda g^{22}g^{11} + 2\mu g^{12}g^{12})\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ &+ (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{13}g^{13})\varepsilon_{33}^{\zeta} + g^{12}g^{11}(2\lambda + 4\mu)\varepsilon_{12}^{\zeta} + g^{13}g^{11}(2\lambda + 4\mu)\varepsilon_{13}^{\zeta} + \\ &+ (2\lambda g^{23}g^{11} + 4\mu g^{12}g^{13})\varepsilon_{23}^{\zeta}; \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= g^{11}g^{12}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{12}g^{22}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ &+ (g^{12}g^{12}(\lambda + \mu) + g^{11}g^{22}\mu)2\varepsilon_{12}^{\zeta} + (\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})\varepsilon_{33}^{\zeta} + \\ &+ (g^{12}g^{13}(\lambda + \mu) + g^{11}g^{23}\mu)2\varepsilon_{13}^{\zeta} + ((\lambda + \mu)g^{12}g^{23} + g^{13}g^{22}\mu)2\varepsilon_{23}^{\zeta}; \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{22} &= (\lambda g^{22}g^{11} + 2\mu g^{21}g^{21})\varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{22}g^{22}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ &+ (\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})\varepsilon_{33}^{\zeta} + 2g^{22}g^{12} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{12}^{\zeta} + \end{aligned}$$

$$+(2\lambda g^{22}g^{13} + 4\mu g^{21}g^{23})\varepsilon_{13}^{\zeta} + 2g^{22}g^{23} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{23}^{\zeta}; \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{13} = & g^{11}g^{13}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}^{\zeta} + (\lambda g^{13}g^{22} + 2\mu g^{12}g^{32})\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ & + g^{13}g^{33}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}^{\zeta} + (\lambda g^{13}g^{12} + \mu g^{11}g^{32} + \mu g^{12}g^{13})2\varepsilon_{12}^{\zeta} + \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} & + (\lambda g^{13}g^{13} + \mu g^{11}g^{33} + \mu g^{13}g^{13})2\varepsilon_{13}^{\zeta} + (\lambda g^{13}g^{23} + \mu g^{12}g^{33} + \mu g^{13}g^{23})2\varepsilon_{23}^{\zeta}; \\ \sigma^{23} = & (\lambda g^{23}g^{11} + 2\mu g^{21}g^{31})\varepsilon_{11}^{\zeta} + g^{23}g^{22}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ & + g^{21}g^{33}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}^{\zeta} + (\lambda g^{23}g^{12} + \mu g^{21}g^{32} + \mu g^{22}g^{31})2\varepsilon_{12}^{\zeta} + \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$+ (\lambda g^{23}g^{13} + \mu g^{21}g^{33} + \mu g^{23}g^{13})2\varepsilon_{13}^{\zeta} + (\lambda g^{23}g^{23} + \mu g^{22}g^{33} + \mu g^{23}g^{23})2\varepsilon_{23}^{\zeta}.$$

$$\begin{aligned} \sigma^{33} = & (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31})\varepsilon_{11}^{\zeta} + (\lambda g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32})\varepsilon_{22}^{\zeta} + \\ & g^{33}g^{33}(\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}^{\zeta} + (\lambda g^{33}g^{12} + 2\mu g^{31}g^{32})2\varepsilon_{12}^{\zeta} + \\ & + (\lambda g^{33}g^{13} + 2\mu g^{31}g^{33})2\varepsilon_{13}^{\zeta} + g^{33}g^{23}(\lambda + 2\mu)2\varepsilon_{23}^{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Согласно общепринятой гипотезе о равенстве нулю нормальных напряжений, в направлении перпендикулярном срединной поверхности, будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma^{33} = & \varepsilon_{11}^{\zeta}(\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31}) + \varepsilon_{22}^{\zeta}(\lambda g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32}) + \\ & + \varepsilon_{33}^{\zeta}(\lambda g^{33}g^{33} + 2\mu g^{33}g^{33}) + \varepsilon_{12}^{\zeta}(2\lambda g^{33}g^{12} + 4\mu g^{31}g^{32}) + \\ & + \varepsilon_{13}^{\zeta}(2\lambda g^{33}g^{13} + 4\mu g^{31}g^{33}) + \varepsilon_{23}^{\zeta}(2\lambda g^{33}g^{23} + 2\mu g^{32}g^{33}) = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Выразим ε_{33}^{ζ} из соотношения (3.61)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{\zeta} = & \frac{1}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} \left(-(\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31})\varepsilon_{11}^{\zeta} - (\lambda g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32})\varepsilon_{22}^{\zeta} - \right. \\ & \left. - (\lambda g^{33}g^{12} + 2\mu g^{31}g^{32})2\varepsilon_{12}^{\zeta} - (\lambda + 2\mu)g^{33}g^{13}2\varepsilon_{13}^{\zeta} - (\lambda + 2\mu)g^{33}g^{32}2\varepsilon_{23}^{\zeta} \right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

После подстановки равенства (3.62) в формулы (3.55) – (3.59) получим

$$\begin{aligned} \sigma^{11} = & \varepsilon_{11}^{\zeta} \left[g^{11}g^{11}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{11}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{13})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31}) \right] + \\ & + \varepsilon_{22}^{\zeta} \left[\lambda g^{11}g^{22} + 2\mu g^{12}g^{12} - \frac{(\lambda g^{11}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{13})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{12}^{\zeta} \left[2g^{11}g^{12}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{11}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{13})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (2\lambda g^{33}g^{12} + 4\mu g^{31}g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{13}^{\zeta} \left[2g^{11}g^{13}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{11}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{13})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{13} \right] + \\
& +\varepsilon_{23}^{\zeta} \left[2\lambda g^{11}g^{23} + 4\mu g^{12}g^{13} - \frac{(\lambda g^{11}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{13})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{32} \right]; \\
\sigma^{12} & = \varepsilon_{11}^{\zeta} \left[g^{12}g^{11}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31}) \right] + \\
& +\varepsilon_{22}^{\zeta} \left[g^{12}g^{22}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{12}^{\zeta} \left[2(g^{12}g^{12}(\lambda + \mu) + \mu g^{11}g^{22}) - \frac{(\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} 2(\lambda g^{33}g^{33} + 2\mu g^{31}g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{13}^{\zeta} \left[2(g^{12}g^{13}(\lambda + \mu) + \mu g^{11}g^{23}) - \frac{(\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{13} \right] + \\
& +\varepsilon_{23}^{\zeta} \left[2(g^{12}g^{23}(\lambda + \mu) + \mu g^{13}g^{22}) - \frac{(\lambda g^{12}g^{33} + 2\mu g^{13}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{32} \right]; \\
\sigma^{22} & = \varepsilon_{11}^{\zeta} \left[\lambda g^{22}g^{11} + 2\mu g^{21}g^{21} - \frac{(\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31}) \right] + \\
& +\varepsilon_{22}^{\zeta} \left[g^{22}g^{22}(\lambda + \mu) - \frac{(\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{22} + 2\mu g^{32}g^{32} \right] + \\
& +\varepsilon_{12}^{\zeta} \left[2g^{22}g^{12}(\lambda + \mu) - \frac{(\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} 2(\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{12} + 2\mu g^{31}g^{32} \right] + \\
& +\varepsilon_{13}^{\zeta} \left[2(\lambda g^{22}g^{13} + 2\mu g^{21}g^{23}) - \frac{(\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{13} \right] + \\
& +\varepsilon_{23}^{\zeta} \left[2g^{22}g^{23}(\lambda + 2\mu) - \frac{(\lambda g^{22}g^{33} + 2\mu g^{23}g^{23})}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda + 2\mu)2g^{33}g^{32} \right]; \\
\sigma^{13} & = \varepsilon_{11}^{\zeta} \left[g^{11}g^{13}(\lambda + 2\mu) - \frac{g^{13}g^{33}(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)g^{33}g^{33}} (\lambda g^{33}g^{11} + 2\mu g^{31}g^{31}) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_{22}^{\zeta} \left[\lambda g^{31} g^{22} + 2\mu g^{12} g^{32} - \frac{g^{13} g^{13} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda g^{33} g^{22} + 2\mu g^{32} g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{12}^{\zeta} \left[2(g^{13} g^{12} (\lambda + \mu) + \mu g^{11} g^{32}) - \frac{g^{13} g^{13} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} 2(\lambda g^{33} g^{12} + 2\mu g^{31} g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{13}^{\zeta} \left[2(\lambda g^{13} g^{13} + \mu g^{11} g^{33} + \mu g^{13} g^{13}) - \frac{g^{13} g^{13} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda + 2\mu) 2g^{33} g^{13} \right] + \\
& +\varepsilon_{23}^{\zeta} \left[2(\lambda g^{13} g^{23} + \mu g^{12} g^{33} + \mu g^{13} g^{23}) - \frac{g^{13} g^{13} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda + 2\mu) 2g^{33} g^{32} \right]; \\
\sigma^{23} = & \varepsilon_{11}^{\zeta} \left[\lambda g^{23} g^{11} + 2\mu g^{21} g^{31} - \frac{g^{23} g^{33} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda g^{33} g^{11} + 2\mu g^{31} g^{31}) \right] + \\
& +\varepsilon_{22}^{\zeta} \left[g^{23} g^{22} (\lambda + 2\mu) - \frac{g^{23} g^{33} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda g^{33} g^{22} + 2\mu g^{32} g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{12}^{\zeta} \left[2(\lambda g^{23} g^{12} + \mu g^{11} g^{32} + \mu g^{22} g^{31}) - \frac{g^{23} g^{33} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} 2(\lambda g^{33} g^{12} + 2\mu g^{31} g^{32}) \right] + \\
& +\varepsilon_{13}^{\zeta} \left[2(\lambda g^{23} g^{13} + \mu g^{21} g^{33} + \mu g^{23} g^{13}) - \frac{g^{23} g^{33} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda + 2\mu) 2g^{33} g^{13} \right] + \\
& +\varepsilon_{23}^{\zeta} \left[2(g^{23} g^{23} (\lambda + \mu) + \mu g^{22} g^{33}) - \frac{g^{23} g^{33} (\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu) g^{33} g^{33}} (\lambda + 2\mu) 2g^{33} g^{32} \right]. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Соотношения (3.63) могут быть представлены в матричном виде

$$\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{5 \times 1} = [C] \left\{ \varepsilon_{ij}^{\zeta} \right\}_{5 \times 5}, \quad (3.64)$$

где

$$\left\{ \sigma^{ij} \right\}_{1 \times 5}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{22} \sigma^{23}\}; \quad \left\{ \varepsilon_{ij}^{\zeta} \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ \varepsilon_{11}^{\zeta} 2\varepsilon_{12}^{\zeta} 2\varepsilon_{13}^{\zeta} \varepsilon_{22}^{\zeta} 2\varepsilon_{23}^{\zeta} \right\},$$

$[C]_{5 \times 5}$ - матрица упругости.

3.5. Интерполяция полей перемещений как скалярных величин при использовании матрицы жесткости размерностью 44x44 четырехузлового оболочечного элемента дискретизации с учетом сдвиговых деформаций

При скалярной интерполяции каждая компонента вектора перемещения в произвольной точке конечного элемента аппроксимируется через свои же узловые компоненты и не зависит от узловых значений остальных двух компонент

$$\begin{aligned} v^1 &= \{\psi\}^T \{v_y^{1л}\}; & v^2 &= \{\psi\}^T \{v_y^{2л}\}; & v &= \{\psi\}^T \{v_y^л\}; \\ & \underset{1 \times 12}{\{\psi\}^T} \underset{12 \times 1}{\{v_y^{1л}\}}; & \underset{1 \times 12}{\{\psi\}^T} \underset{12 \times 1}{\{v_y^{2л}\}}; & \underset{1 \times 12}{\{\psi\}^T} \underset{12 \times 1}{\{v_y^л\}}; \\ \gamma^1 &= \{h\}^T \{\gamma_y^{1л}\}; & \gamma^2 &= \{h\}^T \{\gamma_y^{2л}\}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Набор узловых варьируемых параметров в системе координат α, β (т. е. локальных координат) и в системе координат x, t (т. е. глобальных координат) определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \{U_y^л\}^T &= \left\{ \{v_y^{1л}\}^T \{v_y^{2л}\}^T \{v_y^л\}^T \{\gamma_y^{1л}\}^T \{\gamma_y^{2л}\}^T \right\}; \\ \{U_y^\Gamma\}^T &= \left\{ \{v_y^{1\Gamma}\}^T \{v_y^{2\Gamma}\}^T \{v_y^\Gamma\}^T \{\gamma_y^{1\Gamma}\}^T \{\gamma_y^{2\Gamma}\}^T \right\}; \\ \{m_y^л\}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,\alpha}^i \dots m_{,\alpha}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l\}; & \{\theta_y^л\}^T &= \{\theta^i \dots \theta^l\}, \\ \{m_y^\Gamma\}^T &= \{m^i \dots m^l m_{,x}^i \dots m_{,x}^l m_{,t}^i \dots m_{,t}^l\}; & \{\theta_y^\Gamma\}^T &= \{\theta^i \dots \theta^l\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где m - это компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v , θ - это γ^1 или γ^2 .

Выразим перемещения произвольной точки четырехугольного элемента через узловые векторы перемещений

$$m = \{\psi\}^T \{m_y^л\}; \quad \theta = \{h\}^T \{\theta_y^л\}, \quad (3.67)$$

где $\{\psi\}^T = \{\psi_1 \dots \psi_{12}\}$ - матрица-строка, которая составлена из полиномов Эрмита третьей степени, $\{h\}^T = \{h_1 h_2 h_3 h_4\}$ - матрица-строка, содержащая билинейные функции локальных координат.

Представим соотношения (3.67) в развернутом виде

$$m = g_1(\alpha)g_1(\beta)m^i + g_2(\alpha)g_1(\beta)m^j + g_2(\alpha)g_2(\beta)m^k + g_1(\alpha)g_2(\beta)m^l + \\ + g_3(\alpha)g_1(\beta)m_{,\alpha}^i + g_4(\alpha)g_1(\beta)m_{,\alpha}^j + g_4(\alpha)g_2(\beta)m_{,\alpha}^k + g_3(\alpha)g_2(\beta)m_{,\alpha}^l + \\ + g_1(\alpha)g_3(\beta)m_{,\beta}^i + g_2(\alpha)g_3(\beta)m_{,\beta}^j + g_2(\alpha)g_4(\beta)m_{,\beta}^k + g_1(\alpha)g_4(\beta)m_{,\beta}^l, \quad (3.68)$$

где g_1, \dots, g_4 – полиномы Эрмита третьей степени.

$$g_1 = (q^3 - 3q + 2)/4; \quad g_2 = (-q^3 + 3q + 2)/4;$$

$$g_3 = (q^3 - q^2 - q + 1)/4; \quad g_4 = (q^3 + q^2 - q + 1)/4,$$

где q принимает значения локальных координат α или β .

$$\theta = \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} \theta^i + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1-\beta}{2} \theta^j + \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} \theta^k + \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1+\beta}{2} \theta^l. \quad (3.69)$$

Продифференцировав соотношения (3.68) и (3.69) по глобальным координатам x и t , найдем первые и вторые производные

$$m_{,x} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{m_y^n\}; \quad m_{,t} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{m_y^n\}; \\ m_{,xx} = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) \{m_y^n\}; \\ m_{,tt} = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) \{m_y^n\}; \\ m_{,xt} = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \right. \\ \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) \{m_y^n\};$$

$$\theta_{,x} = \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{\theta_y^n\}; \quad \theta_{,t} = \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{\theta_y^n\}. \quad (3.70)$$

С учетом формул (3.36), (3.67) и (3.70) соотношения (3.52) примут вид

$$\varepsilon_{11} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^1\}; \\ \varkappa_{11} = \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{\gamma_y^1\}; \\ 2\varepsilon_{12} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y^1\} + a_{22}^0 \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^2\};$$

$$\begin{aligned}
2\kappa_{12} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_t + \{h, \beta\}^T \beta_t \right) \{\gamma_y^1\} + \frac{a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} \{h\}^T \{\gamma_y^1\} + \\
&+ \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_x + \{h, \beta\}^T \beta_x \right) \{\gamma_y^2\} + a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) \{v_y^2\}; \\
2\varepsilon_{13} &= \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^1\} + \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) \{v_y\}; \quad 2\kappa_{13} = 0; \\
\varepsilon_{22} &= a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) \{v_y^2\} - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} + a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T \{v_y\} + \\
&+ q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^2\}; \\
\kappa_{22} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_t + \{h, \beta\}^T \beta_t \right) \{\gamma_y^2\} + \\
&+ a_{22}^0 q_{32} \left(a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) \{v_y^2\} - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} + a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T \{v_y\} \right); \\
2\varepsilon_{23} &= \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^2\} + q_{23} \{\psi\}^T \{v_y^2\} + \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) \{v_y\}; \quad 2\kappa_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

На основании соотношений (3.71), (3.63) скомпонуем следующие матричные зависимости

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 10 \times 1 \end{matrix} = [B1] \begin{matrix} \{U_y\} \\ 10 \times 44 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \{\varepsilon^\zeta\} \\ 5 \times 1 \end{matrix} = [\Gamma] \begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 5 \times 10 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 5 \times 1 \end{matrix} = [C] \begin{matrix} \{\varepsilon^\zeta\} \\ 5 \times 5 \end{matrix}, \tag{3.72}$$

$$\text{где } \begin{matrix} [\Gamma] \\ 5 \times 10 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix};$$

$$\begin{matrix} [B1] \\ 10 \times 44 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \{b1\}_{11} & \{b1\}_{12} & \{b1\}_{13} & \{b1\}_{14} & \{b1\}_{15} \\ \{b1\}_{21} & \{b1\}_{22} & \{b1\}_{23} & \{b1\}_{24} & \{b1\}_{25} \\ \{b1\}_{31} & \{b1\}_{32} & \{b1\}_{33} & \{b1\}_{34} & \{b1\}_{35} \\ \{b1\}_{41} & \{b1\}_{42} & \{b1\}_{43} & \{b1\}_{44} & \{b1\}_{45} \\ \{b1\}_{51} & \{b1\}_{52} & \{b1\}_{53} & \{b1\}_{54} & \{b1\}_{55} \\ \{b1\}_{61} & \{b1\}_{62} & \{b1\}_{63} & \{b1\}_{64} & \{b1\}_{65} \\ \{b1\}_{71} & \{b1\}_{72} & \{b1\}_{73} & \{b1\}_{74} & \{b1\}_{75} \\ \{b1\}_{81} & \{b1\}_{82} & \{b1\}_{83} & \{b1\}_{84} & \{b1\}_{85} \\ \{b1\}_{91} & \{b1\}_{92} & \{b1\}_{93} & \{b1\}_{94} & \{b1\}_{95} \\ \{b1\}_{101} & \{b1\}_{102} & \{b1\}_{103} & \{b1\}_{104} & \{b1\}_{105} \end{bmatrix}. \tag{3.73}$$

Элементы матрицы $[B1]$, которые находятся в 1, 2 и 3 столбцах имеют размерность $[1 \times 12]$, в 4, 5 - $[1 \times 4]$

$$\begin{aligned}
\{b1\}_{11} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}; \\
\{b1\}_{21} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}; \quad \{b1\}_{22} = a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b1\}_{33} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}; \quad \{b1\}_{34} = \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T; \\
\{b1\}_{42} &= a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right) - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T; \\
\{b1\}_{43} &= a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T; \quad \{b1\}_{45} = q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T; \\
\{b1\}_{52} &= q_{23} \{\psi\}^T; \quad \{b1\}_{53} = \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}; \quad \{b1\}_{55} = \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T; \\
\{b1\}_{64} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b1\}_{72} &= a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \quad \{b1\}_{75} = \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b1\}_{74} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{h, \beta\}^T \beta_{,t} \right) + \frac{a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} \{h\}^T; \\
\{b1\}_{92} &= a_{22}^0 q_{32} \left(a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right) - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} \right); \\
\{b1\}_{93} &= (a_{22}^0)^2 (q_{32})^2 \{\psi\}^T; \quad \{b1\}_{95} = \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{h, \beta\}^T \beta_{,t} \right). \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Все остальные элементы матрицы $[B1]_{10 \times 44}$ равны нулю.

Процедура формирования матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырехугольного конечного элемента выполняется в порядке, описанном в п. 2.4.

Для получения матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырехугольного конечного элемента можно воспользоваться равенством работ как внешних, так и внутренних сил на возможном перемещении [97]

$$\int_V \left\{ \varepsilon_{ij}^{\zeta} \right\}^T \left\{ \sigma^{ij} \right\} dV = \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (3.75)$$

где

$$\{\varepsilon_{ij}^{\zeta}\}^T = \{\varepsilon_{11}^{\zeta} 2\varepsilon_{12}^{\zeta} 2\varepsilon_{13}^{\zeta} \varepsilon_{22}^{\zeta} 2\varepsilon_{23}^{\zeta}\}; \{\sigma^{ij}\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{22} \sigma^{23}\}; \{U\}^T = \{v^1 v^2 v\};$$

$$\{P\}^T = \{p_1 p_2 p\}.$$

С учетом (3.72) выражение (3.75) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \{U_y^{\Gamma}\}^T [PR]^T \int_V [B]^T [I]^T [C] [I] [B] dV [PR] \{U_y^{\Gamma}\} = \\ = \{U_y^{\Gamma}\}^T [PR]^T \int_F [A]^T \{P\} dF, \end{aligned} \quad (3.76)$$

где $[PR]$ - матрица перехода от столбца $\{U_y^{\Gamma}\}$ к столбцу $\{U_y^{\Gamma}\}$, определяемая

с использованием соотношений

$$\begin{aligned} v_{,\alpha}^{1w} &= v_{,X}^{1w} X_{,\alpha}^w + v_{,T}^{1w} T_{,\alpha}^w; \quad v_{,\beta}^{1w} = v_{,X}^{1w} X_{,\beta}^w + v_{,T}^{1w} T_{,\beta}^w; \\ v_{,\alpha}^{2w} &= v_{,X}^{2w} X_{,\alpha}^w + v_{,T}^{2w} T_{,\alpha}^w; \quad v_{,\beta}^{2w} = v_{,X}^{2w} X_{,\beta}^w + v_{,T}^{2w} T_{,\beta}^w; \\ v_{,\alpha}^w &= v_{,X}^w X_{,\alpha}^w + v_{,T}^w T_{,\alpha}^w; \quad v_{,\beta}^w = v_{,X}^w X_{,\beta}^w + v_{,T}^w T_{,\beta}^w, \end{aligned} \quad (3.77)$$

где индекс w принимает значения i, j, k, l .

Входящая в (3.76) матрица $[A]$ имеет следующую структуру

$$[A]_{3 \times 44} = \begin{bmatrix} \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \\ \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \\ \{0\}^T & \{0\}^T & \{\varphi\}^T & \{0\}^T & \{0\}^T \\ 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 12 & 1 \times 4 & 1 \times 4 \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

В результате минимизации (3.76) по $\{U_y^{\Gamma}\}^T$ можно получить следующее матричное выражение

$$[K^{\Gamma}]_{44 \times 44} \{U_y^{\Gamma}\}_{44 \times 1} = [R^{\Gamma}]_{44 \times 1}, \quad (3.79)$$

где $[K^{\Gamma}]_{44 \times 44} = [PR]^T \int_V [B]^T [I]^T [C] [I] [B] dV [PR]$ - матрица жесткости; $[R^{\Gamma}]_{44 \times 1} = [PR]^T \int_F [A]^T \{P\} dF$ - столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента в глобальной системе координат.

Во втором варианте отсчета угла поворота нормали вектор перемещения точки, находящейся на расстоянии ζ от срединной поверхности, определяется соотношением (3.13)

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0) + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0). \quad (3.80)$$

На основании формулы (3.43) найдем

$$\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0 = -t_x \vec{a}_1^0 - t_t \vec{a}_2^0. \quad (3.81)$$

Векторное произведение $(\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0)$, а также его производные по глобальным координатам можно представить соотношениями

$$\begin{aligned} \vec{v}^n \times \vec{a}_n^0 &= (-t_x \vec{a}_1^0 - t_t \vec{a}_2^0) \times \vec{a}_n^0 = \left(\frac{t_x}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 - \left(t_t \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0; \\ (\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0)_{,x} &= \left(\frac{t_{xx}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 - \left(t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0; \\ (\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0)_{,t} &= - \left(t_{tt} \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{t_{tx} + t_x q_{22}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(\frac{t_x q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Дифференцированием по глобальным координатам можно найти производные вектора перемещения (3.80)

$$\begin{aligned} \vec{V}_{,\zeta} &= \vec{v}^n \times \vec{a}_n^0 + \vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0 = \left(\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_t \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{t_x + \gamma^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0; \\ \vec{V}_{,x} &= \left(t_x^1 - \zeta t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_x^2 + \frac{\zeta (t_{xx} + \gamma_{,x}^2)}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \\ \vec{V}_{,t} &= \left(t_t^1 + \zeta \sqrt{a_{22}^0} (\gamma_{,t}^1 - t_{tt}) \right) \vec{a}_1^0 + \left(t_t^2 + \frac{\zeta}{\sqrt{a_{22}^0}} (t_{tx} + t_x q_{22} + \gamma_{,t}^2 + \gamma^2 q_{22}) \right) \vec{a}_2^0 \\ &\quad + \left(t_t + \frac{\zeta}{\sqrt{a_{22}^0}} (t_x q_{23} + \gamma^2 q_{23}) \right) \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Дифференцированием радиуса-вектора $\vec{R}^{o\zeta}$ по x, t, ζ , можно найти векторы базиса в исходном состоянии

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^{0\zeta} = (\vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o)_{,x} = \vec{R}^o_{,x} + \zeta \vec{a}_{n,x}^o = \vec{a}_1^o; \\
\vec{g}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^{0\zeta} = (\vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o)_{,t} = \vec{R}^o_{,t} + \zeta \vec{a}_{n,t}^o = \vec{a}_2^o(1 + \zeta \cdot q_{32}); \\
\vec{g}_3^0 &= \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta} = \vec{a}_n^o.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Векторы базиса в деформированном состоянии можно определить дифференцированием радиуса-вектора \vec{R}^ζ по x, t, ζ

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \vec{R}_{,x}^\zeta = (\vec{R}^{o\zeta} + \vec{V})_{,x} = \vec{g}_1^0 + \vec{V}_{,x}; \\
\vec{g}_2 &= \vec{R}_{,t}^\zeta = (\vec{R}^{o\zeta} + \vec{V})_{,t} = \vec{g}_2^0 + \vec{V}_{,t}; \\
\vec{g}_3 &= \vec{R}_{,\zeta}^\zeta = (\vec{R}^{o\zeta} + \vec{V})_{,\zeta} = \vec{g}_3^0 + \vec{V}_{,\zeta}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

С учетом соотношений (3.83) формулы (3.85) примут вид

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \left(1 + t_x^1 - \zeta t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0}\right) \vec{a}_1^0 + \left(t_x^2 + \frac{\zeta(t_{xx} + \gamma_{,x}^2)}{\sqrt{a_{22}^0}}\right) \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \\
\vec{g}_2 &= \left(t_t^1 + \zeta \sqrt{a_{22}^0}(\gamma_{,t}^1 - t_{tt})\right) \vec{a}_1^0 + \\
&\quad \left(t_t^2 + 1 + \zeta \cdot q_{32} + \frac{\zeta}{\sqrt{a_{22}^0}}(t_{tx} + t_x q_{22} + \gamma_{,t}^2 + \gamma^2 q_{22})\right) \vec{a}_2^0 + \\
&\quad + \left(t_t + \frac{\zeta}{\sqrt{a_{22}^0}}(t_x q_{23} + \gamma^2 q_{23})\right) \vec{a}_n^0; \\
\vec{g}_3 &= \left(\gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_t \sqrt{a_{22}^0}\right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{t_x + \gamma^2}{\sqrt{a_{22}^0}}\right) \vec{a}_2^0 + \vec{a}_n^0.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

На основании формул (3.19) деформации в произвольном слое для эллиптического цилиндра будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^\zeta &= t_x^1 + \zeta \left(\gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_{tx} \sqrt{a_{22}^0}\right); \\
\varepsilon_{22}^\zeta &= t_t^2 a_{22}^0 + \zeta \left(t_t^2 a_{22}^0 q_{32} + t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} + t_x q_{22} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0}\right);
\end{aligned}$$

$$2\varepsilon_{12}^{\zeta} = t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2 + \zeta \left(-t_{tt} \sqrt{a_{22}^0} + t_{xx} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32} \right);$$

$$2\varepsilon_{13}^{\zeta} = \gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_t \sqrt{a_{22}^0} + t_x; \quad (3.87)$$

$$2\varepsilon_{23}^{\zeta} = t_x \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_x + \zeta \left(t_x q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}(t_x + \gamma^2)}{\sqrt{a_{22}^0}} \right).$$

Представим выражения (3.50) в следующем виде

$$\varepsilon_{ij}^{\zeta} = \varepsilon_{ij} + \zeta \kappa_{ij}, \quad (3.88)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= t_x^1; & \kappa_{11} &= \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_{tx} \sqrt{a_{22}^0}; \\ \varepsilon_{22} &= t_t^2 a_{22}^0; \\ \kappa_{22} &= t_t^2 a_{22}^0 q_{32} + t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} + t_x q_{22} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0}; \\ 2\varepsilon_{12} &= t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2; \\ 2\kappa_{12} &= -t_{tt} \sqrt{a_{22}^0} + t_{xx} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32}; \\ 2\varepsilon_{13} &= \gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_t \sqrt{a_{22}^0} + t_x; & 2\kappa_{13} &= 0; \\ 2\varepsilon_{23} &= t_x \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_x; \\ 2\kappa_{23} &= t_x q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}(t_x + \gamma^2)}{\sqrt{a_{22}^0}}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

С учетом формул (3.36), (3.67) и (3.70) соотношения (3.89) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^1\}; \\ \kappa_{11} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^1\} - \\ &- q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^2\} - \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \right. \\ &+ \left. \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) \{v_y\}; \\ 2\varepsilon_{12} &= \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y^1\} + a_{22}^0 \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^2\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\kappa_{12} = & -\sqrt{a_{22}^0 q_{32} q_{23}} \{v_y\} + q_{22} q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \{v_y^2\} - \\
& -2q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y^2\} - \\
& -\sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) \{v_y\} + \\
& +\sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) \{v_y\} + \\
& +\sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{\gamma_y^1\} + \\
& +\sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{\gamma_y^2\} + a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^2\}; \\
2\varepsilon_{13} = & \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^1\} + \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y\} - \\
& -\sqrt{a_{22}^0 q_{23}} \{\psi\}^T \{v_y^2\} - \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y\}; \\
2\kappa_{13} = & 0; \\
\varepsilon_{22} = & a_{22}^0 \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y^2\} - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} + a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T \{v_y\}; \\
\kappa_{22} = & a_{22}^0 q_{32} \left(\left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{v_y^2\} - q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} + q_{32} \{\psi\}^T \{v_y\} \right) + \\
& +q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y^2\} + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \right. \\
& +\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \left. \right) \{v_y\} + q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^2\} + \\
& +q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y\} + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) \{\gamma_y^2\}; \\
2\varepsilon_{23} = & \left(1 + \sqrt{a_{22}^0} \right) \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y\} + \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T \{\gamma_y^2\}; \\
2\kappa_{23} = & \left(q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \left(\left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) \{v_y\} + \{h\}^T \{\gamma_y^2\} \right). \quad (3.90)
\end{aligned}$$

Структура матрицы [B2] аналогична матрице [B1]. На основании формул (3.90) запишем элементы матрицы [B2]

$$\begin{aligned}
\{b2\}_{11} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}; \\
\{b2\}_{21} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}; \quad \{b2\}_{22} = a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{32} &= -\sqrt{a_{22}^0} q_{23} \{\psi\}^T; \quad \{b2\}_{34} = \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T; \\
\{b2\}_{33} &= \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} - \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right); \\
\{b2\}_{42} &= a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right) - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T; \quad \{b2\}_{43} = a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T; \\
\{b2\}_{53} &= \left(1 + \sqrt{a_{22}^0} \right) \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \quad \{b2\}_{55} = \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T; \\
\{b2\}_{64} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{62} &= -\sqrt{a_{22}^0} q_{23} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{64} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{63} &= -\sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\alpha\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \right. \\
&\quad \left. + \{\psi, \beta\beta\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,xt} \right); \\
\{b2\}_{72} &= q_{22} q_{23} \sqrt{a_{22}^0} - 2q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right) + \\
&\quad + a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{73} &= -\sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\alpha\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi, \beta\beta\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,tt} \right) + \\
&\quad + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\alpha\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi, \beta\beta\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,xx} \right) - \sqrt{a_{22}^0} q_{32} q_{23}; \\
\{b2\}_{74} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{h, \beta\}^T \beta_{,t} \right); \quad \{b2\}_{85} = \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{92} &= a_{22}^0 q_{32} \left(\left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t} \right) - q_{22} \{\psi\}^T \{v_y^2\} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \\
\{b2\}_{93} & = a_{22}^0 \{\psi\}^T \{v_y\} (q_{32})^2 + q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right) + \\
& + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\alpha\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi, \alpha\beta\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \{\psi, \beta\beta\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \right. \\
& \quad \left. + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,xt} \right); \\
\{b2\}_{95} & = q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{h, \beta\}^T \beta_{,t} \right). \\
\{b2\}_{103} & = \left(q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x} \right); \quad \{b2\}_{105} = \{h\}^T. \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Все остальные элементы матрицы $[B2]_{10 \times 44}$ равны нулю.

3.6. Примеры расчетов

Пример расчета 3.1.

В качестве примера был рассчитан круговой цилиндр, нагруженный вдоль образующей распределенной нагрузкой интенсивности q и имеющий шарнирные опоры, находящиеся на противоположной стороне цилиндра, которые препятствуют смещению оболочки вдоль оси OZ (рис. 3.2).

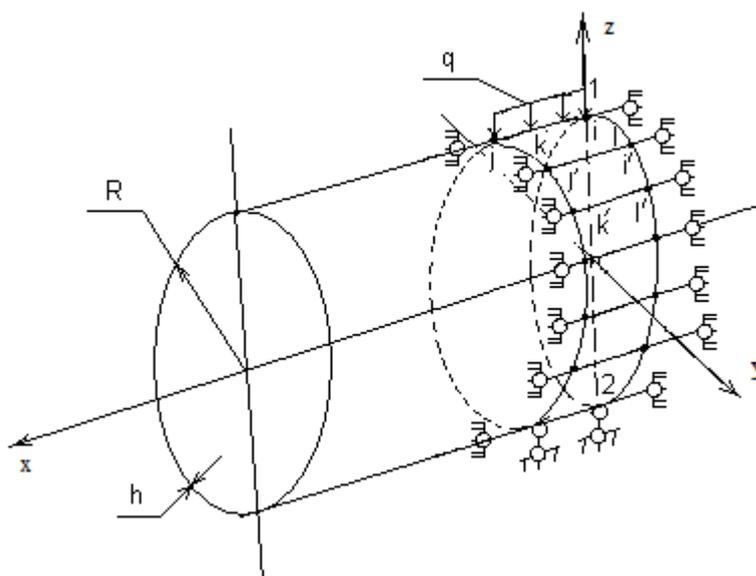


Рис. 3.2 - Расчетная схема кругового цилиндра с линейно распределенной нагрузкой

Вследствие наличия плоскостей симметрии оболочка моделировалась одной лентой конечных элементов, ориентированной в кольцевом направлении. Исходные данные имели следующие значения: $R = 1,0 \text{ м}$; $q = 10 \text{ Н/м}$; $h = 0,001 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,3$. Круговой цилиндр был рассчитан двумя способами: в первом варианте отсчета угла поворота нормали при формировании матрицы жесткости КЭ использовалось соотношение (3.12); во втором варианте – (3.13).

В таблицах 3.1 (для первого варианта) и 3.2 (для второго варианта) приведены численные значения нормальных напряжений на внутренней σ_{tt}^B и наружной σ_{tt}^H поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 в зависимости от густоты сетки дискретизации оболочки.

Таблица 3.1 - Значения нормальных напряжений σ_{tt} при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния

Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
		Сетка узлов				
		25x2	49x2	97x2	145x2	193x2
Точка (1) приложения силы $(0; \frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	172,40	182,10	187,01	188,65	189,50
	σ_{tt}^H	-170,33	-180,22	-185,13	-186,76	-187,60
Точка (2) шарнирного опирания $(0; -\frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	172,36	182,10	187,01	188,65	189,50
	σ_{tt}^H	-170,38	-180,23	-185,13	-186,76	-187,60

На основании анализа табличного материала (таблицы 3.1 и 3.2) была установлена сходимость вычислительного процесса к решению, которое было получено аналитически из условия равновесия кругового цилиндра. Причем,

когда угол отсчитывался от деформированного состояния нормали, уже при малой сетке дискретизации удается получить удовлетворительные результаты.

Таблица 3.2 - Значения нормальных напряжений σ_{tt} при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния

Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
		Сетка узлов				
		25x2	49x2	97x2	145x2	193x2
Точка (1) приложения силы $(0; \frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	193,80	192,23	191,98	191,95	191,91
	σ_{tt}^H	-188,51	-189,90	-190,02	-190,02	-190,00
Точка (2) шарнирного опирания $(0; -\frac{\pi}{2})$	σ_{tt}^B	193,63	192,19	191,97	191,94	191,87
	σ_{tt}^H	-188,43	-189,88	-190,01	-190,02	-190,00

На диаграмме (рис. 3.3) приведены значения физических напряжений σ_{tt} в точке приложения нагрузки на внутренней (верхняя часть диаграммы) и внешней (нижняя часть диаграммы) поверхностях цилиндра в зависимости от числа элементов дискретизации n_z .

Как видно из диаграммы, сходимость вычислительного процесса во втором варианте существенно лучше, чем в первом, а численные значения напряжений близки к значению $190,8 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$, вычисленному по формуле сопротивления материалов [16] для задачи расчета кольца с двумя сосредоточенными силами.

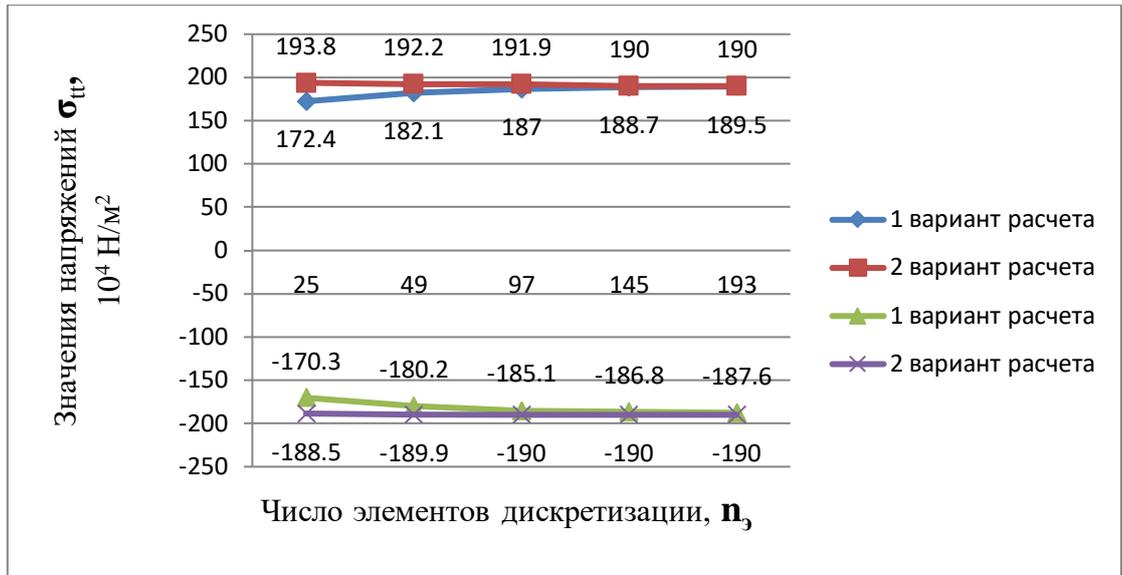


Рис. 3.3 - Значения напряжений σ_{tt} в точке приложения нагрузки на внутренней и внешней поверхностях цилиндра

При сопоставлении результатов повариантного расчета (таблица 3.3) следует также отметить наличие в первом варианте расчета «скачка» в значениях напряжений в узлах $l (i'), k (j')$ смежных элементов дискретизации (рис. 3.2).

Таблица 3.3 - Сравнение значений напряжений σ_{tt} в узлах смежных элементов

		n_3				
		25	49	97	145	193
1 вариант отсчета угла поворота нормали	σ_{tt}^l	172,4	182,1	187,0	188,7	189,5
		-170,3	-180,2	-185,1	-186,8	-187,6
	$\sigma_{tt}^{i'}$	133,1	162,3	177,1	182,0	189,5
		-131,9	-160,8	-175,4	-180,3	-187,6
2 вариант отсчета угла поворота нормали	σ_{tt}^l	193,8	192,2	192,0	191,9	191,0
		-188,5	-189,9	-190,0	-190,0	-190,0
	$\sigma_{tt}^{i'}$	192,4	192,2	192,0	191,9	191,0
		-187,3	-189,9	-190,0	-190,0	-190,0

Величина данного «скачка» уменьшается при увеличении числа элементов дискретизации. Во втором варианте расчета вышеупомянутый «скачок» в значениях σ_{tt} практически не наблюдается.

Пример расчета 3.2.

Был рассчитан эллиптический цилиндр, загруженный вдоль образующей распределенной нагрузкой интенсивности q и имеющий шарнирные опоры, находящиеся на противоположной стороне цилиндра, которые препятствуют смещению оболочки вдоль оси OZ (рис. 2.4). Исходные данные имели следующие значения: $q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}; b = 0,1 \text{ м}; h = 0,001 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \nu = 0,3$. Величина параметра c варьировалась от 0,05 до 0,025 м. Было принято следующее обозначение $n = c/b$. При $n = 1/2$ и $n = 1/4$ цилиндр будет принимать все более выраженную эллиптическую форму.

Результаты повариантных расчетов представлены в таблицах 3.4 и 3.5.

В таблице 3.4 приводятся результаты повариантных расчетов эллиптического цилиндра для первого варианта отсчета угла поворота нормали, в таблице 3.5 - для второго варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной аппроксимации.

Таблица 3.4 - Значения нормальных напряжений σ_{tt} для первого варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной аппроксимации

$n = c/b$	Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
			25x2	49x2	97x2	145x2	193x2
1/2	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	149,99	161,45	166,42	168,06	168,88
		σ_{tt}^H	-149,76	-160,65	-165,58	-167,21	-168,03
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	147,21	161,46	166,44	168,06	168,87
		σ_{tt}^H	-147,26	-160,69	-165,60	-167,21	-168,02
1/4	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	100,58	143,92	153,48	155,26	156,11
		σ_{tt}^H	-102,18	-143,76	-153,09	-154,87	-155,72
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	13,26	132,35	153,44	155,34	156,15
		σ_{tt}^H	-12,19	-131,87	-153,04	-154,95	-155,76

Таблица 3.5 - Значения нормальных напряжений σ_{tt} для второго варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной аппроксимации

$n = c/b$	Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
			25x2	49x2	97x2	145x2	193x2
1/2	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	170,30	171,65	171,33	171,34	171,34
		σ_{tt}^H	-168,45	-170,33	-170,46	-170,48	-170,48
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	167,75	171,50	171,37	171,36	171,35
		σ_{tt}^H	-166,24	-170,22	-170,50	-170,50	-170,49
1/4	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	116,10	148,12	157,80	158,40	158,52
		σ_{tt}^H	-117,13	-148,10	-157,42	-158,00	-158,12
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	-4,78	118,61	156,23	158,18	158,49
		σ_{tt}^H	5,91	-117,90	-155,81	-157,78	-158,09

Как видно из таблиц оба варианта дают приемлемые результаты, но во втором варианте отсчета угла поворота нормали погрешность менее значительна.

Пример расчета 3.3

Был рассчитан жестко заземленный по торцам круговой цилиндр, под воздействием внутреннего давления интенсивности q (рис. 3.4). Исходные данные имели следующие значения: $R = 1,0$ м; $L = 1,0$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $q = 5$ МПа. Наличие осевой симметрии позволило моделировать оболочку одной лентой КЭ, ориентированной вдоль образующей. Расчеты выполнялись в двух вариантах, в первом варианте отсчет угла поворота нормали производился от ее исходного положения, во втором – от ее деформированного положения.

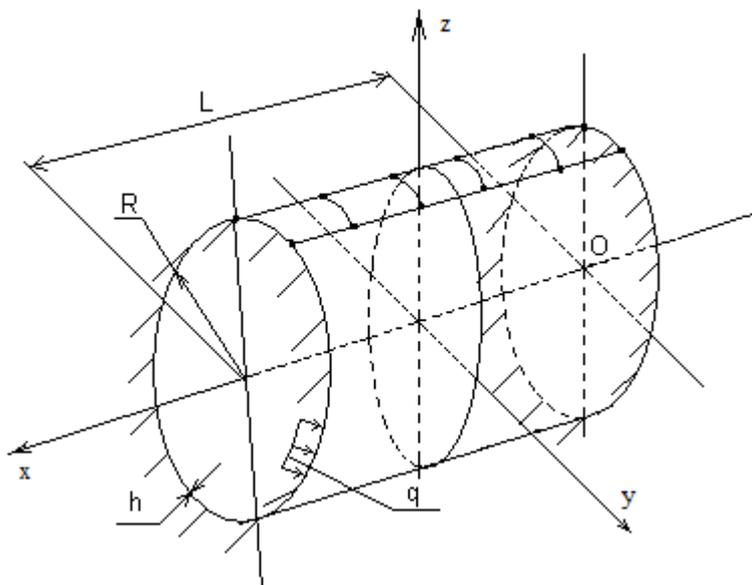


Рис. 3.4 - Расчетная схема жестко заземленного цилиндра под воздействием внутреннего давления

Результаты повариантного расчета представлены в виде диаграммы (рис. 3.5), на которой показаны значения физических напряжений σ_{xx} в жесткой заделке на внутренней (верхняя часть диаграммы) и внешней (нижняя часть диаграммы) поверхностях цилиндра в зависимости от числа элементов дискретизации n_z .



Рис. 3.5 - Значения физических напряжений σ_{xx} в жесткой заделке на внутренней и внешней поверхностях цилиндра

Анализ диаграммы показывает существенно лучшую сходимость вычислительного процесса, когда отсчет угла поворота нормали производился от ее деформированного положения, по сравнению с вариантом, когда отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее исходного состояния.

Анализ результатов вычисленных напряжений, представленных на обеих диаграммах, позволяет сделать вывод о предпочтительности второго варианта расчета, при котором можно получать удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации. В то же время следует отметить, что и первый вариант компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента с учетом деформации поперечного сдвига позволяет получать приемлемые результаты при весьма существенном сгущении сетки дискретизации рассчитываемой оболочки.

Эпюры изменений напряжений σ_{xx} , σ_{xt} , σ_{tt} вдоль образующей цилиндра для первого и второго вариантов отсчета углов поворота нормали при скалярной аппроксимации представлены в виде диаграмм (рис. 3.6 – 3.11). При расчетах использовалась сетка дискретизации (2x51).

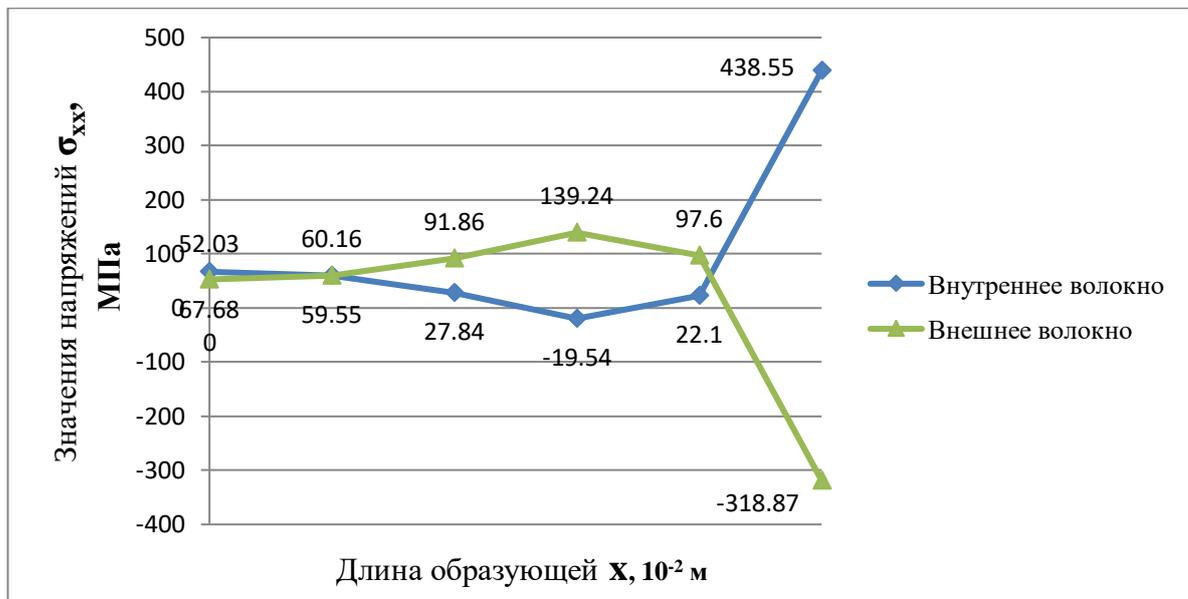


Рис. 3.6 - Эпюра напряжений σ_{xx} для первого варианта отсчета угла поворота нормали

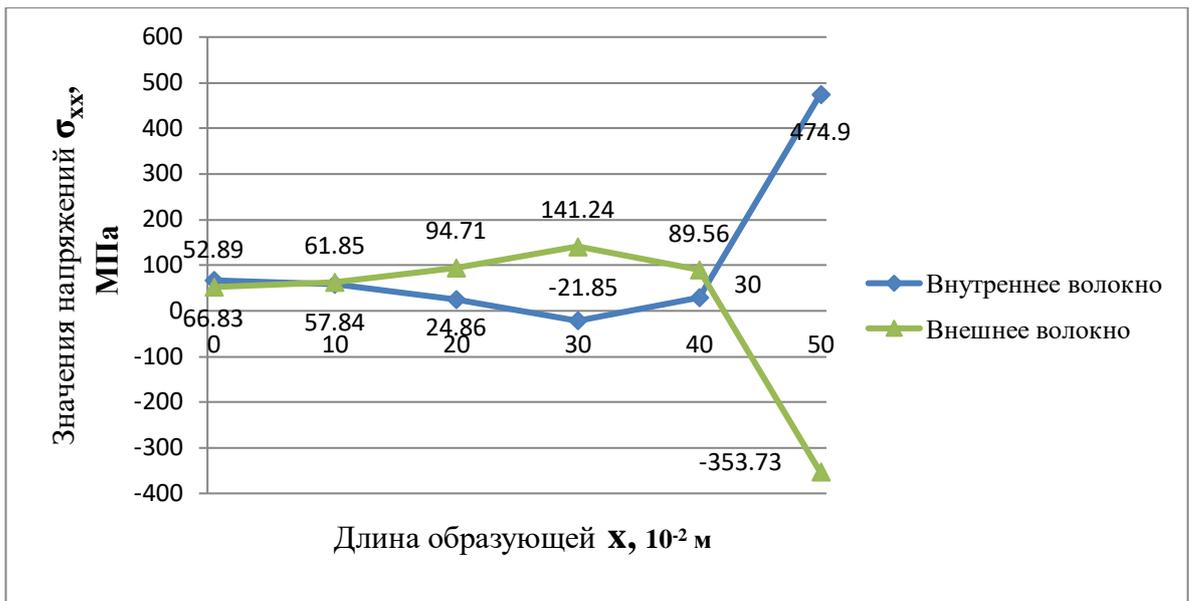


Рис. 3.7 - Эпюра напряжений σ_{xx} для второго варианта отсчета угла поворота нормали

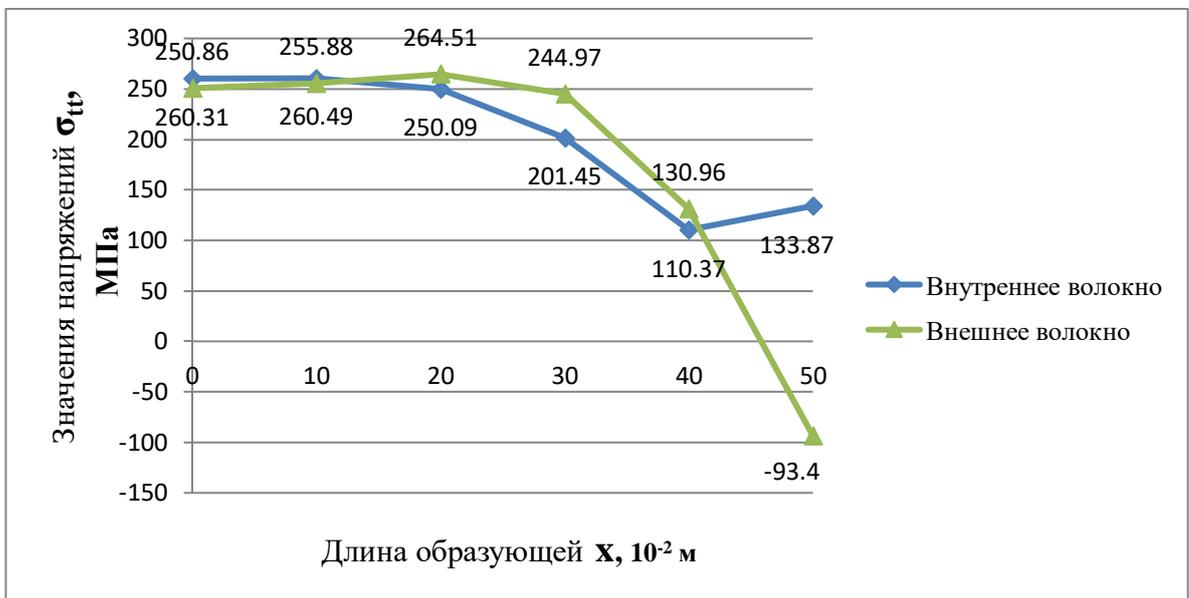


Рис. 3.8 - Эпюра напряжений σ_{tt} для первого варианта отсчета угла поворота нормали

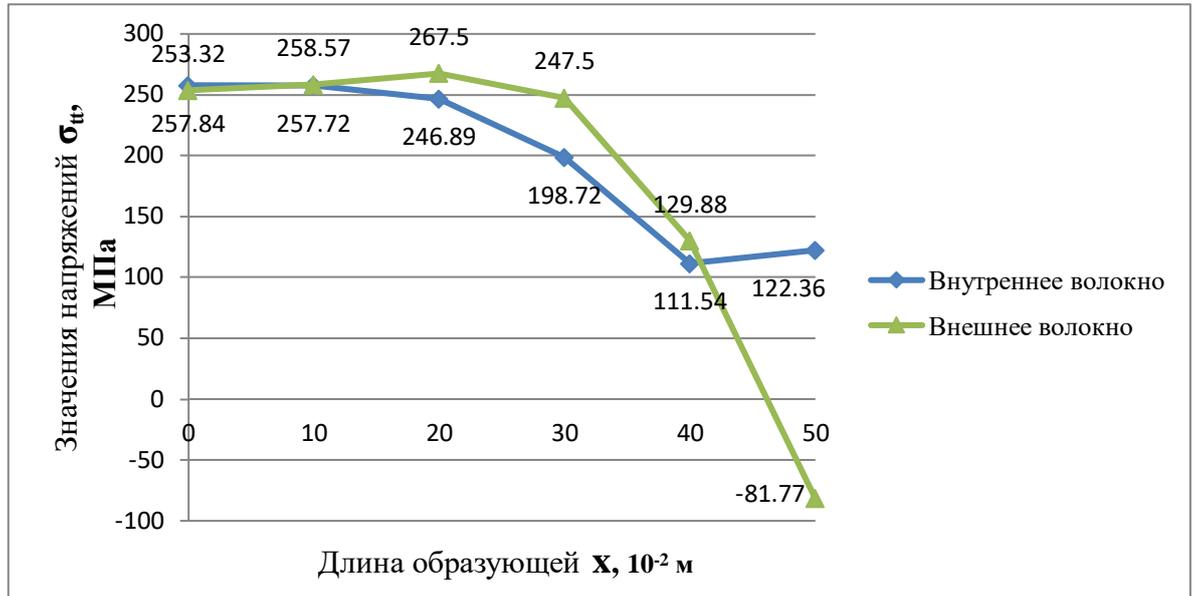


Рис. 3.9 - Эпюра напряжений σ_{tt} для второго варианта отсчета угла поворота нормали

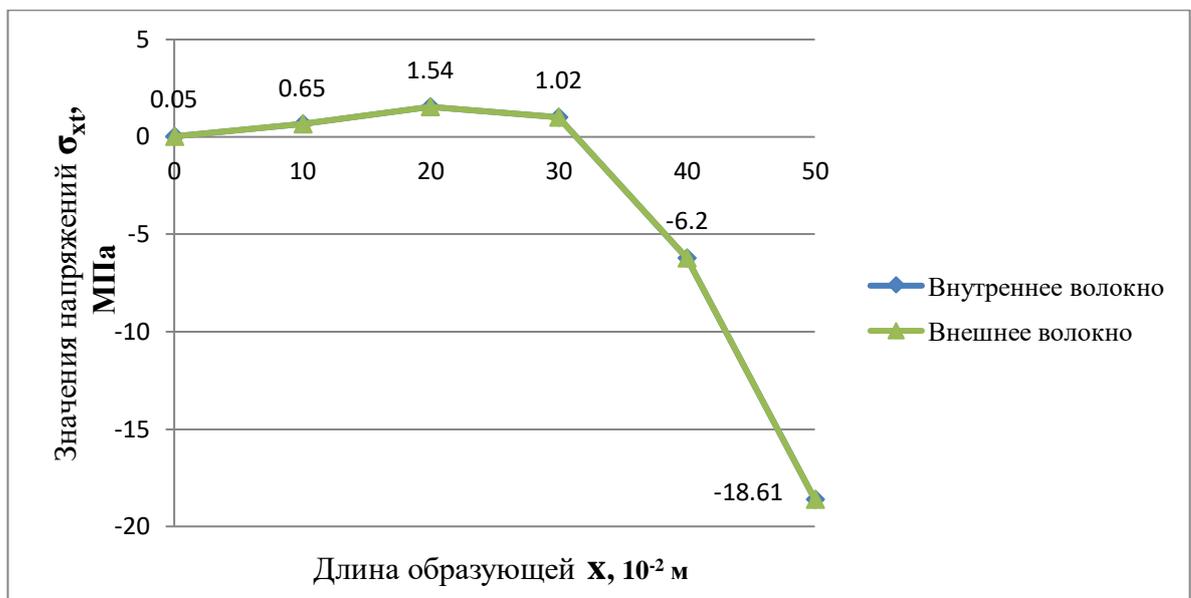


Рис. 3.10 - Эпюра напряжений σ_{xt} для первого варианта отсчета угла поворота нормали

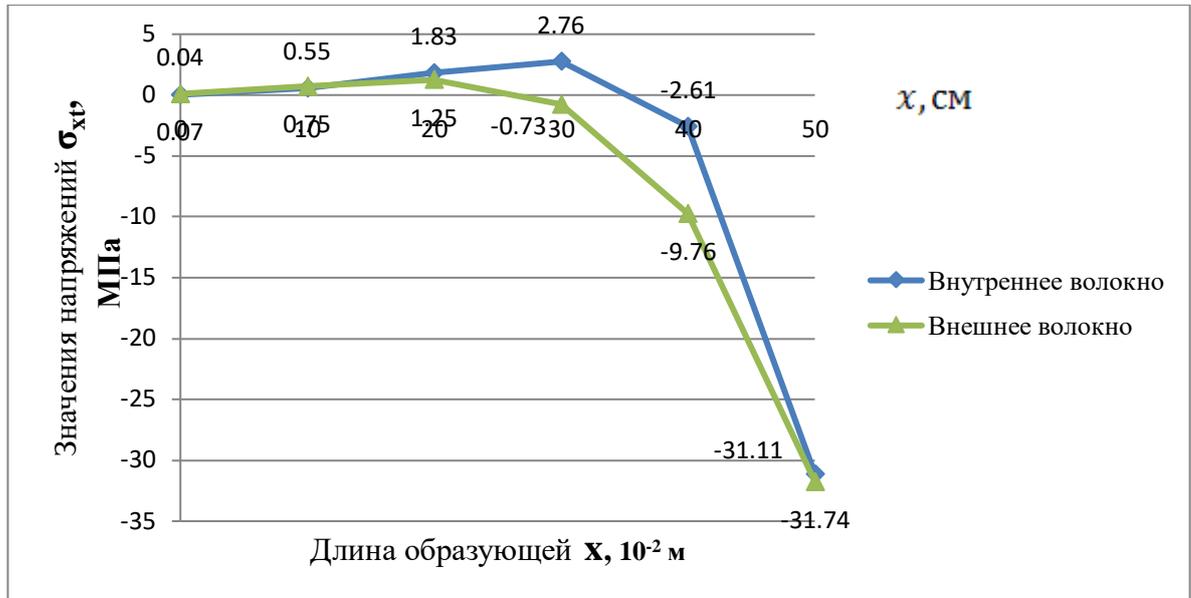


Рис. 3.11 - Эпюра напряжений σ_{xt} для второго варианта отсчета угла поворота нормали

Как видно из диаграмм (рис. 3.6 – 3.9) в середине пролета наблюдается безмоментное состояние и моментное в жесткой заделке, что соответствует физическому смыслу решаемой задачи. Сдвиговые деформации (рис 3.10 и 3.11) близки к нулю в середине пролета и достигают максимальных значений в жесткой заделке, что удовлетворяет физическому смыслу решаемой задачи.

Пример расчета 3.4

Для подтверждения разработанного алгоритма был выполнен расчет цилиндрической панели в виде фрагмента эллиптического цилиндра (рис. 3.12). Исходные данные имели следующие значения: $b = 0,5 \text{ м}$; $c = 0,25 \text{ м}$; $t = 0,01 \text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,3$; $q = 0,1 \text{ МПа}$. Наличие плоскостей симметрии позволяет рассчитываемую оболочку моделировать полосой конечных элементов шириной 0,01 м.

С левого края данный фрагмент эллиптического цилиндра был жестко защемлен, правый свободен. Результаты расчетов представлены в виде эпюры нормальных напряжений σ_{tt} (рис. 3.13). Эпюра построена в жесткой заделке согласно значениям нормальных напряжений по толщине оболочки.

Проверим условие равновесия по изгибающему моменту в опорном сечении при использовании скалярной аппроксимации в первом варианте отсчета угла поворота нормали. Исходные данные: $AC = 92,3980 \text{ МН/м}^2$; $DE = 61,8744 \text{ МН/м}^2$; $FH = 31,1470 \text{ МН/м}^2$; $KO = 0,2141 \text{ МН/м}^2$; $MP = 30,9255 \text{ МН/м}^2$; $NU = 62,2737 \text{ МН/м}^2$; $GT = 93,8319 \text{ МН/м}^2$. Для более точного вычисления разобьем площадь эпюры на элементарные фигуры.

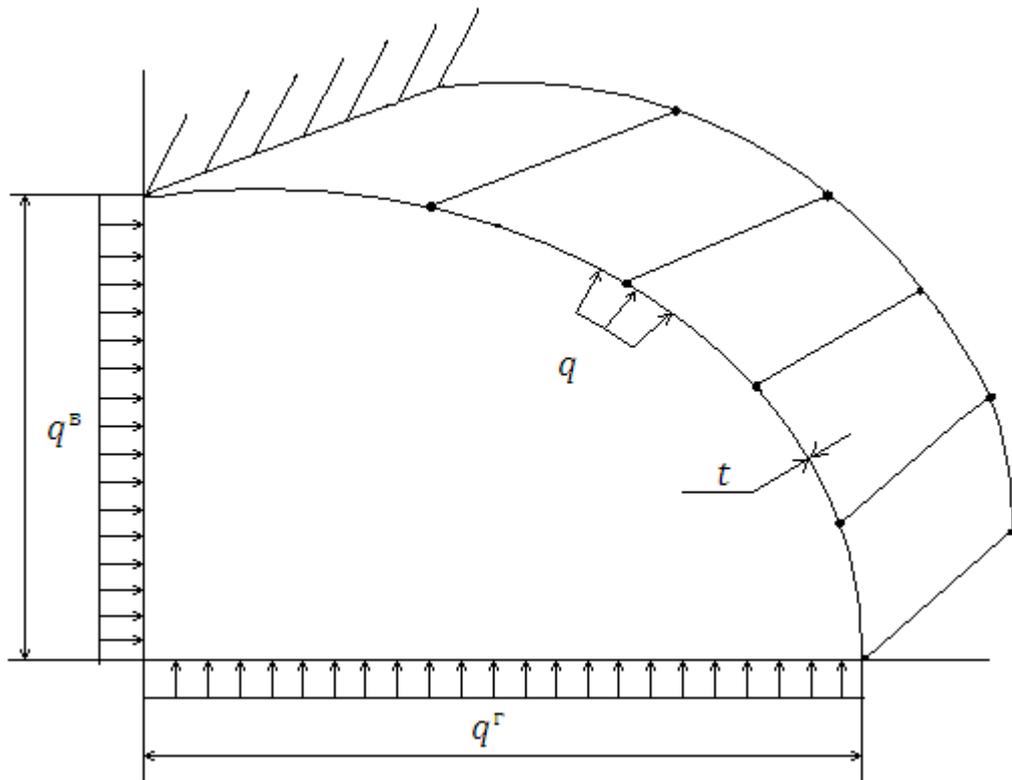


Рис. 3.12 - Расчетная схема расчета цилиндрической панели в виде фрагмента эллиптического цилиндра

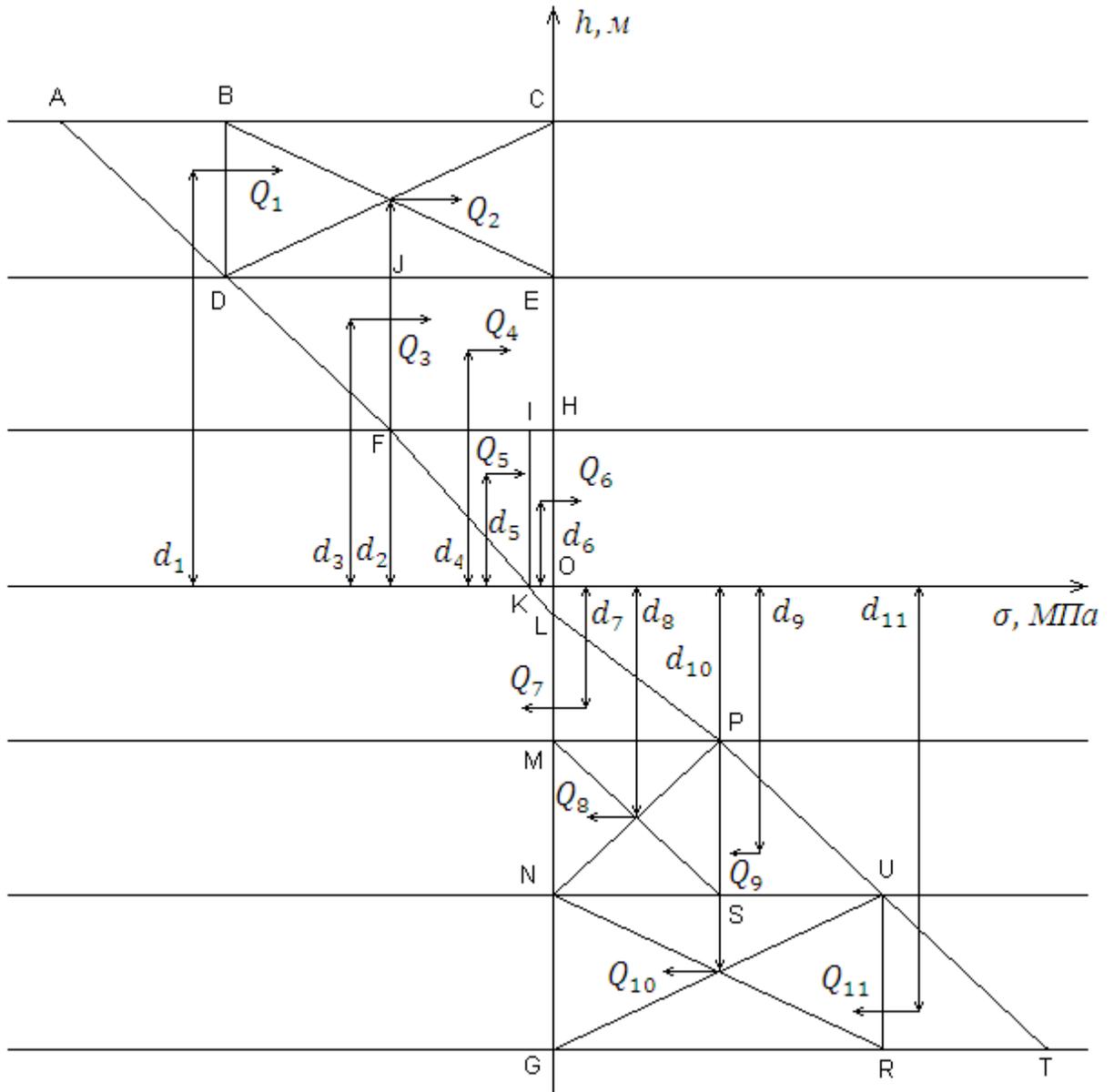


Рис. 3.13 - Эпюры нормальных напряжений σ_{tt} по высоте сечения

По формуле вычисления площади трапеции вычислим площади фигур

$$\begin{aligned}
 S_{ACED} &= \frac{AC + DE}{2} \cdot CE = \frac{92,3980 + 61,8744}{2} \cdot \frac{1}{6} = 12,8560 \text{ (МН/м)}; \\
 S_{DEHF} &= \frac{DE + FH}{2} \cdot EH = \frac{61,8744 + 31,1470}{2} \cdot \frac{1}{6} = 7,7517 \text{ (МН/м)}; \\
 S_{FHOK} &= \frac{FH + KO}{2} \cdot HO = \frac{31,1470 + 0,2141}{2} \cdot \frac{1}{6} = 2,6134 \text{ (МН/м)}; \\
 S_{MPUN} &= \frac{MP + NU}{2} \cdot MN = \frac{30,9255 + 62,2737}{2} \cdot \frac{1}{6} = 7,7666 \text{ (МН/м)}; \\
 S_{NUTG} &= \frac{NU + GT}{2} \cdot NG = \frac{62,2737 + 93,8319}{2} \cdot \frac{1}{6} = 13,0088 \text{ (МН/м)}. \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

На основании подобия треугольников KOL и PML запишем следующее соотношение $\frac{KO}{MP} = \frac{OL}{LM}$. Из последнего соотношения найдем $AB = 0,16552$; $OA = 0,00115$.

По формуле вычисления площади треугольника найдем

$$\begin{aligned} S_{KOL} &= \frac{1}{2} \cdot KO \cdot OL = \frac{1}{2} \cdot 0,2141 \cdot 0,00115 = 0,0001 \text{ (МН/м)}; \\ S_{LMP} &= \frac{1}{2} \cdot LM \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 0,1655 \cdot 30,9255 = 2,5591 \text{ (МН/м)}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Вычислим площади прямоугольников

$$\begin{aligned} S_{BCED} &= DE \cdot CE = 61,87446 \cdot \frac{1}{6} = 10,3124 \text{ (МН/м)}; \\ S_{JEHF} &= FH \cdot EH = 31,1470 \cdot \frac{1}{6} = 5,1911 \text{ (МН/м)}; \\ S_{IHOК} &= KO \cdot HO = 0,2141 \cdot \frac{1}{6} = 0,0356 \text{ (МН/м)}; \\ S_{MPSN} &= MP \cdot MN = 30,9255 \cdot \frac{1}{6} = 5,1542 \text{ (МН/м)}; \\ S_{NURG} &= NU \cdot NG = 62,2737 \cdot \frac{1}{6} = 10,3789 \text{ (МН/м)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

С учетом формул (3.92) и (3.94) найдем площади треугольников

$$\begin{aligned} S_{ABD} &= S_{ACED} - S_{BCED} = 2,5436 \text{ (МН/м)}; \\ S_{DJF} &= S_{DEHF} - S_{JEHF} = 2,5606 \text{ (МН/м)}; \\ S_{FIK} &= S_{FHOK} - S_{IHOК} = 2,5778 \text{ (МН/м)}; \\ S_{PSU} &= S_{MNUP} - S_{MNSP} = 2,6123 \text{ (МН/м)}; \\ S_{URT} &= S_{NGTU} - S_{NGRU} = 2,6299 \text{ (МН/м)}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

К центру тяжести каждой фигуры приложим силу эквивалентную этим напряжениям и вычислим сумму внутренних моментов относительно нейтральной оси

$$\sum M_{\text{BH1}} = \sum_{i=1}^{11} Q_i d_i = 15,5179 \text{ (H} \cdot \text{м)}, \quad (3.96)$$

где Q_i - это сила, приложенная к центру тяжести фигуры, численно равная ее площади, d_i - плечо, равное расстоянию от центра тяжести фигуры до нейтральной оси.

Внутренний момент для второго варианта отсчета угла поворота нормали получен в результате анализа эпюры нормальных напряжений σ_{tt} при $AC = 92,8454 \text{ МН/м}^2$; $DE = 62,1751 \text{ МН/м}^2$; $FH = 31,2999 \text{ МН/м}^2$; $KO = 0,2184 \text{ МН/м}^2$; $MP = 31,071 \text{ МН/м}^2$; $NU = 62,5699 \text{ МН/м}^2$; $GT = 94,2798 \text{ МН/м}^2$.

$$\sum M_{\text{BH2}} = 15,6632 \text{ (H} \cdot \text{м)}. \quad (3.97)$$

Внешний момент вычислим по формуле [14]

$$M_{\text{в}} = \frac{qx^2}{2}; \quad (3.98)$$

$$M_1 = \frac{q^{\text{в}} d_{\text{в}}^2}{2} = 3,125 \text{ (H} \cdot \text{м)};$$

$$M_2 = \frac{q^{\text{г}} d_{\text{г}}^2}{2} = 12,5 \text{ (H} \cdot \text{м)};$$

$$M_{\text{в}} = M_1 + M_2 = 3,125 + 12,5 = 15,625 \text{ (H} \cdot \text{м)}. \quad (3.99)$$

Как видно из результата погрешность в первом варианте составляет 0,68 %, во втором – 0,24 %, что говорит о достоверности вычислений по разработанному алгоритму.

3.7. Выводы по третьей главе

1. Разработан алгоритм компоновки матриц жесткости размерностью 44×44 четырехузловых оболочечных элементов дискретизации для численного анализа НДС тонких оболочек с учетом сдвиговых деформаций при использовании интерполяции отдельных компонент вектора перемещений и компонент вектора углов поворота нормали как скалярных величин. В первом варианте компоновки матрицы жесткости четырехугольного КЭ отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния, во втором – от ее деформированного состояния.

2. На примере оболочки в форме эллиптического цилиндра при различных нагрузках и видах опирания выполнена реализация описанного алгоритма.

3. Произведен сопоставительный анализ конечно-элементных решений тонких оболочек при учете сдвиговых деформаций при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния и при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния с использованием интерполяции отдельных компонент вектора перемещения и компонент вектора углов поворота нормали как скалярных величин. Был сделан вывод о предпочтительности второго варианта расчета, при котором можно получать удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации. В то же время следует отметить, что и первый вариант компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента с учетом деформации поперечного сдвига позволяет получать приемлемые результаты при весьма существенном сгущении сетки дискретизации рассчитываемой оболочки.

4. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНВАРИАНТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

4.1. Матрица жесткости размерностью 44x44 четырехузлового оболочечного элемента дискретизации при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений

В случае инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений набор векторных узловых варьируемых параметров в системе координат α, β (т. е. локальных координат) и в системе координат x, t (т. е. глобальных координат) определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{U}_y^l \right\}_{1 \times 16}^T &= \left\{ \left\{ \vec{v}_y^l \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma}_y \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \\ \left\{ \vec{U}_y^r \right\}_{1 \times 16}^T &= \left\{ \left\{ \vec{v}_y^r \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma}_y \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{v}_y^l \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\alpha}^i \vec{v}_{,\alpha}^j \vec{v}_{,\alpha}^k \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \vec{v}_{,\beta}^j \vec{v}_{,\beta}^k \vec{v}_{,\beta}^l \right\}; \\ \left\{ \vec{v}_y^r \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l \right\}; \\ \left\{ \vec{\gamma}_y \right\}_{1 \times 4}^T &= \left\{ \vec{\gamma}^i \vec{\gamma}^j \vec{\gamma}^k \vec{\gamma}^l \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\vec{v}^i \dots \vec{v}^l$ – векторы перемещения узловых точек; $\vec{\gamma}^i \dots \vec{\gamma}^l$ – векторы углов поворота нормалей; $\vec{v}_{,\alpha}^i \dots \vec{v}_{,\alpha}^l \vec{v}_{,\beta}^i \dots \vec{v}_{,\beta}^l \vec{v}_{,x}^i \dots \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \dots \vec{v}_{,t}^l$ – первые производные вектора перемещения узловых точек в локальной и глобальной системах координат соответственно.

Взаимосвязь между векторами $\left\{ \vec{U}_y^l \right\}_{1 \times 16}^T$ и $\left\{ \vec{U}_y^r \right\}_{1 \times 16}^T$ описывается формулой

Вектор перемещения и вектор углов поворота нормалей внутренней точки КЭ определяется посредством векторов узловых точек зависимостями

$$\vec{v} = \begin{matrix} \{\psi\}^T & \{\vec{v}_y^i\}; \\ 1 \times 12 & 12 \times 1 \end{matrix}; \quad (4.5)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{matrix} \{h\}^T & \{\vec{\gamma}_y\}. \\ 1 \times 4 & 4 \times 1 \end{matrix}. \quad (4.6)$$

Принимая во внимание (4.3) соотношения (4.5) и (4.6) примут вид

$$\vec{v} = \begin{matrix} \{\psi\}^T & [TM_{11}] & \{\vec{v}_y^i\}; \\ 1 \times 12 & 12 \times 12 & 12 \times 1 \end{matrix}; \quad (4.7)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{matrix} \{h\}^T & [TM_{22}] & \{\vec{\gamma}_y\}. \\ 1 \times 4 & 4 \times 4 & 4 \times 1 \end{matrix}. \quad (4.8)$$

С учетом (3.6) и (3.35), набор векторных узловых варьируемых параметров в системе координат x, t (т.е. глобальных координат) можно записать в виде матричного произведения

$$\begin{matrix} \{\vec{U}_y^i\} \\ 16 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\vec{A}] \\ 16 \times 44 \end{matrix} \begin{matrix} \{z_y\} \\ 44 \times 1 \end{matrix}, \quad (4.9)$$

где $[\vec{A}]$ – квазидиагональная матрица, имеющая следующую структуру

$$[\vec{A}] = \begin{bmatrix} [\vec{A}_v] & [\vec{A}_{12}] \\ [\vec{A}_{21}] & [\vec{A}_\gamma] \end{bmatrix};$$

$$\{z_y\}^T = \{\{z_v\}^T, \{z_\gamma\}^T\}; \quad (4.10)$$

$$\begin{matrix} \{z_v\}^T \\ 1 \times 36 \end{matrix} = \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^l t_1^{1i} t_1^{2i} t_1^i \dots t_1^l t_2^{1i} t_2^{2i} t_2^i \dots t_2^l\};$$

$$\begin{matrix} \{z_\gamma\}^T \\ 1 \times 8 \end{matrix} = \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{1l} \gamma^{2l}\}.$$

Ячейки подматриц $[\vec{A}_{12}]$, $[\vec{A}_{21}]$ заполнены нулями, подматрицы $[\vec{A}_v]$ и $[\vec{A}_\gamma]$

будут иметь вид соответственно

1											
	1										
		1									
			1								
				$X_{,\alpha}^i$				$T_{,\alpha}^i$			
					$X_{,\alpha}^j$				$T_{,\alpha}^j$		
						$X_{,\alpha}^k$				$T_{,\alpha}^k$	
							$X_{,\alpha}^l$				$T_{,\alpha}^l$
				$X_{,\beta}^i$				$T_{,\beta}^i$			
					$X_{,\beta}^j$				$T_{,\beta}^j$		
						$X_{,\beta}^k$				$T_{,\beta}^k$	
							$X_{,\beta}^l$				$T_{,\beta}^l$

1											
					1						
	1										
		1									
			1								
				1							
											1

Ячейка матрицы $[TR_{11}]_{36 \times 36}$ представляет собой подматрицу размерности $[3 \times 3]$ вида

$$[X_{,\alpha}^i]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} X_{,\alpha}^i & 0 & 0 \\ 0 & X_{,\alpha}^i & 0 \\ 0 & 0 & X_{,\alpha}^i \end{bmatrix}; [1]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношение (4.13), запишем формулы (4.11) и (4.12) в следующем виде

$$\vec{v} = \begin{matrix} \{\psi\}^T & [\vec{A}_v] & [TR_{11}] & \{z_v\}; \\ 1 \times 12 & 12 \times 36 & 36 \times 36 & 36 \times 1 \end{matrix} \quad (4.15)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{matrix} \{h\}^T & [\vec{A}_\gamma] & [TR_{22}] & \{z_\gamma\}. \\ 1 \times 4 & 4 \times 8 & 8 \times 8 & 8 \times 1 \end{matrix} \quad (4.16)$$

Выразим векторы базиса узловых точек в локальной системе координат, через векторы базиса внутренней точки КЭ

$$\begin{aligned} \{\vec{a}^i\} &= [s_1]\{\vec{a}\}; \quad \{\vec{a}^j\} = [s_2]\{\vec{a}\}; \\ \{\vec{a}^k\} &= [s_3]\{\vec{a}\}; \quad \{\vec{a}^l\} = [s_4]\{\vec{a}\}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\{\vec{a}^i\}^T = \{\vec{a}_1^{oi} \vec{a}_2^{oi} \vec{a}_n^{oi}\}$; $\{\vec{a}^j\}^T = \{\vec{a}_1^{oj} \vec{a}_2^{oj} \vec{a}_n^{oj}\}$; $\{\vec{a}^k\}^T = \{\vec{a}_1^{ok} \vec{a}_2^{ok} \vec{a}_n^{ok}\}$;

$$\{\vec{a}^l\}^T = \{\vec{a}_1^{ol} \vec{a}_2^{ol} \vec{a}_n^{ol}\}; \quad \{\vec{a}\}^T = \{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}.$$

Элементы матриц $[s_1] \dots [s_4]$ определяются на основании соотношений

$$\begin{aligned} \{\vec{a}\} &= [n]\{\vec{t}\}; \quad \{\vec{a}^i\} = [n^i]\{\vec{t}\}; \quad \{\vec{a}^j\} = [n^j]\{\vec{t}\}; \\ \{\vec{a}^k\} &= [n^k]\{\vec{t}\}; \quad \{\vec{a}^l\} = [n^l]\{\vec{t}\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, можно записать матричные выражения для $[s_1] \dots [s_4]$

$$\begin{aligned} [s_1] &= [n^i][n]^{-1}; \quad [s_2] = [n^j][n]^{-1}; \quad [s_3] = [n^k][n]^{-1}; \\ [s_4] &= [n^l][n]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Квазидиагональные матрицы $[\vec{A}_v]$ и $[\vec{A}_\gamma]$, составленные из векторов локального базиса могут быть представлены следующим образом

$$[\vec{A}_v] = [A_{v1}]\vec{a}_1^o + [A_{v2}]\vec{a}_2^o + [A_{v3}]\vec{a}_n^o; \quad (4.20)$$

$$[\vec{A}_\gamma] = [A_{\gamma1}]\vec{a}_1^o + [A_{\gamma2}]\vec{a}_2^o. \quad (4.21)$$

С учетом соотношений (4.20) и (4.21) зависимости (4.15) и (4.16) примут вид

$$\vec{v} = \begin{matrix} \{\psi\}^T & ([A_{v1}]\vec{a}_1^o + [A_{v2}]\vec{a}_2^o + [A_{v3}]\vec{a}_n^o) & \{L_y\}; \\ 1 \times 12 & & \end{matrix} \quad (4.22)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{matrix} \{h\}^T & ([A_{\gamma1}]\vec{a}_1^o + [A_{\gamma2}]\vec{a}_2^o) & \{M_y\}, \\ 1 \times 4 & & \end{matrix} \quad (4.23)$$

$$\text{где } \{L_y\} = \begin{bmatrix} TR_{11} \\ 36 \times 36 \end{bmatrix} \{z_v\}, \quad \{M_y\} = \begin{bmatrix} TR_{22} \\ 8 \times 8 \end{bmatrix} \{z_\gamma\}.$$

На основании (3.6) и (3.46) формулы (4.22) и (4.23) можно представить в следующем виде

$$v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o = \{\psi\}^T ([A_{v1}] \vec{a}_1^o + [A_{v2}] \vec{a}_2^o + [A_{v3}] \vec{a}_n^o) \{L_y\}; \quad (4.24)$$

$$\gamma^1 \sqrt{a_{22}^o} \vec{a}_1^o + \frac{\gamma^2}{\sqrt{a_{22}^o}} \vec{a}_2^o = \{h\}^T ([A_{\gamma 1}] \vec{a}_1^o + [A_{\gamma 2}] \vec{a}_2^o) \{M_y\}. \quad (4.25)$$

Приравнявая коэффициенты при векторах текущей точки поверхности в левой и правой частях тождеств (4.24) и (4.25), получим формулы для компонент вектора перемещения и вектора углов поворота нормалей

$$v^1 = \{\psi\}^T [A_{v1}] \{L_y\}; \quad v^2 = \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\}; \quad v = \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\}; \quad (4.26)$$

$$\gamma^1 = \{h\}^T [A_{\gamma 1}] \{M_y\}; \quad \gamma^2 = \{h\}^T [A_{\gamma 2}] \{M_y\}. \quad (4.27)$$

Дифференцированием равенства (4.22) по криволинейным координатам x и t , получим производные вектора перемещения

$$\vec{v}_{,x} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) (\vec{a}_1^o [A_{v1}] + \vec{a}_2^o [A_{v2}] + \vec{a}_n^o [A_{v3}]) \{L_y\};$$

$$\vec{v}_{,t} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) (\vec{a}_1^o [A_{v1}] + \vec{a}_2^o [A_{v2}] + \vec{a}_n^o [A_{v3}]) \{L_y\};$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,xx} = & \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2 \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \right. \\ & \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) (\vec{a}_1^o [A_{v1}] + \vec{a}_2^o [A_{v2}] + \vec{a}_n^o [A_{v3}]) \{L_y\}; \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,tt} = & \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2 \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \\ & \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) (\vec{a}_1^o [A_{v1}] + \vec{a}_2^o [A_{v2}] + \vec{a}_n^o [A_{v3}]) \{L_y\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,xt} = & \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \right. \\ & \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) (\vec{a}_1^o [A_{v1}] + \vec{a}_2^o [A_{v2}] + \vec{a}_n^o [A_{v3}]) \{L_y\}. \end{aligned}$$

Продифференцировав соотношение (4.23) по криволинейным координатам x и t , найдем первые производные вектора углов поворота нормалей

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_{,x} &= \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) (\vec{a}_1^0[A_{\gamma 1}] + \vec{a}_2^0[A_{\gamma 2}]) \{M_y\}; \\ \vec{\gamma}_{,t} &= \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) (\vec{a}_1^0[A_{\gamma 1}] + \vec{a}_2^0[A_{\gamma 2}]) \{M_y\}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Принимая во внимание соотношения (3.35), формулы (4.28) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned}t_x^1 \vec{a}_1^0 + t_x^2 \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0 &= \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) (\vec{a}_1^0[A_{v1}] + \vec{a}_2^0[A_{v2}] + \vec{a}_n^0[A_{v3}]) \{L_y\}; \\ t_t^1 \vec{a}_1^0 + t_t^2 \vec{a}_2^0 + t_t \vec{a}_n^0 &= \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) (\vec{a}_1^0[A_{v1}] + \vec{a}_2^0[A_{v2}] + \vec{a}_n^0[A_{v3}]) \{L_y\}; \\ t_{xx}^1 \vec{a}_1^0 + t_{xx}^2 \vec{a}_2^0 + t_{xx} \vec{a}_n^0 &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \right. \\ &\quad \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) (\vec{a}_1^0[A_{v1}] + \vec{a}_2^0[A_{v2}] + \vec{a}_n^0[A_{v3}]) \{L_y\}; \\ t_{tt}^1 \vec{a}_1^0 + t_{tt}^2 \vec{a}_2^0 + t_{tt} \vec{a}_n^0 &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \\ &\quad \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) (\vec{a}_1^0[A_{v1}] + \vec{a}_2^0[A_{v2}] + \vec{a}_n^0[A_{v3}]) \{L_y\}; \\ t_{xt}^1 \vec{a}_1^0 + t_{xt}^2 \vec{a}_2^0 + t_{xt} \vec{a}_n^0 &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x} \alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,x} + \right. \\ &\quad \left. + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) (\vec{a}_1^0[A_{v1}] + \vec{a}_2^0[A_{v2}] + \vec{a}_n^0[A_{v3}]) \{L_y\}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Заменив производные вектора поворота нормалей по глобальным координатам, расположенные в левых частях равенств (4.29), их компонентами в локальном базисе (3.47), получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\gamma_{,x}^2}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 + \left(\gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 &= \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) (\vec{a}_1^0[A_{\gamma 1}] + \vec{a}_2^0[A_{\gamma 2}]) \{M_y\}; \\ \left(\gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} \right) \vec{a}_1^0 + \left(\frac{\gamma_{,t}^2 + \gamma^2 q_{22}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \vec{a}_2^0 &= \\ = \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) &(\vec{a}_1^0[A_{\gamma 1}] + \vec{a}_2^0[A_{\gamma 2}]) \{M_y\}.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Приравняв коэффициенты при векторах текущей точки поверхности в левых и правых частях тождеств (4.30) и воспользовавшись зависимостями (3.36), получим производные компонент вектора перемещения по глобальным координатам x и t

$$v_{,x}^1 = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v1}] \{L_y\};$$

$$v_{,x}^2 = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v2}] \{L_y\};$$

$$v_{,x} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v3}] \{L_y\};$$

$$v_{,t}^1 = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{v1}] \{L_y\};$$

$$v_{,t}^2 = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{v2}] \{L_y\} + v^2 \cdot q_{22} - v \cdot q_{32};$$

$$v_{,t} = \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{v3}] \{L_y\} - v^2 \cdot q_{23};$$

$$v_{,xx}^1 = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_{v1}] \{L_y\};$$

$$v_{,xx}^2 = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_{v2}] \{L_y\};$$

$$v_{,xx} = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x} \beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_{v3}] \{L_y\};$$

$$v_{,tt}^1 = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_{v1}] \{L_y\};$$

$$v_{,tt}^2 = \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t} \beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_{v2}] \{L_y\} - \left(q_{23}q_{32} - (q_{22})^2 \right) v^2 - 2q_{32}v_{,t} - q_{32}q_{22}v;$$

$$\begin{aligned}
v_{,tt} &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \right. \\
&\quad \left. + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_{v3}] \{L_y\} - q_{32} q_{23} v + v^2 q_{22} q_{23} - 2q_{23} v_{,t}^2; \\
v_{,xt}^1 &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
&\quad \left. + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_{v1}] \{L_y\}; \\
v_{,xt}^2 &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
&\quad \left. + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_{v2}] \{L_y\} - v_{,x}^2 q_{22} - v_{,x} q_{32}; \\
v_{,xt} &= \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,x} + \right. \\
&\quad \left. + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_{v3}] \{L_y\} - v_{,x}^2 q_{23}. \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Производные компонент вектора углов поворота нормалей выражаются следующими соотношениями

$$\begin{aligned}
\gamma_{,x}^1 &= \frac{1}{\sqrt{a_{22}^0}} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{\gamma 1}] \{M_y\}; \\
\gamma_{,x}^2 &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\}; \\
\gamma_{,t}^1 &= \frac{1}{\sqrt{a_{22}^0}} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{\gamma 1}] \{M_y\}; \\
\gamma_{,t}^2 &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\} - \gamma^2 q_{22} \right). \tag{4.33}
\end{aligned}$$

На основании соотношений (4.26), (4.27), (4.32) и (4.33) формируются элементы матриц $[B]$ и $[A]$

$$[A] = \begin{bmatrix} \{\psi\}^T [A_1] [TR_{11}] & \{0\}^T \\ \{\psi\}^T [A_2] [TR_{11}] & \{0\}^T \\ \{\psi\}^T [A_3] [TR_{11}] & \{0\}^T \\ \{0\}^T & \{h\}^T [A_{\gamma_1}] [TR_{22}] \\ \{0\}^T & \{h\}^T [A_{\gamma_2}] [TR_{22}] \end{bmatrix};$$

$$[B1] = \begin{bmatrix} \{b1\}_{11} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{21} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{31} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{41} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{51} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{61} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{71} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{81} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{91} \\ 1 \times 44 \\ \{b1\}_{101} \\ 1 \times 44 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned}
\{b1\}_{11} &= (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}) [A_{v1}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{21} &= (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}) [A_{v1}] \{L_y\} + a_{22}^0 (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}) [A_{v2}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{31} &= \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma_1}] \{M_y\} + (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,x}) [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{41} &= a_{22}^0 (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}) [A_{v2}] \{L_y\} - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} + \\
&\quad a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\} + q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma_2}] \{M_y\}; \\
\{b1\}_{51} &= \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma_2}] \{M_y\} + q_{23} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} + \\
&\quad + (\{\psi, \alpha\}^T \alpha_{,t} + \{\psi, \beta\}^T \beta_{,t}) [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{61} &= \sqrt{a_{22}^0} (\{h, \alpha\}^T \alpha_{,x} + \{h, \beta\}^T \beta_{,x}) [A_{\gamma_1}] \{M_y\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{b1\}_{71} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_t + \{h, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{\gamma 1}] \{M_y\} + \frac{a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} \{h\}^T [A_{\gamma 1}] \{M_y\} + \\
&+ \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_x + \{h, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\} + \\
&+ a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v2}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{81} &= 0; \\
\{b1\}_{91} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_t + \{h, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\} + \\
&+ a_{22}^0 q_{32} \left(a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{v2}] \{L_y\} - a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} \right) + \\
&+ (a_{22}^0 q_{32})^2 \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b1\}_{101} &= 0. \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Для второго варианта отсчета угла поворота нормали при использовании векторной аппроксимации матрица [B2] будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
\{b2\}_{11} &= \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v1}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{21} &= \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{v1}] \{L_y\} + a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v2}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{31} &= \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma 1}] \{M_y\} + \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v3}] \{L_y\} - \\
&- \sqrt{a_{22}^0} q_{23} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} - \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{41} &= a_{22}^0 \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_t + \{\psi, \beta\}^T \beta_t \right) [A_{v2}] \{L_y\} - \\
&- a_{22}^0 q_{22} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} + a_{22}^0 q_{32} \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{51} &= \left(1 + \sqrt{a_{22}^0} \right) \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma 2}] \{M_y\}; \\
\{b2\}_{61} &= \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h, \alpha\}^T \alpha_x + \{h, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{\gamma 1}] \{M_y\} - \\
&- q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x + \{\psi, \beta\}^T \beta_x \right) [A_{v2}] \{L_y\} - \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi, \alpha\}^T \alpha_x \alpha_t + \{\psi, \alpha\}^T \alpha_x \beta_t + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t\beta_{,x}} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x\beta_{,t}} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} [A_{v3}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{71} = & -\sqrt{a_{22}^0} q_{32} q_{23} [A_{v3}] \{L_y\} + q_{22} q_{23} \sqrt{a_{22}^0} [A_{v2}] \{L_y\} - \\
& -2q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{v2}] \{L_y\} - \\
& -\sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,t}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,t}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,tt} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,tt} \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \\
& + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}^2 + 2\{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,x} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}^2 + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xx} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xx} \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \\
& + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{\gamma 1}] \{M_y\} + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\} \\
& + a_{22}^0 q_{32} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v2}] \{L_y\}; \\
\{b2\}_{81} = & 0; \\
\{b2\}_{91} = & a_{22}^0 q_{32} \left(\left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{v2}] \{L_y\} - q_{22} \{\psi\}^T [A_{v2}] \{L_y\} \right) + \\
& + a_{22}^0 q_{32} q_{32} \{\psi\}^T [A_{v3}] \{L_y\} + \\
& + q_{23} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v2}] \{L_y\} + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha\alpha}\}^T \alpha_{,x}\alpha_{,t} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,x}\beta_{,t} + \right. \\
& \left. + \{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,xt} + \{\psi_{,\alpha\beta}\}^T \alpha_{,t\beta_{,x}} + \{\psi_{,\beta\beta}\}^T \beta_{,x}\beta_{,t} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,xt} \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \\
& + q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \{h\}^T [A_{\gamma 2}] \{M_y\} + q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \\
& + \sqrt{a_{22}^0} \left(\{h_{,\alpha}\}^T \alpha_{,t} + \{h_{,\beta}\}^T \beta_{,t} \right) [A_{\gamma 2}] \{M_y\}; \tag{4.36} \\
\{b2\}_{101} = & \left(q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}}{\sqrt{a_{22}^0}} \right) \left(\left(\{\psi_{,\alpha}\}^T \alpha_{,x} + \{\psi_{,\beta}\}^T \beta_{,x} \right) [A_{v3}] \{L_y\} + \{h\}^T [A_{\gamma 2}] \{M_y\} \right).
\end{aligned}$$

Анализируя соотношения (4.26), можно сделать вывод, что каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента зависит от узловых значений всех трех компонент и многочленов, содержащих узловые значения этих трех компонент и их производные. Из зависимостей (4.27) видно, что каждая компонента угла поворота нормали зависит от узловых значений всех компонент.

4.2 Примеры расчетов

Пример расчета 4.1

В качестве примера приводятся результаты расчета НДС бесконечно длинного эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейной нагрузкой, приложенной вдоль образующей, интенсивности q , с шарнирными опорами, препятствующие вертикальному смещению, которые находятся на диаметрально противоположной образующей цилиндра (рис. 2.4). Исходные данные имели следующие значения: $q = 5 \cdot 10^{-3}$ МПа; $b = 0,1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 0,001$ м. Величина параметра c была принята равной $0,025$ м. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитываемая оболочка моделировалась полоской конечных элементов шириной $\Delta x = 0,01$ м.

Расчеты выполнялись в двух вариантах, в первом варианте отсчет угла поворота нормали производился от ее исходного положения, во втором – от ее деформированного положения.

В таблице 4.1 представлены значения нормальных напряжений на внутренней (верхний индекс «В») и наружной (верхний индекс «Н») поверхностях эллиптического цилиндра в точке приложения силы и в точке опирания при использовании первого варианта расчета для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений.

Анализ данных, представленного в таблице 4.1, показывает, что при отсчете угла поворота нормали от ее исходного положения, скалярная аппроксимация с использованием редкой сетки дискретизации не дает удовлетворительных результатов. Увеличение числа элементов дискретизации способствует сходимости вычислительного процесса. Инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений уже при редкой сетке дискретизации позволяет получать удовлетворительные по точности результаты. Кроме того следует отметить абсолютное равенство значений напряжений в точках 1 и 2, которое должно соблюдаться исходя из условия равновесия цилиндра, при

векторной аппроксимации полей перемещений, чего не наблюдается при использовании скалярной аппроксимации.

Таблица 4.1 - Расчет эллиптического цилиндра при использовании первого варианта отсчета угла поворота нормали для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений.

Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации					
			25x2	37x2	49x2	97x2	145x2	241x2
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	100,58	129,61	143,92	153,48	155,27	156,62
		σ_{tt}^H	-102,18	-129,98	-143,76	-153,09	-154,88	-156,23
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	13,26	89,36	132,35	153,44	155,35	156,66
		σ_{tt}^H	-12,19	-88,64	-131,87	-153,05	-154,96	-156,26
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	139,52	145,73	148,90	153,72	155,34	156,64
		σ_{tt}^H	-138,95	-145,31	-148,50	-153,33	-154,95	-156,25
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	139,52	145,73	148,90	153,72	155,34	156,64
		σ_{tt}^H	-138,95	-145,31	-148,50	-153,33	-154,95	-156,25

В таблице 4.2 представлены значения напряжений при использовании второго варианта расчета для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений. Из таблицы видно, что при векторной аппроксимации уже при редкой сетке дискретизации можно получить удовлетворительные по точности результаты. Для получения сравнимых по точности значений напряжений при

скалярной аппроксимации необходимо увеличить число элементов дискретизации, как минимум, в три раза.

Таблица 4.2 - Расчет эллиптического цилиндра при использовании второго варианта отсчета угла поворота нормали для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений.

Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации					
			25x2	37x2	49x2	97x2	145x2	241x2
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	116,10	134,62	148,12	157,80	158,40	158,55
		σ_{tt}^H	-117,13	-135,12	-148,10	-157,42	-158,01	-158,16
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	-4,78	64,10	118,61	156,23	158,19	158,56
		σ_{tt}^H	5,91	-63,07	-117,90	-155,81	-157,79	-158,17
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	157,45	158,27	158,46	158,58	158,60	158,60
		σ_{tt}^H	-159,19	-158,53	-158,35	-158,22	-158,21	-158,21
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	157,45	158,27	158,46	158,58	158,60	158,60
		σ_{tt}^H	-159,19	-158,53	-158,35	-158,22	-158,21	-158,21

При замене шарнирных опор на пружинные, эллиптический цилиндр, под действием линейно распределенной нагрузки вдоль образующей, получит возможность перемещаться вертикально вниз, как абсолютно твердое тело.

Результаты расчетов НДС эллиптического цилиндра с пружинными опорами для первого и второго вариантов отсчета углов поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений представлены в таблицах 4.3 и 4.4 соответственно. В первом варианте расчета,

когда угол отсчитывался от исходного состояния нормали, использовалась сетка дискретизации (337x2), во втором варианте расчета, при отсчете угла от деформированного положения нормали, для скалярной аппроксимации выбиралась сетка дискретизации (145x2), для векторной – 49x2.

Таблица 4.3 - Расчет НДС эллиптического цилиндра с пружинными опорами для первого варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений

Жесткость пружины, 10^2 Н/м			∞	0,1	0,01	0,02
Величина жесткого смещения, 10^{-2} м			0,00	1,00	10,00	20,00
Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках, при заданных смещениях оболочки			
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	157,19	153,22	117,74	-213,55
		σ_{tt}^H	-156,79	-152,89	-117,96	208,22
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	157,21	161,07	195,54	517,45
		σ_{tt}^H	-156,81	-160,61	-194,54	-511,36
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м			0	0,99928	9,92892	19,32095
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	157,20	157,20	157,20	157,20
		σ_{tt}^H	-156,81	-156,81	-156,81	-156,81
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	157,20	157,20	157,20	157,20
		σ_{tt}^H	-156,81	-156,81	-156,81	-156,81
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м			0,00	1,00	10,00	20,00

Таблица 4.4 - Расчет НДС эллиптического цилиндра с пружинными опорами для второго варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений

Жесткость пружины, 10^2 Н/м			∞	0,1	0,01	0,02
Величина жесткого смещения, 10^{-2} м			0,00	1,00	10,00	20,00
Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках, при заданных смещениях оболочки			
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,40	129,14	111,22	108,14
		σ_{tt}^H	-158,01	-129,70	-112,36	-109,39
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,19	96,13	58,11	51,58
		σ_{tt}^H	-157,79	-95,01	-56,55	-49,94
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м			0	0,42056	0,67818	0,72243
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,46	158,46	158,46	158,46
		σ_{tt}^H	-158,35	-158,35	-158,35	-158,35
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,46	158,46	158,46	158,46
		σ_{tt}^H	-158,35	-158,35	-158,35	-158,35
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м			0,00	1,00	10,00	20,00

Из табличного материала видно, что при отсутствии жесткого смещения можно получить удовлетворительные результаты при использовании скалярной аппроксимации и векторной аппроксимации полей перемещений как в первом, так и во втором вариантах отсчета углов поворота нормали. По мере того, как

жесткость пружины уменьшается, а величина жесткого смещения возрастает, напряжения при скалярной аппроксимации в обоих вариантах значительно изменяются по величине, в то время как при смещении оболочки как твердого тела, они должны оставаться неизменными.

При векторной аппроксимации полей перемещений численные значения напряжений остаются неизменными, что свидетельствует о том, что инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений учитывает смещения КЭ как жесткого тела.

На диаграммах (рис. 4.1, 4.2) представлены зависимости значений напряжений от величины жесткого смещения для первого варианта отсчета угла поворота нормали при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений, на диаграммах (рис. 4.3, 4.4) – для второго варианта отсчета угла поворота нормали. Обозначения «Вн» и «Нр» указывают, что напряжения вычислены соответственно на внутренней и внешней поверхностях эллиптического цилиндра.

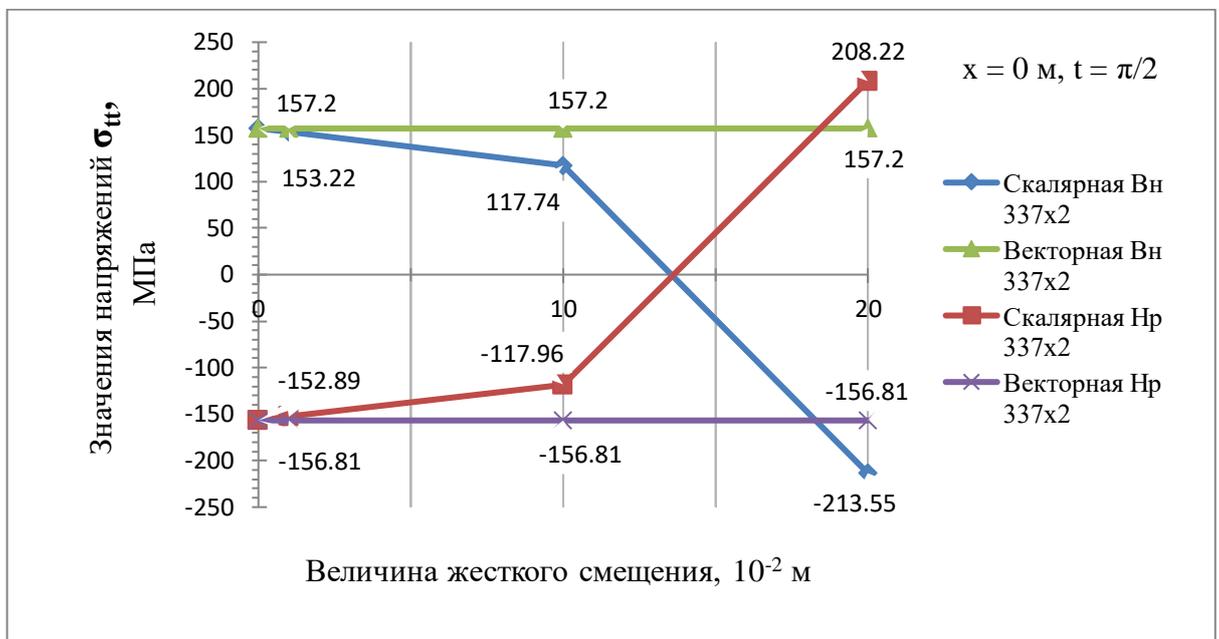


Рис. 4.1 - Графики изменения напряжений σ_{tt} в точке приложения силы F в зависимости от величины жесткого смещения при различных формах аппроксимации (первый вариант расчета)

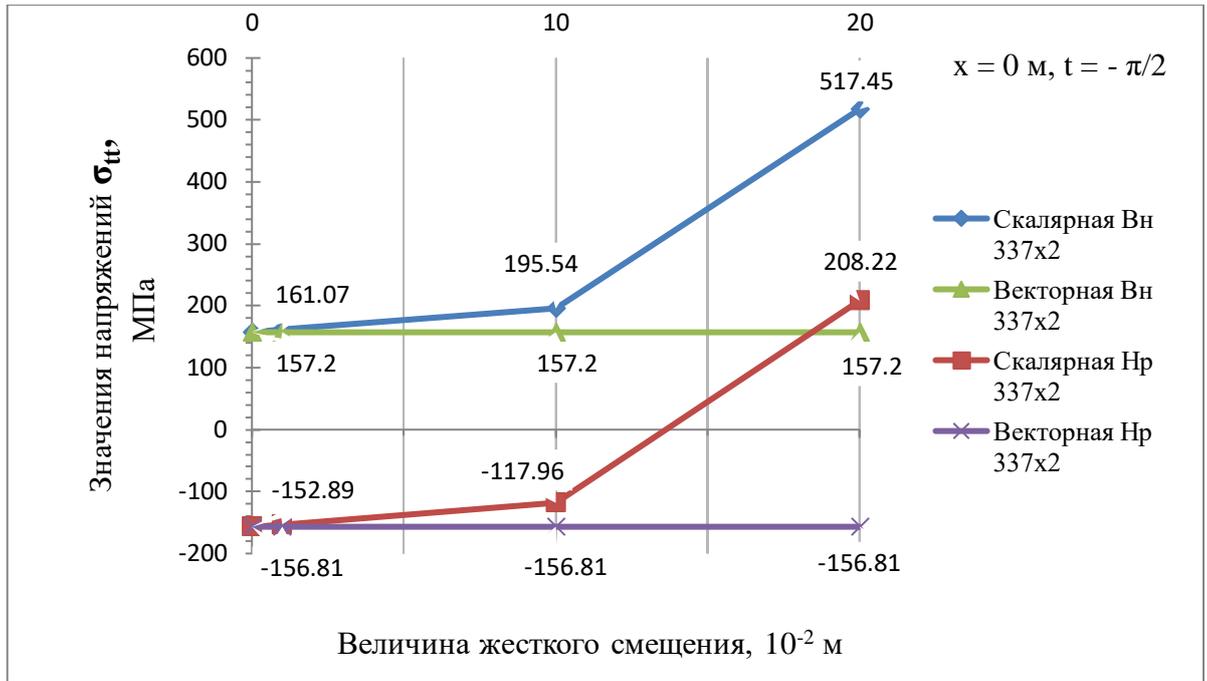


Рис. 4.2 - Графики изменения напряжений σ_{tt} в точке опорания в зависимости от величины жесткого смещения при различных формах аппроксимации (первый вариант расчета)

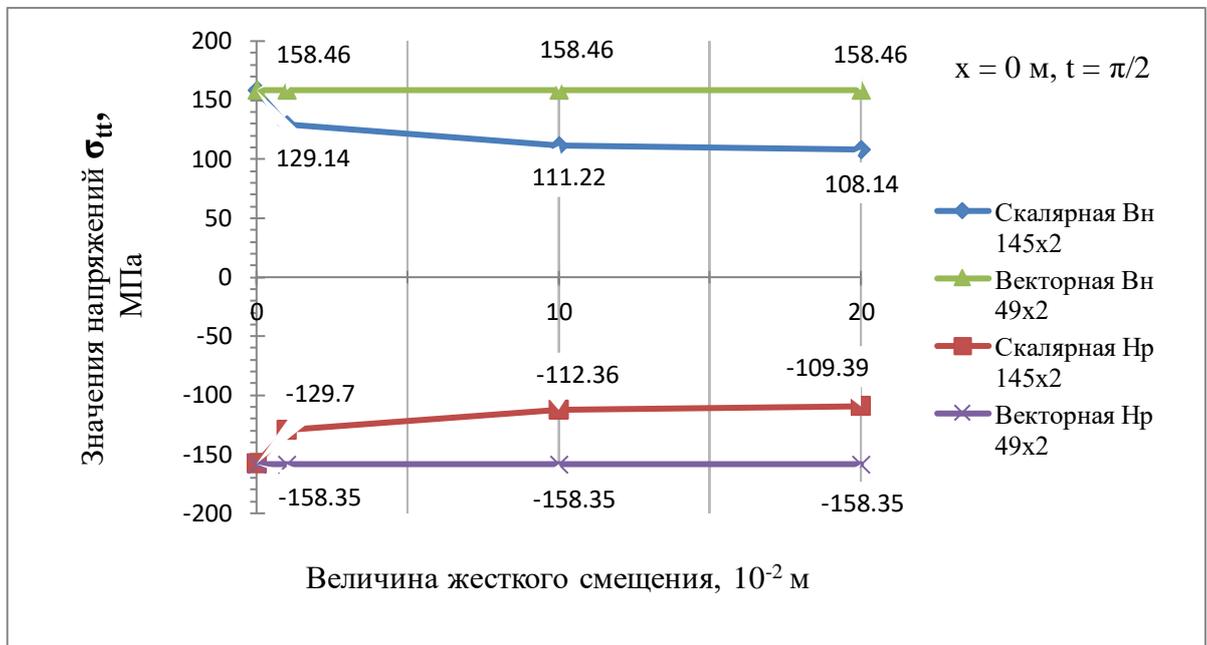


Рис. 4.3 - Графики изменения напряжений σ_{tt} в точке приложения силы F в зависимости от величины жесткого смещения при различных формах аппроксимации (второй вариант расчета)

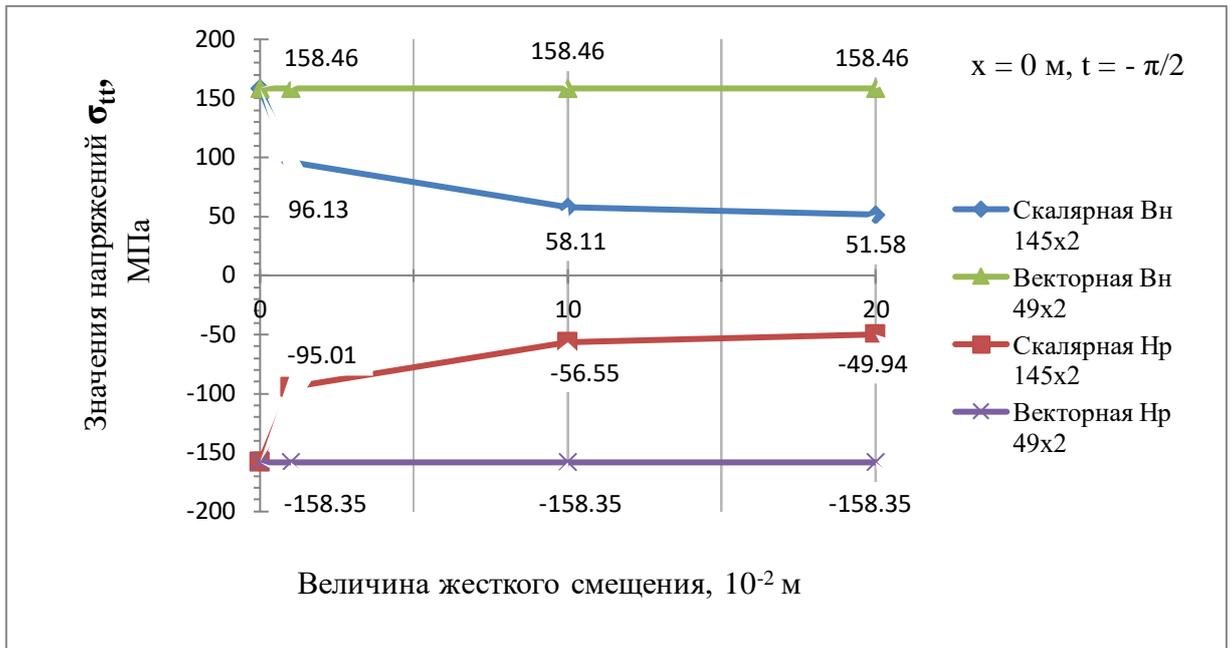


Рис. 4.4 - Графики изменения напряжений σ_{tt} в точке шарнирного в зависимости от величины жесткого смещения при различных формах аппроксимации (второй вариант расчета)

Значительный интерес представляет исследование НДС оболочки при фиксированной жесткости пружины. При этом возникает вопрос, позволяет ли сгущение сетки устранить погрешности скалярной аппроксимации.

В таблицах 4.5 - 4.10 представлены значения напряжений, контролируемых в точках 1 и 2, в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения.

Согласно статическому условию равновесия напряжения в точках 1 и 2 должны быть равны, чего не наблюдается при использовании скалярной аппроксимации как в первом (таблица 4.5), так и во втором (таблица 4.6) вариантах отсчета углов поворота нормали. Стоит отметить, что при смещении на 0,01 м наблюдается сходимость вычислительного процесса. Инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений уже при редкой сетке дискретизации позволяет получить удовлетворительные результаты.

При уменьшении жесткости пружины и возрастании смещения на 0,1 и 0,2 м скалярная аппроксимация и в первом (таблицы 4.7 и 4.9) и во втором (таблицы 4.8 и 4.10) вариантах отсчета углов поворота нормали не дает приемлемых результатов. Значения напряжений при векторной аппроксимации остаются неизменными при любой сетке дискретизации и заданных смещениях как в первом (таблицы 4.7 и 4.9), так и во втором (таблицы 4.8 и 4.10) вариантах отсчета углов поворота нормали.

На диаграммах (рис. 4.5 – 4.10) представлены зависимости значений напряжений от числа элементов дискретизации при заданных смещениях оболочки: 0,01 м – рисунки 4.5 и 4.6; 0,1 м – рисунки 4.7 и 4.8; 0,2 м – рисунки 4.9 и 4.10.

Таблица 4.5 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,01 м (первый вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,1 · 10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	132,97	143,67	148,76	153,22	156,10
			σ_{tt}^H	-132,96	-143,48	-148,49	-152,89	-155,73
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	162,29	165,55	163,69	161,07	159,31
			σ_{tt}^H	-161,54	-164,97	-163,18	-160,61	-158,89
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,90078	0,98032	0,99470	0,99928	0,99995
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	155,34	156,15	156,64	157,20	157,71
			σ_{tt}^H	-154,95	-155,76	-156,25	-157,81	-157,31
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	155,34	156,15	156,64	157,20	157,71
			σ_{tt}^H	-154,95	-155,76	-156,25	-157,81	-157,81
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Таблица 4.6 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,01 м (второй вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,1 · 10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	129,14	138,41	145,49	152,35	156,30
			σ_{tt}^H	-129,70	-138,59	-145,42	-152,09	-155,95
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	96,13	131,54	148,50	158,14	159,77
			σ_{tt}^H	-95,01	-130,69	-147,83	-157,63	-159,33
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,42056	0,70220	0,85366	0,95777	0,99287
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Таблица 4.7 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (первый вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,01 · 10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	37,31	50,37	81,59	117,74	141,69
			σ_{tt}^H	-38,98	-51,65	-82,36	-117,96	-141,55
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	192,02	235,87	223,78	195,54	173,65
			σ_{tt}^H	-189,78	-233,88	-222,25	-194,54	-173,00
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			4,76434	8,33130	9,49523	9,92892	9,99516
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000

Таблица 4.8 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (второй вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,01 · 10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	111,22	103,79	102,07	113,44	137,04
			σ_{tt}^H	-112,36	-104,94	-103,10	-114,01	-137,04
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	58,11	855,12	115,05	155,31	169,56
			σ_{tt}^H	-56,55	-83,49	-113,47	-154,06	-168,80
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,67818	1,91170	3,68980	6,94476	9,33177
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			10,0000	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000

Таблица 4.9 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (первый вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,0025 · 10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	0,42	-25,13	13,77	78,86	125,70
			σ_{tt}^H	-2,73	22,66	-15,59	-79,67	-125,80
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	203,50	292,77	284,45	233,32	189,56
			σ_{tt}^H	-200,67	-289,63	-281,89	-231,73	-188,67
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			9,25477	14,2802	18,07817	19,92892	19,98064
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	155,34	156,15	156,64	157,20	157,71
			σ_{tt}^H	-154,95	-155,76	-156,25	-156,81	-157,31
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	155,34	156,15	156,64	157,20	157,71
			σ_{tt}^H	-154,95	-155,76	-156,25	-156,81	-157,31
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			20,0000	20,0000	20,0000	20,0000	20,0000

Таблица 4.10 - Значения напряжений σ_{tt} в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (второй вариант расчета)

Жесткость пружины	Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации				
				145x2	193x2	241x2	337x2	529x2
0,0025·10 ² Н/м	Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	109,56	97,10	89,28	89,42	147,446
			σ_{tt}^H	-110,76	-99,32	-90,63	-90,50	-147,25
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	54,59	77,36	105,20	153,55	164,27
			σ_{tt}^H	-52,98	-75,60	-103,36	-151,86	-163,68
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,70207	2,11399	4,52500	10,63970	4,82713
	Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
		Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	158,60	158,60	158,60	158,60	158,60
			σ_{tt}^H	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21	-158,21
	Вертикальное смещение оболочки, 10 ⁻² м			20,0000	20,0000	20,0000	20,0000	20,0000



Рис. 4.5 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке приложения силы при смещении оболочки на 0,01 м

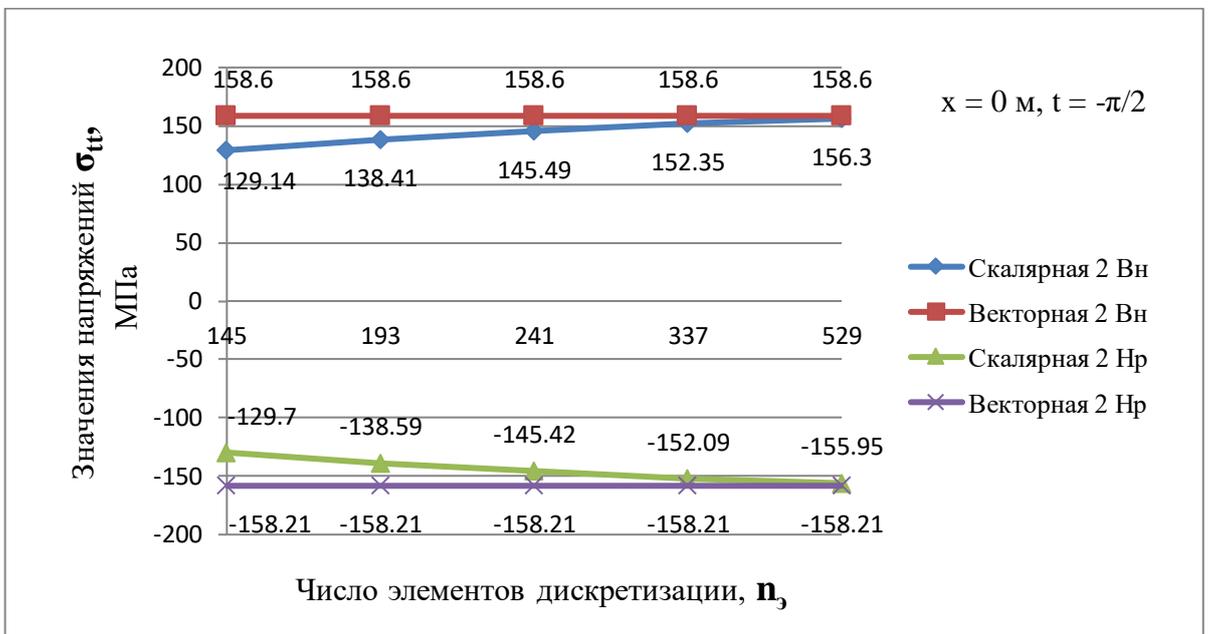


Рис. 4.6 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке опирания при смещении оболочки на 0,01 м

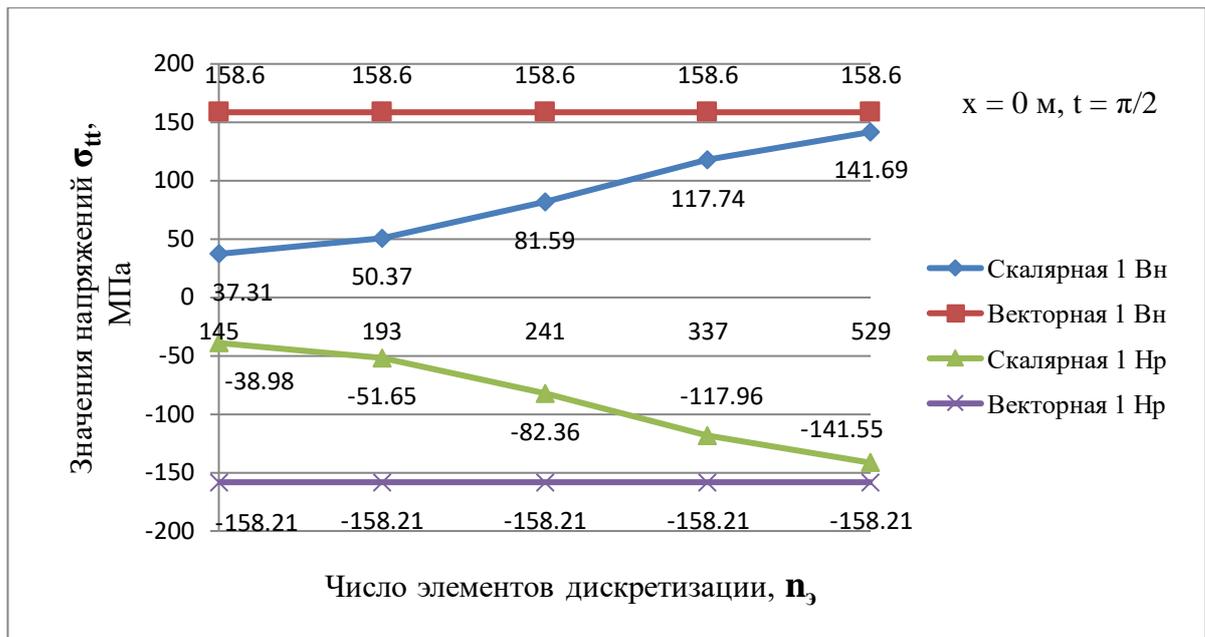


Рис. 4.7 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке приложения силы при смещении оболочки на 0,1 м

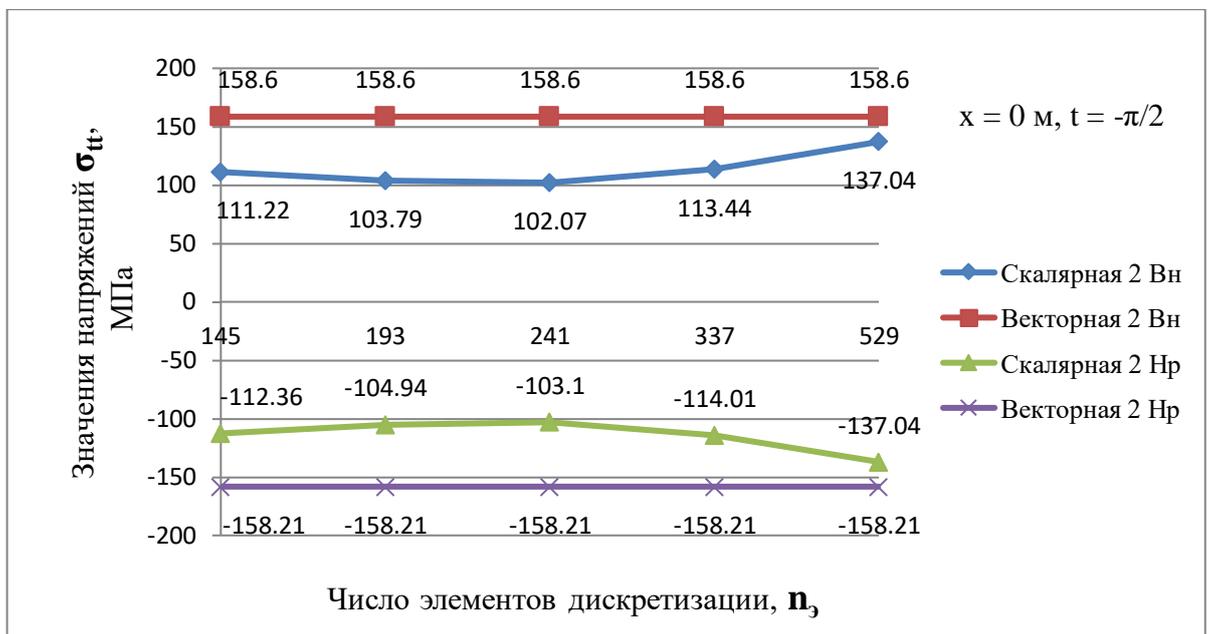


Рис. 4.8 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке опирания при смещении оболочки на 0,1 м

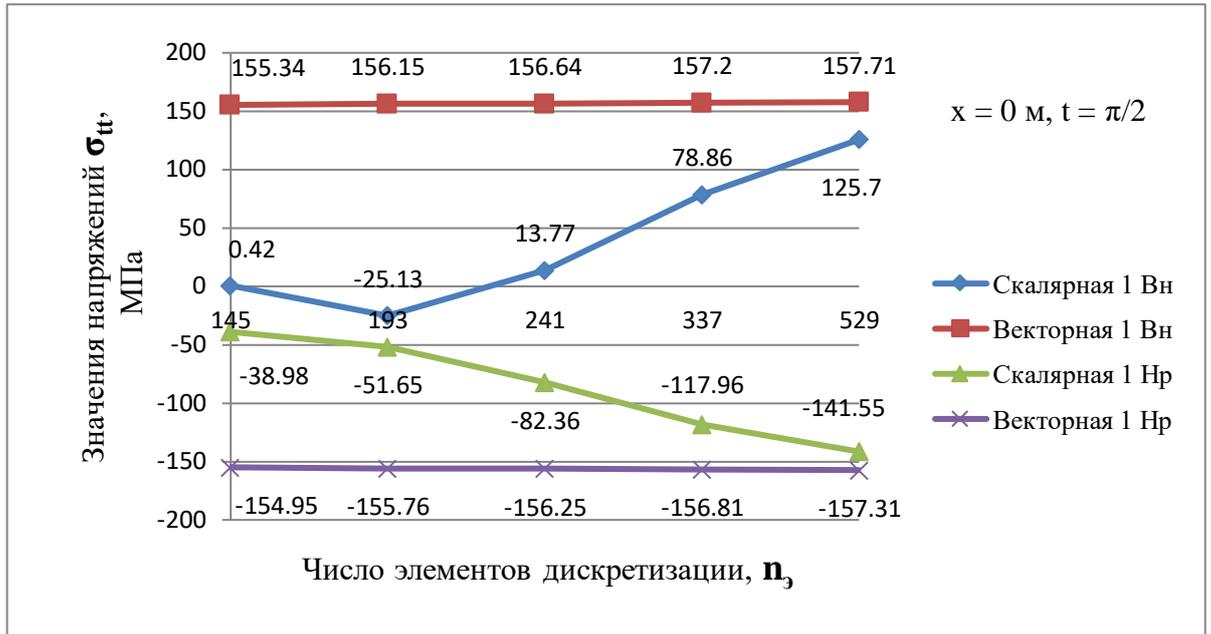


Рис. 4.9 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке приложения силы при смещении оболочки на 0,2 м

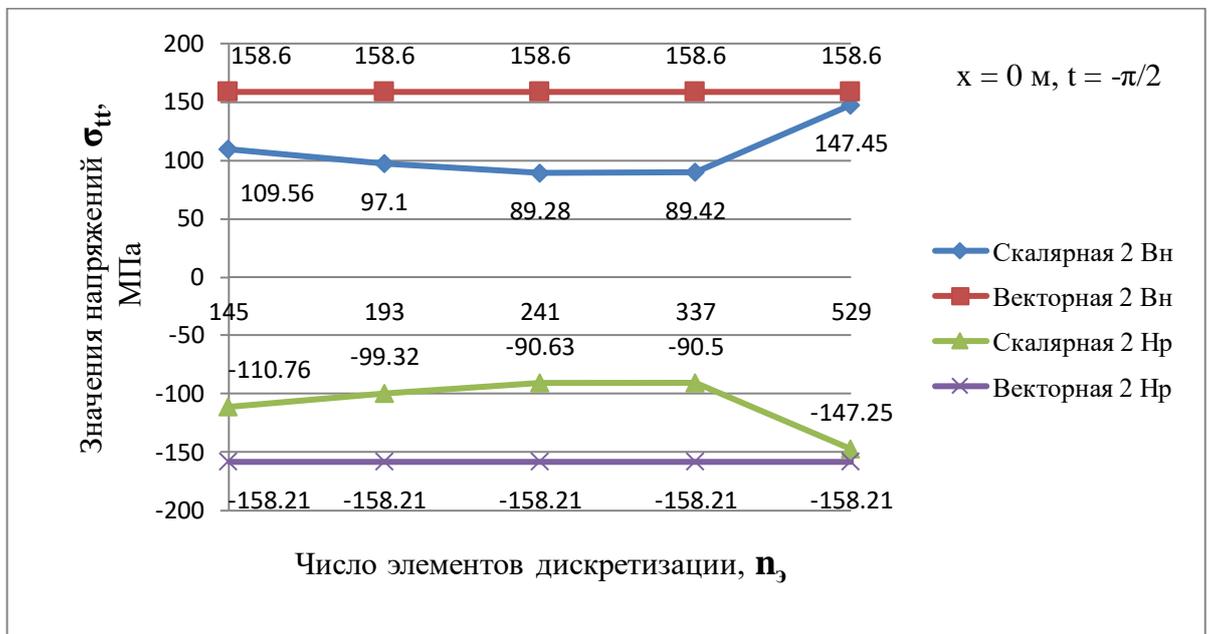


Рис. 4.10 - Графики зависимостей напряжений σ_{tt} от числа элементов дискретизации в точке опирания при смещении оболочки на 0,2 м

Пример расчета 4.2.

В качестве примера приводятся результаты расчета НДС кругового цилиндра, загруженного в середине двумя диаметрально противоположными сосредоточенными силами (рис. 2.7). Исходные данные имели следующие значения: $L = 26,289 \cdot 10^{-2}$ м, $b = c = 12,58 \cdot 10^{-2}$ м, $t = 0,24 \cdot 10^{-2}$ м, $P = 453,6$ Н, $E = 0,738 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3125$. Круговой цилиндр был рассчитан двумя способами: в первом варианте отсчета угла поворота нормали при формировании матрицы жесткости КЭ использовалось соотношение (3.12); во втором варианте – (3.13). Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитывалась 1/8 часть цилиндра.

Результаты повариантного расчета приведены в таблице 4.11.

Таблица 4.11 - Значения прогиба в зависимости от густоты сетки дискретизации при различных вариантах отсчета угла поворота нормали и видах аппроксимаций

Сетка узлов	1 вариант отсчета угла поворота нормали		2 вариант отсчета угла поворота нормали		Известное решение [109]
	Варианты аппроксимаций				
	Скалярная аппроксимация	Векторная аппроксимация	Скалярная аппроксимация	Векторная аппроксимация	
	Прогиб, 10^{-2} м				
13x13	0,2839	0,2846	0,2882	0,2881	Богнер, Фокс, Шмидт $0,2889 \cdot 10^{-2}$ м Кантин, Клауф $0,2865 \cdot 10^{-2}$ м Ашвел, Сабир $0,2888 \cdot 10^{-2}$ м
17x17	0,2860	0,2864	0,2883	0,2883	
21x21	0,2870	0,2873	0,2884	0,2884	

В таблице представлены значения прогиба (в метрах) под сосредоточенной силой в зависимости от густоты сетки дискретизации и способа

интерполяционной процедуры. В правой крайней колонке приведены значения прогиба, полученного зарубежными авторами [109].

Как видно из таблицы, в обоих вариантах расчета наблюдается устойчивая сходимость вычислительного процесса, скорость которого выше во втором варианте расчета. В первом варианте при использовании векторной интерполяционной процедуры значение прогиба больше на 0,14%, чем при скалярной интерполяции. Во втором варианте расчета величины прогиба имеют практически одинаковые значения как при векторной, так и при скалярной интерполяционных процедурах. Сравнение величин прогиба со значениями, полученными зарубежными авторами показывает, что различие в данных значениях минимально и находится в пределах 0,5%.

4.3. Выводы по четвертой главе

1. Разработан алгоритм компоновки матриц жесткости размерностью 44×44 четырехузловых оболочечных элементов дискретизации для численного анализа НДС тонких оболочек с учетом сдвиговых деформаций при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений и векторных полей углов поворота нормали. В первом варианте компоновки матрицы жесткости четырехугольного КЭ отсчет угла поворота нормали осуществляется от ее исходного состояния, во втором – от ее деформированного состояния.

2. Произведен сопоставительный анализ конечно-элементных решений тонких оболочек с учетом сдвиговых деформаций при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования для скалярной и векторной форм аппроксимаций полей перемещений. На примерах расчетов было показано, что при использовании инвариантной интерполяционной процедуры векторных полей перемещений и векторных полей углов поворота нормали можно учитывать смещения КЭ как жесткого тела, чего не позволяет сделать скалярная аппроксимация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы:

1. Разработан алгоритм исследования НДС тонких оболочек с использованием четырехугольного конечного элемента размером 72×72 на основании соотношений Новожилова В. В. при использовании скалярной и векторной интерполяционных процедур. На основе разработанного элемента обоснована необходимость применения векторной интерполяции полей перемещений при расчете тонких оболочек, не являющихся оболочками вращения.

2. Получены основные геометрические соотношения между деформациями и перемещениями с учетом деформаций поперечного сдвига при различных вариантах отсчета угла наклона нормали в процессе деформирования.

3. Предложен алгоритм конечно-элементного исследования НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига. При этом отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее исходного и деформированного положений. Был обоснован вывод о предпочтительности варианта расчета с отсчетом угла поворота нормали от ее деформированного состояния, при котором можно получать удовлетворительные по точности значения напряжений при относительно редкой сетке элементов дискретизации.

4. Разработан алгоритм конечно-элементного исследования НДС оболочек с учетом деформации поперечного сдвига при использовании различных форм аппроксимаций перемещений. Впервые использовалась векторная форма интерполяционной процедуры для вектора угла поворота нормали. На примерах расчетов было показано, что использование векторной аппроксимации полей перемещений и углов поворота нормали дает возможность учета в неявной форме смещения КЭ как жесткого целого, в то время как при использовании скалярной аппроксимации искомых величин такая возможность отсутствует.

5. На основании численного анализа НДС оболочек, показана необходимость учета деформаций поперечного сдвига при расчете короткопролетных, жестко заземленных оболочечных конструкций. Показаны преимущества предложенного варианта отсчета угла наклона нормали по сравнению с общепринятым вариантом в сочетании с интерполяцией полей векторов перемещений и векторов углов поворота нормали.

6. Разработан пакет прикладных программ, позволяющий повысить точность конечно-элементного исследования напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига, внедрение которого в расчетную инженерную практику может способствовать снижению материалоемкости оболочечных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврамов, К. В. Полуаналитический метод конечных элементов для расчета напряженно-деформируемого состояния цилиндрических оболочек с продольными ребрами жесткости / К. В. Аврамов, О. К. Морачковский, А. М. Тонконоженко, В. Ю. Кожарин, Р. Е. Кочуров // Проблемы машиностроения.- 2014. –Т. 17- № 1. – С. 33-41.
2. Агапов, В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций / В. П. Агапов. – М.: Издательство АСВ, 2000. – 152 с.
3. Агапов, В. П. Моделирование стержней таврового сечения в расчетах строительных конструкций методом конечных элементов / В. П. Агапов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2016 - № 2. - С. 55-59.
4. Аргирис Дж. Геометрическая нелинейность и метод конечных элементов в варианте метода перемещений. М.: Мир, 1981. - 120 с.
5. Арефи, М. Обобщенная теория, учитывающая поперечные сдвиги, для задач термоупругого деформирования цилиндрических оболочек из функционально-градиентного материала / Арефи М. // Прикладная механика и техническая физика. - 2015. – Т. 56. - № 3. – С. 173-181.
6. Атамасов, В. Д. Математические модели напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций летательных аппаратов / В. Д. Атамасов, И. И. Дементьев, С. А. Немыкин, Б. И. Полетаев // Известия Российской академии ракетных и артиллерийский наук. - 2015. – № 2. – С. 71-75.
7. Бадриев, И. Б. Контактная постановка задач механики подкрепленных на контуре трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем / И. Б. Бадриев, М. В. Макаров, В. Н. Паймушин // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2016.- № 1.- С. 77-85.

8. Бадриев, И. Б. Применение тонкостенных конструкций для снижения шумового загрязнения окружающей среды / И.Б. Бадриев, В.Н. Паймушин // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. - 2017.-Т. 5.- № 8-1 (34-1).-С. 32-35.

9. Баженов, В. А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, Н.А. Соловей. – М.: Либроком, 2013. – 336 с.

10. Баженов, В. Г. Численный анализ больших упругопластических деформаций сферической оболочки в скафандре при взрывном нагружении / В.Г. Баженов, А.В. Демарева, А.И. Кибец // В сборнике: Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017).- 2017.-С. 184-185.

11. Баженов, В. Г. Конечно-элементный анализ больших формоизменений сферической оболочки при контактном взаимодействии с жесткой обоймой под действием импульса перегрузки/ В.Г. Баженов, В.Л. Котов, Е. Ю. Линник, А.А. Тарасова // В книге: Материалы XXI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) - 2015. - С. 14-16.

12. Баженов, В. Г. Конечно-элементное моделирование больших упругопластических деформаций сферической оболочки в скафандре под действием импульса перегрузки / В.Г. Баженов, А.В. Демарева, М.С. Баранова, А.И. Кибец, А.А. Рябов, В.И. Романов // Проблемы прочности и пластичности.- 2016.-Т. 78. -№ 3. -С. 322-332.

13. Бандурин, Н. Г. Численный метод и программа для исследования напряженно-деформированного состояния многопролетного упругого сжато-изогнутого стержня и определения критических нагрузок / Н. Г. Бандурин, С. Ю. Калашников, А. В. Голиков, А. А. Чураков // Строительство и реконструкция. – 2016. - № 2 (64) – С. 12-22.

14. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Книга по требованию, 2012. – 445 с.
15. Бахтиева, Л. У. Об устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии / Л. У. Бахтиева, Ф. Х. Тазюков // Изв. вузов. Авиационная техника.-2015.- № 1.-С. 85-88.
16. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
17. Бозняков, Е. И. Численное моделирование аэроупругих колебаний тонкостенных оболочек в трехмерном воздушном потоке. Часть 1: верификация механической конечноэлементной модели / Е. И. Бозняков, И. Н. Афанасьева, А. М. Белостоцкий // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2016. - Т. 12. - № 2. - С. 75-85.
18. Борисенко, А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. -3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во «Высшая школа», 1966. - 252 с.
19. Вальтер, А. И. Метод конечных элементов в задачах прочности: учеб. пособие / А. И. Вальтер, А. А. Баранов. – Тула: ТулГУ, 2005. - 195 с.
20. Векуа, И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. - М.: Наука, 1982. - 288 с.
21. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В. З. Власов. - М.: Гостехиздат, 1949. - 784 с.
22. Вольмир, А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. - 420 с.
23. Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К. З. Галимов // - Казань: Изд. Казан. гос. ун-та, 1975. – 326с.
24. Галишникова, В. В. Об особенностях использования коротационного балочного элемента для расчета устойчивости рам при больших перемещениях / В. В. Галишникова // Моделирование и механика конструкций – 2015. №1 (1). С. 7-10.

25. Голованов А. И. Конечные деформации: объективные производные, сопряженные тензоры напряжений, определяющие соотношения для композиционных материалов / А. И. Голованов // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2009. - Т. 15. - № 2. - С. 265-280.

26. Голованов А. И. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. постановки задачи и алгоритмы решения / А. И. Голованов, Ю. Г. Коноплев, Л. У. Султанов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. - 2009. - Т. 151. - № 3. - С.108-120.

27. Гольдштейн, Р. В. Роль поверхностных эффектов при деформировании двухслойных пластин / Р. В. Гольдштейн, Е. А. Каспарова, П. С. Шушпанников // Вестн. тамбовского унив. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 3. С. 1182-1185.

28. Григолюк, Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов – М.: Наука, 1978. – 360с.

29. Григоренко, Я. М. К расчету оболочечных конструкций методом конечного элемента / Я. М. Григоренко, С. С. Кокошин // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15. - № 7. – С. 3-10.

30. Григорьев, И. В. Деформирование, устойчивость и колебания оболочечных конструкций / И. В. Григорьев, В. И. Прокопьев, Ю. В. Твердый. - М.: АСВ, 2007. - 208 с.

31. Деклу, Ж. Метод конечных элементов / Ж. Деклу. – М.: Мир, 1976. – 96 с.

32. Дементьев, И. И. Двумерная математическая модель напряженно-деформированного состояния выносного композитного упругого элемента космического аппарата / И. И. Дементьев, В. Д. Атамасов, А. Ю. Журавлев, М. И. Кислицкий, А. В. Романов // Динамика сложных систем – XXI век. - 2015. – Т. 9. - № 3. – С. 21-28.

33. Джабраилов, А. Ш. Конечно-элементная аппроксимация векторных полей в криволинейных системах координат / А. Ш. Джабраилов, Ю. В. Клочков,

С. С. Марченко, А. П. Николаев // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2007. - № 2. - С. 3-6.

34. Емельянов, И. Г. Напряженное состояние оболочечных конструкций при локальных нагрузках / И. Г. Емельянов, А. В. Кузнецов // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2014. - № 1. - С. 53-59.

35. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2014. - № 6. - С. 23-30.

36. Железнов, Л. П. Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно подкрепленных эллиптических цилиндрических оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника.-2014.-№ 2.- С. 8-13.

37. Золотов, А. Б. Дискретно-континуальный метод конечных элементов. Приложения в строительстве. / А. Б. Золотов, П. А. Акимов, В. Н. Сидоров, М. Л. Мозгалева. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2010. – 336 с.

38. Игнатьев, А. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода / А. В. Игнатьев, В. А. Игнатьев, Е. В. Онищенко // Вестник МГСУ.-2016. - №2. – С. 20-33.

39. Игнатьев, В. А. Расчет плоских рам с большим перемещением узлов по методу конечных элементов в форме классического смешанного метода / В. А. Игнатьев, А. А. Игнатьев // Строительство и реконструкция.-2015. - №2 (58). – С. 12-19.

40. Игнатьев, А. В. Анализ изгибаемых пластинок, имеющих жесткие включения или отверстия, по МКЭ в форме классического смешанного метода / А.В. Игнатьев, В.А. Игнатьев, Е.А. Гамзатова // Известия высших учебных заведений. Строительство.-2017.-№ 9 (705).-С. 5-14.

41. Игнатьев, А. В. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчету систем с односторонними связями / А.В. Игнатьев, В.А. Игнатьев, М.И. Бочков // Строительная механика и расчет сооружений.-2017.-№ 2 (271).-С. 52-61.

42. Игнатьев, В. А. Расчет стержневых пластинок и оболочек. Метод дискретных конечных элементов / В. А. Игнатьев. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. – 160 с.

43. Кабанов, В. В. К расчету цилиндрической оболочки методом конечных элементов / В. В. Кабанов, Л. П. Железнов // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, Т. 9 – С. 35-40.

44. Каримов И. Ш. Строительная механика: теоретический курс с примерами типовых расчетов: [учебное пособие для вузов и учащихся сред. спец. учеб. заведений техн. профиля, инженер.- техн. и научн. работников] / И. Ш. Каримов – Уфа: Белая река, 2008. – 280 с.

45. Каюмов, Р. А. Моделирование процесса деформирования и оценка несущей способности системы грунт – тонкостенная конструкция / Р.А. Каюмов, Ф.Р. Шакирзянов, С.С. Гаврюшин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение.- 2014.- № 6.- С. 20-24.

46. Каюмов, Р. А. Расчет совместного деформирования и потери несущей способности грунта и гофрированной полиэтиленовой трубы / Р. А. Каюмов, Р. А. Шакирзянов, Ф. Р. Шакирзянов // Ученые записки Казанского университета.- 2015 - Т.157. - С. 107-113.

47. Каюмов, Р. А. Существование решения задачи о конечном деформировании круговой упругопластической оболочки / Р. А. Каюмов, А. В. Кудряшов, И. З. Мухамедова, Ф. Р. Шакирзянов // Вестник технологического университета.-2015 - Т.18.-№ 3 - С. 251-253.

48. Ким, А. Ю. Усиление мягких оболочек пневматических сооружений стальными канатами и арками / А. Ю. Ким, С. В. Полников // В сборнике: Перспективы развития науки и образования, сборник научных трудов по

материалам IV международной научно-практической конференции. Под общей редакцией А.В. Туголукова. - 2016. - С. 107-109.

49. Ким, А. Ю. Применение численной итерационной процедуры Эйлера-Коши третьего порядка точности в задачах расчёта нелинейных пневматических сооружений / А. Ю. Ким // В сборнике: World Science: Problems and Innovations, сборник статей Международной научно-практической конференции. Под общей редакцией Г.Ю. Гуляева. - 2016. - С. 6-11.

50. Ким, А. Ю. Сравнение экспериментального и численного исследования большепролетного пневматического линзообразного сооружения / А. Ю. Ким, С. В. Полников // Научное обозрение. - 2016. - № 15. - С. 36-41.

51. Киселева, Т. А. Сравнение скалярной и векторной форм метода конечных элементов на примере эллиптического цилиндра / Т. А. Киселева, Ю. В. Клочков, А. П. Николаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015 –Т. 55.- № 3. - С. 418-423.

52. Клочков, Ю. В. Решение проблемы учета смещения конечного элемента как жесткого целого на основе векторной интерполяции полей перемещений / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, А. П. Киселев // Изв. вузов. Сер.: Машиностроение. – 1998. - № 1-3. - С. 3-8.

53. Клочков, Ю. В. Сравнительная оценка скалярной и векторной аппроксимаций искомым неизвестных в МКЭ при расчете произвольных оболочек / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. А. Киселева // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. - № 2. С. 69–75.

54. Клочков, Ю. В. Применение соотношений Новожилова В. В. К расчету тонкостенных конструкций АПК / Ю. В. Клочков, Т. Р. Ищанов // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. - 2014. - № 2 (34). - С. 171-175.

55. Клочков, Ю. В. О способах аппроксимации перемещений в МКЭ при расчете эллиптических цилиндров / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика и расчет сооружений. -2015 - № 4(261). - С. 64-70.

56. Клочков, Ю. В. Сравнительный анализ скалярной и векторной форм аппроксимаций в МКЭ на примере соотношений В. В. Новожилова для эллиптического цилиндра / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2015 - № 2. - С. 51-58.

57. Клочков, Ю. В. Конечно-элементный анализ НДС оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига / Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Т. Р. Ищанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 5. С. 49–54.

58. Ковалев, В. А. Полная статико-геометрическая аналогия теории тонких оболочек / В.А. Ковалев, В.А. Козлов // Вестник Самарского государственного университета.-2007.-№ 9-1 (59).-С. 188-194.

59. Козлов, В. А. Напряженно-деформированное состояние многосвязных призматических конструкций, закрепленных по скошенному сечению / В.А. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры.-2015.-№ 4 (40).-С. 11-17.

60. Козлов, В. А. Стесненный изгиб с кручением консольно заземленной цилиндрической оболочки с многосвязным контуром некругового очертания / В.А. Козлов, С.Н. Булатов // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Дорожно-транспортное строительство.-2004.-№ 2.-С. 21-23.

61. Козлов, Д. В. Влияние размеров конечных элементов на расчетное напряженно-деформированное состояние арочной плотины / Д. В. Козлов, В. И. Волков, А. И. Гольшев, А. А. Учеваткин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2016 - № 2. - С. 59-63.

62. Коноплев, Ю. Г. Численно-экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек эллиптического сечения с вырезом / Ю.Г. Коноплев, М.Н. Осипов, А.А. Саченков // В книге: материалы XX международного симпозиума «динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова Московский

авиационный институт (национальный исследовательский университет).-2014.-С. 109-110.

63. Корнев, В. М. Модель расслоения композита при поперечном сдвиге / В. М. Корнев, И. С. Астапов, Н. С. Астапов // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2015. – Т. 21.- № 2 – С. 149-161.

64. Корнеев, В. С. Расчет напряженно-деформированного состояния плоской оболочки / В. С. Корнеев, С. А. Корнеев, В. А. Ильичев, М. В. Васькова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. –Т. 3- № 5-2. С. 283–287.

65. Косицын, С. Б. Численный анализ напряженно-деформированных состояний пересекающихся цилиндрических оболочек обделок тоннелей, взаимодействующих с окружающим массивом грунта, с учетом последовательности их возведения / С. Б. Косицын, Ч. С. Линь // IJCCSE.-2015.-Т. 11. -№ 2.- С. 101–106.

66. Косицын, С. Б. Геотехнический прогноз влияния строительства проектируемого тоннеля метрополитена методом щитовой проходки на осадки земной поверхности / С.Б. Косицын, В.С. Федоров, В.Ю. Акулич // Научный журнал строительства и архитектуры.- 2017. -№ 4 (48).- С. 90-98.

67. Кривошапко, С. Н. Строительная механика 2-е изд. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – М.: Юрайт, 2015. - 392 с.

68. Кривошапко, С. Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве / С. Н. Кривошапко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. -№ 1. – С. 51-56.

69. Кривошапко, С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2010. – 560 с.

70. Кузнецов, В. В. Уточненная геометрически нелинейная формулировка треугольного конечного элемента тонкой оболочки / В. В. Кузнецов, С. В. Левяков // Прикладная механика и техническая физика. - 2007. - Т. 48. - № 5.- С. 160-172.

71. Кузнецов, Е. Б. Продолжение решения в многопараметрических задачах приближения кривых и поверхностей / Е. Б. Кузнецов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012.-Т. 52.- № 8.- С. 1457.
72. Курочка, К. С. Конечный элемент для моделирования напряженно-деформированного состояния двухслойных осесимметричных оболочек / К. С. Курочка, И. Л. Стефановский // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. - 2015. Т. 15. - № 4. - С. 722-730.
73. Лазарев, Н. П. Производная функционала энергии по длине криволинейного наклонного разреза в задаче о равновесии пластины Тимошенко / Н. П. Лазарев // Прикладная механика и техническая физика. - 2015. – Т. 56. - № 6. – С. 119-131.
74. Мамай, В. И. Несущая способность сферической оболочки с круговыми отверстиями / В. И. Мамай // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2014. - № 4. - С. 28-31.
75. Мануйлов, Г. А. О явлении потери устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки. часть 1: о послекритическом равновесии оболочки / Г.А. Мануйлов, С.Б. Косицын, М.М. Бегичев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.-2016.-Т. 12. -№ 3.-С. 58-72.
76. Марчук, М. В. Исследование деформирования гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей с защемленными продольными краями на основе уточненной теории / М. В. Марчук, Р. И. Тучапский, В. С. Пакош // Механика машин, механизмов и материалов. - 2015. - № 4 (33). – С. 59-69.
77. Матвиенко, Ю. Г. Численный анализ несингулярных составляющих трехмерного поля напряжений в вершине трещины смешанного типа / Ю.Г. Матвиенко, А.С. Чернятин, И.А. Разумовский // Проблемы машиностроения и надежности машин.-2013.- № 4.- С. 40-48.
78. Мишенков, Г. В. Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов. / Г. В. Мишенков, Ю. Н. Самогин, В. П. Чирков. – М.: Физматлит, 2015. – 472 с.

79. Неживляк, А. Е. Усовершенствование конструкции соединительной балки вагона на основе метода конечных элементов / А. Е. Неживляк, М. В. Гречнева, Д. А. Неживляк // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - 2016. - № 4 (52). - С. 188-192.

80. Немировский, Ю. В. Предельные состояния железобетонных балок / Ю.В. Немировский, С.В. Тихонов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.-2016.- № 3 (29).-С. 134-158.

81. Немировский, Ю. В. Предельное состояние балок на упругом основании / Ю. В. Немировский // Известия высших учебных заведений. Строительство.- 2017. -№ 2 (698). -С. 21-28.

82. Нерубаило, Б. В. К расчету напряжений в цилиндрической оболочке при продольной локальной нагрузке / Б. В. Нерубаило // Изв. вузов. Авиационная техника.-2014.- № 2.- С. 14-18.

83. Николаев, А. П. Четырехугольный конечный элемент произвольной оболочки с векторной интерполяцией полей перемещений / А. П. Николаев Ю. В. Клочков. // - Волгоград, 1993. – 15 с. - Деп. в ВИНТИ 28. 04. 93, № 1137 - В. 93.

84. Николаев, А. П. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах/ А. П. Николаев, Ю. В. Клочков, А. П. Киселёв, Н. А. Гуреева. - Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. - 264 с.

85. Николаев, А. П. Расчет оболочек на основе МКЭ в двумерной постановке / А. П. Николаев, Ю. В. Клочков, А. П. Киселев, Н. А. Гуреева – Волгоград: ИПК ФГОУ ВПО ВГСХА «Нива», 2009. – 196 с.

86. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 432 с.

87. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 214 с.

88. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред : перев. с англ. / Дж. Оден. – М.: 1976. - 464 с.

89. Паймушин, В. Н. Исследование процессов среднего изгиба подкрепленных на контуре трехслойных оболочек / В.Н. Паймушин, М.А. Шишов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.-2017.-Т. 5.-№ 7-2 (33-2).-С. 133-136.

90. Паймушин, В. Н. Соотношения теории тонких оболочек типа теории Тимошенко при произвольных перемещениях и деформациях / В. Н. Паймушин // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. –Т. 55. - № 5 (327). - С. 135-149.

91. Панасенко, Н. Н. Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. В 2-х частях. Часть 1 / Н. Н. Панасенко, В. П. Юзиков, А. В. Синельщиков // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Морская техника и технология. - 2015. – № 2. – С. 89-100.

92. Петров, В. В. Инкрементальные уравнения гибких пологих оболочек из нелинейно деформируемого материала в агрессивной среде / В. В. Петров // Вестн. Отд-ния строит. наук. Рос. акад. архид. и строит. наук. – 2011. - № 15. - С. 131-136.

93. Петров, В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В. В. Петров – М.: Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.

94. Пикуль, В. В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития / В. В. Пикуль // Изв. АН МТТ. - 2000. - № 2. - С. 153-168.

95. Пикуль, В. В. Механика оболочек / В. В. Пикуль. - Владивосток: Дальнаука, 2009. - 536 с.

96. Пикуль, В. В. Теория и расчет оболочек вращения / В. В. Пикуль. – М.: Наука, 1982. - 158 с.

97. Постнов, В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. - 344 с.

98. Постнов, В. А. Использование метода конечных элементов в расчетах устойчивости подкрепленных оболочек / В. А. Постнов, В. С. Корнеев // Прикл. механика. - 1976. – Т. 12. - № 5. – С. 44-49.

99. Постнов, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций / В. А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. - 280 с.
100. Постнов, В. А. Учет физической и геометрической нелинейности в задачах изгиба оболочек вращения / В. А. Постнов, М. Г. Слезина // Изв. АН СССР, МТТ. – 1979. - № 6. – С. 78-85.
101. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
102. Работнов, Ю. Н. Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – 2-е изд. - М.: Либроком, 2009. - 81с.
103. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 2014. – 754 с.
104. Редькин, А. В. Методика построения моделей сложных оболочковых конструкций / А. В. Редькин, В. А. Тарасов, М. Ю. Барановский, А. Б. Теплов // Строительство уникальных зданий и сооружений - 2016. - № 1. - С. 61-77.
105. Рикардс, Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 248 с.
106. Роговой, А. А. Моделирование термомеханических процессов в полимерах с памятью формы при конечных деформациях / А.А. Роговой, О.С. Столбова // Прикладная механика и техническая физика.-2015.-Т. 56.-№ 6 (333).- С. 143-157.
107. Рубин, О. Д. Разработка методики расчета прочности железобетонных конструкций гидротехнических сооружений, усиленных посредством внешнего армирования на основе композитных материалов, при действии поперечных сил / О. Д. Рубин, С. Е. Лисичкин, А. В. Александров, О. А. Симаков, // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2016 - № 3. - С. 68-74.
108. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов – М.: Наука, 1976. – Т. 1. –536 с.; 1976. – Т. 2. – 574 с.
109. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович // Пер. с серб. Ю. Н. Зуева; Под ред. В. Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 С.

110. Серазутдинов, М. Н. Расчет усиливаемых напряженных тонкостенных стержней открытого профиля при упругопластических деформациях / М. Н. Серазутдинов, М. Н. Убайдуллоев // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки.-2015. -Т. 157. 1. -С.141-146.

111. Серазутдинов, М. Н. Метод построения финитной функции высокой степени аппроксимации класса / М.Н. Серазутдинов // Вестник Казанского технологического университета.-2016.- Т. 19.- № 11.-С. 162-164.

112. Серпик, И. Н. Метод конечных элементов в решении задач механики несущих систем. / И. Н. Серпик. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2015. – 200 с.

113. Сидоров, В. Н. Метод конечных элементов в расчете сооружений. / В. Н. Сидоров, В. В. Вершинин. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2015. – 288 с.

114. Скопинский, В. Н. Расчет оболочечных конструкций с применением четырехугольных криволинейных элементов / В. Н. Скопинский // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1983. - № 5. – С. 16-21.

115. Скопинский, В. Н. Определение предельной пластической нагрузки в сферической оболочке с патрубком при комбинированном нагружении / В.Н. Скопинский, А.Н. Семенов, Р.А. Вожов // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение.-2014.-№ 2 (95).-С. 3-14.

116. Скопинский, В. Н. Нелинейный анализ и определение предельных нагрузок для сосуда давления с эллиптическим днищем и патрубком при комбинированном нагружении / В. Н. Скопинский, Н. А. Берков, Н. А. Столярова // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. - № 1 (42). – С. 22-31.

117. Скопцов, К.А. Асимптотический анализ слоистых пластин и пологих оболочек / К.А. Скопцов, С.В. Шешенин // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.-2011. -№ 1.- С. 161-171.

118. Султанов, Л. У. Методика исследования больших деформаций гиперупругих тел МКЭ / Л.У. Султанов, Л.Р. Фахрутдинов // В книге: Материалы

XXII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).-2016.-С. 171-173.

119. Съярле, Д. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Д. Съярде. – М.: Мир, 1980. - 512 с.

120. Тимергалиев, С. Н. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями / С. Н. Тимергалиев, А. Н. Углов, Л. С. Харасова // Известия высших учебных заведений. Математика. - 2015. - № 5. – С. 49-61.

121. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1963. - 635 с.

122. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.: Либроком, 2009. - 640 с.

123. Тимошенко, С. П. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Д. М. Гере – М.: Лань, 2002. – 672 с.

124. Товстик, П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы / П. Е. Товстик. – М.: Наука, 1995. - 320 с.

125. Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи. / С. И. Трушин. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2008. – 256 с.

126. Трушин, С.И. Расчет конструкций в форме пологих сетчатых гипаров с учетом геометрической нелинейности / С. И. Трушин, Е. В. Сысоева, Ф. И. Петренко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2016 - № 3. - С. 74-80.

127. Тупикова, Е. М. Расчет тонких упругих оболочек в форме длинного косоугольного геликоида / Е. М. Тупикова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. - № 3. – С. 23-27.

128. Филиппова, Е. Р. Сравнительный анализ результатов расчета тонкой оболочки в форме резной поверхности монжа по безмоментной теории и методом

конечного элемента / Е. Р. Филипова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2016. - № 3. - с. 8-13.

129. Хайруллин, Ф. С. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы / Ф. С. Хайруллин, О. М. Сахбиев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. -2016 - № 1. - С. 36-42.

130. Чернов, С. А. Моделирование тонкостенных конструкций, подкрепленных стержнями коробчатого сечения / С. А. Чернов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2014 - № 1(29). – С. 102-111.

131. Черных, К. Ф. Линейная теория оболочек / К. Ф. Черных – Л: Изд-во ЛГУ, 1962. - т.1 – 374с.; 1964. – т.2. - 395 с.

132. Черных К.Ф. Нелинейная теория изотропно – упругих тонких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – №2. – с.148-159.

133. Шешенин, С. В. Модель эффективного слоя для резинокордного материала / С. В. Шешенин, С. Г. Бахметьев // Вестник Московского университета. Серия 1: математика, механика. -2014. -№ 5. -С. 41-45.

134. Шешенин, С. В. Конечно-элементная реализация шины для решения задач о деформировании и тепловыделении / С.В. Шешенин, П.В. Чистяков, В.В. Вакулюк // В сборнике: Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов сборник научных трудов XXVII международного симпозиума.- 2016. -С. 17-22.

135. Якупов, Н. М. Тонкослойные покрытия / Н.М. Якупов, С.Н. Якупов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.-2017.-№ 1.-С. 6-14.

136. Янковский, А. П. Изгиб равнонапряженно-армированных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу / А. П. Янковский // Прикладная механика и техническая физика. - 2017. – Т. 58. - № 1 (341). – С. 199-209.

137. Aminfar A. A fast block low-rank dense solver with applications to finite-element matrices / A. Aminfar, E. Darve, S. Ambikasaran // *Journal of Computational Physics*. - 2016. - T. 304. - P. 170-188.
138. Argyris, J. H. Matrix methods of structural analysis/ J.H. Argyris // *Proc. 14-th meeting of AGARD. AGARDograph*. – 1962. – 72 p.
139. Aslami, M. Wavelet-based finite element method for multilevel local plate analysis / M. Aslami, P. A. Akimov // *Thin-Walled Structures*. - 2016. - T. 98. - P. 392-402.
140. Ayadi, A. Determination of orthotropic properties of glass fibre reinforced thermoplastics using x-ray tomography and multiscale finite element computation / A. Ayadi, H. Nouri, F. Roger, S. Guessasma // *Composite Structures*. - 2016. - T. 136. - P. 635-649.
141. Barkaoui, A. A multiscale modelling of bone ultrastructure elastic proprieties using finite elements simulation and neural network method / A. Barkaoui, B. Tlili, A. Vercher-Martínez, R. Hambli // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. - 2016. - T. 134. - P. 69-78.
142. Bathe, K.-J. The MITC9 shell element in plate bending: mathematical analysis of a simplified case / K.-J. Bathe, F. Brezzi, L. D. Marini // *Comput. Mech*. - 2011. – 47. - № 6. - P. 617-626.
143. Beshpalova, E. I. Vibrations of Shells of Revolution with Branched Meridian / E. I. Beshpalova, G. P. Urusova // *International Applied Mechanics*.-2016.-Vol. 52.-№ 1.-Pp.82-89.
144. Bo, H. The finite element analysis of the in plane and out of plane harmonic responses of piezoresponse force microscopy cantilever / H. Bo, H. Hu, Z. Zhang, J. Chang // *Journal of vibroengineering*. - 2016. - T. 18. - № 2. - P. 1097-1103.
145. Brown, D. L. A generalized multiscale finite element method for poroelasticity problems I: linear problems / D. L. Brown, M. Vasilyeva // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. - 2016. - T. 294. - P. 372-388.

146. Burman, E. A stabilized cut finite element method for partial differential equations on surfaces: the laplace-beltrami operator / E. Burman, P. Hansbo, M. G. Larson // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* - 2015. – T. 285. - P. 188-207.

147. Cai, Z. Robust a posteriori error estimation for finite element approximation to h(curl) problem / Z. Cai, S. Cao, R. Falgout // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* - 2016. - T. 309. - P. 182-201.

148. Chekhov, V. V. Modification of the finite-element method to apply to problems of the equilibrium of bodies subject to large deformations / V. V. Chekhov // *Int. Appl. Mech.* – 2013. –T. 49. - № 6. - P. 658-664.

149. Chowdhury, M. S. Shape sensitivity analysis of stress intensity factors by the scaled boundary finite element method / M. S. Chowdhury, C. Song, W. Gao // *Eng. Fract. Mech* - 2014. – T. 116. - P. 13-30.

150. Chung, E. T. Generalized multiscale finite element methods for problems in perforated heterogeneous domains / E. T. Chung, Y. Efendiev, G. Li, M. Vasilyeva // *Applicable Analysis.* - 2016. - T. 95. - № 10. - P. 2254-2279.

151. Dehghan, M. The use of element free galerkin method based on moving kriging and radial point interpolation techniques for solving some types of turing models / M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi // *Eng. Appl. Boundary. Elem.* – 2016. – T. 62. – P. 93-111.

152. Dodla, S. Finite element simulation of lamellar copper-silver composites / S. Dodla, A. Bertram, M. Kruger // *Comput. Mater. Sci.* - 2015. – T. 101. - P. 29-38.

153. Fuentes, A. Computerized desing, simulation of meshing, and finite element analysis of two types of geometry of curvilinear cylindrical gears / A. Fuentes, R. Ruiz-Orzaez, I. Gonzalez-Perez // *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering.* - 2014. – T. 272. - P. 321-339.

154. Gerasimov, S. Application of finite elements method for improvement of acoustic emission testing / S. Gerasimov, T. Sych, V. Kuleshov // *Journal of Physics: Conference Series.* - 2016. - T. 671. - № 1. - P. 012017.

155. Gupta, A. K. Evaluation of critical depth ratio for soft v2o5 film on hard si substrate by finite element modeling of experimentally measured nanoindentation

response / A. K. Gupta., A. Dey, A. K. Sharma, D. Porwal, A. K. Mukhopadhyay // *Journal of Physics D: Applied Physics*. - 2016. - T. 49. - № 15. - P. 155302.

156. Hamid Pourian, M. Modeling the elastoplastic behaviors of alpha ti-alloys microstructure using gellular automaton and finite element methods / M. Hamid Pourian, F. Bridier, P. Bocher, P. Pilvin // *Comput. Mater. Sci.* - 2014. – T. 99. - P. 33-42.

157. Javili, A. A unified computational framework for bulk and surface elasticity theory: a curvilinear-coordinate based finite element methodology / A. Javili, A. McBride, P. Steinmann, B. D. Reddy // *Comput. Mech.* - 2014. -54 -№3.- P. 745-762.

158. Jin, S. S. Sequential surrogate modeling for efficient finite element model updating / S. S. Jin, H. J. Jung // *Computers & Structures*. - 2016. - T. 168. - P. 30-45.

159. Kang, Z. An extended consecutive-interpolation quadrilateral element (xcq4) applied to linear elastic fracture mechanics / Z. Kang, T. Q. Bui, S. Hirose, D. D. Nguyen, T. Saitoh // *Acta Mech.* - 2015. – T. 226. - № 12. - P. 3991-4015.

160. Khoddam, S. An experimental-finite element analysis of the plane stress local torsion / S. Khoddam, A. H. Shamdani // *J. of Mater. Sci.* – 2013. – T. 48. - № 16 - P. 5579 - 5589.

161. Kordy, M. 3-d magnetotelluric inversion including topography using deformed hexahedral edge finite elements and direct solvers parallelized on SMP computers - part i: forward problem and parameter jacobians / M. Kordy, E. Cherkaev, P. Wannamaker, V. Maris, G. Hill // *Geophysical Journal International*. - 2016. - T. 204. - № 1. - P. 74-93.

162. Krivoshapko, S. N. Encyclopedia of analytical surfaces / S. N. Krivoshapko, V. N. Ivanov // Springer International Publishing Switzerland – 2015. –752 p.

163. Lesicar, T. Large strain, two-scale computational approach using continuity finite element employing a second gradient theory / T. Lesicar, J. Soric, Z. Tonkovic // *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*. - 2016. - T. 298. - P. 303-324.

164. Levyakov, S. V. Invariant-based formulation of a triangular finite element for geometrically nonlinear thermal analyses of composite shells / S. V. Levyakov, V. V. Kuznetsov // *Composite Structures*. – 2017. - Vol. 177. – P. 38-53.

165. Li, Z.-H. Second-order two-scale finite element algorithm for dynamic thermo-mechanical coupling problem in symmetric structure / Z.-H. Li, Q. Ma, J. Cui // *Journal of Computational Physics*. - 2016. - T. 314. - P. 712-748.

166. Liu, Y. A nonlinear finite element model for the stress analysis of soft solids with a growing mass / Y. Liu, H. Zhang, Y. Zhang, S. Zhang, B. Chen // *Int. J. Solids and Struct.* - 2014. - T. 51. - № 17. - P. 2964-2978.

167. Lopatin, A. V. Fundamental frequency of the laminated composite cylindrical shell with clamped edges / A. V. Lopatin, E. V. Morozov // *Int. J. Mech. Sci.* - 2015. - T. 92. - P. 35-43.

168. Luangarpa, C. Intensity of singularity in three-material joints under shear loading: two-real singularities and power-logarithmic singularities / C. Luangarpa, H. Koguchi // *Eur. J. Mech. A*. – 2013. –T. 40. - P. 60-68.

169. Madzvamuse, A. The bulk-surface finite element method for reaction-diffusion systems on stationary volumes / A. Madzvamuse, A. H. W. Chung // *Finite Elements in Analysis and Design*. - 2016. - T. 108. - P. 9-21.

170. Mahalov, M. S. Finite element surface layer inheritable condition residual stresses model in surface plastic deformation processes / M. S. Mahalov, V. Yu. Blumenstein // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 7. Сер. "VII International Scientific and Practical Conference on Innovations in Mechanical Engineering, ISPCIME 2015" - 2016. - P. 012004.

171. Moustaghfir, N. Transverse compression behavior of textile rovings: finite element simulation and experimental study / N. Moustaghfir, D. Durville, S. El-Ghezal Jeguirim, S. Fontaine, C. Wagner-Kocher // *J. of Mater. Sci.* – 2013. – T. 48. - № 1 - P. 462 - 472.

172. Mozolevski, I. Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems / I. Mozolevski, S. Prudhomme // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* – 2015. – T. 288. – P. 127-145.

173. Padurariu, L. Nonlinear dielectric properties of paraelectric-dielectric composites described by a 3d finite element method based on landau-devonshire theory

/ L. Padurariu , L. P. Curecheriu, L. Mitoseriu // Acta Materialia. - 2016. - T. 103. - P. 724-734.

174. Paranjape, H. M. A phase field - finite element approach to model the interaction between phase transformations and plasticity in shape memory alloys / H. M. Paranjape, S. Manchiraju, P. M. Anderson // International Journal of Plasticity. - 2016. - T. 80. - P. 1-18.

175. Psakhie, S. G. A coupled discrete element-finite difference approach for modeling mechanical response of fluid-saturated porous materials / S. G. Psakhie, A. V. Dimaki, E. V. Shilko, S. V. Astafurov // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 2016. - T. 106. - № 8. - P. 623-643.

176. Qu, Y. Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of composite rectangular parallelepipeds / Y. Qu, G. Yuan, S. Wu, G. Meng // Eur. J. Mech. A. - 2013. –T. 42. - P. 376-394.

177. Renno, J. M. Calculating the forced response of cylinder and cylindrical shells using the wave and finite element method / J. M. Renno, B. R. Mace // J. of Sound and Vibr. – 2014. –T. 333. - № 21. – P. 5340-5355.

178. Scholtes, B. New finite element developments for the full field modeling of microstructural evolutions using the level-set method / B. Scholtes, M. Shakoov, P.-O. Bouchard, N. Bozzolo, M. Bernacki, A. Settefrati // Comput. Mater. Sci. – 2015. – T. 109. - P. 388-398.

179. Sheikh, H. Crystal plasticity finite element modeling of crystallographic textures in simple shear extrusion (SSE) process / H. Sheikh, R. Ebrahimi, E. Bagherpour // Materials and Design. - 2016. - T. 109. - P. 289-299.

180. Turner, M. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. J Topp // J. Aero. Sci. – 1958. – 23. - №1. – P. 805-823.

181. Tuta, S. Finite element modeling of continuous-flow microwave heating of fluid foods and experimental validation / S. Tuta, T. K. Palazoğlu // Journal of Food Engineering. – 2017. - T. 192. - P. 79-92.

182. Tzanakis, G. Constructing new covering arrays from LFSR sequences over finite fields / G. Tzanakis, D. Panario, B. Stevens, L. Moura // *Discrete Mathematics*. - 2016. - T. 339. - № 3. - P. 1158-1171.

183. Walvekar A. A. A new approach for fatigue damage modeling of subsurface-initiated spalling in large rolling contacts / A. A. Walvekar, N. Paulson, F. Sadeghi, N. Weinzapfel, M. Correns, M. Dinkel // *Journal of Tribology*. - 2017. - T. 139.- № 1. P. 011101.

184. Wang, X. Mechanical behaviors of multi-filament twist superconducting strand under tensile and cyclic loading / X. Wang, Y. Li, Y. Gao // *Cryogenics*. - 2016. - T. 73. - P. 14-24.

185. Yang, J. A new family of finite elements for wrinkling analysis of thin films on compliant substrates / J. Yang, Q. Huang, H. Hu, G. Giunta, S. Belouettar, M. Potier-Ferry // *Compos. Struct.* – 2015. – T. 119. – P. 568-577.

186. Zhang, H. W. A finite element for 2D elastic contact analysis of multiple Cosserat materials / H. W. Zhang, Z. Q. Xie, B. S. Chen, H. L. Xing // *Eur. J. Mech. A*. – 2012. – 31. - № 1. – P. 139-151.

187. Zhang, X. Hypervelocity Impact Performance of Aluminum Egg-box Panel Enhanced Whipple Shield / X. Zhang, T. Liu, X. Li, G. Jia // *Acta Astronautica*. - 2016. – T. 119. – P. 48-59.

188. Zienkiewicz, O. C. Finite elements in the solution of field problems / O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung // *The Engineering*. – 1965. – Vol. 220. – P. 507-510.

189. Zivelonghi, A. Mechanism of plastic damage and fracture of a particulate tungsten-reinforced copper composite: a microstructure-based finite element study / A. Zivelonghi, J.-H. You // *Comput. Mater. Sci.* – 2014. – T. 84. - P. 318-326.

Приложение А. Свидетельства о регистрации программ на ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017663909

Программа формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния с использованием векторной аппроксимации полей перемещений

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный аграрный университет» (ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ) (RU)*

Авторы: *Клочков Юрий Васильевич (RU), Николаев Анатолий Петрович (RU), Ищанов Тлек Рахметолович (RU)*

Заявка № **2017660732**

Дата поступления **25 октября 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 декабря 2017 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017663910

Программа компоновки матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента для расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния с использованием векторной аппроксимации полей перемещений

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный аграрный университет» (ФГБОУ ВО Волгоградский ГАУ) (RU)*

Авторы: *Клочков Юрий Васильевич (RU), Николаев Анатолий Петрович (RU), Ищанов Тлек Рахметолович (RU)*

Заявка № 2017660735

Дата поступления 25 октября 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 13 декабря 2017 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев

Приложение Б. Акт о внедрении результатов диссертационной работы

УТВЕРЖДАЮ
 Директор ИНИИЭМТ – филиал
 ФНЦ агроэкологии РАН
 Семенов С.Я.
 « 10 » _____ 2018 г.

АКТ

О внедрении результатов диссертационной работы Ицанова Тлека Рахметоловича «Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек с учетом поперечного сдвига при различных вариантах аппроксимации угловых перемещений».

Настоящий акт составлен о том, что разработанные в указанной научной работе четырехугольные конечные элементы с векторной аппроксимацией полей перемещений для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига использованы в лаборатории исследований безопасности гидротехнических сооружений и промышленных объектов Поволжского научно-исследовательского института эколого-мелиоративных технологий - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр агроэкологии, комплексных мелиораций и защитного лесоразведения Российской академии наук» в пакетах прикладных программ для прочностных расчетов и определения напряженно-деформированного состояния в конструктивных элементах трубопроводного оборудования.

Использование программных продуктов, основанных на алгоритме формирования матриц жесткости четырехугольных конечных элементов с векторной аппроксимацией полей перемещений для расчета оболочек с учетом деформации поперечного сдвига дает возможность выполнять уточненную оценку прочности исследуемых конструкций с учетом фактической геометрии конструкции, верификацию результатов расчетов, полученных другими методами, что повышает качество работ по оценке технического состояния объектов мелиорации и промышленных производств.

Председатель комиссии
 Зам. директора по науке, к.т.н.



С.С. Марченко

Члены комиссии
 Ст. научный сотрудник лаборатории исследований
 безопасности гидротехнических
 сооружений и промышленных объектов, к.т.н.



Д.П. Арков

Научный сотрудник комплексной
 лаборатории исследований
 строительных материалов, грунтов
 и неразрушающих методов контроля



К. С. Никитин