

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Волгоградский государственный технический университет**

# **ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ**

**Методические указания  
к лабораторной работе по дисциплине  
«Геодезическое сопровождение строительных процессов»,  
«Прикладная геодезия в строительстве»**

*Составители Т. А. Сабитова , О. И. Карпова, Т. Н. Миловатская*

**Волгоград. ВолгГТУ. 2018**

**© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Волгоградский государственный  
технический университет», 2018**

**Оценка** точности геодезических измерений [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторной работе по дисциплине «Геодезическое сопровождение строительных процессов», «Прикладная геодезия в строительстве» / сост. Т. А. Сабитова, О. И. Карпова, Т.Н. Миловатская; М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Волгогр. гос. технич. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (0,26 Мбайт). — Волгоград : ВолгГТУ, 2018. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: РС 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. Официальный сайт Волгоградского государственного технического университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

Методические указания рекомендуются в помощь студентам при выполнении лабораторных работ.

Предназначены для студентов 3 и 4 курса очной формы обучения специальностей по направлению Строительство по дисциплине «Геодезическое сопровождение строительных процессов», «Прикладная геодезия в строительстве».

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие сведения.....	4
2. Теоретическая часть.....	4
2.1. Общие сведения о теории погрешностей.....	4
2.2. Погрешности измерений.....	5
2.3. Средняя квадратическая погрешность.....	7
2.4. Средняя квадратическая погрешность функции измеренных величин.....	8
2.5. Понятие о весе измерения. Общая арифметическая середина.....	8
3. Порядок выполнения работы .....	9
3.1. Равноточные измерения.....	9
3.2. Неравноточные измерения.....	11
4. Контрольные вопросы.....	13
Рекомендуемая литература.....	13

## 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Методические указания «Оценка точности геодезических измерений» рекомендуются в помощь студентам при выполнении расчетной работы.

**В указаниях рассматриваются следующие вопросы:**

- 1) общие сведения;
- 2) погрешности измерений и их классификация;
- 3) средняя квадратическая погрешность;
- 4) средняя квадратическая погрешность функции измеренных величин;
- 5) понятие о весе измерения. общая арифметическая средина;
- 6) примеры выполнения расчетно-графических работ.

**Цель расчетно-графической работы:**

Используя исходные данные, выполнить оценку точности для равнооточных и неравнооточных геодезических измерений и определить среднюю квадратическую погрешность функции измеренных величин.

**Требования к оформлению расчетно-графической работы:**

Расчетно-графическая работа оформляется в соответствии с ГОСТ 2.105-95 «ЕСКД. Общие требования к текстовым документам».

Задание студенту на расчетную работу выдается преподавателем. Пояснительная записка пишется чернилами собственноручно на тетрадных листах или печатается на компьютере на одной стороне бумаги формата А4.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 2.1. Общие сведения о теории погрешностей

В решении задач геодезии важнейшая роль отводится различного рода измерениям. Измерением называется процесс сравнения некоторой физической величины с другой одноименной величиной, принятой за единицу измерения.

Геодезические измерения позволяют определять относительное расположение точек земной поверхности. Различают следующие виды измерений.

1. Линейные, в результате которых получают наклонные и горизонтальные расстояния между заданными точками.

2. Угловые, в результате которых измеряют горизонтальные и вертикальные углы.

3. Высотные, в результате которых получают разности высот отдельных точек.

Любые измерения, как бы тщательно их ни выполняли, сопровождаются погрешностями (ошибками), т. е. отклонениями измеренных величин от их истинного значения. Это объясняется тем, что в процессе измерений непрерывно меняются условия: состояние внешней среды, мерного прибора и из-

меряемого объекта, а также внимание исполнителя. Поэтому при измерении величины всегда получают ее приближенное значение, точность которого требуется оценить. Возникает и другая задача: выбрать прибор, условия и методику, чтобы выполнить измерения с заданной точностью. Эти задачи помогает решить теория ошибок, которая изучает законы распределения погрешностей, устанавливает критерии оценки и допуски к точности измерений, способы определения вероятнейшего значения определяемой величины, правила предвычисления ожидаемых точностей.

Измерения могут быть прямые или непосредственные, косвенные и дистанционные. Непосредственными называют такие измерения, когда определяемую величину получают в результате непосредственного сравнения с единицей измерения. Например, измерение длин линий землемерной лентой, рулеткой. Косвенными называют измерения, при которых определяемую величину получают как функцию других непосредственно измеренных величин. Например, площадь прямоугольника на местности определяют, измерив длины его сторон.

Дистанционные измерения основываются на использовании ряда физических процессов и явлений и, как правило, связаны с использованием современных технических средств: светодальномеров, электронных тахеометров, фототеодолитов и т.д.

## 2.2. Погрешности измерений

Всякое измерение производят при наличии факторов: 1) объект измерения; 2) субъект измерения — наблюдатель; 3) мерный прибор; 4) метод измерений — совокупность правил и действий при измерениях; 5) внешняя среда, в которой производят измерения. В зависимости от условий измерения могут быть равноточными и неравноточными.

**Равноточные** — однородные многократные результаты измерения одной и той же величины, выполненные одним и тем же прибором (или разными приборами одного и того же класса точности), одинаковым способом и числом приемов, в идентичных условиях.

**Неравноточные** — измерения, выполненные при несоблюдении условий равноточности.

Каждый из перечисленных факторов в процессе измерений порождает целый ряд элементарных погрешностей. Суммарное действие элементарных погрешностей образует погрешность результата измерений, в связи с чем результат измерений никогда не совпадает с истинным значением измеряемой величины.

Различают три основных вида погрешностей: грубые, систематические и случайные.

**Грубые** погрешности (промахи) связаны с серьезными ошибками при производстве измерительных работ. Эти ошибки легко выявляются и устраняются в результате контроля измерений.

**Систематические** погрешности входят в каждый результат измерений по строго определенному закону. Они обусловлены влиянием конструкции измерительных приборов, погрешностями градуировки их шкал, износом и т. д. (инструментальные погрешности) или возникают из-за недоучета условий измерений и закономерностей их изменений, приближенности некоторых формул и др. (методические погрешности). Систематические погрешности делятся на постоянные (неизменные по знаку и величине) и переменные (изменяющие свою величину от одного измерения к другому по определенному закону). Такие погрешности заранее определены и могут быть сведены к необходимому минимуму путем введения соответствующих поправок.

**Случайные** погрешности носят случайный характер, их возникновение не подчиняется определенным математическим законам, они связаны между собой статистической закономерностью.

Если не допускать грубых погрешностей и устранять систематические, то качество измерений будет определяться только случайными погрешностями. Эти погрешности неустранимы, однако их поведение подчиняется законам больших чисел. Их можно анализировать, контролировать и сводить к необходимому минимуму. Для уменьшения влияния случайных погрешностей на результаты измерений прибегают к многократным измерениям, к улучшению условий работы, выбирают более совершенные приборы, методы измерений и осуществляют тщательное их производство.

Сопоставляя ряды случайных погрешностей равноточных измерений можно обнаружить, что они обладают следующими свойствами:

- а) для данного вида и условий измерений случайные погрешности не могут превышать по абсолютной величине некоторого предела;
- б) малые по абсолютной величине погрешности появляются чаще больших;
- в) положительные погрешности появляются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные;
- г) среднее арифметическое из случайных погрешностей одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном увеличении числа измерений.

Распределение ошибок, соответствующее указанным свойствам, называется нормальным.

Разность между результатом измерения некоторой величины ( $l$ ) и ее истинным значением ( $X$ ) называют абсолютной (истинной) погрешностью и ее вычисляют по формуле (1)

$$\Delta = l - X. \quad (1)$$

Истинное (абсолютно точное) значение измеряемой величины получить невозможно, даже используя приборы самой высокой точности и самую совершенную методику измерений. Лишь в отдельных случаях может быть известно теоретическое значение величины. Накопление погрешностей приво-

дит к образованию расхождений между результатами измерений и действительными их значениями.

При математической обработке результатов измерений большое значение имеет число измеренных величин. Существуют понятия: необходимые измерения и избыточные измерения. Например: если одна и та же величина измерена  $n$  раз, то одно из измерений является необходимым, а остальные  $n-1$  — избыточными. Избыточные измерения используют для контроля правильности получаемых результатов измерений. Они позволяют определить более надежное значение искомой величины.

### 2.3. Средняя квадратическая погрешность

Пусть некоторая величина с истинным значением  $X$  измерена равноточно  $n$  раз и получены результаты:  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ , которые часто называют рядом измерений. Требуется найти наиболее надежное значение измеренной величины, которое называют вероятнейшим, и оценить точность результата. В теории погрешностей наиболее вероятным значением для ряда равноточных результатов измерений принимают среднее арифметическое по формуле (2).

$$\mu = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad (2)$$

При отсутствии систематических погрешностей арифметическое среднее по мере неограниченного возрастания числа измерений стремится к истинному значению измеряемой величины. Чтобы усилить влияние более крупных погрешностей на результат оценки точности ряда измерений, пользуются среднеквадратической погрешностью (СКП). Если известно истинное значение измеряемой величины, а систематическая погрешность пренебрежимо мала, то средняя квадратическая погрешность ( $m$ ) отдельного результата равноточных измерений определяется по формуле Гаусса (3):

$$m = \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \dots + \Delta_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (3)$$

где  $\Delta_i$  — истинная погрешность.

В геодезической практике истинное значение измеряемой величины в большинстве случаев заранее неизвестно. Тогда среднюю квадратическую погрешность отдельного результата измерений вычисляют по вероятнейшим погрешностям ( $\delta$ ) отдельных результатов измерений ( $l_i$ ) по формуле Бесселя (4):

$$m = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \delta_i^2} \quad (4)$$

где вероятнейшие погрешности ( $\delta i$ ) определяются как отклонение результатов измерений от арифметического среднего по формуле (5)

$$\delta i = l i - \mu. \quad (5)$$

Для вычисления средней квадратической погрешности среднего арифметического применяют формулу (6):

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

В качестве характеристики точности качества измерений кроме средней квадратической погрешности применяют предельную погрешность  $\Delta_{\text{пред}}$ , которую вычисляют как утроенную среднюю квадратическую погрешность (7):

$$\Delta_{\text{пред}} = 3m. \quad (7)$$

Отношение абсолютной погрешности измеряемой величины  $\Delta$  к измеренной величине  $l$  называют относительной погрешностью (8):

$$f_{\text{отн}} = \frac{\Delta}{l}. \quad (8)$$

Относительные погрешности всегда выражаются дробью с числителем, равным единице.

#### **2.4. Средняя квадратическая погрешность функции измеренных величин**

Пусть дана функция

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (0.1)$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_n$  независимо измеренные аргументы. Известны их средние квадратические ошибки  $m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3}, m_{x_n}$ .

Оценка точности функции выполняется по формуле

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2, \quad (9)$$

где  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$  — частные производные функции, вычисленные по приближенным значениям аргументов, в качестве которых принимают измеренные значения  $x_i$ , близкие к их точным значениям.

#### **2.5. Понятие о весе измерения. Общая арифметическая средина**

Понятие о весе измерения вводят для обработки результатов неравноточных измерений. Вес определяет степень надежности результатов измерений.

Чем надежнее результат, тем больше его вес. Следовательно, вес связан с точностью измерений.

За вес результата измерения  $pi$  принимают величину, обратно пропорциональную квадрату средней квадратической погрешности, т.е. величина, вычисляемая по формуле (10):

$$P_i = \frac{c}{m_i^2}, \quad (10)$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

Средняя квадратическая погрешность  $\mu$ , соответствующая результату измерения, вес которого принят равным единиц, называется средней квадратической погрешностью единицы веса и определяется по формуле (11):

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i \cdot v_i^2}, \quad (11)$$

где  $v_i = x_i - x_0$ .

Средняя квадратическая погрешность  $M_0$  весового среднего или общей арифметической середины вычисляется по формуле (12):

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{P}}. \quad (12)$$

### 3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

#### 3.1. Равноточные измерения

*Задача 1.* Длина линии измерена пять раз (табл. 1). Определить вероятнейшее значение  $L$  длины линии, среднюю квадратическую погрешность  $m$  измерения и среднюю квадратическую погрешность  $M$  арифметической середины.

Таблица 1

№ Изм.	Результаты измерений $li, м$	$\varepsilon = l_i - L_0^1$	$V_i = li - L$	$(VV)$	Формулы
1	340,75	0,07	0,038	0,001444	$1. L = L_0^1 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 340,68 + \frac{0,16}{5} = 340,712 м$ $2. m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,00268}{5-1}} = 0,026 м$ $3. M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,026}{\sqrt{5}} = 0,012 м$ $4. \Delta_{пр.} = 3m = 3 \cdot 0,012 = 0,036 м$
2	340,72	0,04	0,008	0,000064	
3	340,68	0	0,032	0,001024	
4	340,71	0,03	—	0,000004	
5	340,70	0,02	0,002	0,000144	
	$L_{10} = 340,68$	$[\varepsilon] = 0,16$	$[v_i] = 0$	$[vv] = 0,00268$	

*Пример решения задачи:*

Выбираем из  $l_i$  минимальное значение  $L_{10} = 340,68$  м.

Вычисляем отклонение ( $\varepsilon$ ) результатов от  $l_{min}$ :

$$\varepsilon_i = l_i - L_{10}$$

Вычисляем арифметическое среднее:

$$L = L_0^1 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 340,68 + \frac{0,16}{5} = 340,712 \text{ м.}$$

Вычисляем вероятнейшие ошибки:

$$v_i = l_i - L.$$

$$v_1 = 340,75 - 340,712 = 0,038 \text{ м;}$$

$$v_2 = 340,72 - 340,712 = 0,008 \text{ м;}$$

$$v_3 = 340,68 - 340,712 = -0,032 \text{ м;}$$

$$v_4 = 340,71 - 340,712 = -0,002 \text{ м;}$$

$$v_5 = 340,70 - 340,712 = -0,012 \text{ м;}$$

$$[v_i] = 0.$$

Вычисляем квадрат вероятнейшей погрешности:

$$v_1 \times v_1 = 0,001444;$$

$$v_2 \times v_2 = 0,000064;$$

$$v_3 \times v_3 = 0,001024;$$

$$v_4 \times v_4 = 0,000004;$$

$$v_5 \times v_5 = 0,000144;$$

$$[v_i \times v_i] = 0,00268 \text{ м.}$$

Вычисляем среднеквадратическую погрешность по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[v_i \cdot v_i]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,00268}{5-1}} = 0,026 \text{ м.}$$

Вычисляем среднеквадратическую погрешность арифметической средней:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0,026}{\sqrt{5}} = 0,012 \text{ м}$$

Вычисляем предельную погрешность:

$$\Delta_{пр.} = 3 \cdot m = 3 \cdot 0,012 = 0,036 \text{ м}$$

### 3.2. Неравноточные измерения

Задача 2. Угол измерен четырьмя исполнителями разным числом приемов (табл. 2). Определить вероятнейшее  $\beta_0$  значение угла, среднеквадратические погрешности единицы веса  $\mu$  и общей арифметической середины  $M_0$ .

Таблица 2

№ п/п	Результаты измерений	Число приемов (n)	Вес изм. $p_i$	$\varepsilon = \beta_i - \beta_0^1$	$p\varepsilon$	$v_i = \beta_i - B$	$pv$	$pvv$
1	115°12'30"	2	2	0°0'20"	0°0'40"	7,5"	15"	112,5"
2	115°12'10"	3	3	0	0	-12,5"	-	468,75"
3	115°12'24"	4	4	0°0'14"	0°0'56"	1,5"	37,5"	9"
4	115°12'39"	1	1	0°0'29"	0°0'29"	16,5"	6"	272,25"
	$\beta_0^1 = 115°12'10"$		[ 10 ]		[ 125" ]		[ 0 ]	[ 862,5" ]

Пример решения задачи:

Выбираем из  $\beta_i$  минимальное значение  $\beta_0^1 = 115°12'10"$ .

Вычисляем отклонение результатов от  $\beta_0^1$ .

$$\varepsilon_i = \beta_i - \beta_0^1;$$

$$\varepsilon_1 = 115°12'30" - 115°12'10" = 20";$$

$$\varepsilon_2 = 115°12'10" - 115°12'10" = 00";$$

$$\varepsilon_3 = 115°12'24" - 115°12'10" = 14";$$

$$\varepsilon_4 = 115°12'39" - 115°12'10" = 29".$$

Вычисляем произведение веса на уклонения:

$$P_i \cdot \varepsilon_i$$

$$2 \cdot 20" = 40";$$

$$3 \cdot 0" = 00";$$

$$4 \cdot 14" = 56"$$

$$1 \cdot 29" = 29";$$

$$[P_i \cdot \varepsilon_i] = 125"$$

Вычисляем арифметическое среднее:

$$B = \beta_0^1 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 115°12'10" + \frac{125"}{10} = 115°12'22,5".$$

Вычисляем вероятнейшие ошибки:

$$v_i = \beta_i - B$$

$$v_1 = 115^\circ 12' 30'' - 115^\circ 12' 22,5'' = + 7,5'';$$

$$v_2 = 115^\circ 12' 10'' - 115^\circ 12' 22,5'' = - 12,5'';$$

$$v_3 = 115^\circ 12' 24'' - 115^\circ 12' 22,5'' = + 1,5'';$$

$$v_4 = 115^\circ 12' 39'' - 115^\circ 12' 22,5'' = + 1,5''.$$

Вес измерений умножаем на вероятнейшую ошибку:

$$P_i \cdot v_i;$$

$$2 \times 7,5 = 15'';$$

$$3 \times (-12,5) = - 37,5'';$$

$$4 \times 1,5 = 6'';$$

$$1 \times 16,5 = 16,5'';$$

$$[P_i \cdot v_i] = 0.$$

Произведение ( $P_i \cdot v_i$ ) умножаем на вероятнейшую погрешность:

$$P_i \cdot v_i \cdot v_i;$$

$$2 \times 7,5^2 = 112,5'';$$

$$3 \times (-12,5)^2 = 468,75'';$$

$$4 \times 1,5 = 9'';$$

$$1 \times 16,5^2 = 272,25'';$$

$$[P_i \cdot v_i \cdot v_i] = 862,5''.$$

Определяем среднюю квадратическую погрешность величины веса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[P_i \cdot v_i \cdot v_i]}{n-1}} = \sqrt{\frac{862,5''}{4-1}} = 17,0''.$$

Определяем среднеквадратическую погрешность арифметической середины:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} = \frac{16,96}{\sqrt{10}} = 5,4''.$$

*Задача 3.* Определить площадь  $S$  прямоугольника, ее среднюю квадратическую ошибку  $m_s$ , если стороны прямоугольника  $a = 269$  м,  $b = 70$  м, измерены со средними квадратическими погрешностями  $ma = 0,04$  м,  $mb = 0,07$  м.

1. Определить площадь прямоугольника

$$S = a \cdot b = 269 \cdot 70 = 18830 \text{ м}^2.$$

2. Определить среднюю квадратическую погрешность площади прямоугольника:

$$m_S = \sqrt{\left((a \cdot m_b)^2 + (b \cdot m_a)^2\right)} = 19,04 \text{ м}^2.$$

3. Определить относительную погрешность:

$$3. \frac{m_S}{S} = \frac{1}{989,13}$$

#### 4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется измерением?
2. Какие измерения называются равноточными, а какие — неравноточными?
3. Назовите виды геодезических измерений.
4. Что такое грубые, систематические и случайные погрешности измерений?
5. Каковы основные свойства случайных погрешностей измерений?
6. Что называется предельной, абсолютной и относительной погрешностью?
7. Что такое средняя квадратическая погрешность и как она определяется?
8. Как определяется средняя квадратическая погрешность функции измеренных величин?
9. Что такое вес измерения?
10. Почему для неравноточных измерений в качестве характеристики точности принимают среднюю квадратическую погрешность единицы веса и в чем ее сущность?

#### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Федотов, Г. А. Инженерная геодезия / Г. А. Федотов. — М. : Высшая школа, 2004.
2. Михелев, Д. Ш. Инженерная геодезия / Д. Ш. Михелев. — М. : Академия, 2004.
3. Маслов, А. В. Геодезия : учебник / А. В. Маслов, Е. Ф. Гладилина, В. А. Костык. — М. : Недра, 1986. — 416 с.
4. Электронный ресурс источник <http://studopedia.org/11-64952.html>

Публикуется в авторской редакции

Минимальные систем. требования:  
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 10.12.2018

Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 0,43. Объем данных 0,26 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Волгоградский государственный технический университет»  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)