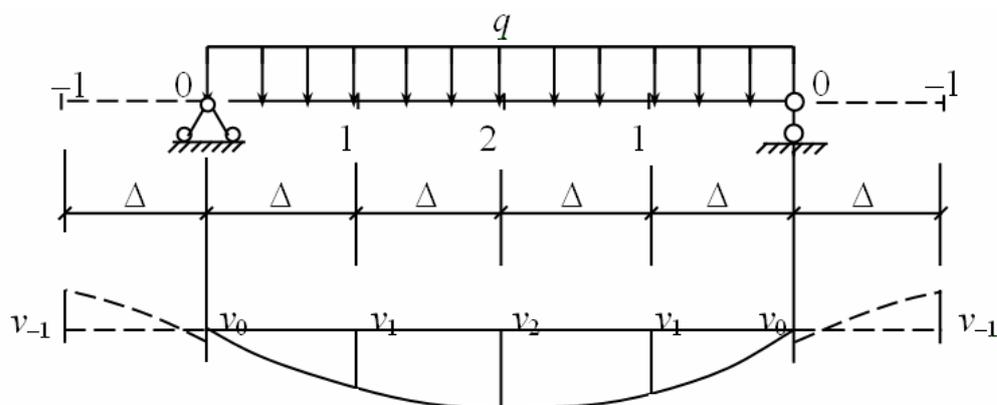


А. В. Старов, Г. В. Воронкова

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ. КУРС ЛЕКЦИЙ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



Волгоград. ВолгГАСУ. 2015



© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2015



УДК 539.3(075.8)  
ББК 30.121.я73  
С773

**Р е ц е н з е н т ы:**

*В. А. Пшеничкина*, доктор технических наук, профессор,  
директор Института строительства и жилищно-коммунального хозяйства  
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;  
*С. Л. Туманов*, кандидат технических наук, доцент,  
профессор кафедры гидротехнических и земляных сооружений  
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

**Старов, А. В.**

С773 Теория упругости. Курс лекций с примерами решения задач [Электронный ресурс] / А. В. Старов, Г. В. Воронкова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (1,0 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2015. — Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-785-1

Изложены основы курса теории упругости, приведены примеры решения задач и представлены варианты расчетно-графических работ. Рассмотрены основные уравнения пространственной теории упругости и способы их решения, плоская задача теории упругости, а также задача изгиба тонких жестких пластин.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений» (специализация «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений»), направлению 270800 «Строительство» профилей «Промышленное и гражданское строительство» и «Автомобильные дороги и аэродромы» всех форм обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader и системой ссылок.

УДК 539.3(075.8)  
ББК 30.121.я73

ISBN 978-5-98276-785-1



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2015

## Оглавление

Введение .....	4
Лекция 1. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ .....	6
1.1. Напряжения .....	6
1.2. Обозначения для сил и напряжений.....	7
1.3. О понятии тензора. Индексные обозначения .....	9
1.4. Главные напряжения. Инварианты напряжений .....	10
1.5. Определение максимального касательного напряжения .....	12
1.6. Шаровой тензор и девиатор напряжений .....	13
1.7. Перемещения и деформации. Тензор деформаций.....	15
1.8. Главные деформации. Шаровой тензор и девиатор деформаций .....	16
Лекция 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	18
2.1. Дифференциальные уравнения равновесия.....	18
2.2. Геометрические уравнения. Условия совместности.....	19
2.3. Физические уравнения.....	21
2.4. О решении задач теории упругости в перемещениях и напряжениях.....	24
2.5. Энергия деформации упругого тела.....	27
2.6. Вариационный принцип Лагранжа .....	30
2.7. Метод Ритца — Тимошенко .....	31
Лекция 3. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	34
3.1. Плоское напряженное состояние. Плоская деформация.....	34
3.2. Напряжения на произвольной площадке. Главные напряжения и деформации ...	35
3.3. Основные уравнения плоской задачи .....	37
3.4. Изгиб консоли, нагруженной на конце .....	38
3.5. Метод конечных разностей.....	44
3.6. Применение метода конечных разностей к расчету балок-стенок .....	48
3.7. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах .....	52
3.8. Действие сосредоточенной силы на край упругой полуплоскости .....	55
Список рекомендуемой литературы .....	58

## **ВВЕДЕНИЕ**

Почти все конструкционные материалы обладают в какой-то мере свойством упругости. Тело является идеально упругим, если после снятия вызвавших деформацию внешних сил оно полностью восстанавливает первоначальную форму.

Основной задачей теории упругости является определение напряжений и перемещений в различных твердых телах. Эта же задача рассматривается и в курсе сопротивления материалов, где главным объектом изучения является стержень.

В курсе теории упругости рассматривают тела более сложной формы: диски, пластины, оболочки, массивы.

Для указанных тел чаще всего нет возможности получить простые формулы для определения напряжений, деформаций и перемещений. В то же время существуют общие пути решения задач, основанные на уравнениях, описывающих поведение упругой среды под нагрузкой. Эти уравнения (обычно дифференциальные) и методы их решения изучаются в курсе упругости, пластичности и ползучести.

Пластичность — свойство твердых тел при действии внешних сил изменять, не разрушаясь, свою форму и размеры и сохранять остаточные (пластические) деформации после устранения этих сил.

Ползучесть — способность материалов к медленному нарастанию во времени пластических деформаций при действии постоянной нагрузки.

Этими свойствами обладают как традиционные строительные материалы (дерево, бетон, металл при наличии высоких температур или напряжений), так и новые материалы, например полимеры.

В наше время с усложнением форм строительных конструкций, развитием авиа- и ракетостроения роль методов теории упругости возросла. Сформулируем постановку задач теории упругости, а также основные допущения, на которых она базируется.

Рассматриваются тела заданной формы, материал которых имеет известные физико-механические свойства. На тело действуют заданные нагрузки, наложены связи. Требуется найти напряжения, деформации и перемещения.

Будем считать справедливыми следующие допущения.

Материал тела представляет собой *сплошную однородную* среду. Такой важный материал, как сталь, если его рассмотреть под микроскопом, оказывается состоящим из кристаллов разных размеров и разной ориентации. Однако расположены они случайным образом. Пока геометрические размеры рассматриваемого тела достаточно велики по сравнению с размерами одного кристалла, предположение о сплошности и однородности выполняется с высокой степенью точности.

Упругие характеристики кристаллов в разных направлениях могут различаться. Если кристаллы металла ориентированы случайным образом, то этот материал может рассматриваться как *изотропный*.

Если же благодаря, например, прокатке преобладает какая-то определенная ориентация кристаллов, упругие характеристики металла в разных направлениях становятся различными и следует учитывать его *анизотропию*. Примером анизотропного материала является древесина, механические свойства которой вдоль волокон и поперек волокон различны.

*Деформации* в точках тела *считаются малыми*. Под действием нагрузок размеры тела существенно не меняются.

В курсе теории упругости предполагается, что материал *идеально упруг* и линейно деформируем (подчиняется закону Гука). Решение задач с учетом пластических и вязких свойств материала сложнее и обычно опирается на решение аналогичных задач теории упругости.

## Лекция 1. АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

### 1.1. Напряжения

Рассмотрим изображенное на рис. 1.1 тело, находящееся в равновесии под действием внешних сил  $P_1, P_2, \dots, P_7$ . Говорят, что такое тело находится в *напряженном состоянии*. Для того чтобы изучить внутренние силы, возникающие в этом теле, разделим его плоскостью  $mn$  на две части  $A$  и  $B$  и рассмотрим одну из этих частей, например часть  $A$ . Эта часть находится в равновесии под действием внешних сил  $P_5, P_6, P_7$  и внутренних сил, равномерно распределенных по плоскости  $mn$ , и представляющих собой действие материала части  $B$  на материал части  $A$ .

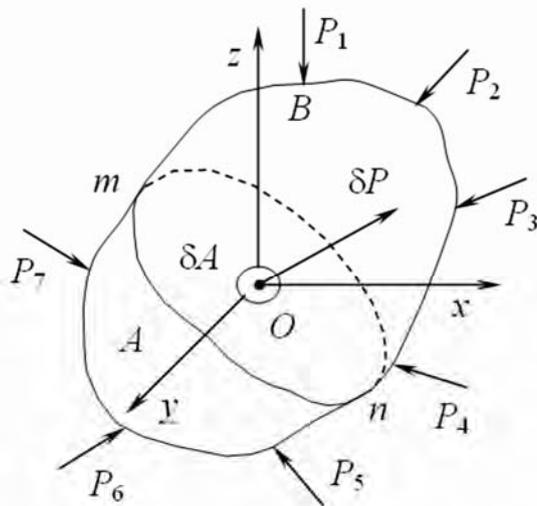


Рис. 1.1

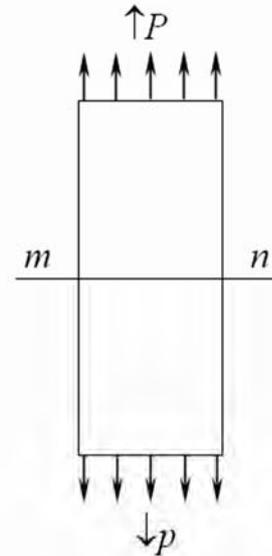


Рис. 1.2

Величина этих последних сил определяется их *интенсивностью*, т. е. величиной силы на единицу площади плоскости, на которой они действуют. Эта интенсивность, обычно измеряемая в  $\text{Н/м}^2$  (или в Па), называется *напряжением*.

В простейшем случае, когда призматический стержень подвержен растяжению силами, равномерно распределенными по его концевым сечениям (рис. 1.2), напряжение в сечении  $mn$  можно найти, разделив полное значение

силы  $P$  на площадь поперечного сечения  $A$ . В общем случае, представленном на [рис. 1.1](#), напряжения по сечению  $mn$  распределены неравномерно. Для того чтобы определить значение напряжения в некоторой точке  $O$  этой плоскости, предположим, что силы, действующие на элементарной площадке  $\delta A$  в окрестности этой точки, сводятся к равнодействующей  $\delta P$ . Назовем напряжением  $p$  в точке  $O$  сечения  $mn$  предел отношения

$$p = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta A}$$

при условии, что  $A$  стремится к нулю. Напряжение  $p$  есть вектор. Он может быть разложен на две составляющие: нормальное напряжение, перпендикулярное к площадке  $\delta A$ , и касательное напряжение, действующее в плоскости площадки.

## 1.2. Обозначения для сил и напряжений

Будем различать два вида внешних сил. Силы, распределенные по поверхности тела, такие как гидростатическое давление или давление одного тела на другое, называются *поверхностными*. Эти силы, отнесенные к единице поверхности, обычно раскладываются на три составляющие, параллельные осям координат  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ . Силы, распределенные по объему тела, такие как гравитационные силы, магнитные силы и силы инерции (последние вводятся в рассмотрение при движении тел), называются *объемными*. Эти силы, отнесенные к единице объема, также раскладываются на три ортогональные составляющие, обозначаемые как  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Нормальную составляющую вектора напряжений будем обозначать буквой  $\sigma$ , касательную — буквой  $\tau$ . Для того чтобы зафиксировать направление плоскости, на которой действуют напряжения, буквы  $\sigma$  и  $\tau$  будут снабжаться индексами. Эти индексы, а также положительные направления напряжений показаны на [рис. 1.3](#) и [1.4](#).

На [рис. 1.3](#) изображен бесконечно малый элемент, вырезанный из тела плоскостями, перпендикулярными осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Нормальное напряжение считается положительным, когда оно вызывает растяжение, и отрицательным, когда оно вызывает сжатие. Индекс  $x$  напряжения  $\sigma_x$  показывает, что напряжение действует на плоскость, нормальную к оси  $x$ . Для обозначения касательных напряжений используются два индекса: первый обозначает направление нормали к плоскости, второй — направление напряжения. За положительное направление составляющих касательного напряжения взято положительное направление осей координат, если растягивающее напряжение, действующее на ту же грань, совпадает с положительным направлением соответствующей оси.

Как видно из [рис. 1.3](#), на гранях малого элемента с длиной ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  действуют три нормальных и шесть касательных напряжений, совокупность которых образует тензор напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Если пренебречь объемными силами (а они малы по сравнению с поверхностными) и приращениями напряжений, то составляя уравнение равновесия для моментов относительно оси  $y$ , получим

$$\tau_{xz} dx dy dz - \tau_{zx} dx dy dz = 0.$$

Аналогичные уравнения можно записать и относительно осей  $x$  и  $z$ . Из этих трех уравнений получим:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.2)$$

Следовательно, тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали, и для определения напряженного состояния в произвольной точке тела достаточно иметь шесть составляющих напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ .

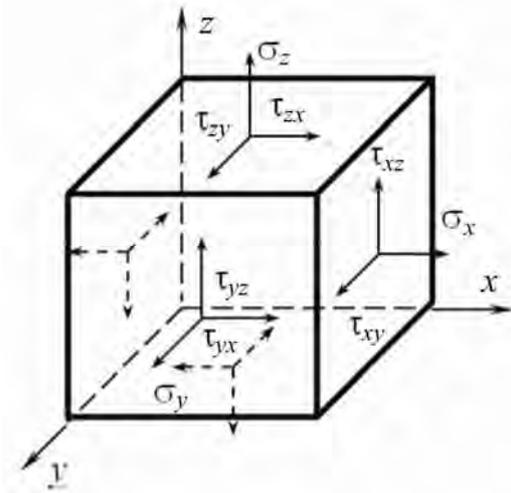


Рис. 1.3

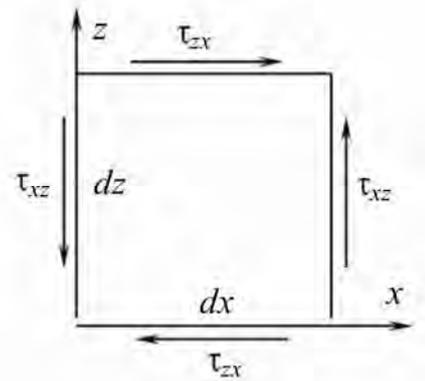


Рис. 1.4

Если эти шесть составляющих известны, то напряжения на произвольной наклонной плоскости, проходящей через ту же самую точку, можно найти из уравнений равновесия следующим образом. Пусть  $O$  — некоторая точка тела, находящегося в напряженном состоянии ([рис. 1.5](#)).

Для того чтобы найти напряжение на любой наклонной плоскости  $BCD$ , проходящей вблизи точки  $O$ , вырежем очень малый тетраэдр  $BCDO$ . Записывая уравнения равновесия, будем пренебрегать объемными силами. Если через  $A$  обозначить площадь грани  $BCD$ , то площади трех остальных граней тетраэдра, перпендикулярных осям  $x, y$  и  $z$ :

$$A_x = lA, A_y = mA, A_z = nA,$$

где через  $l, m$  и  $n$  обозначены направляющие косинусы нормали  $N$ :

$$\cos(N, x) = l, \cos(N, y) = m, \cos(N, z) = n. \quad (1.3)$$

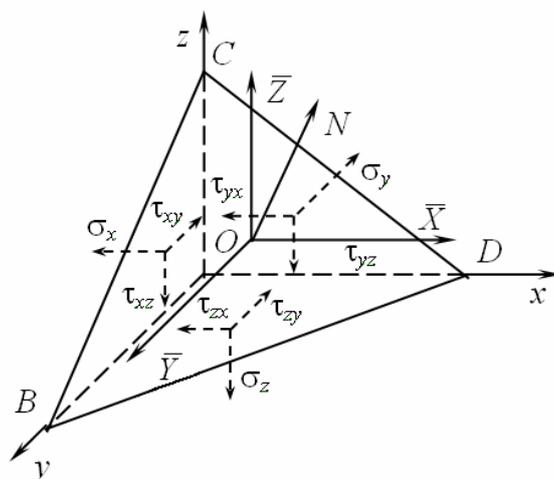


Рис. 1.5

Пусть  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  — три составляющие напряжения, действующего на наклонной грани  $BCD$ . Тогда составляющая в направлении оси  $x$  равна  $A\bar{X}$ . Уравнение проекций сил на ось  $x$  имеет вид

$$A\bar{X} - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{zx} = 0.$$

Аналогичные уравнения можно записать и для осей  $y$  и  $z$ . После сокращения на общий множитель  $A$  приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_{xl} + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xyl} + \sigma_y m + \tau_{zy}n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xzl} + \tau_{yz}m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

### 1.3. О понятии тензора. Индексные обозначения

В механике много фундаментальных понятий связано с векторными величинами: сила, скорость, ускорение и т. д. Вектор в трехмерной системе координат можно представить в виде столбца

$$\{a\}^T = \{a_x, a_y, a_z\},$$

где  $a_x, a_y, a_z$  — три скалярные величины — проекции вектора на оси координат.

Для векторных величин определены аналитические операции: сложение, вычитание, умножение. Однако напряженное состояние в точке деформируемого тела нельзя описать с помощью векторной величины. Поэтому введено понятие тензора. Тензор характеризуется уже девятью скалярными величинами, которые записываются в виде матрицы (1.1).

Введенные здесь обозначения для компонент усилий, напряжений и далее для перемещений и деформаций, стали общепринятыми во многих странах, в особенности для инженерных расчетов. Нами они будут использоваться повсюду. Однако для сжатого представления более удобна и часто применяется система индексных обозначений. В этой системе для обозначения координат вместо  $x, y, z$  используются  $x_1, x_2, x_3$  или просто  $x_i$ .

Тензор напряжений в компактной записи будет таким:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \sigma_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Соотношения (1.2), которые сводят девять компонент напряжений к шести, можно выразить в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j.$$

Действия над тензорами во многих случаях совпадают с действиями над матрицами, однако не всегда. Кроме того, использование индексных обозначений требует дополнительных навыков и обычно не используется во многих разделах механики сплошной среды.

#### 1.4. Главные напряжения. Инварианты напряжений

Определим теперь нормальную составляющую напряжения  $\sigma_n$ , действующего на площадке  $BCD$ .

$$\sigma_n = \bar{X}l + \bar{Y}m + \bar{Z}n. \quad (1.5)$$

Подставляя сюда выражение (1.4), получим

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (1.6)$$

Изменение  $\sigma_n$  с изменением направления нормали можно геометрически представить таким образом. Отложим из точки  $O$  (см. рис. 1.5) в направлении нормали  $N$  вектор  $r$ :

$$r = k / \sqrt{|\sigma_n|}, \quad (1.7)$$

где  $k$  — произвольно выбранная постоянная. Координаты конца этого вектора будут равны

$$x = lr, \quad y = mr, \quad z = nr,$$

откуда  $l = \frac{x}{r}$ ,  $m = \frac{y}{r}$ ,  $n = \frac{z}{r}$ .

Подставляя эти значения направляющих косинусов в (1.6) и учитывая соотношение (1.7), получим

$$k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx. \quad (1.8)$$

Если плоскость  $BCD$  поворачивать вокруг точки  $O$ , то конец вектора  $r$  будет все время лежать на поверхности второго порядка, описываемой уравнением (1.8). Эта поверхность полностью определяется напряженным состоянием в точке  $O$  и не зависит от выбора осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Из геометрии известно, что для поверхности второго порядка всегда можно выбрать такие направления осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , что коэффициенты при произведениях координат

обратятся в нуль. Это означает, что всегда можно найти такие три взаимно перпендикулярные плоскости, для которых  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , обращаются в нуль.

Эти плоскости называются главными плоскостями, а напряжения, действующие на них — главными напряжениями. Соответствующие оси координат называются главными осями.

Допустим, что площадка  $B CD$  является главной. Тогда нормальное напряжение  $\sigma$  на этой площадке — главное. Проекции этого напряжения на координатные оси  $x, y, z$  определяются равенствами

$$\bar{X} = \sigma l, \quad \bar{Y} = \sigma m, \quad \bar{Z} = \sigma n.$$

С другой стороны, согласно уравнений (1.4),

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \sigma m &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \sigma n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Представим систему уравнений (1.9) в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Как видим, система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $l, m, n$  является однородной. Ненулевое решение системы уравнений (1.10) можно получить, приравняв нулю определитель, составленный из ее коэффициентов:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \tag{1.11}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0, \tag{1.12}$$

где  $J_1, J_2, J_3$  — инварианты напряжений, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Три корня кубического уравнения (1.12) дают значения трех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Подставляя каждое из этих напряжений в уравнения (1.10), используя два из них и зависимость (1.11), можно найти три системы направляющих косинусов для трех главных площадок.

Считая, что напряженное состояние задано, т. е. заданы главные напряжения и главные оси, мы можем описать его с помощью компонент напряжений в любой системе координат  $x, y, z$ . Вне зависимости от выбора ориентации осей уравнение (1.12) должно дать для  $\sigma$  те же корни. Следовательно, и коэффициенты этого уравнения должны быть всегда одними и теми же. Отсюда можно сделать вывод, что коэффициенты уравнения (1.12) инвариантны по отношению к повороту осей координат. Особенно просто первый  $J_1$ , второй  $J_2$  и третий  $J_3$  инварианты тензора напряжений определяются через главные напряжения:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad J_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1, \quad J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (1.14)$$

Сам тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Можно заключить, что напряженное состояние в точке вполне определяется главными напряжениями и ориентацией главных площадок.

### 1.5. Определение максимального касательного напряжения

Пусть через  $x, y, z$  обозначены главные оси, в силу чего  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $l, m, n$  — направляющие косинусы некоторой заданной площадки.

Тогда квадрат полного напряжения на этой площадке равен

$$p^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2.$$

Нормальная составляющая полного напряжения равна

$$\sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.16)$$

Квадрат касательной составляющей определяется зависимостью

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (1.17)$$

Для определения положения площадок, на которых действуют наибольшие касательные напряжения, необходимо исследовать функцию  $\tau$  на экстремум.

Исключив при помощи (1.11) один из направляющих косинусов, например  $n$ , и приравняв производные по  $l$  и  $m$  нулю, получим следующие

уравнения для определения направляющих косинусов площадок, на которых  $\tau$  достигает экстремума.

$$\begin{aligned} l \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 \right] &= 0, \\ m \left[ (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 - (\sigma_2 - \sigma_3) / 2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Приняв, например  $l = 0$ , найдем из второго уравнения, что  $m = \pm 1/\sqrt{2}$ ; тогда из (1.11)  $n = \pm 1/\sqrt{2}$ . Отсюда вытекает, что экстремальные касательные напряжения возникают на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

Подставляя направляющие косинусы в формулу (1.17), получим следующие значения главных касательных напряжений:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что максимальные касательные напряжения действуют на площадке, делящей пополам угол с площадками  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и что их величины равны половине разности между этими напряжениями.

Если принять, что оси  $x, y, z$  на [рис. 1.5](#) являются главными и если  $OB = OC = OD$ , то нормаль к наклонной грани имеет направляющие косинусы

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}.$$

Согласно (1.16) нормальное напряжение на этой грани, так называемое среднее напряжение, равно

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad (1.20)$$

Касательное напряжение на этой же грани, согласно (1.17):

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}. \quad (1.21)$$

Это касательное напряжение называется октаэдрическим, поскольку грань, на которой оно действует, является гранью правильного октаэдра, вершины которого располагаются на осях. Это напряжение часто используется в теории пластичности. Октаэдрические касательные напряжения мало отличаются от максимальных касательных напряжений.

## 1.6. Шаровой тензор и девиатор напряжений

Шаровой тензор напряжений соответствует равномерному всестороннему растяжению или сжатию и выражается через средние напряжения (1.20):

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Девиатор напряжений характеризует отклонение данного напряженного состояния от состояния всестороннего растяжения или сжатия:

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Переход от основного напряженного состояния к девиаторному показан на рис. 1.6.

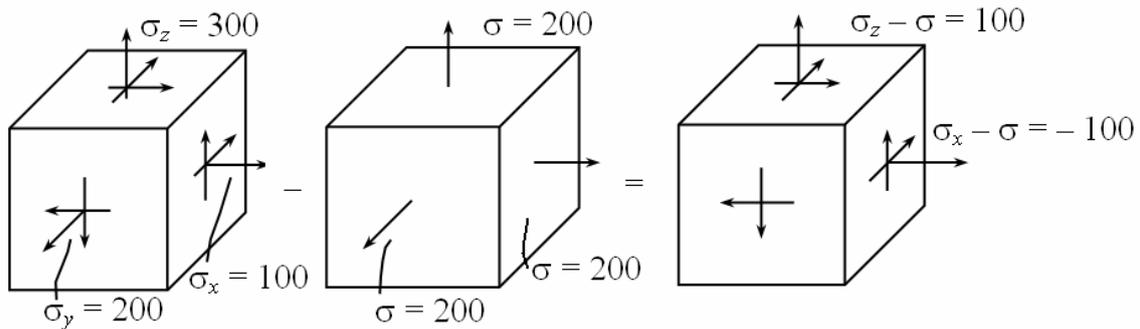


Рис. 1.6

Нормальные напряжения даны в Н/м<sup>2</sup>. Касательные напряжения при переходе не меняются.

Очевидно, что  $T_{\sigma} = S_{\sigma} + D_{\sigma}$ .

Первый инвариант шарового тензора напряжений  $S_{\sigma}$  совпадает с первым инвариантом тензора напряжений  $T_{\sigma}$ :

$$J_1^S = 3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (1.24)$$

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю. Действительно,

$$(\sigma_x - \sigma) + (\sigma_y - \sigma) + (\sigma_z - \sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0.$$

Для определения второго инварианта девиатора напряжений  $J_2^D$  воспользуемся выражением (1.13) для  $J_2$ , подставив в него вместо напряжений разности координатных и средних напряжений. После несложных преобразований получим

$$J_2^D = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (1.25)$$

или в главных напряжениях:

$$J_2^D = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]. \quad (1.26)$$

Приведенные здесь зависимости понадобятся в дальнейшем при формировании моделей упругости и пластичности.

## 1.7. Перемещения и деформации. Тензор деформаций

При рассмотрении деформаций в упругом теле предполагается, что существуют связи, препятствующие его перемещению как жесткого тела. Таким образом, какое-либо перемещение точек тела может происходить лишь за счет его деформации. Как уже отмечалось, будем рассматривать только малые деформации, какие имеют место в инженерных конструкциях. Малые перемещения точек при деформировании тела разложим на составляющие  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , параллельные соответствующим осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Можно предположить, что эти малые величины непрерывно меняются по всему объему тела.

Рассмотрим определение линейной деформации тела в точке  $A$  (рис. 1.7).

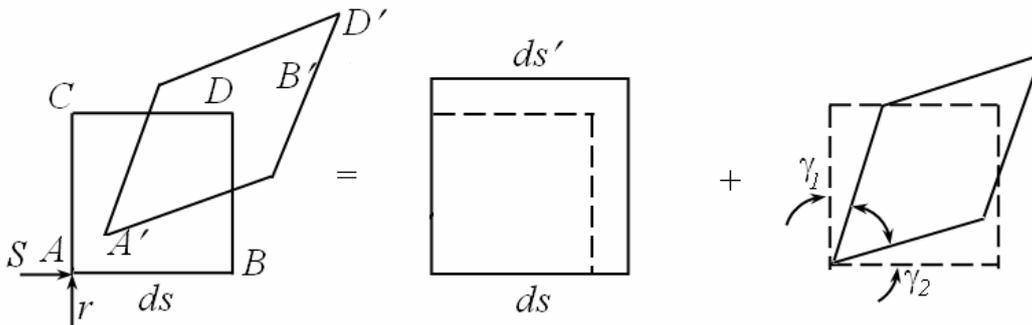


Рис. 1.7

Пусть линейная деформация определяется в направлении вектора  $s$ . Будем называть линейной деформацией в точке  $A$  в направлении  $s$  следующую величину:

$$\varepsilon_s = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{ds' - ds}{ds},$$

где  $ds'$  — длина отрезка  $ds$  после деформации. Как видно из рис. 1.7, возможно не только изменение линейных размеров элемента, но и перекося грани. Переход из недеформированного состояния  $ABC$  в деформированное  $A'B'C'$  осуществляется за счет изменения длины граней элемента и за счет изменения углов.

Изменение угла между двумя взаимно перпендикулярными до деформации направлениями называется угловой деформацией или деформацией сдвига. Деформация сдвига  $\gamma_{sr}$  определяется по формуле:

$$\gamma_{sr} = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — углы поворота граней элемента в плоскости  $sr$  относительно первоначальных направлений. Отметим, что на рис. 1.7 показаны положительные направления деформаций.

Деформированное состояние в произвольной точке тела полностью характеризуется тензором деформаций  $T_\varepsilon$ , имеющим структуру, аналогичную тензору напряжений:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Осевые деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  характеризуют изменение объема в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Деформации сдвига  $\gamma$  характеризуют изменение формы. Индексы при угловой деформации указывают плоскость сдвига. Как и в случае касательных напряжений, деформации сдвига обладают взаимностью, т. е.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (1.28)$$

Величина, например  $\varepsilon_{xy} = 1/2\gamma_{xy}$ , называется *тензорной компонентой сдвига*.

## 1.8. Главные деформации.

### Шаровой тензор и девиатор деформаций

По аналогии с напряжениями можно показать, что в каждой точке тела существуют три ортогональных направления, по которым оно испытывает только осевые деформации, а деформации сдвига равны нулю. Эти деформации называются главными:  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ . Они могут быть найдены из уравнения

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 - J_2\varepsilon - J_3 = 0, \quad (1.29)$$

в котором инварианты тензора деформаций определяются выражениями:

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2 = -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \frac{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2}{4},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.30)$$

Напомним, что инвариантами называются величины, не зависящие от выбора системы координат.

Тензор деформаций  $T_\varepsilon$  можно представить в виде суммы шарового тензора деформаций  $S_\varepsilon$ :

$$S_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$  — средняя деформация, и девиатора деформаций:

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Шаровой тензор деформаций характеризует изменение объема  $e = 3\varepsilon$ , а девиатор деформаций — изменение формы. Очевидно, что первый инвариант девиатора деформаций равен нулю, а его второй инвариант  $J_2^D$  равен

$$I_2^D = \frac{1}{6} \left( (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right). \quad (1.33)$$

## Лекция 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 2.1. Дифференциальные уравнения равновесия

Выше обсуждались напряжения в точке, принадлежащей упругому телу. Рассмотрим теперь изменение напряжений при переходе к соседней точке. Для этого исследуем условия равновесия малого прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.1).

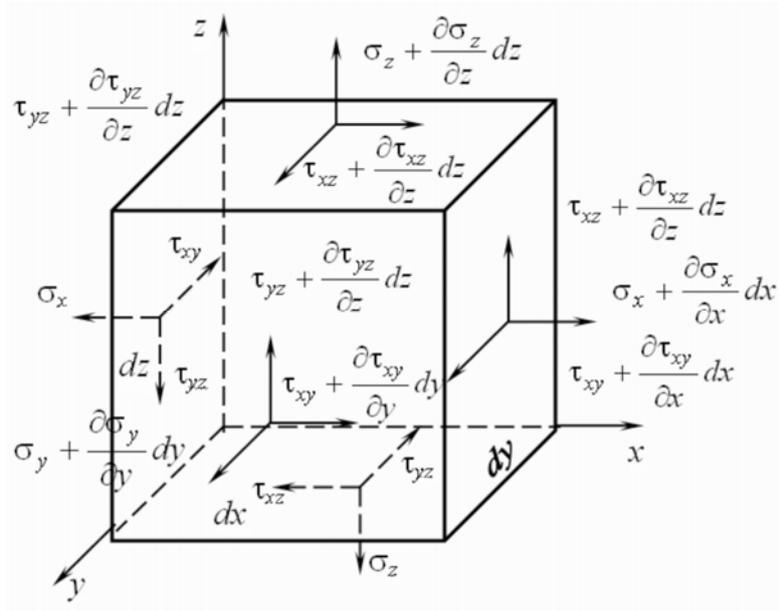


Рис. 2.1

В обозначениях на рис. 2.1 учтена взаимность касательных напряжений (1.2). Проследивая малые изменения составляющих напряжений, показанные на рис. 2.1, а также суммируя все силы, действующие на элемент в направлении оси  $x$ , получим следующее уравнение равновесия:

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz = 0.$$

Аналогично можно записать уравнения равновесия в направлении осей  $y$  и  $z$ . После упрощения три уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $X, Y, Z$  — проекции объемных сил на оси  $x, y, z$ .

Три уравнения моментов относительно осей  $x, y, z$  лишь подтверждают взаимность касательных напряжений. Уравнения (2.1) должны удовлетворяться по всему объему тела. При достижении поверхности они должны находиться в равновесии с внешними силами, действующими на поверхности тела. Условия на поверхности получим из уравнений (1.4), выбрав тетраэдр (см. рис. 1.5) так, чтобы его грань  $BCD$  совпала с поверхностью тела. Тогда  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  — поверхностные силы,  $l, m, n$  — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в данной точке.

Если задача состоит в определении напряженного состояния тела под действием внешних сил, то необходимо решить уравнения (2.1), и решение это должно удовлетворять граничным условиям (1.4). Трех уравнений, содержащих шесть напряжений  $\sigma_x \dots \tau_{yz}$ , недостаточно для определения этих компонент. Задача является статически неопределимой. Чтобы получить ее решение, необходимо рассмотреть упругие деформации тела.

## 2.2. Геометрические уравнения. Условия совместности

Ввиду принятия предпосылки о малости деформаций, для определения линейной деформации в заданном направлении достаточно рассмотреть проекции перемещения точек на заданное направление. Иными словами, для определения деформаций  $\epsilon_x$  вдоль оси  $x$  достаточно принять во внимание только составляющие перемещения  $u$  (рис. 2.2).

Если тело подвергается деформированию, а  $u, v$  и  $w$  являются составляющими перемещения в точке  $O$ , то деформация  $\epsilon_x$  в этой точке определяется следующим образом:

$$\epsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичным образом определяются удлинения в направлении осей  $y$  и  $z$ .

Рассмотрим теперь изменение угла между отрезками  $OA$  и  $OB$ , которые до деформирования тела были взаимно перпендикулярными. Как видно из

рис. 2.2, отрезок  $OA'$  составляет со своим первоначальным положением  $OA$  угол  $\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Подобным образом угол  $\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Таким образом, деформация сдвига  $\gamma_{xy}$  между плоскостями  $xz$  и  $yz$  равна

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

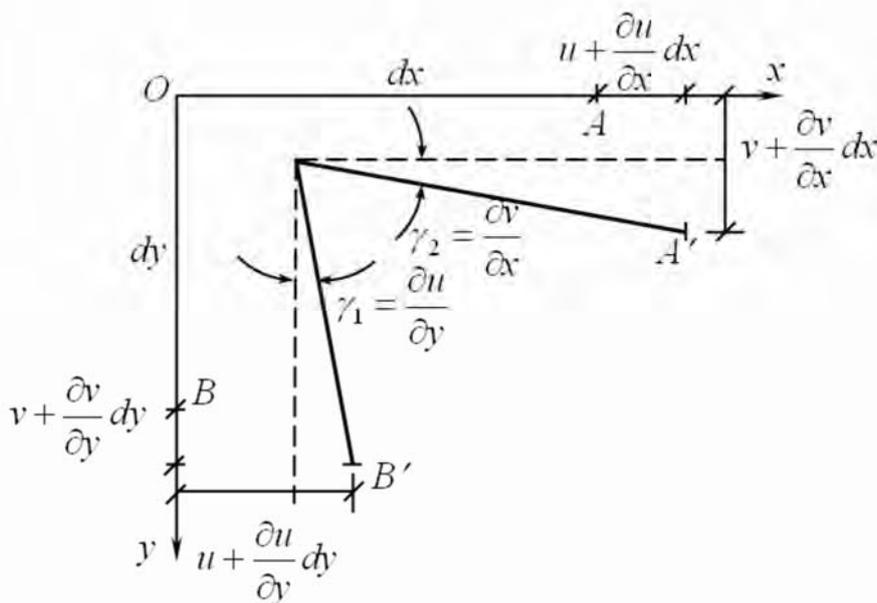


Рис. 2.2

Аналогично можно найти деформации сдвига между плоскостями  $xu$  и  $xz$  —  $\gamma_{yz}$ , а также между плоскостями  $yx$  и  $yz$  —  $\gamma_{xz}$ . Таким образом,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \tag{2.2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Геометрические уравнения, связывающие между собой деформации и перемещения, носят название уравнений Коши.

Шесть компонент деформаций в каждой точке тела полностью определяются тремя компонентами перемещений. Следовательно, компоненты деформаций не могут быть произвольными, а должны подчиняться условиям, вытекающим из уравнений (2.2).

Из (2.2) можно получить, что

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.3)$$

Два других соотношения такого рода можно получить циклической перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Подобным образом, учитывая выражения для производных

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z},$$

найдем

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \quad (2.4)$$

Еще два соотношения вида (2.4) можно получить перестановкой индексов. Таким образом, мы пришли к следующим дифференциальным соотношениям:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Соотношения (2.5) называются условиями совместности деформаций Сен-Венана.

### 2.3. Физические уравнения

Допустим, что образец в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, подвергается действию нормальных напряжений  $\sigma_x$ , равномерно распределенных по двум противополо-

ложным граням. Эксперименты показывают, что для изотропного материала величина деформации  $\varepsilon_x$  пропорциональна приложенному напряжению, т. е.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E},$$

где  $E$  — модуль упругости. Растяжение в направлении оси  $x$  сопровождается сужением в поперечных направлениях, равных

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}. \quad (2.6)$$

Постоянный множитель  $\nu$  называется коэффициентом Пуассона. Для стали он равен 0,3. Продольное сжатие сопровождается расширением в поперечном направлении. Постоянные  $E$  и  $\nu$  сохраняют свои значения.

Если образец подвергается действию нормальных и касательных напряжений, то связь между ними и деформациями в ортогональной системе координат следующая:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), & \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

где модуль упругости при сдвиге

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.8)$$

Эти зависимости выражают закон Гука для случая изотропного материала. Связь между деформациями и напряжениями является линейной и полностью определяется двумя постоянными  $E$  и  $\nu$ , которые называются упругими постоянными.

В случае необходимости учета теплового расширения в правую часть первых трех уравнений (2.7) необходимо добавить температурную деформацию  $\varepsilon_T$ :

$$\varepsilon_T = \alpha T,$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения,  $T$  — изменение температуры при нагреве.

В сокращенной форме уравнения (2.7) можно представить так:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}, \quad (2.9)$$

где  $\{\varepsilon\}$  — вектор деформаций,  $\{\sigma\}$  — вектор напряжений,

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}, \quad (2.10)$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}. \quad (2.11)$$

[C] — матрица упругой податливости

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Складывая три первых равенства закона Гука (2.7), находим

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{E^*}, \quad E^* = \frac{E}{1-2\nu}, \quad (2.13)$$

где  $\sigma$  — среднее напряжение,  $\varepsilon$  — средняя деформация. Вычитая из уравнения для  $\varepsilon_x$  величину средней деформации  $\varepsilon$ , получим:

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{2(1+\nu)}{E} \left( \sigma_x + \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma).$$

В результате приходим к девiatorной форме закона Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_x - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma), & \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}, \\ \varepsilon_y - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_y - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma), & \frac{1}{2} \gamma_{xz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}, \\ \varepsilon_z - \varepsilon &= \frac{1+\nu}{E} (\sigma_z - \sigma) = \frac{1}{2G} (\sigma_z - \sigma), & \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Во многих задачах оказывается необходимым выразить компоненты напряжений в функции от компонент деформаций. Эти зависимости легко получить из соотношений (2.13), (2.14):

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \sigma - \varepsilon \frac{E}{1+\nu} = 2G\varepsilon_x + \varepsilon \left( \frac{E}{1-2\nu} - \frac{E}{1+\nu} \right).$$

Подобные зависимости можно найти для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  — модуль сдвига,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  — постоянная Ламе.

В сокращенной форме уравнения (2.15) принимают вид:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.16)$$

где матрица упругости  $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2G + 3\lambda & 3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 2G + 3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 3\lambda & 2G + 3\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Соотношения упругости для изотропного материала содержат два физических параметра  $E$  и  $\nu$ , либо  $G$  и  $\lambda$ . В случае ортотропного материала соответствующая матрица  $[C]$  содержит 12 параметров: модули упругости в направлении координатных осей  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ; модули сдвига  $G_{xy}$ ,  $G_{yz}$ ,  $G_{xz}$ ; коэффициенты Пуассона  $\nu_{xy}$ , ...,  $\nu_{yz}$ . В общем случае анизотропии матрица  $[C]$  содержит 21 независимый параметр.

#### 2.4. О решении задач теории упругости в перемещениях и напряжениях

Искомыми в задачах теории упругости являются три компоненты перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , шесть компонент напряжений (2.11) и шесть компонент деформаций (2.10). Для решения такой задачи получены 15 уравнений (три статические (2.1), шесть геометрических (2.2) и шесть физических (2.7) либо (2.15)), которые справедливы для каждой точки внутри тела и условия на поверхности (1.4).

Приведем основные уравнения теории упругости в индексной (тензорной) форме записи:

статические уравнения

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ji} + x_i = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

при этом  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ;

геометрические уравнения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  — компоненты перемещений рассматриваемой точки по направлению осей координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ;

физические уравнения

$$\sigma_{ij} - \delta\sigma = 2G(\varepsilon_{ij} - \delta\varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$\delta = 1 \text{ при } i = j \text{ и } \delta = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Значительную трудность представляет решение прямой задачи теории упругости: задачи определения напряжений, деформаций и перемещений точек тела по заданным объемным и поверхностным силам и кинематическим воздействиям. В зависимости от того, какие величины принять за основные неизвестные, можно выделить два основных пути решения.

I. *Решение в перемещениях.* Исключим компоненты напряжений из уравнений равновесия (2.1) и условий на поверхности (1.4).

Из уравнений (2.15) с помощью (2.2) имеем

$$\sigma_x = 2G \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda e, \quad \tau_{xy} = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.18)$$

где  $e = 3\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ .

Дифференцируя (2.18), получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial e}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Внося это в первое из уравнений группы (2.1), после простых преобразований получим

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.20)$$

есть дифференциальный оператор Лапласа второго порядка.

Два других уравнения группы (2.1) можно преобразовать подобным образом. Тогда придем к следующей системе уравнений равновесия:

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + Y = 0, \quad (2.21)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + Z = 0.$$

Эти уравнения называются уравнениями Ламе.

Подставляя выражения для напряжений, определяемые по формулам вида (2.18), в граничные условия (1.4), находим

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lambda e l + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right), \\ \bar{Y} &= \lambda e m + G \left( \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right), \\ \bar{Z} &= \lambda e n + G \left( \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Уравнения (2.21) совместно с поверхностными условиями (2.22) полностью определяют функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Затем по формулам (2.2) можно найти деформации, а из (2.15) — напряжения.

II. *Решение в напряжениях.* Подставляя в условия совместности (2.5) вместо составляющих деформаций их выражения через составляющие напряжения, задаваемые формулами (2.7) закона Гука, и используя уравнения равновесия (2.1), можно получить уравнения совместности деформаций, записанные через напряжения. В случае постоянства или отсутствия объемных сил эти уравнения приобретают вид:

$$\begin{aligned}(1 + \nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} &= 0, \quad (1 + \nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} &= 0, \quad (1 + \nu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0, \\ (1 + \nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} &= 0, \quad (1 + \nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0,\end{aligned}\tag{2.23}$$

где  $\theta = 3\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ .

Эти уравнения называются уравнениями Бельтрами.

При интегрировании шести уравнений (2.23), входящие в общее решение этих уравнений произвольные функции определяются из условий на поверхности:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Затем по формулам (2.7) можно найти деформации, а при помощи формул (2.2) — перемещения.

## 2.5. Энергия деформации упругого тела

Важное значение в механике твердого тела имеет понятие об энергии деформации. Полная энергия  $\mathcal{E}$  состоит из потенциальной энергии  $U$  деформации тела (потенциала внутренних сил) и энергии (потенциала)  $\Pi$  внешних сил:

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (2.25)$$

Условно будем считать, что в начальном, недеформированном состоянии  $\mathcal{E} = 0$  (рис. 2.3, *a*).

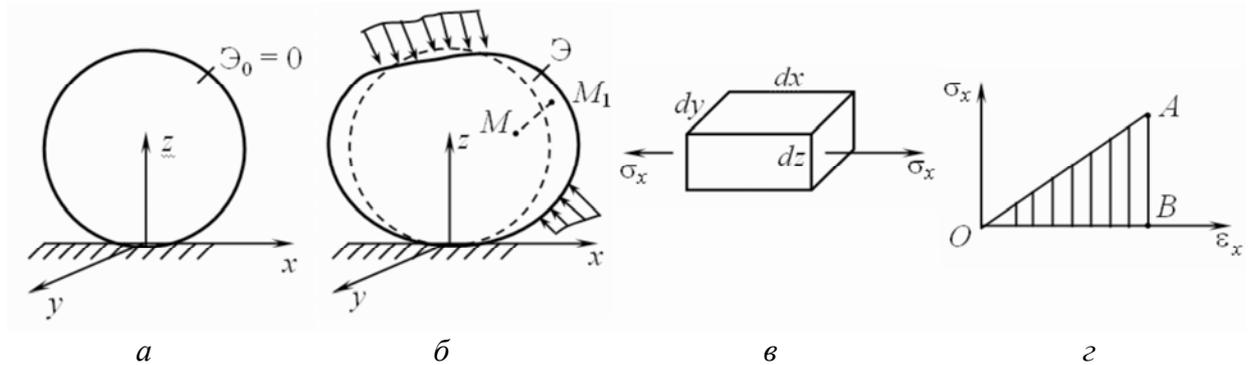


Рис. 2.3

Следовательно, полная энергия  $\mathcal{E}$  представляет собой изменение энергии внешних и внутренних сил при переходе тела из начального (см. рис. 2.3, *a*) в деформированное (рис. 2.3, *b*) состояние.

Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при возвращении тела из конечного в начальное, нулевое состояние.

Составим вначале выражение для потенциала внутренних сил  $U$ . Поскольку деформации в разных точках тела разные, то и энергия деформации в объеме тела также распределена неравномерно. Введем понятие плотности потенциальной энергии деформации

$$dU = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V},$$

где  $\Delta V$  — элементарный объем. В случае упругого материала и линейного напряженного состояния (рис. 2.3, *в*)  $dU$  выражается площадью диаграммы деформирования (рис. 2.3, *г*):  $dU = 0,5\sigma_x\epsilon_x$ . Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \quad (2.26)$$

В сокращенной форме записи, с использованием для деформаций и напряжений обозначений (2.10) и (2.11), представим (2.26) в виде

$$dU = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\epsilon\}. \quad (2.27)$$

Для всего объема тела энергия деформации

$$U = \iiint_V dU dV. \quad (2.28)$$

Подчеркнем, что при определении  $dU$  как работы, во внимание берут именно внутренние упругие силы. Эти силы, стремясь восстановить первоначальную форму тела, дают положительный вклад в общий баланс энергии.

Составим теперь выражение для потенциала внешних сил, считая, что значения этих сил не зависят от перемещения точки приложения силы. При переходе тела в недеформированное состояние поверхностная точка  $M_1$  перейдет в положение  $M$ . Поверхностные силы совершат отрицательную (по знаку) работу на перемещениях  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Следовательно,

$$d\Pi_1 = -(\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS,$$

где  $dS$  — размер элементарной площадки.

Подобным образом для объемных сил

$$d\Pi_2 = -(Xu + Yv + Zw) dV.$$

Интегрируя по поверхности  $S$  и объему  $V$  тела, найдем потенциал внешних сил:

$$\Pi = -\iint_S (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS - \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV. \quad (2.29)$$

В сокращенной форме записи:

$$\Pi = -\iint_S \{p\}^T \{u\} dS - \iiint_V \{g\}^T \{u\} dV, \quad (2.30)$$

где

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix}, \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (2.31)$$

Покажем, что величины  $U$  и  $\Pi$ , а следовательно и  $\mathcal{E}$ , вполне определяются заданием компонент перемещений. Используя закон Гука в форме (2.16), выражение для  $dU$  можно привести к виду:

$$dU = \frac{1}{2}([D]\{\varepsilon\})^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\}. \quad (2.32)$$

Деформации, как известно, с помощью уравнений Коши (2.2) выражаются через перемещения

$$\{\varepsilon\} = [A]^T \{u\}, \quad (2.33)$$

где  $[A]^T$  — транспонированная матрица  $A$ , содержащая операторы дифференцирования:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Теперь выражение для  $dU$  приобретает вид:

$$dU = \frac{1}{2} ([A]^T \{u\})^T [D] [A]^T \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^T [A] [D] [A]^T \{u\}. \quad (2.35)$$

Следовательно, полная энергия тела  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_V \{u\}^T [A] [D] [A]^T \{u\} dV - \iint_S \{p\}^T \{u\} dS - \iiint_V \{g\}^T \{u\} dV \quad (2.36)$$

является функционалом, то есть скалярной величиной, зависящей от выбора трех функций-аргументов  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Если первое слагаемое в выражении (2.36) сохранить в виде

$$\iiint_V [\sigma]^T \{\varepsilon\} dV,$$

то это выражение пригодно и для тел, выполненных из неупругого материала.

Приведем пример составления функционала полной энергии  $\mathcal{E}$  (2.36) для балки, показанной на рис. 2.4.

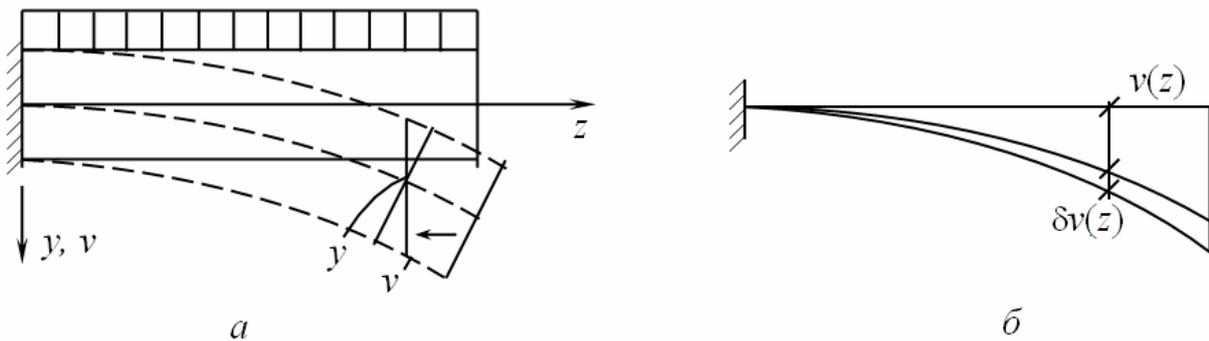


Рис. 2.4

Будем считать справедливой гипотезу прямых нормалей. Тогда  $\sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$ . В этом случае

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z = \frac{1}{2} E \varepsilon_z^2.$$

Перемещение  $w$  точек сечения за счет его поворота  $w = -v' y$ , следовательно,

$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -v''y$ , а  $dU = \frac{1}{2}E(v'')^2 y^2$  (штрихом обозначено дифференцирование по  $z$ ). Согласно (2.28),

$$U = \iiint_V 0,5E(v'')^2 y^2 dx dy dz = \int_0^l 0,5EJ(v'')^2 dz.$$

В этом выражении для  $U$  интеграл  $\iint_A y^2 dx dy = J_x$ , где  $J_x$  — момент инерции сечения балки.

Окончательно функционал полной энергии (2.32) получает следующий вид:

$$\mathfrak{E} = U + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x (v'')^2 dz - \int_0^l qv dz. \quad (2.37)$$

## 2.6. Вариационный принцип Лагранжа

При решении задач теории упругости иногда удобно использовать принцип возможной (виртуальной) работы. Для случая одной частицы этот принцип гласит: если частица находится в состоянии равновесия, то полная работа всех сил, действующих на нее, на любом возможном перемещении равна нулю.

Если  $\delta u$ ,  $\delta v$  и  $\delta w$  — суть компоненты возможного перемещения в направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$  — суммы проекций всех сил на эти направления, то принцип возможной работы дает

$$\delta u \Sigma X = 0, \delta v \Sigma Y = 0, \delta w \Sigma Z = 0. \quad (2.38)$$

Эти уравнения выполняются для любого возможного перемещения, если выполняются условия равновесия:

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0. \quad (2.39)$$

Обратно, если даны уравнения (2.39), то умножая их на произвольные множители  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ , получим (2.38).

Упругое тело, находящееся в состоянии покоя под действием объемных и поверхностных сил, представляет собой систему частиц, на каждую из которых действует уравновешенная система сил. На любом возможном перемещении полная работа всех сил, совершенная над каждой частицей, равна нулю, следовательно, обращается в нуль и полная работа.

В качестве возможного перемещения в случае упругого тела можно принять любое малое перемещение, допускаемое условиями сплошности и наложенными на тело связями.

Если в выражении для  $\mathfrak{E}$  (2.36) вектор перемещений  $\{u\}$  заменить вектором возможных перемещений  $\{\delta u\}$ , а затем знак вариации вынести из под знаков интегралов, то получим следующее уравнение:

$$\delta \mathfrak{E} = 0. \quad (2.40)$$

Уравнение (2.40) показывает, что действительные перемещения  $u$ ,  $v$  и  $w$  при заданных внешних силах и заданных условиях закрепления таковы, что для любого возможного перемещения вариация полной потенциальной энергии равна нулю; тем самым полная потенциальная энергия стационарна. Это и есть принцип вариации перемещений — принцип Лагранжа. Отметим, что вариацией называется искусственное малое приращение малой величины. Операция варьирования аналогична операции дифференцирования.

Вариационное уравнение  $\delta\mathcal{E} = 0$  в интегральной форме выражает условия равновесия деформируемого тела. Оно включает в себя соответствующие дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности тела. Вариационная формулировка задач используется обычно в двух случаях:

1. На основе уравнения (2.40) строят численные методы решения прямой задачи теории упругости — метод Ритца — Тимошенко, метод конечных элементов и другие. В этом случае в явной форме дифференциальные уравнения равновесия не используются;

2. Из уравнения (2.40) получают дифференциальные (или разностные) уравнения равновесия и граничные условия задачи. Такой путь оправдан для тел сложной формы и структуры, например для расчета многослойных оболочек.

Для случая пространственной задачи, когда  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w)$  из (2.40) можно получить уравнения Ламе (2.21), то есть уравнения равновесия, записанные в перемещениях.

## 2.7. Метод Ритца — Тимошенко

Одним из основных применений вариационного принципа Лагранжа является его использование для приближенного расчета конструкций, для которых получить точное решение невозможно. При этом необходимо представить полную энергию  $\mathcal{E}$  в виде функции перемещений. В случае если рассматриваемая система является континуальной, аппроксимировать истинную форму конструкции можно приближенно функцией формы, содержащей один или несколько параметров перемещений. Тогда потенциальную энергию  $\mathcal{E}$  можно вычислить на основе этой функции. Это означает, что энергия  $\mathcal{E}$  будет представлена как функция неизвестных параметров перемещения.

Затем необходимо взять частные производные от потенциальной энергии по каждому из параметров перемещений и приравнять их нулю. Эта процедура приведет к системе алгебраических уравнений, содержащих в качестве неизвестных величин параметры перемещений; решив эти уравнения можно найти параметры. Тем самым деформированная форма конструкции будет установлена; она будет приближенно соответствовать истинной.

На основе найденной функции формы определяют из уравнений Коши деформации, а при помощи зависимостей закона Гука — напряжения. Эти значения будут менее точными, чем сами перемещения, поскольку для их определения используется процедура дифференцирования функций перемещений. Поэтому следует выбирать функцию формы так, чтобы она доста-

точно хорошо соответствовала действительной форме перемещений. В любом случае функция формы должна выбираться так, чтобы она удовлетворяла геометрическим граничным условиям, например, условиям, накладываемым на прогибы и углы поворотов. Чем больше параметров перемещений используется для описания функции формы, тем точнее решение, но и тем сложнее.

Описанный здесь метод Ритца — Тимошенко является исключительно мощным и используется при исследовании пластин и оболочек, для изучения колебаний и устойчивости конструкций. Он также является основой метода конечных элементов. Его можно применять для расчета конструкций, выполненных из неупругого материала.

Покажем применение метода на простом примере изгиба защемленной левым концом балки постоянного сечения под действием равномерной нагрузки (рис. 2.4).

Полная потенциальная энергия деформации согласно (2.37)

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x (v'')^2 dz - \int_0^l qv dz. \quad (2.41)$$

Допустим, что функция формы прогибов  $v(z)$  может быть представлена рядом

$$v(z) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(z), \quad (2.42)$$

где  $c_i$  — параметры, подлежащие определению;  $f_i(z)$  — возможные функции формы прогиба; они должны удовлетворять наложенным на балку связям. Для левого конца балки, где заделка, прогиб и угол поворота равны нулю,

$$f_i(0) = 0, \quad f_i'(0) = 0. \quad (2.43)$$

Этим условиям удовлетворяют функции

$$f_1 = \left(\frac{z}{l}\right)^2, \quad f_2 = \left(\frac{z}{l}\right)^3, \quad \dots, \quad f_i = \left(\frac{z}{l}\right)^{i+1}.$$

Удержим два члена ряда (2.42):

$$v(z) = c_1 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2 \left(\frac{z}{l}\right)^3, \quad v''(z) = 2\frac{c_1}{l^2} + 6\frac{c_2 z}{l^3}.$$

Внося эти значения  $v$  и  $v''$  в равенство (2.41), получим

$$\mathfrak{E} = \frac{EJ_x}{2} \int_0^l \left(2\frac{c_1}{l^2} + 6\frac{c_2 z}{l^3}\right)^2 dz - q \int_0^l \left(c_1 \left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2 \left(\frac{z}{l}\right)^3\right) dz.$$

Дифференцируя это соотношение по  $c_1$  и  $c_2$ , получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial c_1} = EJ_x \int_0^l \left( 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3} \right) \frac{2}{l^2} dz - q \int_0^l \left( \frac{z}{l} \right)^2 dz = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial c_2} = EJ_x \int_0^l \left( 2 \frac{c_1}{l^2} + 6 \frac{c_2 z}{l^3} \right) \frac{6z}{l^3} dz - q \int_0^l \left( \frac{z}{l} \right)^3 dz = 0,$$

или

$$c_1 + \frac{3}{2} c_2 = \frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_1 + 2c_2 = \frac{1}{24} \frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Из этих уравнений находим

$$c_1 = \frac{5}{24} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_2 = -\frac{1}{12} \frac{ql^4}{EJ_x}, \quad v(z) = \frac{5}{24} \frac{ql^2 z^2}{EJ_x} - \frac{1}{12} \frac{qlz^3}{EJ_x}.$$

Наибольшее значение прогиба при  $z = l$ ,  $v(l) = \frac{ql^4}{8EJ_x}$ , что совпадает с точным решением.

## Лекция 3. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 3.1. Плоское напряженное состояние. Плоская деформация

Плоской задачей следует считать задачу о таком напряженном состоянии тела, когда все площадки одного направления, например, перпендикулярные к оси  $z$ , заведомо главные. Для них касательные напряжения  $\tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ , а главное напряжение  $\sigma_z = 0$  (плоское напряженное состояние, рис. 3.1, *а*) или может быть выражено через  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  (плоская деформация, где  $\varepsilon_z = 0$ , рис. 3.1, *б*).

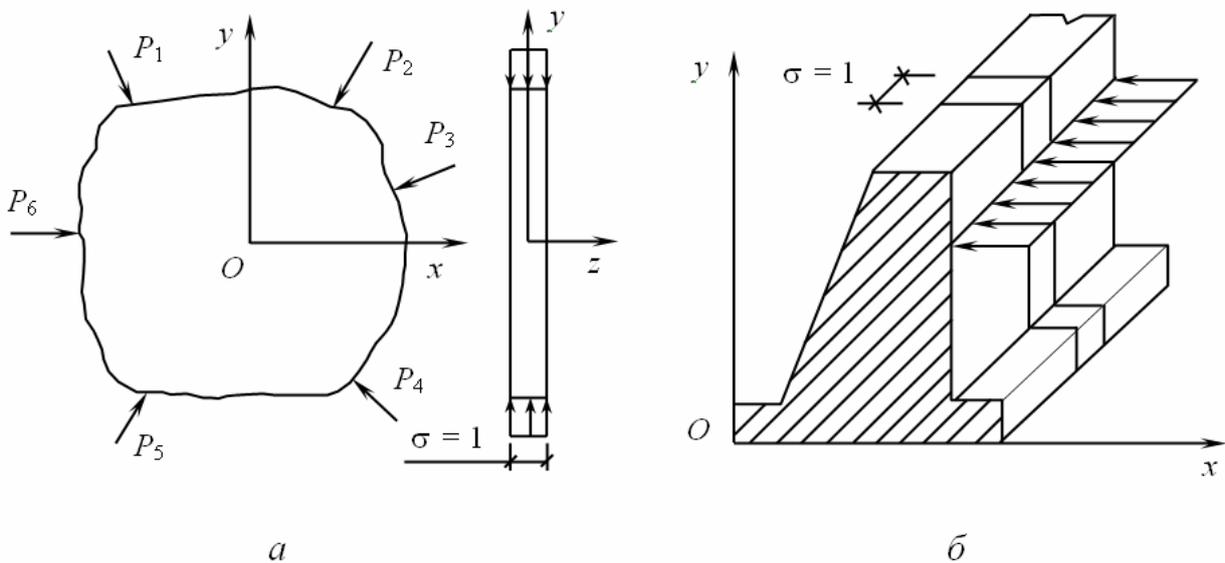


Рис. 3.1

В этом случае количество неизвестных задачи уменьшается. Уравнения теории упругости значительно упрощаются.

Плоская задача определяется тензорами напряжений и деформаций такого вида:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad [T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Напряжения и деформации, а также перемещения  $u$  и  $v$  являются функциями координат  $x$  и  $y$  и не зависят от координаты  $z$ .

Примером плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0, \varepsilon_z \neq 0$ ) может служить тонкая пластина, к контуру которой приложены нагрузки, постоянные по толщине пластины и параллельные ее срединной плоскости.

Если длинное призматическое тело нагружено силами, не изменяющимися по его длине и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на достаточном расстоянии от концов, подвергается плоской деформации ( $\sigma_z \neq 0, \varepsilon_z = 0$ ).

Поскольку  $\sigma_z$  и  $\varepsilon_z$  — вторичны, то тензоры напряжений и деформаций можно представить в сокращенном виде:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}, [T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Из формул закона Гука (2.7) вытекает, что

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (3.3)$$

### 3.2. Напряжения на произвольной площадке. Главные напряжения и деформации

Рассмотрим трехгранную призму единичной ширины, выделенную из пластины площадками, параллельными оси  $z$  (рис. 3.2).

Из выражения (1.4) получим

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m,$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m,$$

где  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \sin \alpha$ . С учетом этого

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha,$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha. \quad (3.4)$$

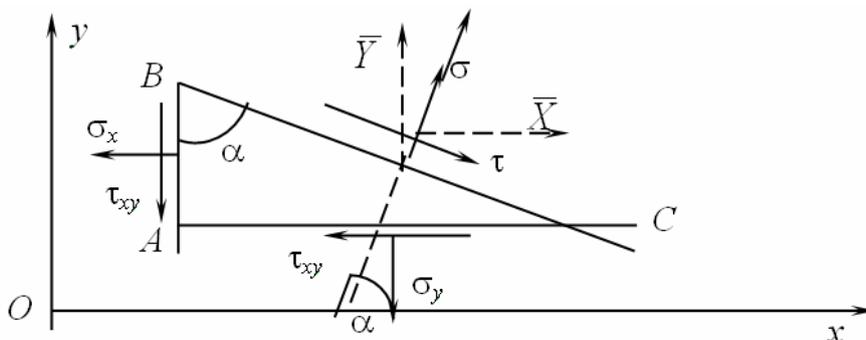


Рис. 3.2

Спроектировав напряжения на нормаль  $N$  и касательную к площадке  $BC$ , получим

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau &= \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Первое из уравнений (3.5) вытекает из (1.6).

Очевидно, что угол  $\alpha$  можно выбрать таким образом, чтобы касательное напряжение  $\tau$  на площадке  $BC$  стало равным нулю.

$$\tau_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha = 0$$

или

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.\quad (3.6)$$

Эта формула определяет положение главной площадки с главным нормальным напряжением  $\sigma_1$ .

Из кубического уравнения (1.12), полагая  $\tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ , получим следующее уравнение:

$$[\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)](\sigma - \sigma_z) = 0$$

и первые два напряжения

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 - (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}$$

или

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},\quad (3.7)$$

а  $\sigma_3 = \sigma_z$ . Поскольку  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ .

Максимальное касательное напряжение, согласно формул (1.19),

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.\quad (3.8)$$

Оно возникает на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

Главные линейные деформации и их направления определяются формулами

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (3.10)$$

### 3.3. Основные уравнения плоской задачи

Примем, что объемной силой является сила тяжести, то есть  $X = Z = 0$ ;  $Y = -q$ , где  $q$  — объемный вес материала.

Уравнения равновесия (2.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - q &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Условия на контуре определены формулами (3.4).

Геометрические уравнения (2.2):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Физические уравнения (2.7) для случая плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные  $E$  и  $\nu$  необходимо заменить на  $E_1$  и  $\nu_1$ :

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (3.14)$$

что нетрудно показать, подставив в первые две формулы (2.7) напряжение:  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Любопытно, что  $G_1 = G$ .

Восемь уравнений (3.11)—(3.13) позволяют определить восемь неизвестных: три напряжения, три деформации и два перемещения.

Разрешающие уравнения плоской задачи, представленные в перемещениях (2.21), принимают вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u &= 0, \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v - q &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\lambda + G = \frac{G}{1 - 2\nu}, \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.16)$$

Разрешающие уравнения плоской задачи, представленные в напряжениях, также упрощаются. Из уравнений неразрывности деформаций (2.5) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.17)$$

Выразив в (3.17) с помощью (3.13) деформации через напряжения и воспользовавшись для исключения  $\tau_{xy}$  уравнениями равновесия, получим уравнение совместности деформаций в напряжениях:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.18)$$

Таким образом, решение плоской задачи в напряжениях сводится к интегрированию трех уравнений: двух уравнений (3.11) и (3.18). К ним присоединяют условия на контуре (3.4). Эти три уравнения можно свести к одному, если ввести так называемую функцию напряжений  $F$ :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + qx. \quad (3.19)$$

Подстановка этих выражений в уравнения равновесия дает тождества, а подстановка в условие совместности (3.18) приводит к следующему разрешающему уравнению плоской задачи:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (3.20)$$

или в компактном виде

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (3.21)$$

Функция напряжений  $F$  называется также *функцией Эри*.

### 3.4. Изгиб консоли, нагруженной на конце

Для длинной прямоугольной полосы представляют интерес решения уравнения (3.20) в форме полиномов полуобратным способом. Рассмотрим консоль, имеющую узкое прямоугольное поперечное сечение единичной толщины и изгибаемую силой  $P$ , приложенной на конце (рис. 3.3).

Верхняя и нижняя грани консоли свободны от нагрузки; на торце  $x = 0$  распределены касательные напряжения, имеющие результирующую  $P$ .

Примем функцию напряжений для этого случая в виде

$$F = a_2 xy + b_4 xy^3. \quad (3.22)$$

Очевидно, что функция (3.22) удовлетворяет уравнению (3.20). Напряжения, определенные согласно формуле (3.19), с учетом  $q = 0$

$$\sigma_x = 6 b_4 xy, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -a_2 - 3b_4 y^2. \quad (3.23)$$

Чтобы продольные края консоли  $y = \pm \frac{h}{2}$  были свободны от усилий, необходимо принять

$$\tau_{xy} \Big|_{y=\pm \frac{h}{2}} = -a_2 - 3b_4 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{3}{4} b_4 h^2.$$

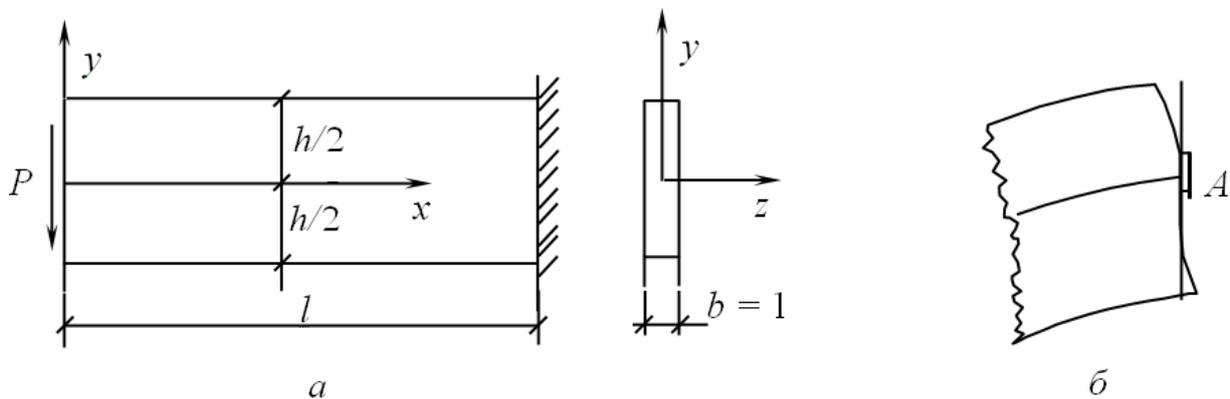


Рис. 3.3

Для удовлетворения условия на нагруженном конце консоли, сумма касательных усилий, распределенных по торцу  $x = 0$  должна быть равна  $P$ :

$$P = \int_{-h/2}^{h/2} b \tau_{xy} dy = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{3}{4} b_4 h^2 \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) b dy = b_4 \frac{bh^3}{2}.$$

Замечая, что  $bh^3/12$  — это момент инерции поперечного сечения консоли, получим  $b_4 = \frac{P}{6J}$  и следующие формулы для определения напряжений:

$$\sigma_x = \frac{P}{J} xy = \frac{M}{J} y, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \frac{P}{J} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right). \quad (3.24)$$

Это решение полностью совпадает с элементарным решением курса сопротивления материалов. Заметим, что это решение является точным лишь в том случае, когда касательные усилия на конце консоли распределяются по тому же параболическому закону, что и касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Если усилия на конце распределяются иным образом, распределение напряжений

(3.24) не является точным решением вблизи конца консоли. Однако, в силу принципа Сен-Венана, оно может считаться удовлетворительным для поперечных сечений, достаточно удаленных от этого конца.

*Принцип Сен-Венана* коротко может быть сформулирован так. *В точках сплошного тела, достаточно удаленных от мест приложения локальных нагрузок, напряжения мало зависят от способа распределения этих нагрузок и определяются лишь величиной их статического эквивалента (величиной сил и моментов).*

Принцип Сен-Венана хотя и не имеет строгого доказательства, но подтверждается опытом решения многих задач. Заменяя заданные условия на поверхности статически эквивалентными, решение задачи можно существенно упростить. Такой подход называют иногда смягчением граничных условий.

Рассмотрим теперь перемещения, соответствующие напряжениям (3.24). Из геометрических зависимостей (3.12), применяя закон Гука (3.13), находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Pxy}{EJ}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu P}{EJ}xy, \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{P}{GJ} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right).$$

Процедура определения компонент перемещения  $u$  и  $v$  состоит в интегрировании геометрических уравнений (3.12):

$$u = \int \varepsilon_x dx + f(y) = \int \frac{Pxy}{EJ} dx + f(y) = \frac{Px^2y}{2EJ} + f(y), \quad (3.26)$$

$$v = \int \varepsilon_y dy + f_1(x) = -\int \nu \frac{Pxy}{EJ} dy + f_1(x) = -\nu \frac{Pxy^2}{2EJ} + f_1(x),$$

где  $f(y)$  и  $f_1(x)$  — неизвестные функции, определяемые из условий закрепления правого конца консоли: при  $x = l$   $u = v = 0$ . Однако оказывается, что удовлетворить таким условиям при помощи полиномов нельзя. Удовлетворить можно лишь условиям фиксации точки  $A$ , например таким:  $u_A = v_A = 0$ ;  $\partial u / \partial y = 0$ . Остальные точки сечения консоли при этом будут перемещаться (см. рис. 3.3, б). Таким образом, распределение усилий на правом конце консоли также отличается от того, которое дается формулами (3.24). Однако приведенное здесь решение дает удовлетворительные результаты для сравнительно длинных консолей на некотором удалении от концов.

Чтобы проиллюстрировать применение этого общего метода определения напряжений в прямоугольных пластинках, рассмотрим случай, показанный на рис. 3.4 (задача Файлона).

На части продольных краев пластинки длиной  $2c$  при  $y = \pm h/2$  действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$ . Произвольные

постоянные  $A_m$  и  $B_m$  симметричного решения определяются из этих условий и справедливы для каждого члена ряда. Тогда и нагрузка  $q$  должна быть представлена в виде ряда

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (3.27)$$

где коэффициенты  $q_m$  — разложения в ряд Фурье

$$q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (3.28)$$

Для нагрузки, показанной на рис. 3.4,

$$q_m = \frac{2q}{l} \int_{x_p-c}^{x_p+c} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = -\frac{2q}{l} \frac{l}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{l} \Big|_{x_p-c}^{x_p+c}. \quad (3.29)$$

Подставив пределы и заменив разность косинусов произведением синусов, найдем

$$q_m = \frac{4q}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x_p}{l}. \quad (3.30)$$

Для случая, когда нагрузка  $q$  равномерно распределена по всей стороне,

$$c = x_p = l/2,$$

$$q_m = \begin{cases} \frac{Aq}{m\pi}, & \text{для } m = 1, 3, 5... \\ 0, & \text{для } m = 2, 4, 6... \end{cases} \quad (3.31)$$

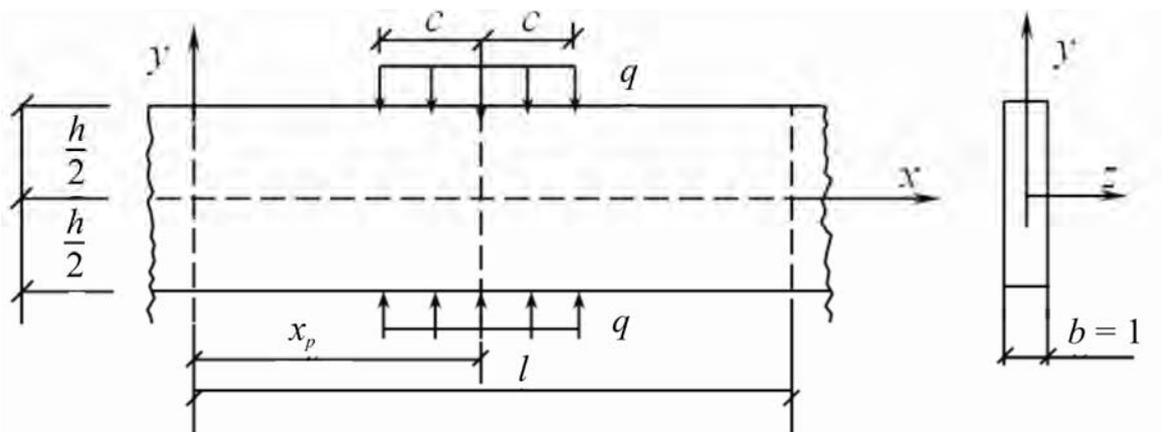


Рис. 3.4

В частном случае сосредоточенной силы, когда  $c \rightarrow 0$ , а произведение  $2qc = P$ , с учетом того, что при  $\alpha \rightarrow 0$   $\sin \alpha \rightarrow \alpha$  из формулы (3.35) вытекает

$$q_m = \frac{2P}{l} \sin \frac{m\pi x_p}{l}, \quad (3.32)$$

при  $x_p = l/2$

$$q_m = \begin{cases} \frac{2P}{l}, & \text{для } m = 1, 3, 5... \\ 0, & \text{для } m = 2, 4, 6... \end{cases} \quad (3.33)$$

На рис. 3.5 показаны примеры приближений к заданным равномерной (а) или кусочно-постоянной (б) нагрузкам с помощью формул (3.27), (3.28) и (3.30).

Для случая равномерной нагрузки при  $m = 1$

$$q_1 = \frac{4q}{1 \cdot \pi} \sin \frac{\pi x}{l} = 1,27 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (3.34)$$

Определим произвольные постоянные из условий на контуре (рис. 3.4).

$$\sigma_y^m \left( \frac{h}{2} \right) = q_m, \quad \tau_{xy}^m \left( \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (3.35)$$

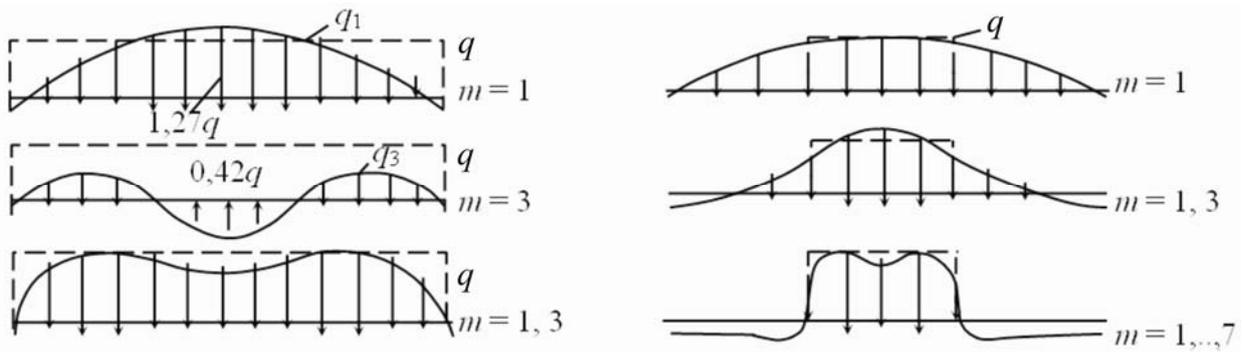


Рис. 3.5

Подставив в формулы (3.30)  $y = h/2$ , приведем равенства (3.35) к двум уравнениям относительно  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\begin{aligned} -\alpha_m^2 (A_m \operatorname{ch} \lambda_m + B_m \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m) &= q_m, \\ \alpha_m^2 (A_m \operatorname{sh} \lambda_m + B_m (\operatorname{sh} \lambda_m + \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\text{где } \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi h}{2l} = \alpha_m \frac{h}{2}. \quad (3.37)$$

Решение этой системы дает

$$A_m = -\frac{q_m}{\alpha_m^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_m + \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m}, \quad B_m = \frac{q_m}{\alpha_m^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_m}{\operatorname{sh} \lambda_m \operatorname{ch} \lambda_m + \lambda_m}, \quad (3.38)$$

а напряжения определяются формулами (3.25).

В случае действия сосредоточенной силы  $P$  напряжения  $\sigma_y$  в произвольной точке пластинки можно определить из формулы

$$\sigma_y = \frac{2P}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\text{sh } \lambda_m + \lambda_m \text{ch } \lambda_m}{\text{sh } \lambda_m \text{ch } \lambda_m + \lambda_m} \text{ch } \alpha_m y - \frac{\text{sh } \lambda_m \alpha_m y}{\text{sh } \lambda_m \text{ch } \lambda_m + \lambda_m} \text{sh } \alpha_m y \right) \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (3.39)$$

Результаты исследования напряжений  $\sigma_y$  для различных сечений, когда высота пластинки велика по сравнению с длиной ( $h = 4l$ ), показаны на рис. 3.6.

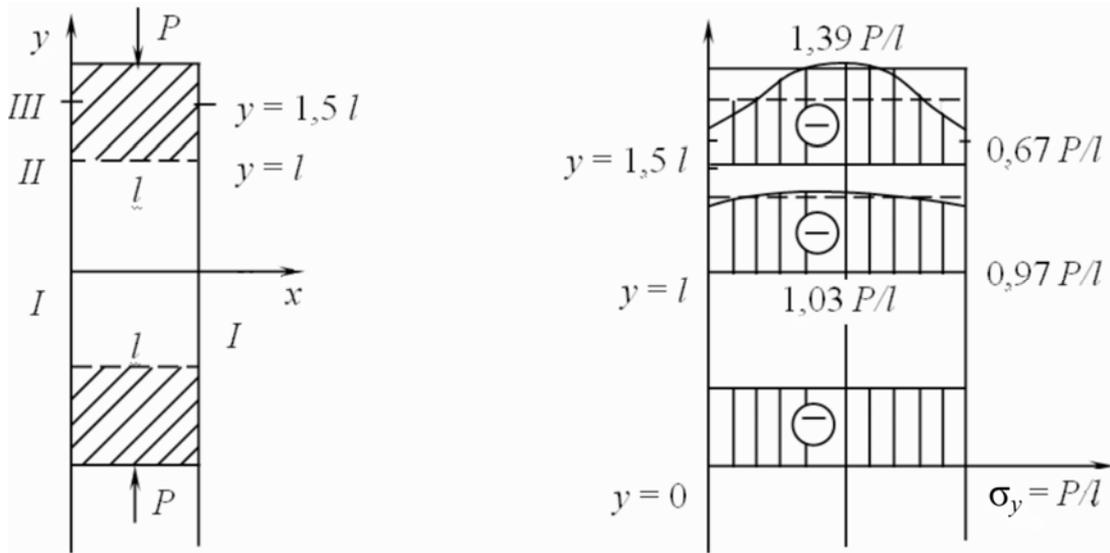


Рис. 3.6

Из рис. 3.6 видно, что в сечении I—I напряжения  $\sigma_y = P/l$ . На расстоянии от конца, равном ширине полосы, распределение напряжений практически является однородным;  $\sigma_y = P/l$ , что подтверждает правомерность этой формулы и справедливость принципа Сен-Венана.

Отметим, что для получения хорошей точности достаточно взять в ряде (3.39) лишь несколько первых членов. При определении напряжений в окрестности силы  $P$  количество удерживаемых членов ряда резко увеличивается.

Решение в виде ряда (3.27) можно рассматривать как представление периодических напряженных состояний в длинной балке, параллельной оси  $x$ , так как ряд Фурье представляет собой периодическую функцию. Такое распределение напряжений имеет неразрезная балка, состоящая из последовательности равных пролетов с той же нагрузкой (рис. 3.7).

Для решения этой задачи вместо ряда (3.27) удобно использовать ряд

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (3.40)$$

Нетрудно убедиться, что напряжения в этом случае определяются формулами

$$\sigma_x = \sum_m \sigma_x^m \cos \alpha_m x, \quad \sigma_y = \sum_m \sigma_y^m \cos \alpha_m x, \quad \tau_{xy} = \sum_m \tau_{xy}^m \sin \alpha_m x. \quad (3.41)$$

На торцах балки и в сечениях с промежуточными опорами должны выполняться условия  $\sigma_x \neq 0, u = 0$ . В подобных условиях находится любой пролет длиной  $2l$ , выделенный из длинной полосы, кроме крайних.

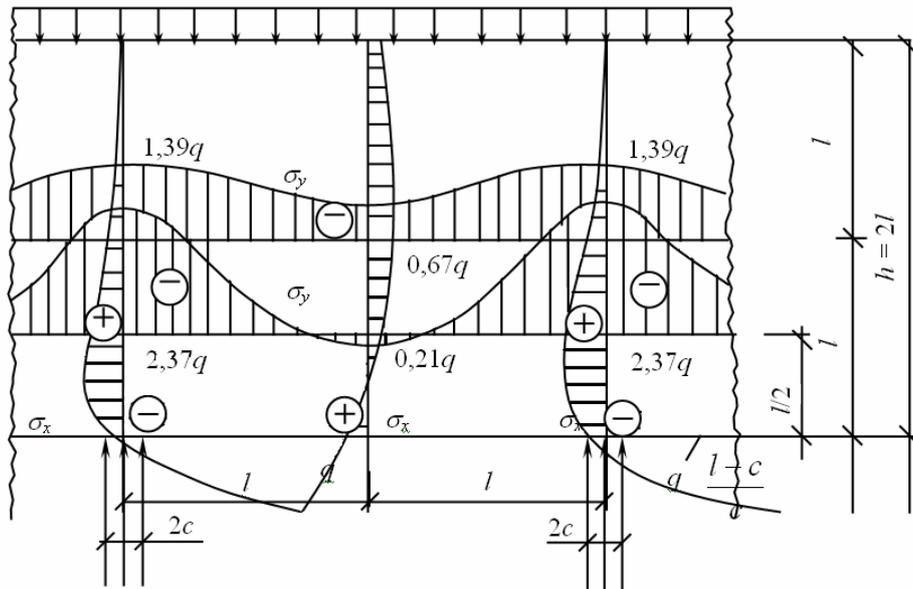


Рис. 3.7

Если балка имеет высоту, соизмеримую с пролетом, и является балкой-стенкой, то этот метод приводит к полезным результатам, так как обычная балочная теория здесь неприменима. Очевидно, что общее решение этой задачи достаточно сложно, ведь распределение напряжений несимметрично относительно оси  $x$ . Проанализируем получающиеся в этом случае нормальные напряжения в вертикальном и горизонтальном сечениях.

Эпюра  $\sigma_x$  совершенно не напоминает той прямолинейной эпюры, которая получается по формулам сопротивления материалов. Вертикальные напряжения  $\sigma_y$  в нижних слоях полосы распределяются крайне неравномерно; по мере приближения сечений к верхней грани они выравниваются (согласно элементарной теории  $\sigma_y = 0$ ).

Приведенные здесь решения позволяют получить близкие к действительным распределения напряжений в упругих телах. Кроме того, они создают возможность для оценки точности простых решений.

### 3.5. Метод конечных разностей

Аналитические решения краевых задач теории упругости получены для некоторых частных случаев. Поэтому в инженерной практике важное значение имеют приближенные, но достаточно общие методы. Их можно разделить на две группы. Первую группу составляют методы, основанные на вариационных принципах: Ритца — Тимошенко, конечных элементов и другие. Во вторую группу входят методы приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений: это прежде всего *метод конечных разностей*, который называют также *методом сеток*. Он состоит в следующем.

Вся область тела — ось балки, площадь пластины, поверхность оболочки — покрывается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. Неизвестные определяют лишь в узлах сетки. Для этого строят конечно-разностные операторы-аналоги дифференциальных операторов. Граничные условия также представляют в конечных разностях. В результате вместо дифференциального уравнения в частных производных (в плоской задаче — уравнение (3.20)) приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений. Точность метода конечных разностей прямо зависит от густоты сетки: чем гуще сетка, тем точнее решение. Метод конечных разностей представляет собой мощное средство решения задач как теории упругости, так и других задач, например задач о переносе тепла и влаги.

Рассмотрим построение разностных операторов для производных гладкой функции  $f(x)$ , заданной рядом значений  $f_i, f_{i+1}, \dots$  в равноотстоящих точках  $x = 0, x = \Delta \dots$  (рис. 3.8).

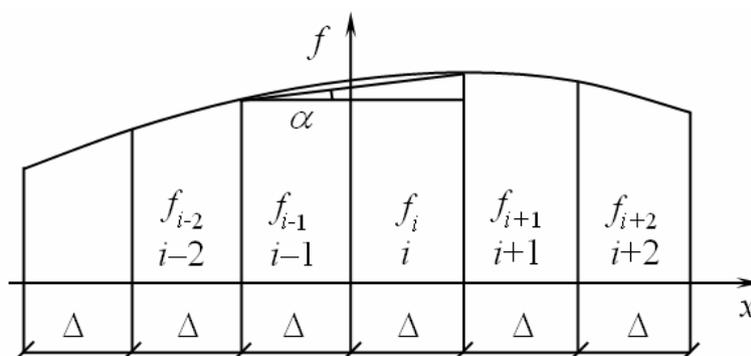


Рис. 3.8

Первую производную  $f'_i$  в точке  $i$  определим приближенно, как отношение разности соседних ординат  $f_{i+1} - f_{i-1}$  к отрезку  $2\Delta$ , заменив тангенс угла наклона касательной тангенсом угла наклона секущей  $\text{tg}\alpha$ :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}, \quad f'_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-2}}{2\Delta}, \quad f'_{i+1} = \frac{f_{i+2} - f_i}{2\Delta}. \quad (3.42)$$

Это так называемые первые центральные разности. Первую производную  $f'_i$  в точке  $i$  можно определить и в односторонних разностях

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta}, \quad f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta}. \quad (3.43)$$

Тогда приближенное значение второй производной  $f''_i$

$$f''_i = \frac{d}{dx}(f'_i) = \frac{d}{dx} \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta} \right) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta} \right), \quad (3.44)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2}. \quad (3.45)$$

Подобным образом

$$f_i''' = \frac{d}{dx}(f_i'') = \frac{f_{i+1}'' - f_{i-1}''}{2\Delta} = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3}, \quad (3.46)$$

$$f_i^{IV} = \frac{d^2}{dx^2}(f_i'') = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4}. \quad (3.47)$$

Полученные разностные операторы, кроме операторов (3.43), симметричны относительно их центра и являются центральными конечными разностями. Путем соответствующего интерполирования можно получить выражения для производных в точке  $i$  только через правые или левые ординаты, то есть в односторонних разностях, например

$$f_i'' = \frac{2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{\Delta^2}. \quad (3.48)$$

Технику применения метода конечных разностей поясним на примере простой балки, нагруженной равномерной нагрузкой  $q$  (рис. 3.9).

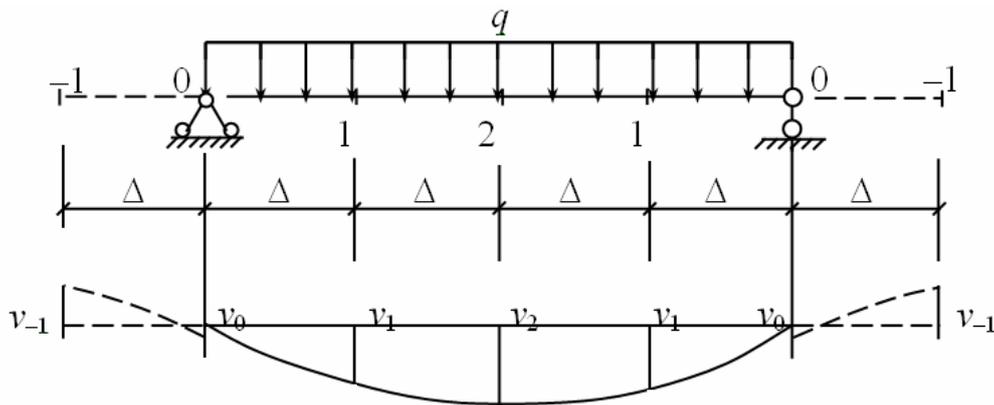


Рис. 3.9

Найдем прогибы  $v$  симметричной балки, решая краевую задачу изгиба, описываемую дифференциальным уравнением

$$v^{IV} = \frac{q}{EJ},$$

и условиями на концах  $v = 0, M = -v'' EJ = 0$ .

Для телесных узловых точек 1 и 2 разностный аналог (3.47) приводит к следующей системе уравнений:

$$v_{-1} - 4v_0 + 6v_1 - 4v_2 + v_1 = \frac{q\Delta^4}{EJ}, \quad (3.49)$$

$$v_0 - 4v_1 + 6v_2 - 4v_1 + v_0 = \frac{q\Delta^4}{EJ}.$$

Здесь  $v_0 = 0$ . Второе из условий на контуре позволяет определить  $v_{-1}$ :

$$v_0'' = \frac{v_{i-1} - 2v_0 + v_1}{\Delta^2} = 0, \quad v_{-1} = -v_1.$$

С учетом того, что  $v_0 = 0$ ,  $v_{-1} = -v_1$ , уравнения (3.49) приобретают вид

$$6v_1 - v_2 = q \Delta^4/EJ,$$

$$-8v_1 + 6v_2 = q \Delta^4/EJ.$$

Их решение дает:  $v_1 = 2,5q\Delta^4/EJ$ ,  $v_2 = 3,5q\Delta^4/EJ = 0,014ql^4/EJ$ , что отличается от точного решения  $v_2 = 0,013 q l^4/EJ$  лишь на 7 %.

Из этого примера видно, что метод конечных разностей расширяет область интегрирования — сетка захватывает узлы за границей области. Значения искомой функции в законтурных точках определяют из условий на контуре.

Перейдем теперь к составлению операторов для частных производных функции двух аргументов  $F = F(x, y)$  для сетки, показанной на рис. 3.10. По аналогии с (3.46) вторые частные производные в точке  $i, j$  можно представить так:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{F_{i-1,j} - 2F_{i,j} + F_{i+1,j}}{\Delta x^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - 2F_{i,j} + F_{i,j+1}}{\Delta y^2}. \quad (3.50)$$

Вторая смешанная производная

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{F_{i-1,j-1} - F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (3.51)$$

Складывая равенства (3.50), получим выражение для гармонического оператора Лапласа  $\nabla^2 F$

$$\left(\nabla^2 F\right)_{i,j} = \frac{\alpha(F_{i-1,j} + F_{i+1,j}) + (F_{i,j-1} + F_{i,j+1} - 2(\alpha + 1)F_{i,j})}{\Delta y^2}, \quad (3.52)$$

где  $\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ .

Особый интерес представляет бигармонический оператор Лапласа  $\nabla^2 \nabla^2 F$ , который можно получить, записав выражения для четвертых производных и сложив их соответствующим образом (3.20), либо дважды применив оператор (3.52). В итоге получим такой разностный аналог:

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 \nabla^2 F\right)_{i,j} = & \left\{ (6\alpha^2 + 8\alpha + 6)F - 4(\alpha + 1) \left[ F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha(F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) \right] + 2\alpha(F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j-1} + \right. \\ & \left. \left. + F_{i+1,j+1}) + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} + \alpha^2(F_{i+2,j} + F_{i-2,j}) \right\} / \Delta y^4. \end{aligned} \quad (3.53)$$

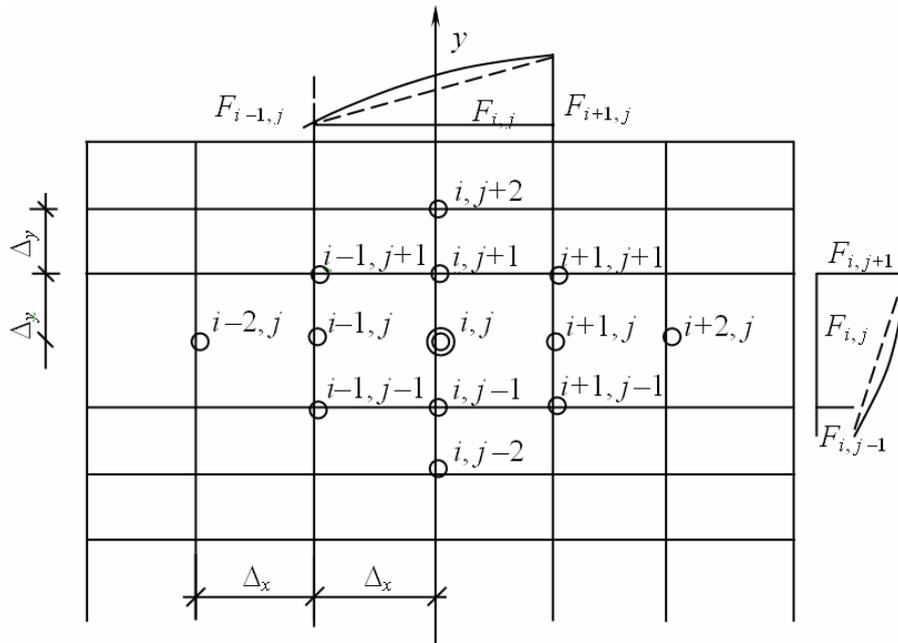


Рис. 3.10

В случае, если  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ , выражение (3.53) упрощается:

$$\begin{aligned}
 \left(\nabla^2 \nabla^2 F\right)_{i,j} = & \left[ 20F_{i,j} - 8(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) + \right. \\
 & + 2(F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1}) + \\
 & \left. + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} + F_{i+2,j} + F_{i-2,j} \right] / \Delta^4.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

В операторы (3.53) и (3.52) входят значения функции  $F$  в тринадцать узловых точках. Они отмечены индексами на рис. 3.10.

### 3.6. Применение метода конечных разностей к расчету балок-стенок

Рассмотрим особенности применения метода сеток на примере расчета симметрично нагруженной квадратной балки, то есть балки-стенки (рис. 3.11, а).

Нанесем на балку-стенку сетку с шагом  $\Delta = 4$  м. Решение задачи сводится к определению значений функции напряжений  $F$  в узлах сетки. С использованием оператора

$$\begin{aligned}
 20F_{i,j} - 8(F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i+1,j} + F_{i-1,j}) + 2(F_{i-1,j-1} + F_{i-1,j+1} + \\
 + F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1}) + F_{i,j+2} + F_{i,j-2} + F_{i+2,j} + F_{i-2,j} = 0
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

необходимо построить систему алгебраических уравнений — разностный аналог бигармонического уравнения (3.21). Уравнения типа (3.55) составляют для каждого внутреннего (телесного) узла сетки. Например, для узла 1

$$20F_1 - 8(F_8 + F_2 + F_3 + F_{10}) + 2(F_9 + F_7 + F_4 + F_{11}) + F_{1'} + F_1 + F_5 + F_{16} = 0.$$

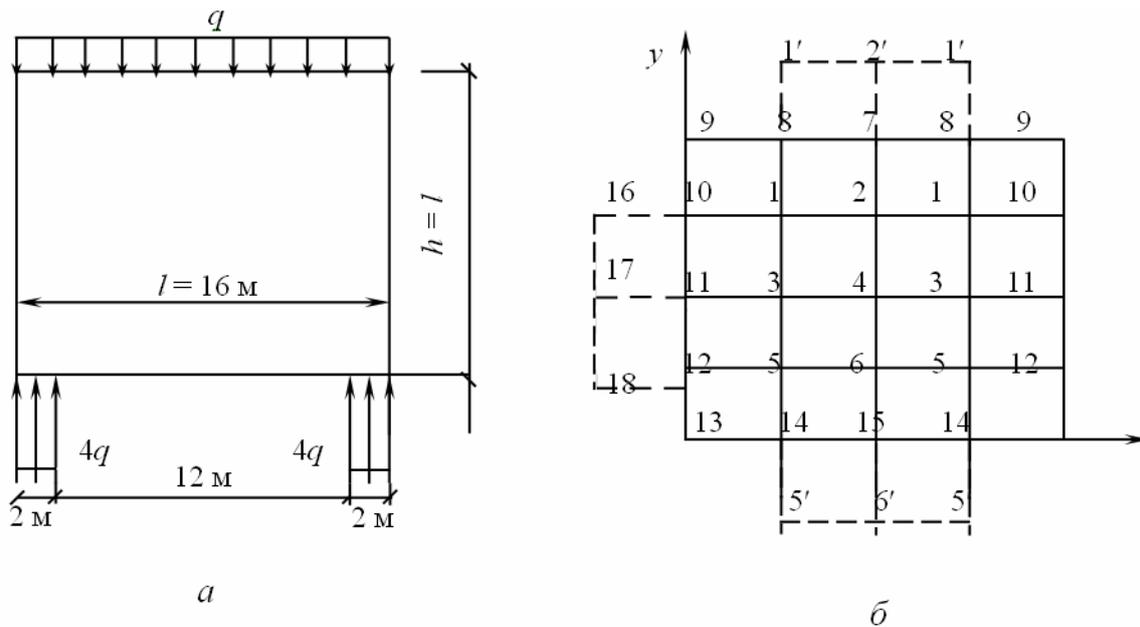


Рис. 3.11

В нашем примере, с учетом симметрии задачи, таких уравнений шесть. Как уже отмечалось, здесь происходит расширение заданной области за счет законтурных узлов. Вместе с узлами на контуре это существенно увеличивает общее количество неизвестных — до 22. Остальные 16 уравнений получают из рассмотрения условий на контуре.

Воспользуемся другим путем, позволяющим предварительно находить значения функции напряжений в контурных и законтурных точках, что резко сокращает общее количество неизвестных (в нашем примере — до шести). Такой путь реализуется при помощи рамной аналогии. Рассмотрим раму, по очертанию совпадающую с контуром балки-стенки и нагруженную той же нагрузкой: нормальной  $q$  и касательной  $p_s = 0$ , что и балка-стенка (рис. 3.12, а).

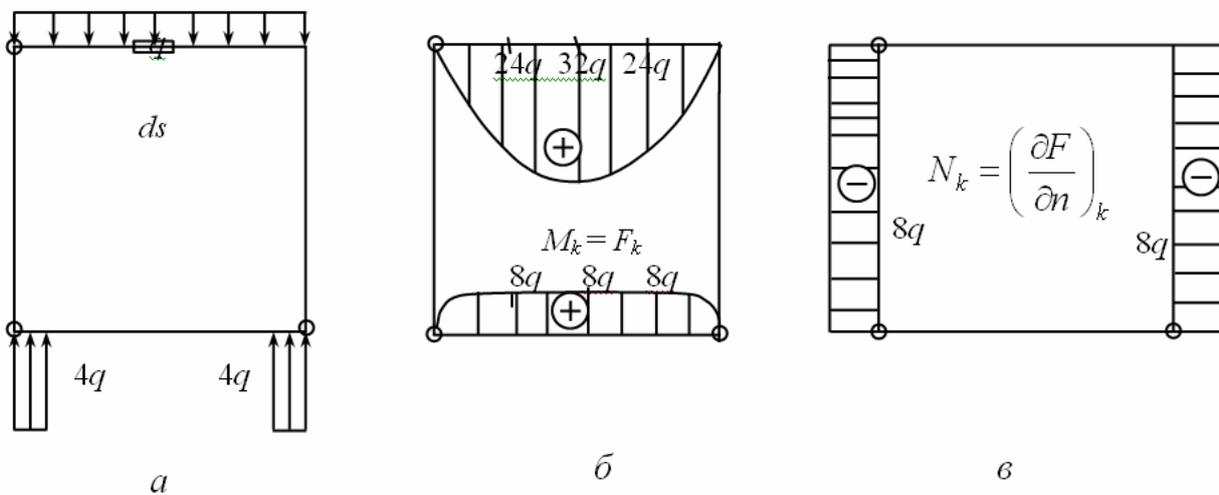


Рис. 3.12

Условия равновесия элемента  $ds$  такой рамы дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = q, \quad -\frac{\partial N}{\partial s} = p_s. \quad (3.56)$$

Учитывая, что для точки  $k$  контура балки-стенки граничные условия имеют вид

$$\sigma_n = \frac{\partial^2 F_k}{\partial s^2} = q, \quad \tau_{ns} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F_k}{\partial n} \right)_k = p_s, \quad (3.57)$$

придем к следующим равенствам, выражающим рамную аналогию:

$$F_k = M_k, \quad \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_k = N_k, \quad (3.58)$$

где  $M_k$  — изгибающий момент,  $N_k$  — продольная сила в соответствующей точке контура  $k$ .

Эпюры моментов  $M$  и продольных сил  $N$  показаны на [рис. 3.12, б, в](#). Правила знаков здесь следующие: если ординаты эпюры  $M$ , откладываемые со стороны растянутого волокна, попадают вовнутрь контура, то  $F_k = M_k > 0$ , и наоборот;  $\left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_k = N_k > 0$ , если  $N_k$  — растягивающая сила, и наоборот.

Из сопоставления [рис. 3.11, б](#) и [рис. 3.12, б](#) вытекает, что  $F_9 \dots F_{13} = 0$ ,  $F_8 = 24q$ ,  $F_7 = 32q$ ,  $F_{14} = F_{15} = 8q$ .

Ординату  $F_B$  в законтурной точке  $B$  найдем с помощью первой производной по нормали к контуру  $n$  (рис. 3.13) и второго из равенств (3.58):

$$\left( \frac{\partial F}{\partial n} \right)_k = \frac{-F_A + F_B}{2\Delta} N_k, \quad (3.59)$$

откуда

$$F_B = F_A + 2\Delta N_k.$$

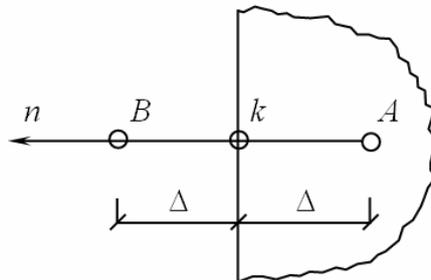


Рис. 3.13

Поскольку в верхних и нижних стержнях рамы  $N_k = 0$ , то

$$F_{1'} = F_1, \quad F_{2'} = F_2, \quad F_{5'} = F_5, \quad F_{6'} = F_6.$$

В левых законтурных точках

$$F_{16} = F_1 + 2 \Delta (-8q) = F_1 - 64q,$$

$$F_{17} = F_3 - 64q, F_{18} = F_5 - 64q.$$

С учетом этого, разностный оператор для узла 1 приобретает такой вид:

$$20F_1 - 8(24q + F_2 + F_3) + 2(32q + F_4) + F_1 + F_1 + F_5 + F_1 - 64 = 0,$$

$$23F_1 - 8F_2 - 8F_3 + 2F_4 + F_5 = 192q.$$

Составив аналогичным образом разностные операторы для остальных пяти узлов, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 23 & -8 & -8 & 2 & 1 & 0 \\ -16 & 21 & 4 & -8 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 22 & -8 & -8 & 2 \\ 4 & -8 & -16 & 20 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -8 & 2 & 23 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -8 & -16 & 21 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 192 \\ 160 \\ 32 \\ 40 \\ 112 \\ 32 \end{Bmatrix}.$$

Решение этой системы определяет вектор  $\{F\}$ :

$$\{F\}^T = \{22,98 \ 30,18 \ 20,06 \ 25,44 \ 14,57 \ 17,06\}q$$

и поверхность функции напряжений  $F(x, y)$ . Определение напряжений после этого не вызывает затруднений. С учетом (3.50), (3.51) формулы для определения напряжений следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{i,j} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - 2F_{i,j} + F_{i,j+1}}{\Delta_y^2}, \\ \sigma_y^{i,j} &= \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{F_{i-1,j} - 2F_{i,j} + F_{i+1,j}}{\Delta_x^2}, \\ \tau_{xy}^{i,j} &= - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = - \frac{F_{i-1,j-1} - F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1}}{4\Delta_x \Delta_y}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Например, напряжение  $\sigma_x$  в узле 2:

$$\sigma_x^2 = \frac{F_7 - 2F_2 + F_4}{\Delta^2} = \frac{32q - 2 \cdot 30,18q + 25,44q}{4^2} = -0,18q.$$

На [рис. 3.14, а](#) слева показаны эпюры нормальных напряжений  $\sigma_y$ , а справа —  $\sigma_x$ . Здесь же для среднего сечения пунктиром показана эпюра  $\sigma_x$ , построенная по формуле сопротивления материалов. В крайних точках сечения

$$\sigma_x = \frac{M}{W} = \frac{ql^2 \cdot 6}{8h^2} = 0,75q.$$

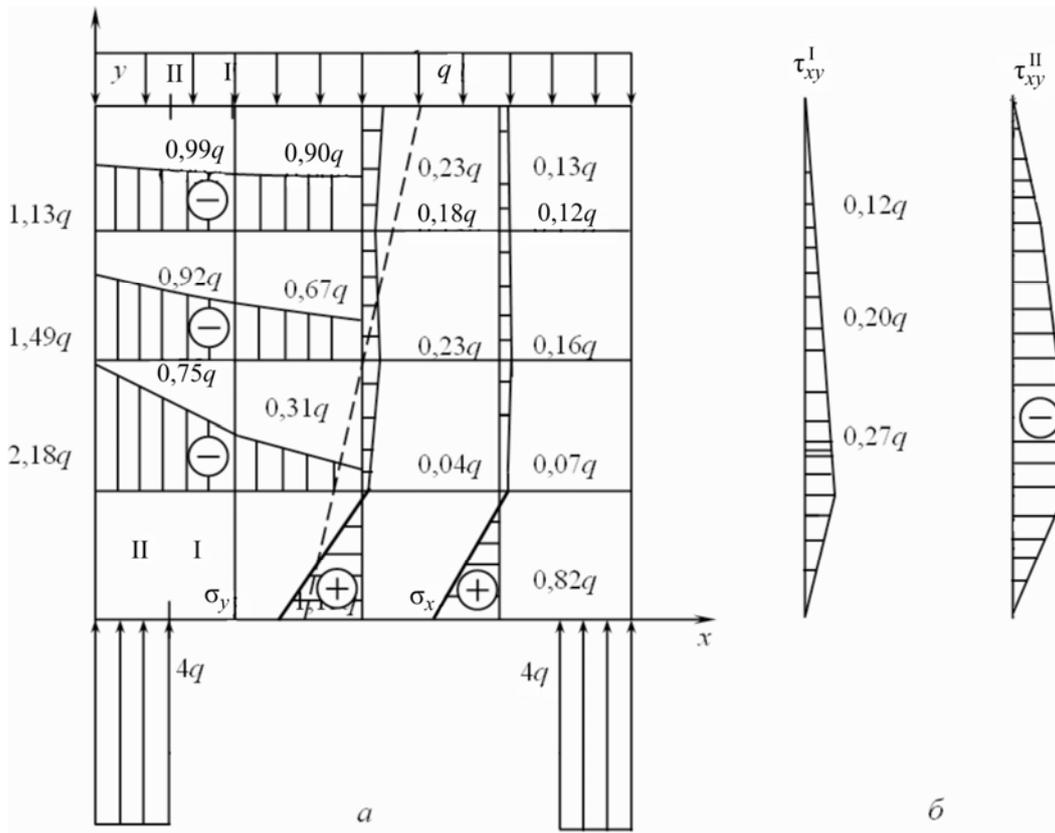


Рис. 3.14

Сопоставление эпюр  $\sigma_x$  для этого сечения показывает их существенное различие. Это же можно сказать и о нормальных напряжениях  $\sigma_y$ .

Полученные распределения напряжений должны, естественно, удовлетворять уравнениям равновесия, что хорошо выполняется при достаточно густой сетке. Необходимо произвести также проверку условий совместности деформаций (3.18):

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y)_{i,j} = \nabla^2\sigma_{i,j} = \frac{\alpha(\sigma_{i-1,j} + \sigma_{i+1,j}) + \sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j+1} - 2(1+\alpha)\sigma_{i,j}}{\Delta_y^2}. \quad (3.61)$$

### 3.7. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

При исследовании напряжений в телах непрямоугольной формы иногда удобно пользоваться полярными координатами  $r$  и  $\theta$ . Ниже приводятся без вывода соответствующие уравнения, доказательство которых не должно встретить затруднений.

Положение точки в этой системе координат определяется расстоянием  $r$  от начала координат  $O$  (рис. 3.15) и углом  $\theta$  между этим направлением  $r$  и некоторой осью  $Ox$ , занимающей определенное положение на плоскости. Взамен прямоугольного параллелепипеда выделим малый элемент  $abcd$ , вырезанный из диска двумя радиальными сечениями  $Oc$  и  $Ob$ , перпендикулярными

к диску, и двумя цилиндрическими поверхностями  $ad$  и  $bc$ , радиусы кривизны которых равны  $r$  и  $r + dr$ . Составляющие нормальных напряжений в радиальном направлении обозначим через  $\sigma_r$ , а в тангенциальном — через  $\sigma_\theta$ . Для касательного напряжения примем обозначение  $\tau_{r\theta}$ .

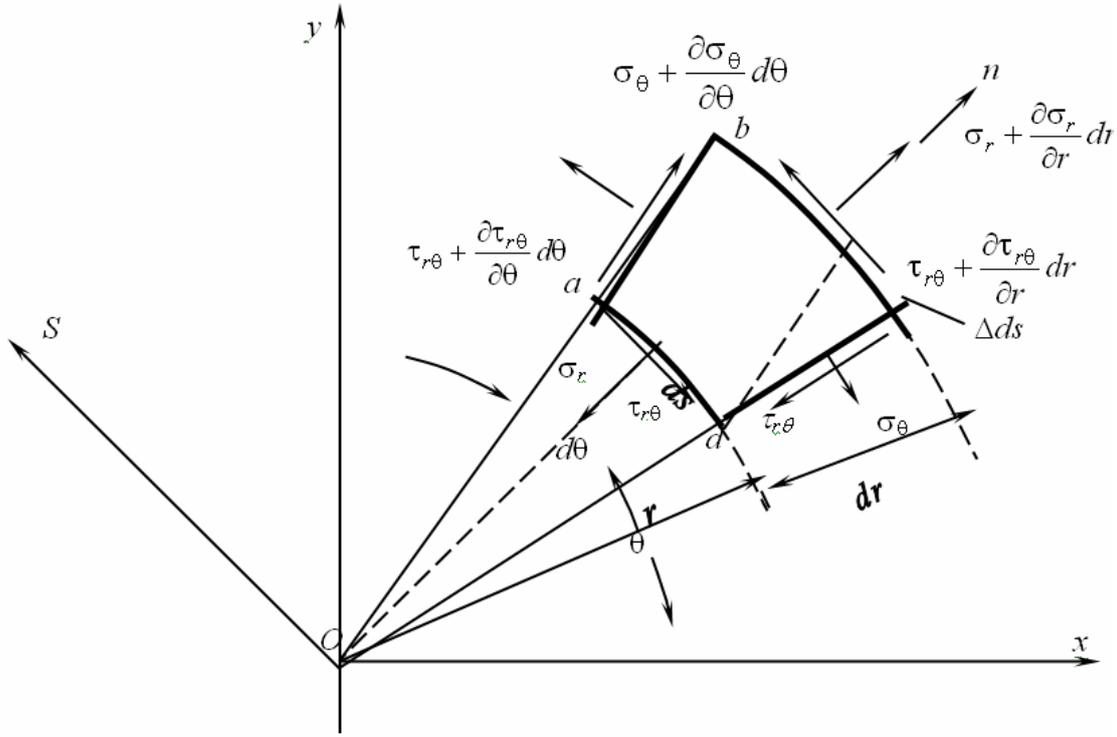


Рис. 3.15

Если спроектировать все силы на направление радиуса и на перпендикулярное к нему направление  $s$ , то после отбрасывания бесконечно малых высших порядков получим следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где  $R$  — объемная сила, действующая в радиальном направлении;  $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ .

Уравнения закона Гука (3.13) остаются без изменения, меняются лишь индексы у напряжений и деформаций

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad (3.63)$$

или в обратной форме:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}. \quad (3.64)$$

Между декартовыми и полярными координатами существуют такие зависимости:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x), \\ x &= r \cos\theta, \quad y = r \sin\theta. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Рассмотрим ортогональную систему координат  $n, s$  (рис. 3.15), временно отказавшись от угловой координаты  $\theta$ , заметив, что длина дуги  $ds$

$$ds = r d\theta. \quad (3.66)$$

Установим соотношения между напряжениями и функцией напряжений  $F(r, \theta)$  в этой системе координат. В случае отсутствия объемных сил, по аналогии с (3.19),

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial s}, \quad \sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}.$$

Формула для  $\sigma_r$  была бы справедливой, если бы при переходе от площадки  $ad$  к площадке  $bc$  менялась только величина напряжения. Здесь же меняется не только напряжение, но на величину  $\Delta ds$  и размер площадки. С учетом этого обстоятельства

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Возвращаясь к системе координат  $r, \theta$  с учетом (3.66) для  $\sigma_\theta, \sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что выражения (3.67) удовлетворяют уравнениям равновесия (3.62).

Из теории напряженного состояния известно, что при любом наклоне площадки сумма нормальных напряжений  $\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+\pi/2}$  не меняется. Поэтому

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta,$$

и уравнение совместности деформаций в напряжениях (3.18) в полярной системе координат можно записать в виде

$$\nabla^2 (\sigma_\theta + \sigma_r) = 0. \quad (3.68)$$

Складывая  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ , выраженные согласно (3.67), получим

$$\sigma_\theta + \sigma_r = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \nabla_r^2 F. \quad (3.69)$$

Следовательно, гармонический оператор Лапласа в полярной системе координат такой:

$$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (3.70)$$

Бигармоническое уравнение (3.21) сохраняется:

$$\nabla_r^2 \nabla_r^2 F = 0. \quad (3.71)$$

### 3.8. Действие сосредоточенной силы на край упругой полуплоскости

Под упругой полуплоскостью понимается полубесконечная пластина единичной толщины, ограниченная плоскостью  $x = 0$ . К ее краю приложена сосредоточенная сила  $P$ , распределение интенсивности которой по толщине однородно (рис. 3.16, *a*).

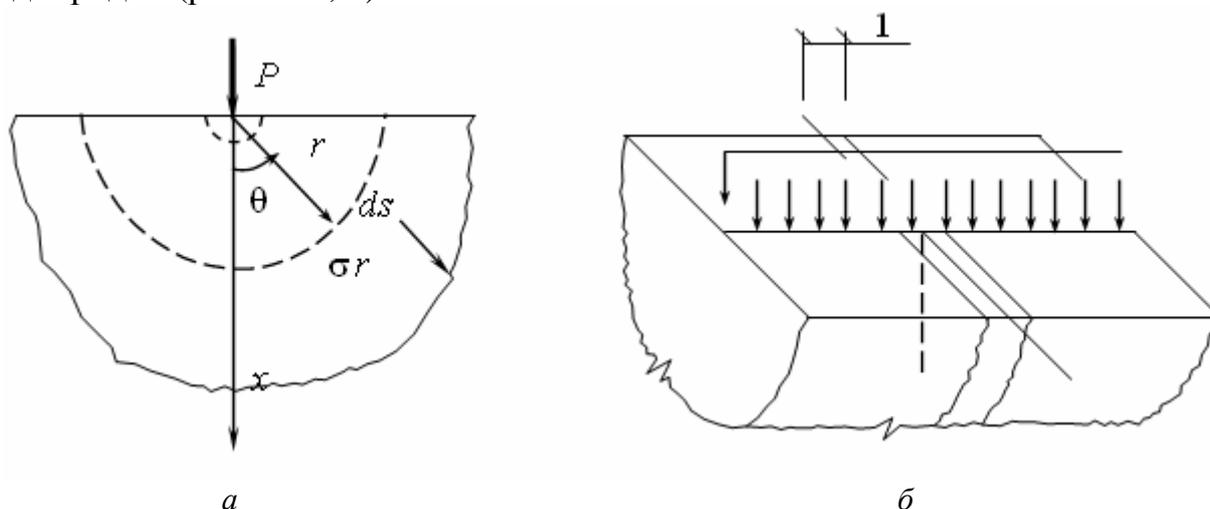


Рис. 3.16

В подобных условиях находится также слой единичной толщины, выделенный из полупространства (рис. 3.16, *б*). В случае *a* имеет место плоское напряженное состояние, а в случае *б* — плоское деформированное состояние.

Примем функцию напряжений  $F$  в виде

$$F = kr\theta \sin\theta, \quad (3.72)$$

удовлетворяющем уравнению (3.71). По формулам (3.67) определим напряжения:

$$\sigma_r = 2k \frac{1}{r} \cos\theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (3.73)$$

Таким образом, принятая функция  $F$  дает радиальное поле напряжений. При  $r \rightarrow 0$ ,  $\sigma_r \rightarrow \infty$ , следовательно, это решение справедливо для сечений, расположенных вне окрестности силы  $P$ . В действительности нагрузка всегда распределяется по площадке хотя и малой, но конечной ширины. Если в

окрестности силы  $P$  и произойдет пластическое течение, то все равно уравнения теории упругости справедливы в остальной части полуплоскости.

Произвольную постоянную  $k$  определим из условия равновесия полукруга радиуса  $r$  (рис. 3.16, а). Сумма проекций сил на ось  $x$  дает

$$P + 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r ds \cos \theta = P + 2 \int_0^{\pi/2} \sigma_r \cos \theta r d\theta = P + 4k \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = P + k\pi = 0.$$

Отсюда  $k = -P/\pi$ . Мы пришли к решению, полученному Фламаном:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (3.74)$$

Проанализируем напряженное состояние.

Выберем окружность произвольного диаметра  $d$  с центром на оси  $x$  и касательную к оси  $y$  в точке  $O$  (рис. 3.17); для любой точки окружности  $d \cos \theta = r$ . Следовательно,

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}, \quad (3.75)$$

то есть радиальные напряжения во всех точках окружности остаются одинаковыми. Любая площадка, перпендикулярная к радиусу, является главной.

Рассмотрим горизонтальную плоскость  $mn$ , находящуюся на расстоянии  $x$  от прямолинейного края  $x = 0$ . Нормальные и касательные составляющие напряжений в произвольной точке этой плоскости определим из условий простого сжатия в радиальном направлении при помощи зависимостей (3.5):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin^2 \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.76)$$

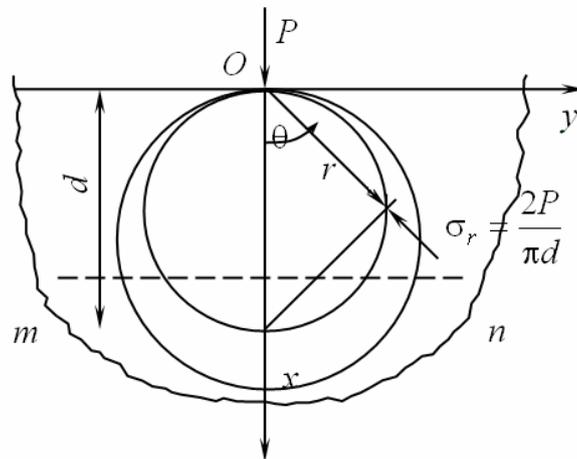


Рис. 3.17

Воспользовавшись первой из формул (3.65), из зависимостей (3.76) получим

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (3.77)$$

Соответствующие эпюры распределения напряжений показаны на рис. 3.18.

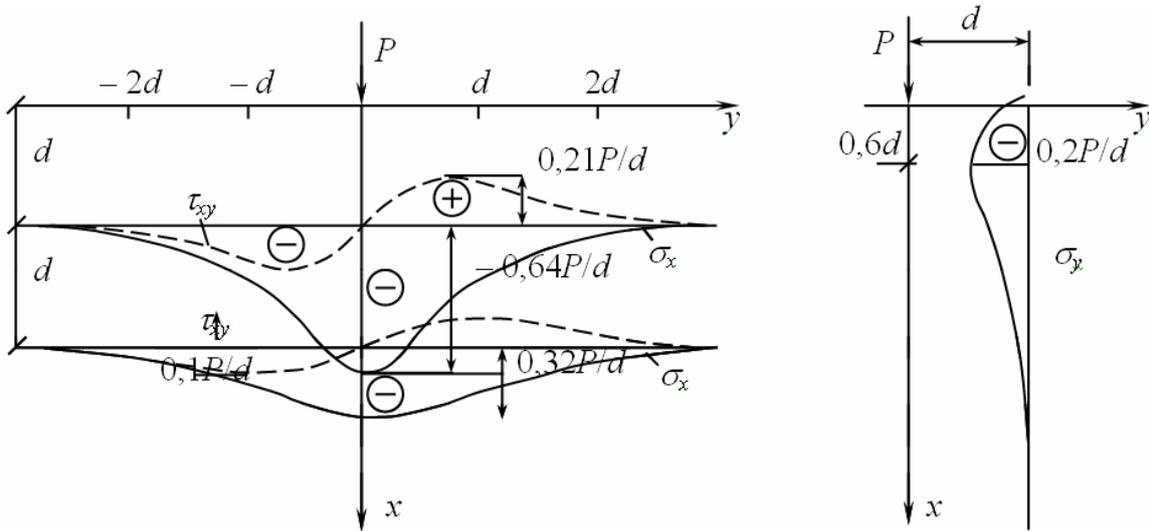


Рис. 3.18

Имея это решение, можно с помощью суперпозиции исследовать напряженное состояние полуплоскости для системы сосредоточенных сил. Более того, формулы этого решения могут играть роль функций влияния для распределенной нагрузки, приложенной к краю полуплоскости.

Решение Фламана используется обычно для изучения распределения давления в грунтах ниже подошвы ленточных фундаментов.

### **Список рекомендуемой литературы**

1. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М. : Высш. шк., 2007. 400 с.
2. *Икрин, В. А.* Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / В. А. Икрин. М. : Изд-во АСВ, 2005. 424 с.
3. *Саргсян, А. Е.* Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности : учебник / А. Е. Саргсян. М. : Высш. шк., 2002. 285 с.
4. *Самуль, В. И.* Основы теории упругости и пластичности / В. И. Самуль. М. : Высш. шк., 1982. 264 с.
5. *Тимошенко, С. П.* Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М. : Наука, 1975. 576 с.
6. Основы теории упругости : учебное пособие / В. Н. Барашков, И. Ю. Смолина, Л. Е. Путьева, Д. Н. Песцов. Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. 184 с.
7. Осесимметричные задачи теории упругости. Эл. ресурс:  
<http://bookfi.org/book/637358>

Электронное издание сетевого распространения

**Старов** Александр Васильевич  
**Воронкова** Галина Вячеславна

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ.  
КУРС ЛЕКЦИЙ С ПРИМЕРАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*  
Редактор *Р. В. Худадян*  
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Минимальные систем. требования:  
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 30.11.2015.  
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 3,2. Объем данных 1,0 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
Редакционно-издательский отдел  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)