

**В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова,  
С. С. Рекунов, А. А. Чураков**

# **ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**Учебное пособие  
В двух частях  
Часть I**

Волгоград. ВолгГАСУ. 2015



© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2015

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112я73  
П932

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор технических наук, профессор *А. Н. Богомолов*, проректор по научной работе Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;  
кандидат технических наук, доцент *С. Л. Туманов*,  
профессор кафедры гидротехнических и земляных сооружений  
Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

**Пшеничкина, В. А.**

П932 Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2-х частях. Ч. I / В. А. Пшеничкина, Г. В. Воронкова, С. С. Рекунов, А. А. Чураков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (6,9 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2015. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-733-2

Приведены основы теории вероятности и теории случайных функций, методов статистической динамики в применении к вероятностным расчетам конструкций и сооружений. Излагается теория надежности зданий и сооружений, возведенных в сложных инженерно-геологических условиях и при действии сейсмических нагрузок. Рассмотрены методы оценки накопления повреждений в конструкциях при случайных перегрузках.

Для студентов, обучающихся по специальности «Строительство уникальных зданий и сооружений», по направлению магистерской подготовки «Строительство», а также для научных и инженерно-технических работников научно-исследовательских и проектных организаций.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 624.04(075.8)  
ББК 38.112я73

ISBN 978-5-98276-733-2



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ .....	6
1.1. Основные понятия .....	6
1.2. Действия над событиями .....	8
1.3. Основные правила вычисления вероятностей сложных событий .....	9
2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ .....	13
2.1. Основные понятия .....	13
2.2. Законы распределения .....	21
2.2.1. Нормальный закон распределения .....	21
2.2.2. Экспоненциальный закон распределения .....	24
2.2.3. Логарифмически нормальный закон распределения .....	26
2.2.4. Распределение Рэлея .....	27
2.2.5. Гамма-распределение .....	27
2.2.6. Равномерный закон распределения .....	28
2.2.7. Треугольное распределение .....	29
2.2.8. Распределение Гумбеля (двойное экспоненциальное распределение) .....	32
2.2.9. Распределение Вейбулла .....	35
2.3. Системы случайных величин .....	36
2.4. Функции случайных величин .....	38
3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ .....	41
3.1. Основные понятия .....	41
3.2. Последовательность независимых случайных величин .....	43
3.3. Применение закона Гумбеля для исследования снеговых нагрузок .....	45
3.4. Применение закона Вейбулла для исследования ветровых нагрузок .....	49
3.5. Вероятность редких событий .....	51
4. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ .....	54
4.1. Основные понятия .....	54
4.2. Закон распределения случайной функции .....	56
4.3. Характеристики случайных функций .....	57
4.4. Стационарные случайные функции .....	60
4.5. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени .....	62
4.6. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени. Спектральная плотность стационарной случайной функции .....	64
4.7. Примеры корреляционных функций и спектральных плотностей стационарных случайных процессов .....	67
4.8. Линейные преобразования случайных функций. Понятие оператора .....	73
4.9. Преобразование случайной функции линейным оператором .....	75
4.10. Канонические разложения случайных функций .....	78
4.11. Линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями .....	81
Заключение .....	90
Список рекомендуемой литературы .....	91

## ВВЕДЕНИЕ

Проектирование строительных конструкций всегда приходится вести в условиях неопределенности: нагрузки и воздействия, физико-механические характеристики материалов, геометрические размеры конструкций являются случайными величинами или функциями и в каждом конкретном случае принимают различные значения. Метод предельных состояний позволяет учитывать случайный характер этих факторов при помощи системы коэффициентов надежности. Исходным положением расчета по предельным состояниям является условие, что минимально возможная (расчетная) величина несущей способности должна всегда превышать усилие от максимально возможных (расчетных) величин нагрузок. Этим объясняется определенный уровень надежности проектирования. Однако метод предельных состояний не позволяет производить количественную оценку надежности конструкций и тем более проектировать их с заданным уровнем надежности (риска). При этом вполне возможны случаи, когда надежность конструкций ответственных сооружений оказывается ниже надежности конструкций сооружений третьего класса ответственности. Поэтому расчет строительных конструкций как систем, содержащих случайные параметры, должен проводиться в вероятностной постановке на основе методов теории вероятностей, теории случайных функций. Гарантия ненаступления предельного состояния может быть обеспечена с определенной вероятностью. Задав вероятность ненаступления предельного состояния (или вероятность отказа), можно определить размеры сечения конструкции, отвечающие заданным вероятностям. Таким образом, вероятностный подход к расчету конструкций позволяет проектировать их с заданным уровнем надежности и, следовательно, получать эффективные проектные решения.

Пособие состоит из четырех глав.

В первой главе изложены основы теории вероятностей в приложении к задачам оценки прочностных характеристик материалов.

Во второй главе рассматриваются методы расчета строительных конструкций с учетом изменчивости внешних воздействий и прочности материалов.

В третьей главе содержатся основы теории надежности, рассмотрены методы оценки надежности строительных конструкций и методы проектирования с заданным уровнем безопасности (риска).

В четвертой главе рассматриваются случайные функции: основные понятия, характеристики и действия над ними.

В пособии приведены примеры, наглядно иллюстрирующие сравнение нормативного метода расчета конструкций по предельным состояниям и прямого вероятностного метода расчета с оценкой надежности, проектирование с заданным уровнем надежности.

# 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

## 1.1. Основные понятия

*Испытанием (опытом)* в теории вероятностей принято называть наблюдение какого-либо явления при соблюдении определенных условий, которые должны строго выполняться каждый раз при повторении данного испытания. Если то же самое явление наблюдается при других условиях, то это уже другое испытание. Под соблюдением условий данного испытания имеется в виду постоянство значений всех факторов, контролируемых в данном испытании.

Результаты испытаний можно охарактеризовать качественно и количественно.

*Событием* называется какое-либо явление, которое может наблюдаться или не наблюдаться при данном испытании. Регистрация события является качественной характеристикой результатов испытания.

События делятся:

на *невозможные* — в результате опыта никогда не произойдут;

*достоверные* — в результате опыта происходят всегда;

*случайные* — в результате опыта событие может произойти или не произойти.

Теория вероятностей рассматривает случайные события, предполагая, что испытание может быть повторено неограниченное число раз.

Примерами события, часто приводимыми в учебниках по теории вероятностей, являются выпадение определенного числа очков (от 1 до 6) при бросании игральной кости и вытаскивание из урн определенных сочетаний разноцветных шаров.

События в теории вероятностей принято обозначать начальными прописными латинскими буквами  $A, B, C, \dots$

*Несовместными* называются случайные события, если появление одного исключает появление другого. *Совместными* называются события, которые могут наступить одновременно.

Если в результате опыта произойдет хоть одно из некоей группы событий, то они образуют *полную группу*. Появление хотя бы одного события из полной группы — достоверное событие.

Если по условиям испытания нет никаких оснований предполагать, что одно из событий появляется чаще других, то все события являются *равновозможными*.

*Независимыми* называются события, появление одного из которых не изменяет вероятности появления других.

Количественная характеристика испытания состоит в определении значений некоторых величин, которые определяются при данном испытании. Эти величины могут принимать различные значения в результате испытания из-за большого числа неконтролируемых факторов. Так как до испытания невозможно предсказать точное значение величины, поэтому она называется *случайной величиной*.

Вероятностью какого-либо события называется численное выражение возможности его наступления.

В некоторых простейших случаях вероятности событий могут быть легко определены непосредственно исходя из условий испытаний.

Например, пусть испытание имеет  $n$  возможных несовместных событий, которые могут появиться в результате данного испытания, причем при каждом повторении испытания возможно наступление только одного варианта события. Также по условиям испытания все события являются равновозможными.

Предположим, что при  $n$  равновозможных несовместных событиях интерес для нас представляет некоторое событие  $A$ , появляющееся при каждом из  $m$  исходов и не появляющееся при остальных  $n - m$  исходах. Тогда говорят, что в данном испытании имеется  $n$  случаев, из которых  $m$  благоприятствуют появлению события  $A$ .

Вероятность события  $A$  равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию  $A$ , к общему числу всех равновозможных несовместных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) является классическим определением вероятности по Лапласу.

Дадим статистическое определение вероятности.

Пусть было проведено  $N$  испытаний, в результате которых событие  $A$  появилось ровно  $n_N$  раз. Отношение  $n_N / N$  называется частотой (относительной частотой) события.

При большом числе повторений испытания частота события мало изменяется и колеблется около некоторого определенного значения, в то время как при малом числе повторений она принимает различные, совершенно случайные значения. При неограниченном повторении испытания частота события будет стремиться к вполне определенному числовому значению. Такое число  $P(A)$ , связанное с событием  $A$ , называется вероятностью события  $A$ .

Математически неограниченное число повторений испытания записывается в виде

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_N}{N}.$$

Так как  $n_N < N$ , то вероятность события  $A$  находится в интервале  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

*Закон больших чисел (теорема Бернулли):* если  $N$  достаточно велико, то с вероятностью сколь угодно близкой к единице, отличие относительной частоты от вероятности события  $A$  меньше любого наперед заданного положительного числа

$$P(|n_N / N - P(A)| > \xi) = 1.$$

Этот закон позволяет на практике при большом числе испытаний принимать вероятность случайного события приближенно равной относительной частоте этого события.

## 1.2. Действия над событиями

Поле событий называется совокупность всех случайных событий данного испытания, для которых определены вероятности. На рис. 1.1 поле событий показано прямоугольной областью.

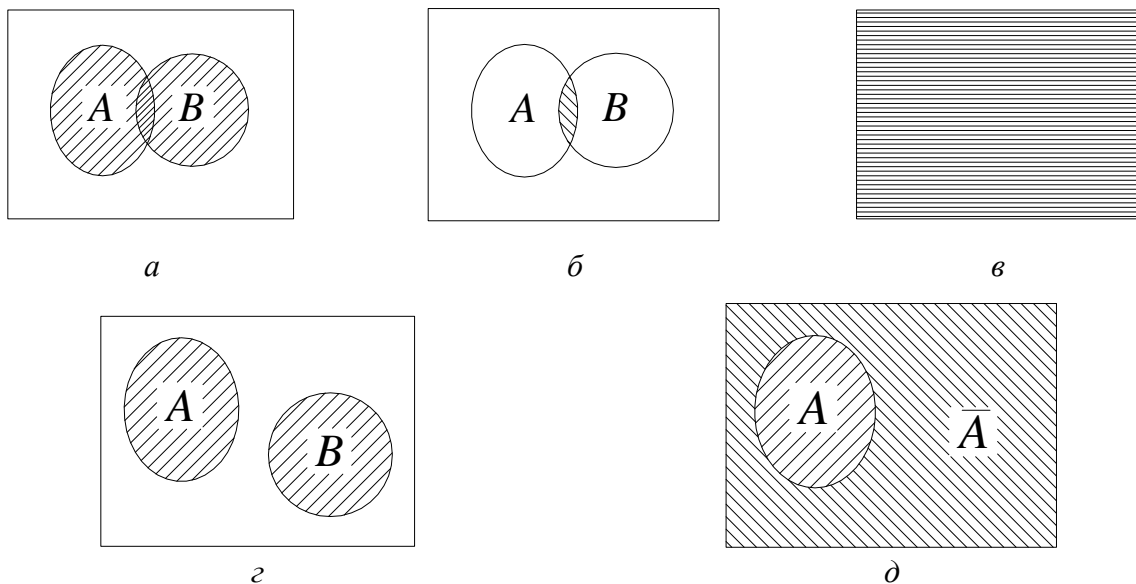


Рис. 1.1. Действия над событиями:  $a$  — объединение;  $б$  — пересечение;  $в$  — достоверное событие;  $г$  — несовместные события;  $д$  — противоположные события

1. Суммой (объединением) событий называется сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий  $A$  и  $B$ . Объединение событий обозначается как  $A \cup B$  или  $A + B$  (рис. 1.1,  $a$ ).



2. Произведением (пересечением) событий  $A$  и  $B$  называется их совместное появление. Обозначается произведение событий как  $A \cap B$  или  $A \cdot B$  (рис. 1.1, б).

3. Достоверным событием называется событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания. Оно обозначается обычно как  $E$  (рис. 1.1, в).

4. Невозможное событие — событие, которое не может произойти в результате данного испытания.

5. Несовместными называются события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе (рис. 1.1, г). Для несовместных событий  $A \cdot B = 0$ .

6. Противоположным к  $A$  событием называется событие, состоящее в не-появлении события  $A$  (рис. 1.1, д). Обозначается противоположное событие символом  $\bar{A}$ .

Рассмотрим пример на вычисление вероятности.

Пример 1.1. Испытание состоит в подбрасывании игральной кости, на каждой из граней которой проставлено число очков (от 1 до 6). Какова вероятность того, что: 1) выпадает 2 очка? 2) выпадает нечетное число очков?

*Решение 1.* В данном испытании имеется 6 равновозможных случаев (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков), так как нет оснований предполагать, что появление какого-то определенного числа очков более вероятно. Поэтому вероятность выпадения любого числа очков, в том числе и 2, при одном подбрасывании равна  $1/6$ .

Событию  $A$ , заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют три случая (выпадение 1, 3 и 5), поэтому по формуле (1.1) получаем

$$P(A) = 3 / 6 = 0,5.$$

*Решение 2.* В данном испытании имеется 2 равновозможных исхода (выпадение четного числа очков (т. е. 2, 4, 6) и нечетного), так как кость симметрична, то очевидно, что эти исходы равновозможные.

Событию  $A$ , заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствует 1 случай из двух, поэтому по формуле (1.1) получаем

$$P(A) = 1 / 2 = 0,5.$$

### 1.3. Основные правила вычисления вероятностей сложных событий

1. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(E) = 1. \tag{1.2}$$

2. Вероятность объединения (суммы) несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

$$\text{или } P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \tag{1.3}$$

Следствие 1. Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.4)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.5)$$

3. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\emptyset) = 0.$$

4. Вероятность события, противоположного событию  $A$ , равна

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.6)$$

Эта формула оказывается полезной на практике в тех случаях, когда вычисление вероятности непосредственно события  $A$  затруднительно, в то время как вероятность противоположного события находится просто.

5. Теорема сложения вероятностей.

Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

для двух событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB); \quad (1.7)$$

для любого числа совместных событий

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j} P(A_i A_j) + \sum_{i,j,k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \quad (1.8)$$

Формула (1.8) выражает вероятность суммы любого числа событий через вероятности произведений этих событий, взятых по одному, по два, по три и т. д.

6. Условная вероятность.

Если требуется найти вероятность события  $B$  при условии, что произошло некоторое другое событие  $A$ , то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности  $P(B|A)$ . Условная вероятность равна отношению вероятности произведения событий  $A$  и  $B$  к вероятности события  $A$ :

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (1.9)$$

В тех случаях, когда события  $A$  и  $B$  несовместны, условная вероятность равна нулю.

7. Определение условной вероятности в виде (1.9) дает возможность записать следующую формулу для вычисления вероятности произведения событий (*теорема умножения вероятностей*):

для двух событий

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B); \quad (1.10)$$

для любого числа событий

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2) \dots P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1}). \quad (1.11)$$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляют при условии, что все предыдущие имели место.

8. Поскольку вероятность события  $A$  (или  $B$ ) для независимых событий по определению не изменяется при появлении другого события, то условная вероятность  $P(B|A)$  совпадает с вероятностью события  $B$ , а условная вероятность  $P(A|B)$  — с  $P(A)$ .

Вероятности  $P(A)$  и  $P(B)$  в отличие от условных вероятностей называются безусловными.

$$P(A|B) = P(A), \quad P(A|B) = P(A). \quad (1.12)$$

*Теорема умножения вероятностей для независимых событий:*

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n),$$

$$\text{или } P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i), \quad (1.13)$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

9. Вероятность появления хотя бы одного события в  $n$  испытаниях

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \dots \bar{A}_n). \quad (1.14)$$

10. Формула полной вероятности.

Если событие  $A$  может произойти только при появлении одного из несовместных событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , то

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n). \quad (1.15)$$

То есть вероятность события  $A$  вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

*Пример 1.2.* В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

*Решение.* Пусть событие  $A$  — появление белого или черного шара. Разобьем это событие на более простые. Пусть  $B_1$  — появление белого шара, а  $B_2$  — черного. Тогда  $A = B_1 + B_2$  по определению суммы событий. Следовательно,  $P(A) = P(B_1+B_2)$ . Так как  $B_1$

и  $B_2$  — несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий (1.3)  $P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2)$ .

Вычислим вероятности событий  $B_1$  и  $B_2$ . В этом примере имеется 35 равновозможных исходов опыта, событию  $B_1$  (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому  $P(B_1) = 5/35$ . Аналогично, для черных шаров  $P(B_2) = 10/35$ . Следовательно,

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = 5/35 + 10/35 = 15/35 = 3/7.$$

**Пример 1.3.** Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 10 раз герб выпадет хотя бы 1 раз.

*Решение.* Пусть событие  $A$  — «герб выпадет хотя бы 1 раз». Рассмотрим обратное событие:  $\bar{A}$  — «герб не выпадет ни разу». Очевидно, что обратное событие легче чем исходное разбить на более простые. Пусть  $A_1$  — герб не выпал при первом броске,  $A_2$  — герб не выпал при втором броске, ...  $A_{10}$  — герб не выпал при 10-м броске. Все события  $A_1 \dots A_{10}$  независимы, следовательно, согласно (1.10),

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{10}) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots \cdot P(\bar{A}_{10}) = \\ &= 1 - 1/2 \cdot 1/2 \cdot \dots \cdot 1/2 = 1023/1024 = 0,99902. \end{aligned}$$

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

### 2.1. Основные понятия

Как уже было сказано, случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, неизвестно заранее какое именно. Случайные величины могут быть прерывного (дискретного) и непрерывного типа. Возможные значения прерывных величин могут быть заранее перечислены. Возможные значения непрерывных величин не могут быть заранее перечислены и непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Рассмотрим прерывную случайную величину  $X$  с возможными значениями  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Каждое из этих значений возможно, но недостоверно, и величина  $X$  примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместных событий:

$$\left. \begin{array}{l} X = x_1 \\ X = x_2 \\ \dots \\ X = x_n \end{array} \right\}.$$

Обозначим вероятности этих событий буквами  $P$  с соответствующими индексами:

$$P(X = x_1) = P_1; P(X = x_2) = P_2; \dots; P(X = x_n) = P_n. \quad (2.1)$$

Так как несовместные события (2.1) образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1,$$

то есть сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице. Эта суммарная вероятность определенным образом распределена между отдельными значениями. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если зададим это распределение, т. е. в точности укажем, какой вероятностью обладает каждое из собы-

тий (2.1). Этим устанавливается так называемый закон распределения случайной величины. Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Про случайную величину говорят, что она подчинена данному закону распределения. Простейшей формой задания этого закона является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности (табл. 2.1).

Таблица 2.1

$x_i$	$x_1$	$x_2$	....	$x_n$
$P_i$	$P_1$	$P_2$	....	$P_n$

Такая таблица называется рядом распределения случайной величины  $X$ . Графическое представление ряда распределения называется многоугольником распределения (рис. 2.1).

Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину, он является одной из форм закона распределения.

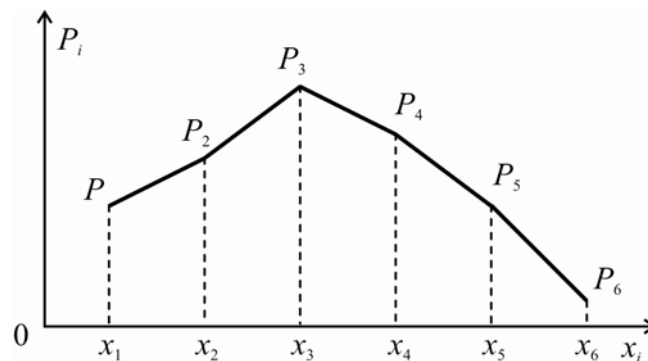


Рис. 2.1. Многоугольник распределения случайной величины

Для непрерывной случайной величины не существует ряда распределения в том смысле, в каком он существует для прерывной величины. Однако и для непрерывной величины существует «распределение вероятностей», хотя и не в том смысле, как для прерывной.

Для количественной характеристики этого распределения вероятностей удобно воспользоваться не вероятностью события  $X = x$ , а вероятностью события  $X < x$ , где  $x$  — некоторая текущая переменная. Вероятность этого события зависит от  $x$ . Эта функция называется функцией распределения случайной величины  $X$  и обозначается  $F(x)$ :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения называют интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения.

Функция распределения — универсальная характеристика случайной величины. Она существует для всех случайных величин: как прерывных, так и

непрерывных. Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т. е. является одной из форм закона распределения.

Сформируем общие свойства функции распределения.

1. Функция распределения  $F(x)$  есть неубывающая функция своего аргумента, т. е. при  $X_2 > X_1$   $F(x_2) \geq F(x_1)$ .

2. На минус бесконечности функция распределения равна нулю:

$$F(-\infty) = 0.$$

3. На плюс бесконечности функция распределения равна единице:  $F(+\infty) = 1$ .

График функции распределения  $F(x)$  в общем случае представляет собой график неубывающей функции (рис. 2.2), значения которой начинаются от 0 и доходят до 1, причем в отдельных точках функция может иметь разрывы (скачки).

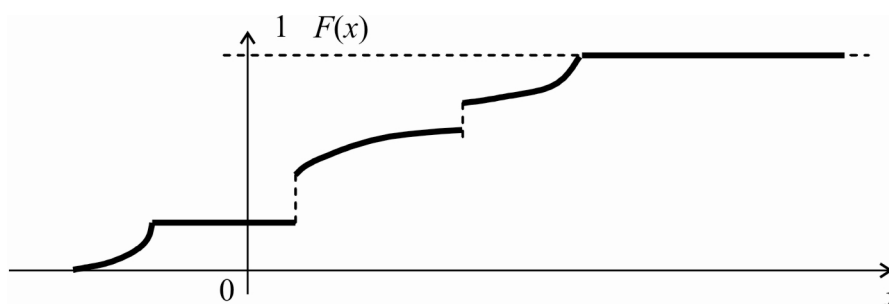


Рис. 2.2. График функции распределения

Зная ряд распределения прерывной случайной величины, можно построить функцию распределения этой величины.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Неравенство  $x_i < x$  под знаком суммы указывает, что суммирование распространяется на все те значения  $x_i$ , которые меньше  $x$ . Когда текущая переменная  $x$  проходит через какое-нибудь из возможных значений прерывной величины  $X$ , функция распределения меняется скачкообразно, причем величина скачка равна вероятности этого значения.

Случайная величина  $X$  может характеризоваться не только интегральным законом распределения  $F(x)$ , но и дифференциальным законом распределения  $f(x)$ :

$$f(x) = F'(x).$$

Функция  $f(x)$  — производная функция распределения — характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Эта функция называется плотностью распределения (плотностью вероятности) непрерывной случайной величины  $X$ . Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется кривой распределения (рис. 2.3).

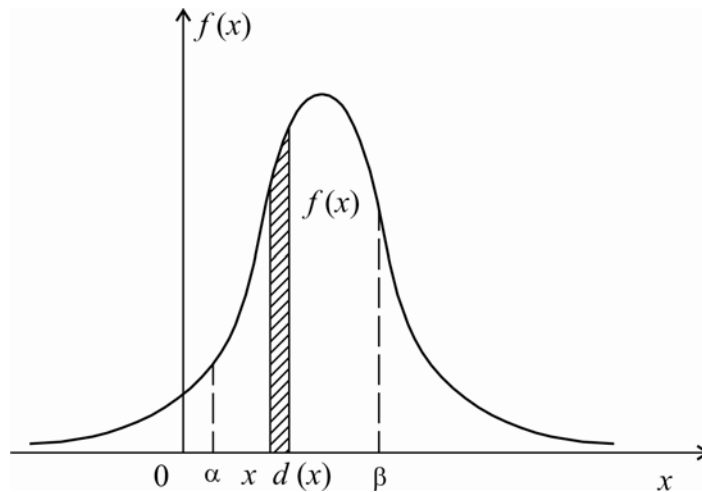


Рис. 2.3. Плотность распределения случайной величины  $X$

Плотность распределения, как и функция распределения, есть одна из форм закона распределения. В противоположность функции распределения эта форма не является универсальной: она применима только для непрерывных случайных величин. Величина  $f(x)dx$  называется элементом вероятности. Выразим вероятность попадания величины  $X$  на отрезок от  $\alpha$  до  $\beta$  (см. рис. 2.3) через плотность распределения

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Геометрическая вероятность попадания величины  $X$  на участок  $(\alpha, \beta)$  равна площади кривой распределения, опирающейся на этот участок.

Во многих вопросах практики нет необходимости характеризовать случайную величину полностью (с помощью законов распределения). Достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины: например среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего. Такие характеристики, назначение которых — выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками случайной величины.

Из характеристик положения в теории вероятностей важнейшую роль играет математическое ожидание случайной величины, которое называют средним значением случайной величины. Для дискретной случайной величины  $X$

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (2.2)$$

Для непрерывной случайной величины  $X$  математическое ожидание выражается уже не суммой, а интегралом



$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (2.3)$$

где  $F(x)$  — функция распределения случайной величины  $X$ ,  $f(x)$  — ее плотность вероятности.

Кроме характеристик положения — средних типичных значений случайной величины, употребляется еще ряд характеристик, каждая из которых описывает то или иное свойство распределения. В качестве таких характеристик применяются так называемые моменты. На практике применяются моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом порядка  $r$  или просто моментом порядка  $r$  для непрерывной случайной величины  $X$  называется математическое ожидание ее  $r$ -й степени:

$$\alpha_r[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Для прерывных случайных величин  $X$  начальный момент  $r$ -го порядка определяется в виде:

$$\alpha_r[X] = \sum_{i=1}^n x_i^r p_i. \quad (2.5)$$

Более общей теоретической характеристикой случайной величины является центральный момент порядка  $r$ , определяемый формулой:

$$\mu_r = M[(X - m_x)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^r f(x) dx. \quad (2.6)$$

Центрированной случайной величиной, соответствующей величине  $X$ , называется отклонение случайной величины  $X$  от ее математического ожидания:

$$X^0 = X - m_x.$$

Тогда центральный момент порядка  $r$  случайной величины  $X$  можно будет определить как математическое ожидание  $r$ -й степени соответствующей центрированной случайной величины

$$\mu_r = M[(X^0)^r].$$

Из формулы (2.6) следует, что для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю. Центральный момент второго порядка может быть принят в качестве характеристики разброса возможных значений случайной величины и называется дисперсией случайной величины. Дисперсию случайной величины  $X$  обозначим  $D[X]$ , или короче  $D_x$

$$D_x = D[X] = M[(X^0)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \quad (2.7)$$

Для непосредственного вычисления дисперсии применяются следующие формулы:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i; \quad (2.8)$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx, \quad (2.9)$$

соответственно для прерывных и непрерывных величин.

Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины. Для практики удобнее иметь меру разброса случайной величины, имеющую ту же размерность, что и сама случайная величина. В качестве такой меры обычно принимают среднее квадратическое отклонение случайной величины, определяемое как положительный корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (2.10)$$

Полученная величина называется средним квадратическим отклонением (иначе — «стандартом») случайной величины  $X$ .

Математическое ожидание  $m_x$  и дисперсия  $D_x$  (или стандарт  $\sigma_x$ ) — наиболее часто применяемые характеристики случайной величины. Они характеризуют наиболее важные черты распределения: его положение и степень разбросанности.

Пример 2.1. Случайная выборка 100 испытаний образцов бетона на прочность при сжатии приведена в табл. 2.2.

Таблица 2.2

23,70	22,60	21,60	24,40	22,00	25,60	20,10	25,30	26,70	22,40
21,70	23,70	23,30	22,80	<b>18,20</b>	23,60	22,50	24,00	19,60	21,60
22,60	22,30	24,60	20,70	22,90	20,00	24,40	23,80	25,30	24,70
24,10	21,70	23,10	23,80	23,00	24,70	24,60	21,30	22,80	23,70
21,90	22,10	21,40	19,90	22,40	22,80	22,30	23,40	23,70	24,80
19,80	<b>26,90</b>	24,50	22,70	22,10	23,30	20,10	24,00	22,80	21,40
22,00	20,90	22,00	24,70	22,60	24,30	24,30	21,90	20,50	21,00
23,50	21,00	22,30	21,40	21,40	23,00	23,30	22,00	24,90	21,50
24,80	22,10	21,40	22,10	23,70	22,70	23,40	24,00	23,60	23,50
21,50	22,90	21,60	21,50	21,70	21,80	18,80	23,20	22,30	24,50

Для построения статистического ряда распределения прочности бетона при сжатии (табл. 2.4) необходимо приведенную выше случайную выборку разделить на 8—10 одинаковых разрядов, а также выделить из нее минимальное и максимальное значения (18,20 и 26,90 соответственно). Далее для определения интервала каждого из разрядов находится величина разряда как отношение разницы между граничными значениями выборки к общему количеству ее элементов ( $x_p = (26,90 - 18,20) / 100 = 0,87$ ) (табл. 2.3).

Таблица 2.3

				21,70						
				21,70	22,60					
				21,70	22,60					
				21,80	22,60					
				21,90	22,70					
				21,90	22,70					
			20,90	22,00	22,80	23,50				
			21,00	22,00	22,80	23,50	24,30			
			21,00	22,00	22,80	23,60	24,30			
			21,30	22,00	22,80	23,60	24,40			
			21,40	22,10	22,90	23,70	24,40			
			21,40	22,10	22,90	23,70	24,50			
			21,40	22,10	23,00	23,70	24,50			
			21,40	22,10	23,00	23,70	24,60			
			21,40	22,30	23,10	23,70	24,60			
			21,50	22,30	23,20	23,80	24,70			
		20,00	21,50	22,30	23,30	23,80	24,70			
		20,10	21,50	22,30	23,30	24,00	24,70			
	19,60	20,10	21,60	22,40	23,30	24,00	24,80	25,30		
18,20	19,80	20,50	21,60	22,40	23,40	24,00	24,80	25,30	26,70	
18,80	19,90	20,70	21,60	22,50	23,40	24,10	24,90	25,60	26,90	

$m_i$	2	3	5	15	21	20	15	14	3	2
-------	---	---	---	----	----	----	----	----	---	---

В табл. 2.4 в первой строке в порядке возрастания вдоль оси абсцисс записываются разряды, во второй — соответствующие им интервалы  $I_i$ , полученные следующим образом:  $I_I = x_{\min} + x_p$ ,  $I_{II} = I_I + x_p$ , ...,  $I_X = I_{IX} + x_p$ .

В третьей строке указывается количество попаданий  $m_i$  значений случайной величины в соответствующий интервал.

В четвертой строке записываются частоты соответствующих разрядов, которые вычисляются по формуле  $p_i = \frac{m_i}{N}$ .

Таблица 2.4

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
$I_i$	[18,20; 19,07]	[19,07; 19,94]	[19,94; 20,81]	[20,81; 21,68]	[21,68; 22,55]	[22,55; 23,42]	[23,42; 24,29]	[24,29; 25,16]	[25,16; 26,03]	[26,03; 26,90]
$m_i$	2	3	5	15	21	20	15	14	3	2
$p_i$	0,02	0,03	0,05	0,15	0,21	0,2	0,15	0,14	0,03	0,02

Построение гистограммы плотности распределения (рис. 2.4) выполняется следующим образом: вдоль оси абсцисс в порядке возрастания откладываются разряды, а затем на каждом из разрядов как на основании строится прямоугольник, площадь которого рав-

на частоте данного разряда. Таким образом, вдоль оси ординат откладываются значения

$$y_i = \frac{p_i}{I}.$$

В рассматриваемой задаче  $I_i = I = x_p = 0,87$ , так как исследуемый диапазон значений разбит на десять одинаковых интервалов (разрядов). Следовательно,

$$y_I = \frac{p_I}{I} = \frac{0,02}{0,87} = 0,02, \quad y_{II} = \frac{p_{II}}{I} = \frac{0,03}{0,87} = 0,03, \quad y_{III} = \frac{p_{III}}{I} = \frac{0,05}{0,87} = 0,06,$$

$$y_{IV} = \frac{p_{IV}}{I} = \frac{0,15}{0,87} = 0,17, \quad y_V = \frac{p_V}{I} = \frac{0,21}{0,87} = 0,24, \dots, \quad y_X = \frac{p_X}{I} = \frac{0,02}{0,87} = 0,02.$$

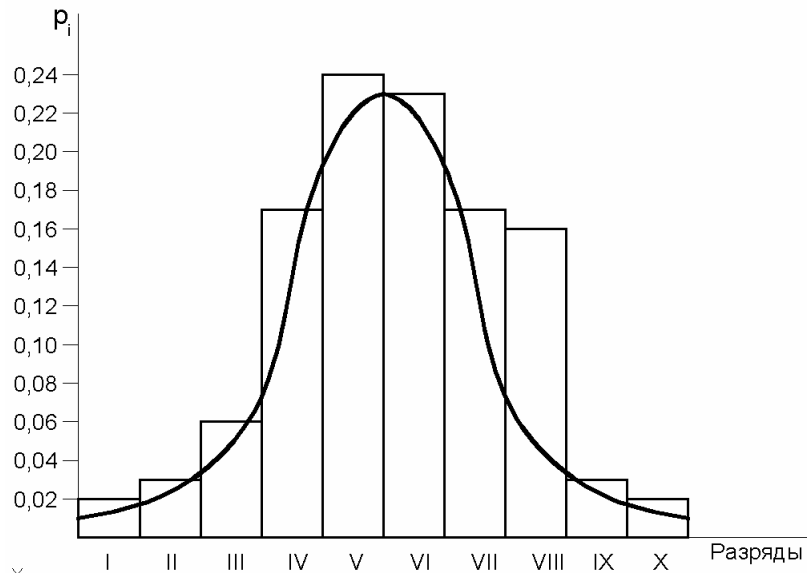


Рис. 2.4. Гистограмма плотности распределения

Гистограмма функции распределения (рис. 2.5) строится следующим образом: вдоль оси абсцисс в порядке возрастания откладываются разряды, а затем на каждом из разрядов строится прямоугольник, ордината которого равна сумме вероятностей (частот). Следовательно,  $y_I = p_I$ ,  $y_{II} = p_I + p_{II}$ ,  $y_{III} = p_I + p_{II} + p_{III}$  и т. д.

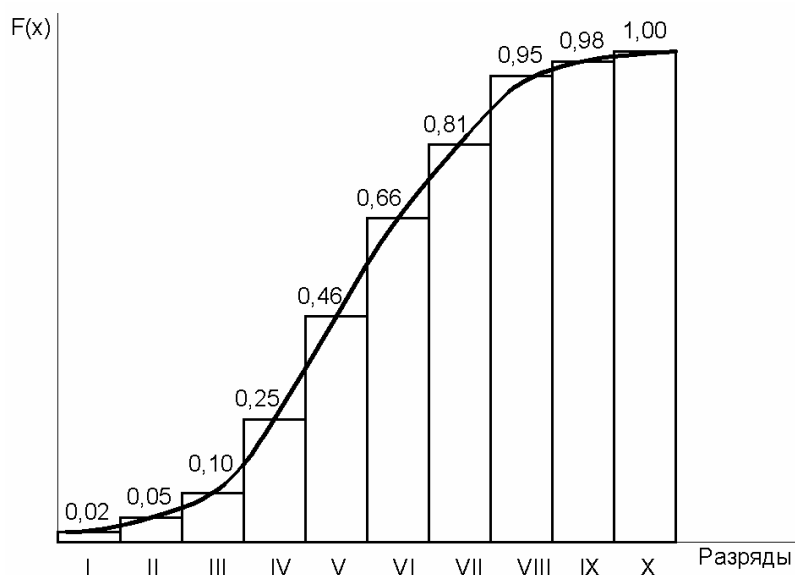


Рис. 2.5. Гистограмма функции распределения

Математическое ожидание (марочная прочность бетона) определяется по формуле

$$M[R] = \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Таким образом,

$$M[R] = \frac{\sum_{i=1}^{100} 18,20 + 18,80 + 19,60 + \dots + 26,70 + 26,90}{100} = \frac{2271,4 \text{ МПа}}{100} = 22,71 \text{ МПа}.$$

Дисперсия определяется по формуле  $D[R] = \sum_i (R_i - \bar{R})^2 \cdot p_i$ .

Таким образом,

$$D[R] = (18,20 - 22,71)^2 \cdot 0,02 + (18,80 - 22,71)^2 \cdot 0,02 + (19,60 - 22,71)^2 \cdot 0,03 + \dots \\ \dots + (26,70 - 22,71)^2 \cdot 0,02 + (26,90 - 22,71)^2 \cdot 0,02 = 2,54 \text{ МПа}^2.$$

Среднеквадратическое отклонение определяется по формуле  $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ .

Тогда  $\sigma[R] = \sqrt{D[R]} = 1,59 \text{ МПа}$ .

Коэффициент вариации прочности бетона определяется по формуле

$$f[R] = \frac{\sigma[R]}{M[R]} = 0,07.$$

На основании полученной информации определяется класс бетона по формуле  $B = \bar{R}(1 - 1,64 \cdot f[R])$ .

Тогда  $B = 22,71 \cdot (1 - 1,64 \cdot 0,07) = 20,1 \text{ МПа}$ .

## 2.2. Законы распределения

### 2.2.1. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения. Объяснить причины широкого распространения нормального закона распределения впервые удалось А. М. Ляпунову. Он показал, что если случайная величина может рассматриваться как сумма большого числа малых слагаемых, то при достаточно общих условиях закон распределения этой случайной величины близок к нормальному независимо от того, каковы законы распределения отдельных слагаемых. А так как практически случайные величины в большинстве случаев бывают результатом действия большого числа различных причин, то нормальный закон оказывается наиболее распространенным законом распределения.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.11)$$

Кривая распределения нормального закона имеет симметричный холмообразный вид (рис. 2.6).

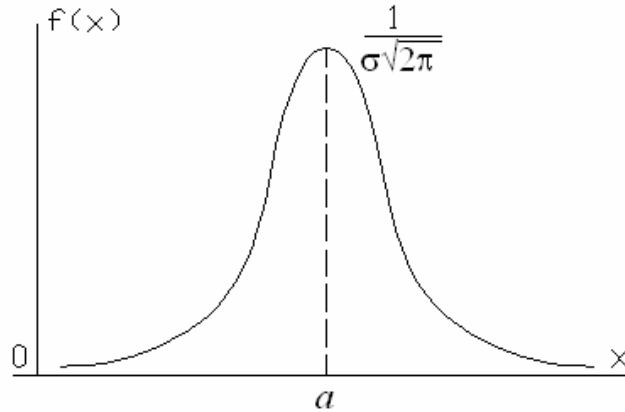


Рис. 2.6. Нормальный закон распределения

Максимальная ордината кривой, равная  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ , соответствует точке  $x = a$ . По мере удаления от точки  $a$  плотность распределения падает и при  $x \rightarrow \pm\infty$  кривая асимптотически приближается к оси абсцисс. Эта кривая симметрична относительно точки  $x = a$ . Поэтому параметр  $a$  называется центром распределения или центром рассеивания случайной величины  $X$ .

Вычислим основные числовые характеристики нормально распределенной случайной величины. Математическое ожидание выражается формулой:

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.12)$$

Производя замену переменных  $t = x - a$ , получим

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+t) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = a. \quad (2.13)$$

Дисперсия случайной величины  $x$

$$D[x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (2.14)$$

Произведем замену переменной

$$\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2\pi}} = t,$$

имеем

$$D[x] = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \quad (2.15)$$

Интегрируя по частям, получим

$$D[x] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 2te^{-t^2} dt = \sigma^2. \quad (2.16)$$

Выведем формулу для вероятности попадания значения нормально распределенной случайной величины  $x$  в данный интервал  $(\alpha, \beta)$ :

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (2.17)$$

После замены переменных  $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$  эта формула принимает вид:

$$P(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}}^{\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (2.18)$$

Этот интеграл не выражается через элементарные функции. Для его вычисления вводят новую функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (2.19)$$

Эта функция называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей. Для нее составлены таблицы, подобные таблицам логарифмов и тригонометрических функций. Пользуясь функцией Лапласа, запишем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.20)$$

Подставляя это выражение в (2.17), получим

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right). \quad (2.21)$$

В случае симметричного относительно центра рассеивания интервала  $(\alpha, \beta)$  величины  $\alpha$  и  $\beta$  выражаются в виде  $\alpha = m_x - \varepsilon$ ,  $\beta = m_x + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$ , и формула (2.21) принимает вид

$$P(|x - m_x| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \quad (2.22)$$

Учитывая нечетность функции  $\Phi(x)$ , получим

$$P(|x - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x}\right). \quad (2.23)$$

Формулы (2.21) и (2.22) дают возможность вычислять попадания значения нормально распределенной случайной величины в любой заранее заданный отрезок числовой оси.

**Пример 2.2.** Найти вероятности  $P_1, P_2, P_3, P_4$  попадания значения нормально распределенной случайной величины в отрезке длины  $2\sigma_x, 4\sigma_x, 6\sigma_x, 8\sigma_x$ , расположенные симметрично относительно центра распределения. По формуле (2.23) находим

$$P_n = P(|x - m_x| < n\sigma_x) = 2\Phi(n).$$

По таблице находим:  $\Phi(1) = 0,3413$ ;  $\Phi(2) = 0,4772$ ;  $\Phi(3) = 0,49865$ ;  $\Phi(4) = 0,499968$ . Искомые вероятности равны

$$P_1 = 0,6828; P_2 = 0,9544; P_3 = 0,9973; P_4 = 0,999936.$$

Таким образом, только около 32 % значений нормально распределенной случайной величины отклоняются от ее математического ожидания больше чем на  $\sigma_x$ ; только около 5 % отклоняются больше чем на  $2\sigma_x$ ; только около 0,3 % отклоняются больше чем на  $3\sigma_x$  и только около 0,006 % отклоняются больше чем на  $4\sigma_x$ . Это дает основание в задачах практики считать отклонения, превышающие  $3\sigma_x$  для нормально распределенной случайной величины, практически невозможными, и все ее возможные значения считать ограниченными интервалом  $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$ .

### 2.2.2. Экспоненциальный закон распределения

Непрерывная случайная величина  $X$ , принимающая только положительные значения, имеет показательное (или экспоненциальное) распределение, если

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Положительная величина  $\lambda$  называется параметром показательного распределения и полностью определяет его. Найдем функцию распределения случайной величины. При  $t < 0$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \int_{-\infty}^t 0 dt = 0.$$

При  $t \geq 0$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x} \Big|_0^t = -(-e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.25)$$



Кривая экспоненциального распределения показана на рис. 2.7, а график функции распределения  $F(x)$  — на рис. 2.8.

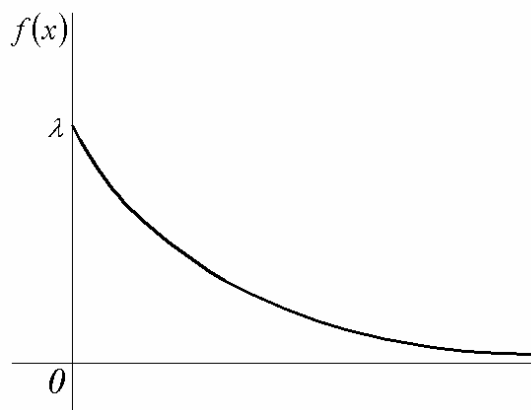


Рис. 2.7. Кривая экспоненциального распределения

Числовые характеристики случайной величины

$$M[X] = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx.$$

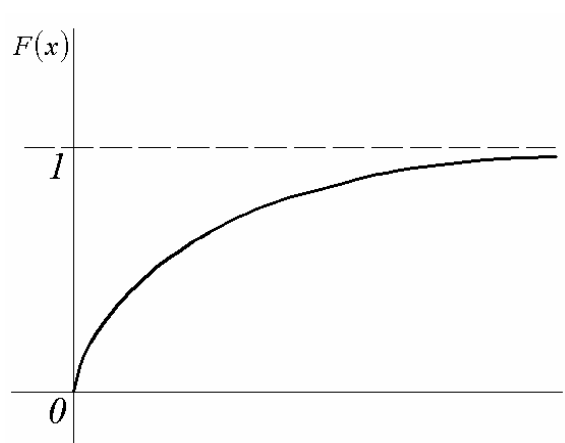


Рис. 2.8. График функции распределения

Проводя интегрирование по частям и учитывая, что при  $x \rightarrow \infty$   $e^{-\lambda x}$  стремится к нулю быстрее, чем возрастает любая степень  $x$ , находим

$$m_x = 1/\lambda. \quad (2.26)$$

Дисперсия случайной величины

$$D[X] = \alpha_2 - m_x^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2.27)$$

Показательное распределение тесно связано с простейшим (стационарным пуассоновским) потоком событий. Интервал времени  $T$  между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром, равным интенсивности потока  $\lambda$ .

### 2.2.3. Логарифмически нормальный закон распределения

Говорят, что случайная величина  $Y$  имеет логарифмически нормальное распределение, если ее логарифм  $\ln Y = X$  распределен нормально, то есть если

$$Y = e^X, \quad (2.28)$$

где величина  $X$  имеет нормальное распределение.

Плотность логнормального распределения задается формулой

$$f(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad y > 0. \quad (2.29)$$

Математическое ожидание и дисперсию логнормального распределения определяют по формулам:

$$M(Y) = \exp\left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad D[Y] = e^{2(2\sigma^2+a)^2 - a^2} - e^{2a+\sigma^2}. \quad (2.30)$$

Кривая этого распределения изображена на рис. 2.9.

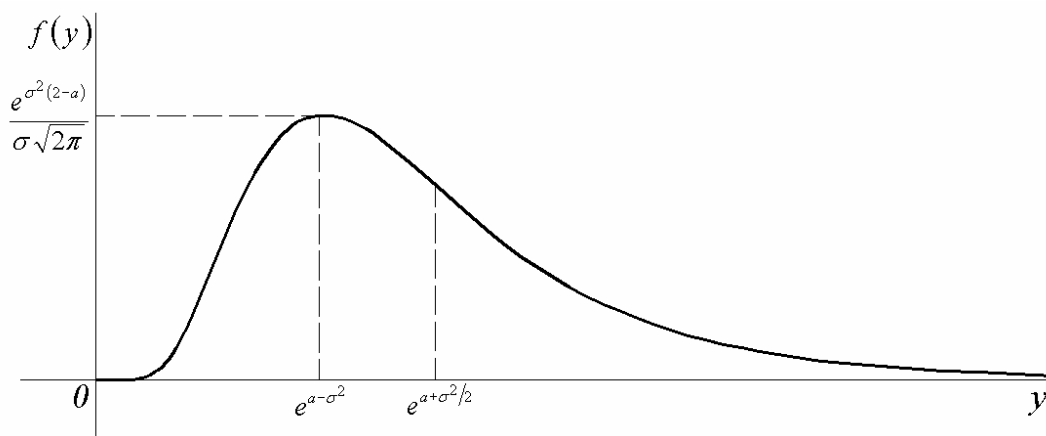


Рис. 2.9. Кривая логарифмически нормального распределения

Логарифмически нормальное распределение встречается в ряде технических задач. Оно дает распределение размеров частиц при дроблении, содержания элементов в минералах в изверженных горных породах, численности рыб в море и т. д. Встречается такое распределение во всех задачах, где логарифм рассматриваемой величины можно представить в виде суммы большого количества независимых равномерно малых величин.

$$\ln Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

или

$$Y = \prod_{k=1}^n e^{X_k}, \quad (2.31)$$

где  $e^{X_k}$  независимы.

## 2.2.4. Распределение Рэлея

Для распределения Рэлея:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]; \quad p(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]; \quad \lambda(t) = -\frac{t^2}{2\sigma^2}. \quad (2.32)$$

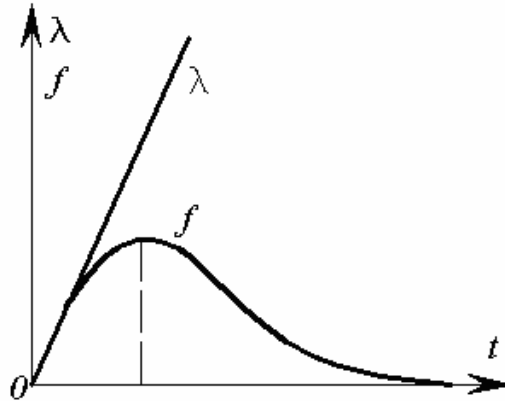


Рис. 2.10. График распределения Рэлея

Параметр распределения Рэлея, обычно обозначаемый  $\sigma$ , является модой этого распределения. Его не нужно смешивать со средним квадратическим отклонением  $\sigma_t$ . Для распределения Рэлея математическое ожидание

$$m_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma = 1,253\sigma, \quad (2.33)$$

а дисперсия

$$\sigma_t^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 = 0,4292\sigma^2. \quad (2.34)$$

График, характеризующий распределение Рэлея, показан на рис. 2.10.

## 2.2.5. Гамма-распределение

Плотность гамма-распределения

$$f(t) = \frac{\lambda_0^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} \exp[-\lambda_0 t], \quad (2.35)$$

где  $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u} du$  — гамма-функция.

В теории надежности гамма-распределение обычно используется при целом  $r$ . При  $r = 1$  получается показательное распределение. В данном случае показательное распределение — это распределение наработки до первого отказа. При целом  $r > 1$  гамма-распределение является распределением суммы  $r$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром  $\lambda_0 = 1/m_{t_0}$ . Гамма-распределение при целом  $r$  иногда называют распределением Эрланга. Для такого распределения:

$$f(t) = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)!} \exp[-\lambda_0 t]; \quad (2.36)$$

$$p(t) = \exp[-\lambda_0 t] \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}; \quad (2.37)$$

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{(\lambda_0 t)^{r-1}}{(r-1)! \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \quad (2.38)$$

Математическое ожидание и дисперсия:

$$m_t = \frac{r}{\lambda_0}, \quad \sigma_t^2 = \frac{r}{\lambda_0^2}. \quad (2.39)$$

Графики гамма-распределения приведены на рис. 2.11.

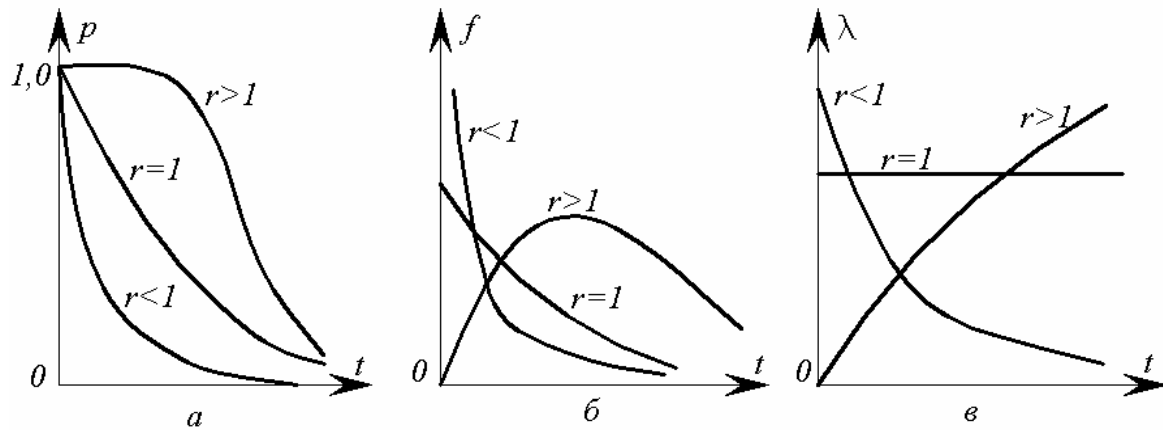


Рис. 2.11. Графики гамма-распределения: а — функции надежности; б — кривые распределения наработки до появления  $r$  отказов; в — интенсивности отказов

При больших  $r$  гамма-распределение сходится к нормальному распределению с параметрами

$$m_{t_0} = r m_t; \quad \sigma_{t_0}^2 = r \sigma_t^2.$$

### 2.2.6. Равномерный закон распределения

Случайная величина  $X$  называется распределенной равномерно на отрезке  $[a, b]$ , если ее плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases} \quad (2.40)$$

Все возможные значения равномерно распределенной случайной величины лежат в пределах некоторого интервала; кроме того, в пределах этого

интервала все значения случайной величины одинаково вероятны (обладают одной и той же плотностью вероятности). Равномерное распределение реализуется в экспериментах, где наудачу ставится точка на отрезке  $[a, b]$ . Равномерно распределенная случайная величина встречается также в измерительной практике при округлении отчетов измерительных приборов до целых делений шкал. Ошибка при округлении отчета до ближайшего целого деления является случайной величиной  $X$ , которая может принимать с постоянной плотностью вероятности любое значение между двумя соседними целыми делениями.

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины равны соответственно:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.41)$$

График плотности равномерного распределения изображен на рис. 2.12.

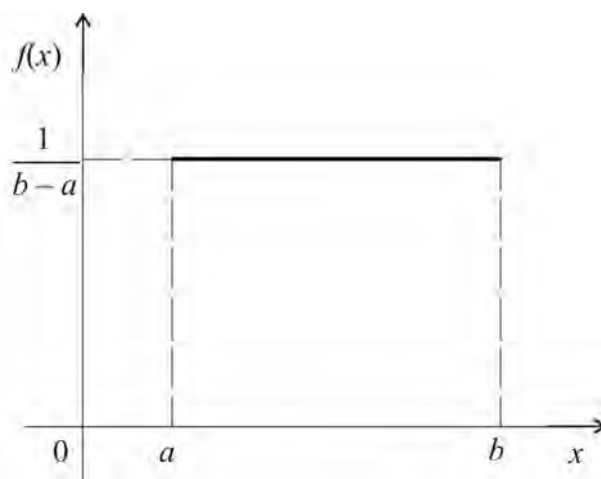


Рис. 2.12. Плотность вероятности равномерного распределения

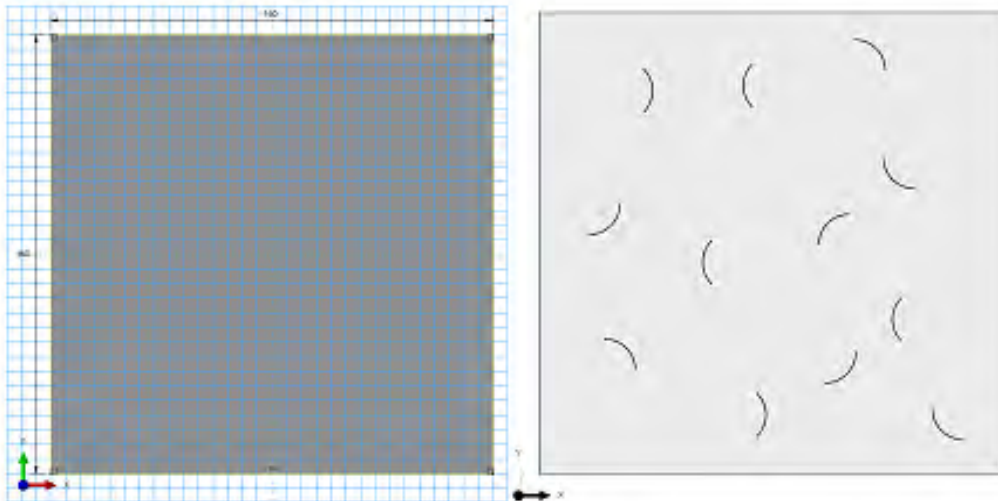
В качестве примера применения равномерного закона распределения можно привести задачу моделирования микротрещин, возникающих вокруг заполнителя в бетонном образце (рис. 2.13, а), с последующим их развитием при увеличении нагрузки вплоть до разрушения (рис. 2.13, б). Условно принято, что заполнитель имеет круглую форму. Расчет проводился в ПК «Abaqus 6.13».

### 2.2.7. Треугольное распределение

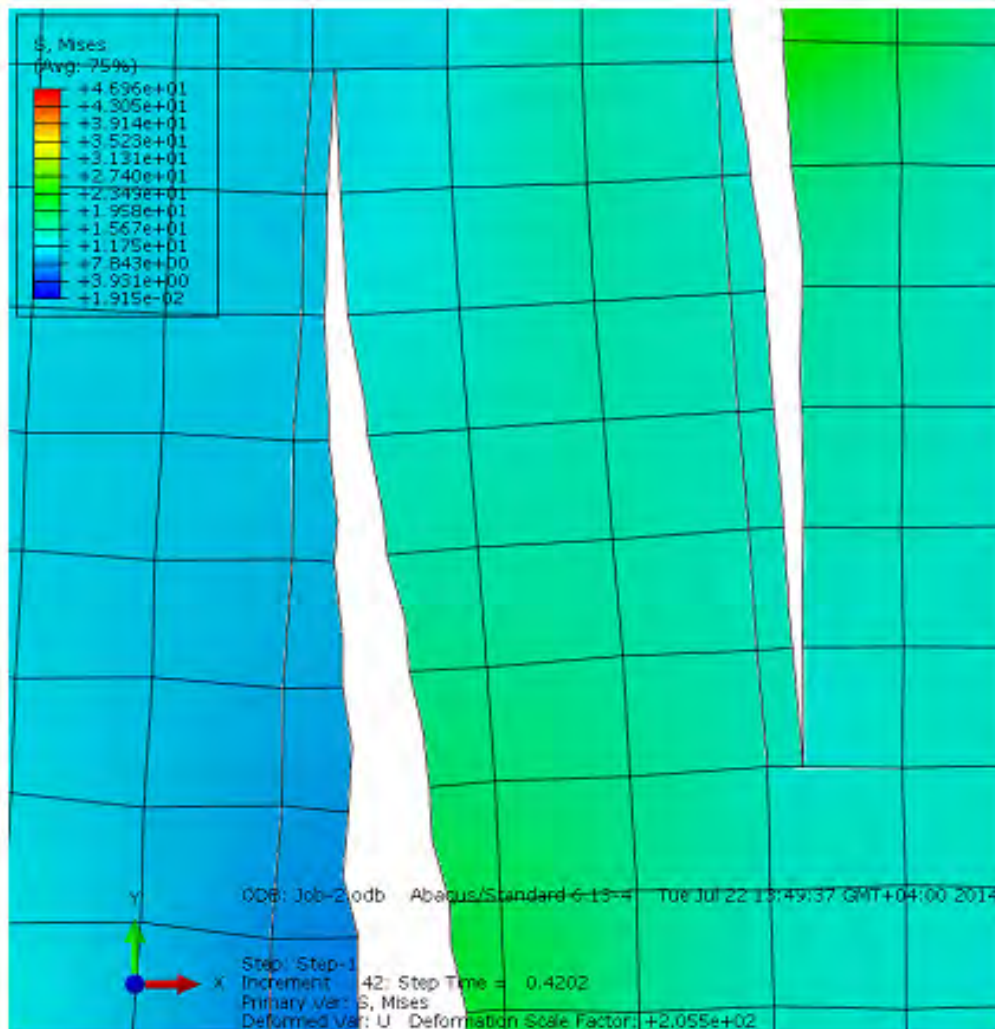
Треугольное распределение характеризует случайные величины, имеющие ограниченную область возможных значений  $(t_n, t_k)$ . Положение и форму треугольного распределения характеризуют три параметра:  $t_n, t_k$  — границы области возможных значений;  $t_m$  — мода (рис. 2.14).

Если обозначить значение плотности распределения в точке моды

$$f(t_m) = h, \text{ то } \frac{1}{2}h(t_k - t_n) = 1. \quad (2.42)$$



*a*



*б*

Рис. 2.13. Моделирование микротрещин в бетонном образце при помощи равномерного распределения: *a* — вид образца и его трещин; *б* — напряженно деформированное состояние в образце: нагрузка в 12,61 МПа. Раскрытие трещины и КЭ-сетка при использовании XFEM

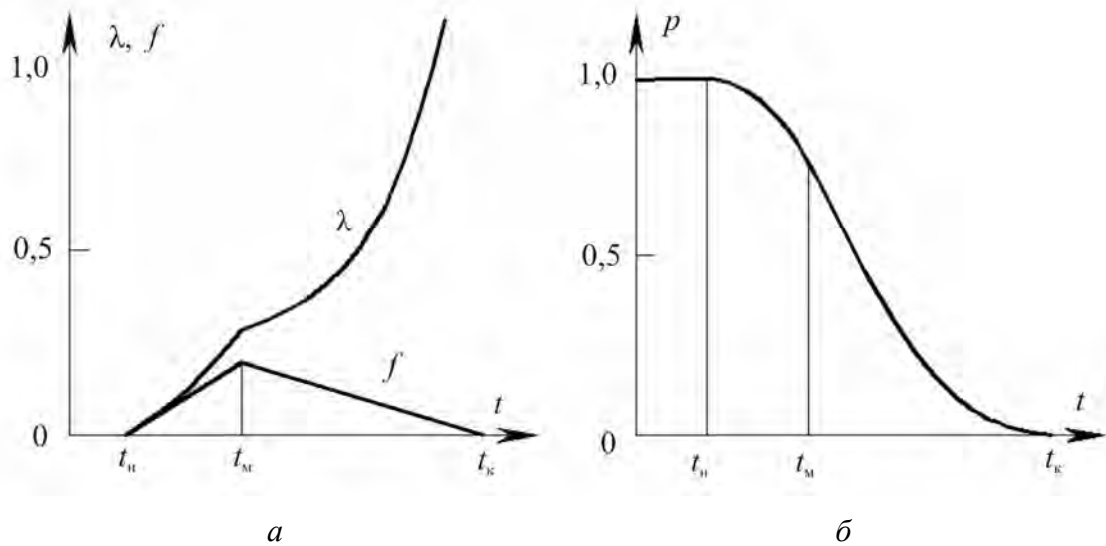


Рис. 2.14. Треугольное распределение случайной величины: *a* — графики плотности распределения  $f(t)$  и интенсивности отказов;  $\lambda(t)$ ; *б* — график функции надежности  $p(t)$

Плотность распределения

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2(t-t_H)}{(t_K-t_H)(t_M-t_H)} & \text{при } t_H \leq t \leq t_M; \\ \frac{2(t_K-t)}{(t_K-t_H)(t_K-t_M)} & \text{при } t_M \leq t \leq t_K. \end{cases} \quad (2.43)$$

Функция надежности

$$p(t) = \begin{cases} 1 - \frac{(t-t_H)^2}{(t_K-t_H)(t_M-t_H)} & \text{при } t_H \leq t \leq t_M; \\ \frac{(t_K-t)^2}{(t_K-t_H)(t_K-t_M)} & \text{при } t_M \leq t \leq t_K. \end{cases} \quad (2.44)$$

Интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{2(t-t_H)}{(t_K-t_H)(t_M-t_H) - (t-t_H)^2} & \text{при } t_H \leq t \leq t_M; \\ \frac{2}{t_K-t} & \text{при } t_M \leq t \leq t_K. \end{cases} \quad (2.45)$$

Математическое ожидание

$$m_t = \int_{t_H}^{t_K} t f(t) dt = \frac{1}{3}(t_H + t_M + t_K). \quad (2.46)$$

### 2.2.8. Распределение Гумбеля (двойное экспоненциальное распределение)

Этот тип распределения не ограничен на обоих концах. Для наибольших и наименьших значений функция распределения закона Гумбеля имеет вид:

$$F_u(x) = \exp\{-\exp[-a(x-u)]\}, \quad (2.47)$$

$$F_v(x) = 1 - \exp\{-\exp[a(x-u)]\}. \quad (2.48)$$

Соответственно плотности распределения

$$p_u(x) = a \cdot \exp\{-a(x-u) - \exp[-a(x-u)]\}, \quad (2.49)$$

$$p_v(x) = a \cdot \exp\{a(x-u) - \exp[a(x-u)]\}. \quad (2.50)$$

Распределение Гумбеля зависит от двух параметров  $a$  и  $u$ . Они связаны с математическим ожиданием  $m_u$  и стандартом  $\sigma_u$  распределения максимальных значений следующими зависимостями:

$$m_u = u + \frac{0,577216}{a}, \quad (2.51)$$

$$\sigma_u = \frac{\pi}{a\sqrt{6}} = \frac{1,28255}{a}, \quad (2.52)$$

из которых можно вычислить параметры закона Гумбеля:

$$a = \frac{1,28255}{\sigma_u}; \quad u = m_u - \frac{0,577216}{a}. \quad (2.53)$$

Аналогично для минимальных значений

$$a = \frac{1,28255}{\sigma_v}; \quad u = m_v - \frac{0,577216}{a}. \quad (2.54)$$

Исходные распределения, экстремальные значения которых подчиняются закону Гумбеля, также относятся к экспоненциальному типу, быстро сходящемуся к нулю и единице. В частности, это относится к нормальному закону распределения. Закон Гумбеля применяется в теории надежности для описания наибольших или наименьших значений в последовательности случайных величин, в частности, при статистическом анализе снеговых нагрузок.

**Пример 2.3.** Рассмотрим построение распределений максимальных и минимальных значений для нормально распределенной случайной величины  $\tilde{X}$  со следующими параметрами распределения: математическое ожидание  $m_x = 10$ , стандарт  $\sigma_x = 2$ . Плотность распределения для нормального закона

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{8}}. \quad (2.55)$$



Получить реализации нормального закона распределения с заданными параметрами можно, например, в среде Mathcad, воспользовавшись датчиком случайных чисел с нормальным распределением:  $\text{norm}(n, mx, \sigma x) = \text{norm}(100, 10, 2)$ . Задав  $k = 100$ , получим 100 выборок по  $n = 100$  реализаций исходной случайной величины  $\tilde{X}$ . Для каждой выборки находим максимальное  $u_i$  и минимальное  $v_i$  значения ( $i = 1, 2, \dots, 100$ ), сформировав выборку максимальных  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{100}\}$  и минимальных  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{100}\}$  значений. Ниже приведены по 10 реализаций соответственно максимальных и минимальных значений:

$$U = \{16.096, 14.358, 14.792, 13.572, 14.486, 15.034, 16.123, 15.693, 14.836, 14.876, \dots\},$$

$$V = \{4.198, 4.548, 4.587, 4.808, 3.753, 4.313, 5.1, 3.151, 6.033, 5.946, \dots\}.$$

Находим статистические характеристики каждой выборки.

Выборка максимальных значений:

математическое ожидание  $m_u = 14,852$ ; дисперсия  $D_u = 2,888$ ; стандарт  $\sigma_u = 1,699$ ; коэффициент вариации  $f_u = 0,114$ .

Выборка минимальных значений:

математическое ожидание  $m_v = 4,873$ ; дисперсия  $D_v = 0,899$ ; стандарт  $\sigma_v = 0,948$ ; коэффициент вариации  $f_v = 0,195$ .

Вычисляем параметры закона Гумбеля:

для максимальных значений:

$$a_u = \frac{1,28255}{1,699} = 0,755; u_u = 14,852 - \frac{0,577216}{0,755} = 14,087; \quad (2.56)$$

для минимальных значений:

$$a_v = \frac{1,28255}{0,948} = 1,353; u_v = 4,873 + \frac{0,577216}{1,353} = 5,3. \quad (2.57)$$

На рис. 2.15 приведены графики плотностей распределения исходного нормального закона  $p(x)$  (2.55), а также распределений максимумов (2.49) и минимумов (2.50) с параметрами (2.56) и (2.57).

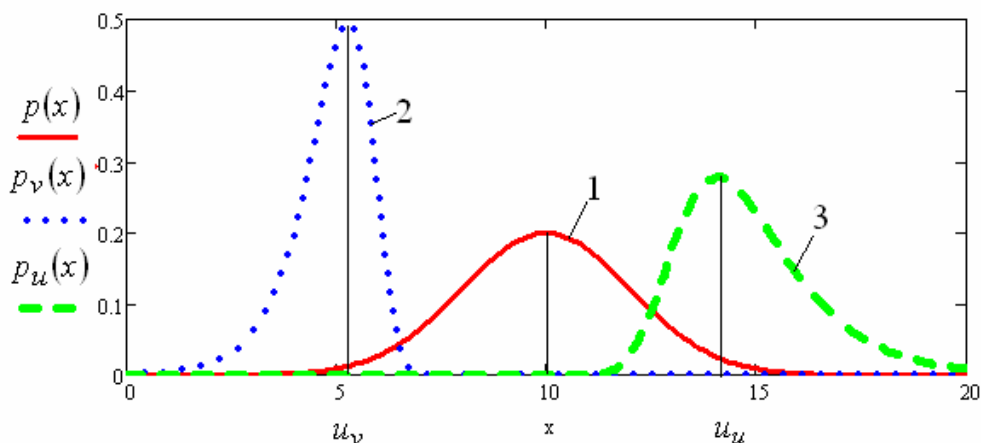


Рис. 2.15. Плотности распределения: 1 — нормального закона; 2 — минимальных значений; 3 — максимальных значений

Как видно из рис. 2.15, параметр  $u$  определяет абсциссу максимума графика закона распределения Гумбеля, а параметр  $a$  — степень «растянутости» графика по оси абсцисс.

Используя формулы (2.47) и (2.48), построим графики функций распределения максимальных и минимальных значений (рис. 2.16).

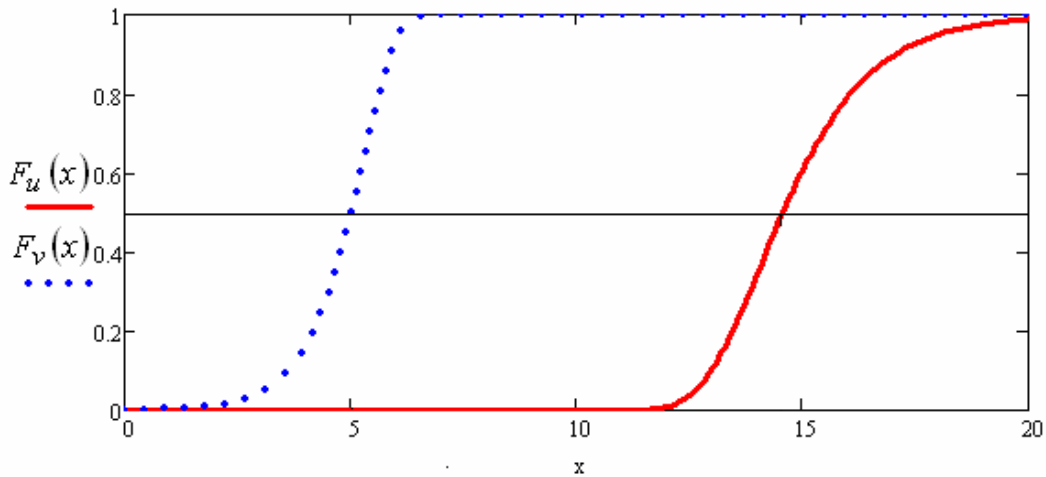


Рис. 2.16. Функции распределения закона Гумбеля: 1 — максимальных значений; 2 — минимальных значений

**Пример 2.4. Моделирование реализаций случайных чисел, заданных распределением Гумбеля**

Для решения ряда задач моделирования работы сооружения под действием экстремальных нагрузок требуется получить реализации случайных чисел, заданных законом Гумбеля, по известным параметрам закона  $a_u$  и  $u_u$ .

Принимаем, используя данные примера 2.3,  $a_u = 0,755$ ;  $u_u = 14,087$ .

Реализации случайных чисел, подчиненных закону Гумбеля, можно получить, используя формулу

$$u_i = u_u - \frac{1}{a_u} \ln[-\ln(z_i)], \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.58)$$

где  $z_i$  — случайные числа, заданные равномерным распределением в интервале  $[0, 1]$ .

Моделирование реализаций случайных чисел  $z_i$  проводим с помощью функции Mathcad  $\text{rnd}(x) = \text{rnd}(1)$ , которая выдает равномерно распределенное случайное число между 0 и  $x$ . Результаты моделирования представлены на рис. 2.17 для  $k = 100$ . Для каждого  $z_i$  по формуле (2.58) вычисляем реализации  $u_i$  (рис. 2.18).

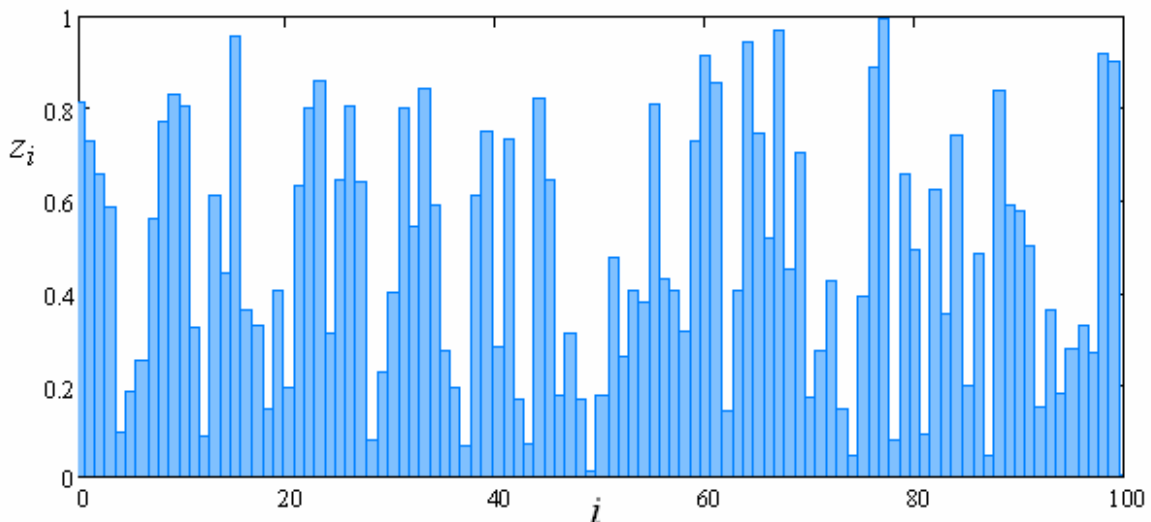


Рис. 2.17. Графическое представление реализаций случайных чисел с равномерным распределением

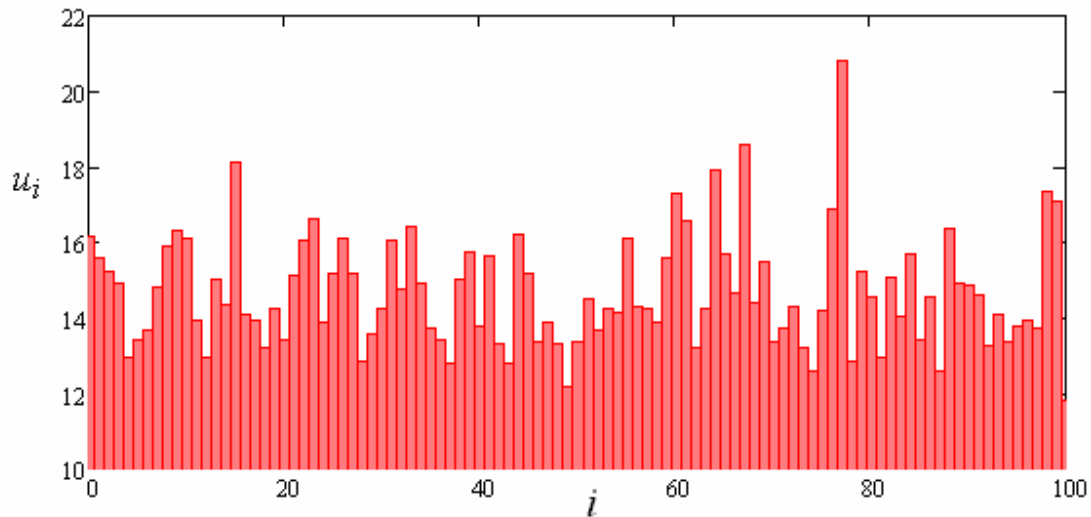


Рис. 2.18. Графическое представление реализаций случайных чисел с распределением Гумбеля

Оценки статистических характеристик случайной величины  $\tilde{U}$  по полученной выборке  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 100$ ) равны:

$m_u = 14,661$ ;  $D_u = 2,239$ ; стандарт  $\sigma_v = 1,496$ ; коэффициент вариации  $f_u = 0,102$ .

Как видно из приведенного расчета, полученные моделированием оценки математического ожидания и стандарта отличаются от приведенных в примере 2.3 соответственно на 1,3 % и 11,9 %.

### 2.2.9. Распределение Вейбулла

Это распределение ограничено со стороны одного из экстремальных значений (минимального или максимального) точкой  $x_0$  и неограниченно в противоположном направлении.

Формула интегрального закона распределения Вейбулла имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp(-cx^b); \quad (0 < x < \infty). \quad (2.59)$$

Плотность распределения

$$p(x) = cbx^{b-1} \exp(-cx^b). \quad (2.60)$$

Числовые характеристики закона Вейбулла:

математическое ожидание

$$m_x = \int_0^{\infty} xp(x)dx = cb \int_0^{\infty} x^b \exp(-cx^b)dx = c^{-\frac{1}{b}} \Gamma\left(\frac{1}{b} + 1\right), \quad (2.61)$$

дисперсия

$$\begin{aligned} D_x &= \int_0^{\infty} x^2 p(x)dx - m_x^2 = cb \int_0^{\infty} x^{b+1} \exp(-cx^b)dx - m_x^2 = \\ &= c^{-\frac{2}{b}} \Gamma\left(\frac{2}{b} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{b} + 1\right). \end{aligned} \quad (2.62)$$

В формулах (2.61), (2.62) используется гамма-функция  $\Gamma(\dots)$ .

Гамма-функция имеет широкое применение в практических приложениях. Она представляет собой интеграл вида

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt. \quad (2.63)$$

Гамма-функция  $\Gamma(z)$  является обобщением понятия факториала на дробные, отрицательные и комплексные значения аргумента  $z$  и не выражается через элементарные функции. Для натуральных значений аргумента гамма-функция совпадает со значением факториала:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.64)$$

Для любых комплексных значений  $z$  справедливо равенство:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.65)$$

Кроме того, справедлива формула:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (2.66)$$

Приведем некоторые значения гамма-функции. Из выражения (2.62) следует, что:

$$\Gamma(1) = 0! = 1; \quad \Gamma(2) = 1! = 1; \quad \Gamma(3) = 2! = 2; \quad \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Для вычисления  $\Gamma(0,5)$  воспользуемся выражением (2.66):

$$\Gamma(1-0,5)\Gamma(0,5) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)}, \quad \text{тогда } \Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Аналогично можно найти: } \Gamma(1,5) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(-0,5) = 2\sqrt{\pi}.$$

Гамма-функция включена в библиотеку встроенных стандартных функций большинства пакетов прикладных математических программ и легко может быть использована в практических расчетах.

В частном случае при  $b = 1$  получаем простое экспоненциальное распределение.

Если возвести выражение  $1 - F(x) = \exp(-cx^b)$  в степень  $n$ , получим:

$$[1 - F(x)]^n = \exp(-cnx^b) = \exp(-cy^b), \quad (2.67)$$

где  $y = \sqrt[b]{nx}$ .

## 2.3. Системы случайных величин

В практических приложениях теории вероятностей очень часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной случайной величиной, а двумя или более случайными величинами,

образующими систему. Систему случайных величин можно описать в виде многомерных законов распределения  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , либо приближенно при помощи статистических характеристик.

При рассмотрении вопросов, связанных с системами случайных величин, удобно пользоваться геометрической интерпретацией. Например, систему из двух случайных величин  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  можно изобразить случайной точкой на плоскости с координатами  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  (рис. 2.19, а).

Совокупность математических ожиданий  $m_x, m_y$  представляет собой характеристику положения системы. Геометрически — это координаты средней точки на плоскости, вокруг которой происходит рассеивание.

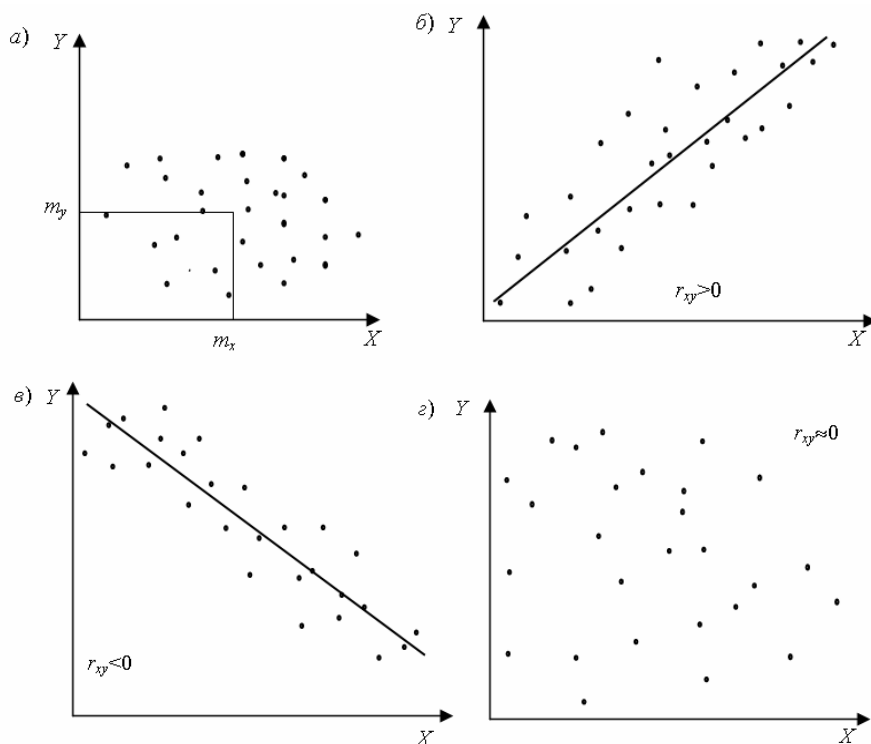


Рис. 2.19. Система двух случайных величин: а — графическая интерпретация; б — положительная корреляция величин  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ ; в — отрицательная корреляция величин  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ ; г — величины  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  некоррелированы

Рассеивание случайной точки в направлении осей  $OX$  и  $OY$  характеризует дисперсии величин  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ :  $D_x$  и  $D_y$ .

При изучении систем случайных величин всегда следует обращать внимание на степень и характер их зависимости. Понятие о зависимости случайных величин — одно из важнейших понятий теории вероятностей, где мы встречаемся с более общим типом зависимости, чем функциональная — вероятностной или статистической зависимостью.

Если случайные величины  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  находятся в вероятностной зависимости, то это не означает, что с изменением величины  $\tilde{X}$  величина  $\tilde{Y}$  изменяется вполне определенным образом (как при функциональной зависимости двух величин); это лишь означает, что с изменением величины  $\tilde{X}$  величина

$\tilde{Y}$  имеет тенденцию также изменяться (например, возрастая или убывая при возрастании  $\tilde{X}$ ). Эта тенденция соблюдается лишь в среднем, и в каждом отдельном случае возможны отступления от нее.

Численно статистическая зависимость между двумя случайными величинами выражается при помощи корреляционного момента, который вычисляется по формулам:

для дискретной случайной величины

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y) p_{xy}, \quad (2.68)$$

или

$$K_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{N-1} - m_x m_y, \quad (2.69)$$

для непрерывной случайной величины

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) p(x, y) dx dy. \quad (2.70)$$

В случае, если  $X = Y$ , корреляционный момент равен дисперсии случайной величины  $\tilde{X}$ :  $K_{xy} = D_x$ .

В практических задачах для оценки степени корреляции между двумя величинами удобнее пользоваться относительной характеристикой, называемой коэффициентом корреляции:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (2.71)$$

где  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ .

Если  $r_{xy} > 0$ , то между случайными величинами  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  существует положительная корреляционная зависимость. Это означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем возрастая (рис. 2.19, б).

При отрицательной корреляции  $r_{xy} < 0$ , что означает, что при возрастании одной случайной величины другая имеет тенденцию убывать (рис. 2.19, в).

При  $r_{xy} = 0$  случайные величины статистически независимы (рис. 2.19, г).

Если  $|r_{xy}| \approx 1$ , то можно считать, что рассматриваемые величины  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  связаны функциональной зависимостью.

## 2.4. Функции случайных величин

Функция случайных величин будет также случайной величиной  $Y = \varphi(X)$ . Ее распределение соответствует распределению аргумента, но с измененной шкалой абсцисс.  $P(y) = \text{Prob}(Y < y) = \text{Prob}(\varphi(X) < y)$ .

$$P(y) = \int_{-\infty}^y p[\psi(y)]|\psi'(y)| dy, \quad (2.72)$$

где  $\psi(y)$  — функция, обратная  $\varphi(x)$  (замена подинтегрального выражения  $x = \psi(y)$ ,  $dx = \psi'(y)dy$ ).

Если  $Y = \varphi(X)$ , где  $\varphi(X)$  — монотонная функция своего аргумента, то распределение  $Y$  определяется тем, что вероятность нахождения  $y$  в пределах  $y_1 < Y < y_2$  равна вероятности неравенства  $x_1 < X < x_2$ , где  $y_1 = \varphi(x_1)$  и  $y_2 = \varphi(x_2)$ .

Математическое ожидание и дисперсия случайных величин  $Y$ :

$$\bar{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)p(x)dx, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - \bar{Y})^2 p(x)dx. \quad (2.73)$$

Пример 2.5.

Исходные данные:

Рассматривается однопролетная железобетонная балка с размерами поперечного сечения:  $b = 30$  см,  $h = 80$  см. Расстояние от равнодействующей усилий в арматуре до ближайшей грани  $a = 7$  см (рис. 2.20).

Арматура  $6\varnothing 25$  класса А400.

Изгибающий момент от внешней нагрузки в сечении  $M = 540$  кНм.

Коэффициент условий работы  $\gamma_{b2} = 0,9$ .

Случайные параметры системы: прочность бетона  $\tilde{R}_b$ , прочность стали  $\tilde{R}_s$ .

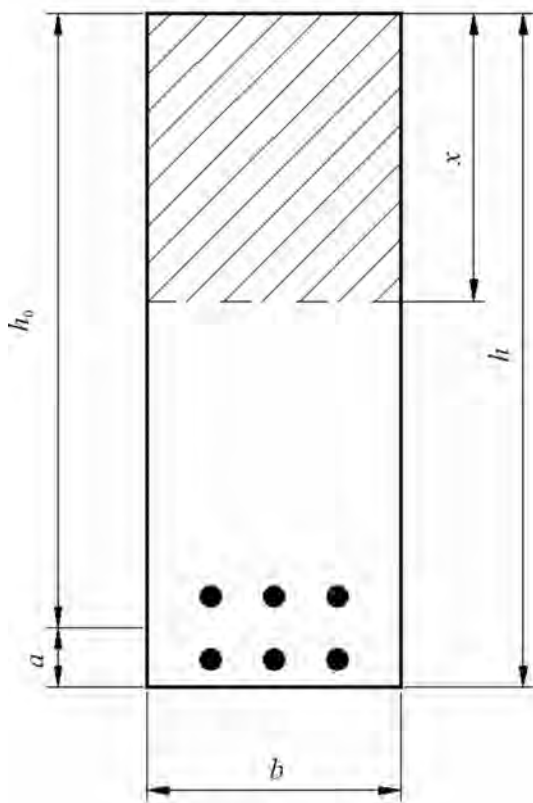


Рис. 2.20. Сечение железобетонной балки

1. Необходимо рассчитать несущую способность прямоугольного железобетонного сечения с одиночной арматурой двумя методами:  
пределных состояний (по нормам);  
линеаризации (прямой вероятностный расчет).

2. Сравнить полученные результаты расчета.

Класс бетона, нормативное и расчетное сопротивления определяются на основе данных, полученных в примере 2.1, и в соответствии с СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. (Актуализированная версия СНиП 52-01—2003. М. 2012).

По результатам расчета получен класс бетона  $B = 20,1$  МПа. Тогда по табл. 6.1 СП 63.13330.2012 принимаем класс бетона  $B20$  МПа.

Нормативное сопротивление бетона осевому сжатию  $R_{bn} = 15$  МПа (табл. 6.7 СП 63.13330.2012).

При решении методом предельных состояний в формулах вместо случайных параметров принимаются их расчетные или нормативные значения.

1. Рабочая высота сечения

$$h_0 = h - a = 80 - 7 = 73 \text{ см.}$$

2. Высота сжатой зоны

$$x = \frac{R_s A_s}{R_b b},$$

где  $R_s$  — расчетное сопротивление арматуры растяжению.

$$x = \frac{R_s A_s}{R_b b} = \frac{365 \cdot 29,45}{11,5 \cdot 30} = 31,157 \text{ см.}$$



### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

#### 3.1. Основные понятия

Законы распределения экстремальных (максимальных или минимальных) значений последовательности случайных величин имеют широкое применение в теории надежности. Они используются в задачах нахождения максимальных нагрузок за срок службы конструкций или минимальных значений прочности материала.

Рассмотрим случайную величину  $\tilde{X}$  с известными функцией распределения  $F(X)$  и плотностью распределения  $p(X)$ . Выберем ряд независимых реализаций случайной величины  $\tilde{X}$  объемом  $n$ :  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$  (выборка № 1).

Найдем наибольшее и наименьшее значения из выборки

$$u_1 = \max \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}$$

$$v_1 = \min \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\}.$$

Сформируем вторую выборку из реализаций случайной величины  $\tilde{X}$ , полученных в следующем эксперименте или наблюдении, и найдем  $u_2$  и  $v_2$

$$u_2 = \max \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\};$$

$$v_2 = \min \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}.$$

Проведя  $k$  экспериментов, получим  $k$  выборок, состоящих каждая из  $n$  реализаций (табл. 3.1).

Таблица 3.1

№ реализации в выборке	№ выборки			
	1	2	...	$k$
1	$x_{11}$	$x_{21}$	...	$x_{k1}$
2	$x_{12}$	$x_{22}$	...	$x_{k2}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{1n}$	$x_{2n}$	...	$x_{kn}$
Максимальное значение	$u_1$	$u_2$	...	$u_k$
Минимальное значение	$v_1$	$v_2$	...	$v_k$

В общем случае объем каждой выборки может быть различным.

Очевидно, что значения максимальных и минимальных значений случайной величины  $\tilde{X}$  можно также рассматривать как реализации случайных величин  $\tilde{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  и  $\tilde{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  соответственно.

Требуется найти распределение значений этих случайных величин  $\tilde{U}$  и  $\tilde{V}$ .

Функция распределения  $F_u(x)$  наибольших значений случайной величины  $\tilde{X}$  равна вероятности того, что в выборке из  $k$  реализаций  $x_i \leq x$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ):

$$F_u(x) = P(U_k \leq x) = P(x_1 \leq x \cap x_2 \leq x \cap \dots \cap x_k \leq x), \quad (3.1)$$

где  $x$  — заданное значение.

Если  $x_i$  независимы друг от друга, то

$$F_u(x) = \prod_{i=1}^k P(x_i \leq x) = [F_x(x)]^k. \quad (3.2)$$

Аналогично для наименьшего значения

$$F_v(x) = 1 - [1 - F_x(x)]^k. \quad (3.3)$$

Плотности распределения  $p_u(x)$  и  $p_v(x)$  находятся дифференцированием функций  $F_u(x)$  и  $F_v(x)$ :

$$p_u(x) = \frac{d}{dx} [F_x(x)]^k = k [F_x(x)]^{k-1} p_x(x), \quad (3.4)$$

$$p_v(x) = \frac{d}{dx} \{1 - [1 - F(x)]^k\} = k [1 - F_x(x)]^{k-1} p_x(x). \quad (3.5)$$

Распределения экстремальных значений  $p_u(x)$  и  $p_v(x)$  всегда несимметричны, даже если исходное распределение  $p_x(x)$  является симметричным. При симметричных исходных распределениях между экстремальными распределениями наибольших и наименьших значений имеются следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} F_v(x) &= 1 - F_u(2m_x - x) \\ p_v(x) &= p_u(2m_x - x) \\ \frac{d}{dx} p_v(x) &= -\frac{d}{dx} p_u(2m_x - x) \end{aligned} \right\}, \quad (3.6)$$

где  $m_x$  — математическое ожидание исходного распределения.

Если исходное распределение неограниченно, то есть его ветви асимптотически стремятся к бесконечности ( $+\infty$  или  $-\infty$ ) с увеличением или уменьшением  $x$ , то и распределение экстремальных значений с увеличением  $k$  также неограниченно. Если исходное распределение ограничено, то и распределение экстремальных значений ограничено этим значением, приближаясь к нему с увеличением  $k$ .

Распределения экстремальных значений называются *асимптотическими распределениями*. С увеличением  $k$  они стремятся к определенным законам, причем форма асимптотического распределения не зависит от средней части исходного распределения  $F(X)$ , а определяется формой граничных областей исходных распределений. Из асимптотических распределений в практических задачах оценки надежности наиболее распространенные имеют распределения Гумбеля, Вейбулла, Пуассона.

### 3.2. Последовательность независимых случайных величин

Для исследования нагрузок различного вида в теории надежности достаточно часто используется упрощенная модель в виде последовательности независимых прямоугольных импульсов со случайной интенсивностью  $\tilde{r}$  и постоянной длительностью  $d$  (рис. 3.1).

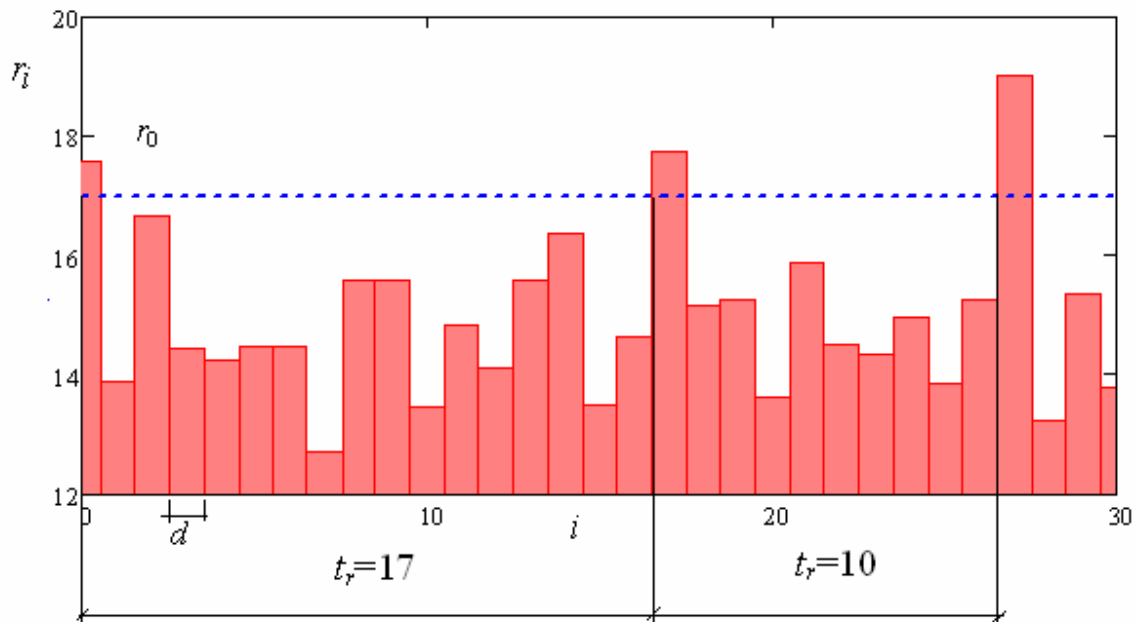


Рис. 3.1. Последовательность случайных импульсов

Как правило, в качестве  $r_i$  рассматриваются максимальные значения нагрузок за определенные промежутки времени.

Так, на рис. 3.2 показана случайная функция веса снегового покрова  $\tilde{S}(t)$  за несколько лет (зимний и летний периоды), которая может быть представлена в виде ряда реализаций случайной величины ежегодных максимумов  $S_i$  с заданной функцией распределения  $F_s$ . Принимается допущение о стохастической независимости реализаций.

Таким образом, случайный процесс нагружения моделируется случайной величиной  $\tilde{r}$  с функцией распределения  $F(r)$ . Распределение максимумов нагрузки  $r_i$  на протяжении достаточно большого времени, например, равного сроку службы сооружения  $T = kd$ , где  $k$  — целое число, находится по формулам (3.2) и (3.4):

$$F_u = \prod_{i=1}^k P(r_i \leq r) = [F(r)]^k, \quad (3.7)$$

$$p_u = \frac{d}{dx} [F(r)]^k = k [F(r)]^{k-1} p(r). \quad (3.8)$$

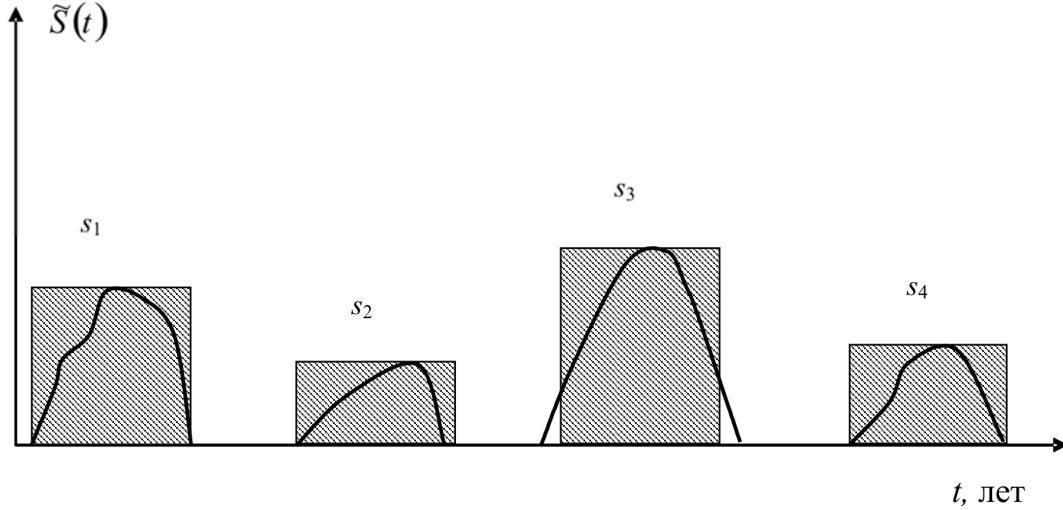


Рис. 3.2. Схема формирования веса снегового покрова во времени  $\tilde{S}(t)$  и представление его в виде последовательности прямоугольных импульсов  $S_i$

Для практических приложений представляет интерес вопрос, через какой интервал времени нагрузка превысит некоторый заданный уровень  $r_0$ . Время будем измерять числом  $i$  интервала времени  $d$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Время  $\tilde{T}_r$  между двумя пересечениями уровня  $r_0$  называется периодом повторяемости нагрузки, превышающим уровень  $r_0$ . На рис. 3.1 показаны две ее реализации случайной величины  $\tilde{T}_r$ :  $t_r = 17$  и  $t_r = 10$ . Вероятность того, что  $T_r = i$ , равна вероятности того, что в последовательности  $r$  первые  $(i - 1)$  величин подряд меньше  $r_0$ , а затем появляется величина, большая  $r_0$ . В силу независимости последовательности значений  $r$  искомая вероятность вычисляется по закону умножения вероятностей по формуле (3.2) с учетом вероятности  $P(r > r_0)$ :

$$P(T_r = i) = [P(r \leq r_0)]^{i-1} P(r > r_0) = [F(r_0)]^{i-1} [1 - F(r_0)]. \quad (3.9)$$

Формула (3.8) определяет плотность распределения  $p_{T_r}(i)$  периода повторяемости  $\tilde{T}_r$  для уровня  $r_0$ :  $p_{T_r}(i) = P(T_r = i)$ .

Функция распределения  $F_{T_r}(i)$  находится суммированием плотности  $p_{T_r}(i)$  от  $j = 1$  до  $j = i$ :

$$\begin{aligned} P(T_r \leq i) = F_{T_r}(i) &= \sum_{j=1}^i p_{T_r}(j) = [1 - F(r_0)] \sum_{j=1}^i [F(r_0)]^{j-1} = \\ &= [1 - F(r_0)] \{1 + F(r_0) + [F(r_0)]^2 + \dots\} = 1 - [F(r_0)]^i. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Найдем математическое ожидание периода повторяемости  $m_{T_r}$ . Для этого используем формулу математического ожидания дискретной случайной величины

$$m_x = \sum_k x_k p_k, \quad (3.11)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  — возможные значения случайной величины  $X$ ;  $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$  — соответствующие вероятности.

$$\begin{aligned} m_{T_r} &= \sum_{i=1}^{\infty} iP(T_r = i) = [1 - F(r_0)] \sum_{i=1}^{\infty} i [F(r_0)]^{i-1} = \\ &= [1 - F(r_0)] \left\{ 1 + 2F(r_0) + 3[F(r_0)]^2 + \dots + i[F(r_0)]^{i-1} + \dots \right\} = \\ &= 1 + F(r_0) + [F(r_0)]^2 + [F(r_0)]^3 + \dots + [F(r_0)]^{i-1} + \dots = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [F(r_0)]^{i-1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом,

$$m_{T_r} = \sum_{i=1}^{\infty} [F(r_0)]^{i-1}. \quad (3.13)$$

Заметим, что полная вероятность  $P(T_r \leq \infty) = 1$ , или

$$[1 - F(r_0)] \sum_{i=1}^{\infty} [F(r_0)]^{i-1} = [1 - F(r_0)] m_{T_r} = 1. \quad (3.14)$$

$$\text{Тогда } m_{T_r} = \frac{1}{1 - F(r_0)}. \quad (3.15)$$

Обратное соотношение

$$F(r_0) = 1 - \frac{1}{m_{T_r}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, среднее значение периода повторяемости экстремальных значений нагрузок может быть выражено через функцию распределения ординат нагрузки.

### 3.3. Применение закона Гумбеля для исследования снеговых нагрузок

Согласно СП 20.13320.2011 «Нагрузки и воздействия», нормативное значение снеговой нагрузки на горизонтальную проекцию покрытия следует определять по формуле

$$S_0 = 0,7c_e c_t \mu S_g,$$

где  $c_e$  — коэффициент, учитывающий снос снега с покрытий зданий под действием ветра или иных факторов;  $c_t$  — термический коэффициент;  $\mu$  — коэффициент перехода от веса снегового покрова земли к снеговой нагрузке на покрытие;  $S_g$  — вес снегового покрова на  $1 \text{ м}^2$  горизонтальной поверхности земли для площадок, расположенных на высоте не более 1500 м над уровнем моря, принимается в зависимости от снегового района РФ.

В горных и малоизученных районах, в пунктах с высотой над уровнем моря более 1500 м, в местах со сложным рельефом вес снегового покрова допускается определять в установленном порядке на основе данных ближайших метеостанций Росгидромета. При этом значение  $S_g$  следует принимать как превышаемый в среднем один раз в 25 лет ежегодный максимум веса снегового покрова, определяемый на основе данных маршрутных снего-съемок о запасах воды на защищенных от прямого воздействия ветра участках за период не менее 20 лет.

При проектировании вес снегового покрова  $S_g$  определяется в зависимости от снегового района согласно карте снеговых районов, приведенной в приложении к СП 20.13320.2011, по табл. 3.2.

Таблица 3.2

Нормативное значение веса снегового покрова

Снеговые районы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$S_g$ , кПа (кг/м <sup>2</sup> )	0,8 (80)	1,2 (120)	1,8 (180)	2,4 (240)	3,2 (320)	4,0 (400)	4,8 (480)	5,6 (560)

Уровень обеспеченности нормативного значения снеговой нагрузки для данного района формируется на основании представления статистических данных маршрутной снегосъемки о запасе воды в снежном покрове в виде последовательности ежегодных максимумов, которые рассматриваются как выборка независимых случайных величин, распределенных по закону Гумбеля. Вес снежного покрова на поверхности земли в кг/м<sup>2</sup> численно равен величине запаса воды в снежном покрове в мм.

Рассмотрим, как определяется нормативная нагрузка  $S_g$  и чему равна ее обеспеченность на основе имеющихся статистических данных годовых максимумов запаса воды в снеге, полученных на метеостанции 27 625 Коломна, имеющей следующие координаты: широта  $55,13^\circ$ , долгота  $38,73^\circ$ , высота 112 м. В табл. 3.3 приведены максимальные за каждый год значения запаса воды (веса снегового покрова) с 1968 по 2011 гг. Прочерки в таблице означают отсутствие данных. Таким образом, рассматривается ряд из 41 значения  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k = 41$ ). Длительность интервала между значениями  $d = 1$  год.

Годичные максимумы запаса воды в снеге по данным маршрутных снегосъемок метеостанции 27 625 Коломна

Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм	Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм	Год наблюдения	Запас воды в снеге, мм
1968	148	1983	78	1998	106
1969	46	1984	39	1999	158
1970	154	1985	160	2000	81
1971	37	1986	184	2001	138
1972	—	1987	58	2002	92
1973	46	1988	97	2003	81
1974	50	1989	109	2004	73
1975	63	1990	73	2005	128
1976	—	1991	57	2006	166
1977	126	1992	78	2007	79
1878	—	1993	81	2008	60
1979	75	1994	150	2009	82
1980	65	1995	54	2010	116
1981	113	1996	79	2011	124
1982	70	1997	105		

Используя представленные в табл. 3.3 значения, найдем математическое ожидание и дисперсию веса снежного покрова для рассматриваемого района: математическое ожидание годовичных максимумов  $m_S = 96,44 \text{ кг/м}^2$ ; дисперсия  $D_S = 1618 (\text{кг/м}^2)^2$ .

Также вычисляем стандарт  $\sigma_S = \sqrt{D_S} = 40,22 \text{ кг/м}^2$  и коэффициент вариации  $f_S = \frac{\sigma_S}{m_S} = 0,42$ .

Находим параметры закона Гумбеля:

$$a_S = \frac{1,28255}{\sigma_S} = 0,032;$$

$$u_S = m_S - \frac{0,577216}{a_S} = 78,34.$$

Плотность распределения максимумов (рис. 3.3):

$$\begin{aligned} p_S &= a_S \exp\{-a_S(S - u_S) - \exp[-a_S(S - u_S)]\} = \\ &= 0,032 \exp\{-0,032(S - 78,34) - \exp[-0,032(S - 78,34)]\}. \end{aligned}$$

Функция распределения максимумов (рис. 3.4):

$$F_S = \exp\{-\exp[-a_S(S - u_S)]\} = \exp\{-\exp[-0,032(S - 78,34)]\}.$$

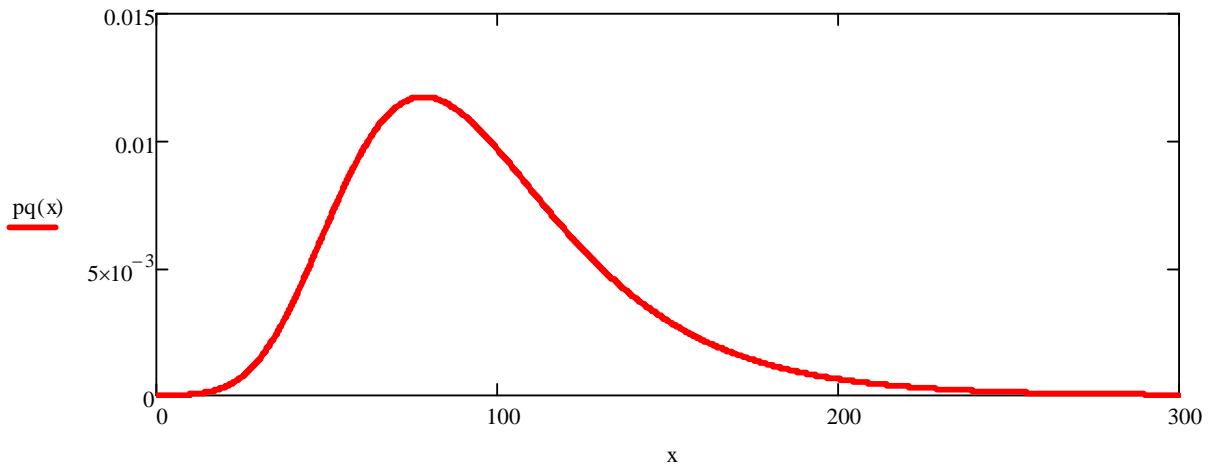


Рис. 3.3. Плотность распределения случайной величины ежегодных максимумов веса снежного покрова. Коломна, 1968—2011 гг.

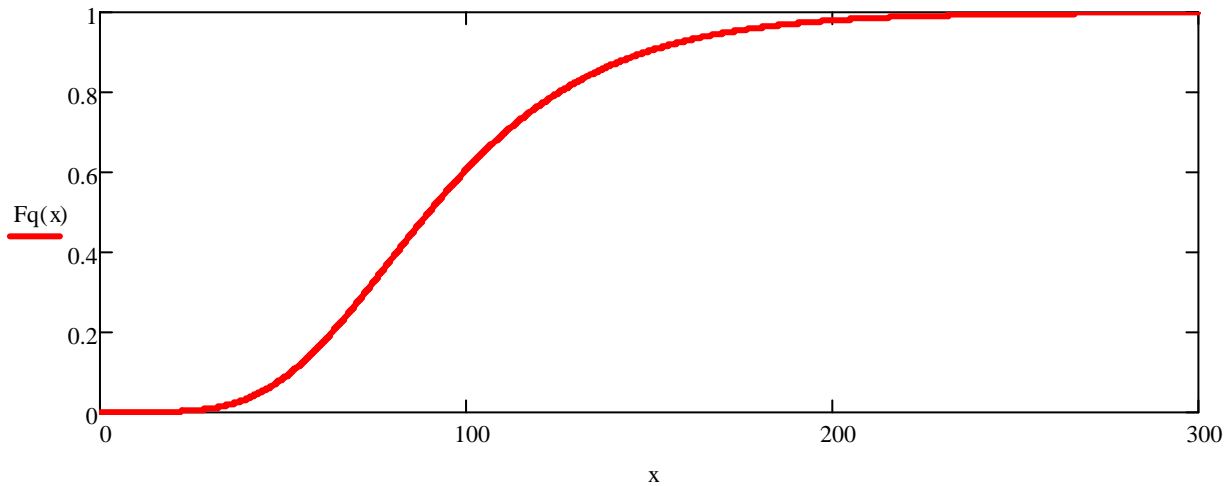


Рис. 3.4. Функция распределения случайной величины ежегодных максимумов веса снежного покрова. Коломна, 1968—2011 гг.

Учитывая, что среднее значение периода повторяемости нормативной снеговой нагрузки составляет 25 лет, найдем значение  $S_g$ . Из формулы (3.15) получаем соответствующее  $m_{T_r} = 25$  значение функции распределения

$$F(S_g) = 1 - \frac{1}{m_{T_r}} = 1 - \frac{1}{25} = 0,96,$$

то есть обеспеченность нормативной снеговой нагрузки  $S_g$  составляет 0,96.

Для нахождения  $S_g$  нужно решить уравнение

$$F_S(S_g) = \exp\left\{-\exp\left[-0,032(S_g - 78,34)\right]\right\} = 0,96$$

относительно  $S_g$ :

$$S_g = u_s - \frac{1}{a_s} \ln\left\{-\ln\left[F_S(S_g)\right]\right\} = 78,34 - \frac{1}{0,032} \ln\left[-\ln(0,96)\right] = 178,66 \text{ кг/м}^2.$$



Таким образом, вес снегового покрова на поверхности земли, превышаемый в среднем 1 раз в 25 лет, вычисленный для района метеостанции Коломна, составляет  $S_g = 178,66 \text{ кг/м}^2$ . На основании карты снеговых районов находим, что Коломна относится к III снеговому району, для которого, согласно табл. 3.2,  $S_g = 180 \text{ кг/м}^2$ .

Найдем, какова вероятность того, что наибольшая снеговая нагрузка на поверхности земли в рассматриваемом районе за период 25 лет превысит значение, равное  $S_g = 180 \text{ кг/м}^2$ . Сначала находим распределение максимальных значений нагрузки для периода 25 лет. Подставив в (3.7) в качестве закона распределения закон Гумбеля, получим вероятность того, что нагрузка не превысит уровень  $180 \text{ кг/м}^2$ .

$$F_k(S) = [F(s)]^k = \exp\{-k \exp[-a_s(S - u_s)]\} = \\ = \exp\{-25 \exp[-0,032(S - 78,34)]\};$$

$$F_k(180) = 0,376 \text{ (рис. 3.5).}$$

Тогда искомая вероятность

$$P(S > 180) = 1 - F_k(180) = 1 - 0,376 = 0,624.$$

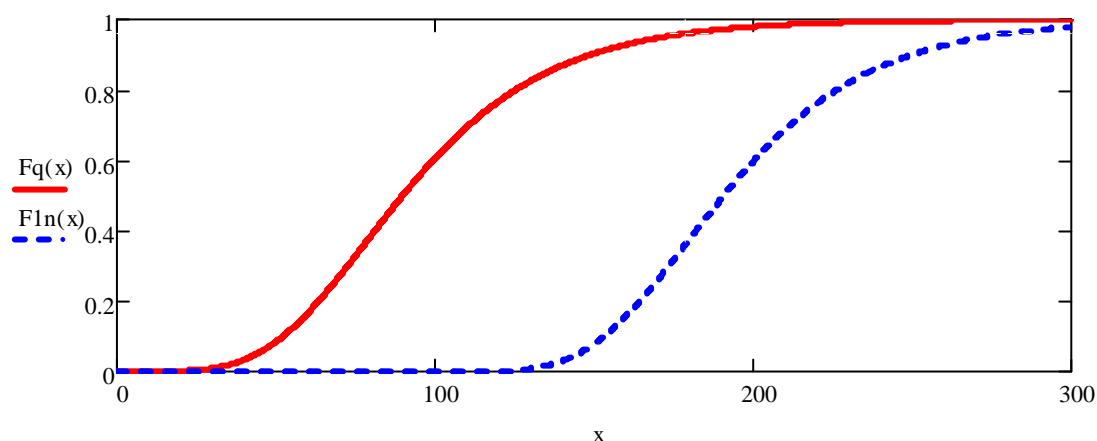


Рис. 3.5. Функции распределения максимумов при  $k = 1$  и  $k = 25$

### 3.4. Применение закона Вейбулла для исследования ветровых нагрузок

Согласно СП 20.13320.2011 «Нагрузки и воздействия», нормативное значение средней составляющей ветровой нагрузки  $w_m$  следует определять по формуле

$$w_m = w_0 k(z_e) c, \quad (3.17)$$

где  $w_0$  — нормативное значение ветрового давления;  $k(z_e)$  — коэффициент, учитывающий изменение ветрового давления для высоты  $z_e$ ;  $c$  — аэродинамический коэффициент.

Нормативное значение ветрового давления  $w_0$  принимается в зависимости от ветрового района по табл. 3.4. Нормативное значение ветрового давления допускается определять в установленном порядке на основе данных метеостанций Росгидромета. В этом случае  $w_0$ , Па, следует определять по формуле

$$w_0 = 0,43v_{50}^2, \quad (3.18)$$

где  $v_{50}^2$  — давление ветра, соответствующее скорости ветра, м/с, на уровне 10 м над поверхностью земли, определяемой с 10-минутным интервалом осреднения и превышаемой в среднем один раз в 50 лет.

Таблица 3.4

Нормативное значение ветрового давления

Ветровые районы	Ia	I	II	III	IV	V	VI	VII
$w_0$ , кПа	0,17	0,23	0,30	0,38	0,48	0,60	0,73	0,85

В метеорологии для моделирования скорости ветра  $v$  используется распределение Вейбулла:

$$F(v) = 1 - \exp(-\lambda v^b), \quad (3.19)$$

где  $F(v)$  — вероятность того, что в течение заданного промежутка времени скорость ветра не превысит заданное значение  $v$ ;  $c$ ,  $b$  — коэффициенты, определяемые для каждой метеостанции отдельно.

Аналогично снеговой нагрузке, используем понятие периода повторяемости  $T_{v_0}$  как средний промежуток времени между превышениями скорости ветра уровень  $v_0$ . Вероятность этого превышения равна

$$a = P(v > v_0) = 1 - F(v) = \exp(-\lambda v_0^b). \quad (3.20)$$

Примем в качестве условной зоны корреляции скорости ветра произведение

$$\tau = aT_{v_0}, \quad (3.21)$$

откуда выражаем период повторяемости

$$T_{v_0} = \frac{\tau}{a} = \frac{\tau}{\exp(-\lambda v_0^b)} = \tau \exp(\lambda v_0^b). \quad (3.22)$$

Из формулы (3.22) можно получить скорость  $v_0$ , соответствующую данному периоду повторяемости  $T_{v_0}$ , проведя следующие преобразования:

$$\ln\left(\frac{T_{v_0}}{\tau}\right) = \ln[\exp(\lambda v_0^b)], \text{ или } \lambda v_0^b = \ln\left(\frac{T_{v_0}}{\tau}\right).$$

Откуда искомая скорость равна

$$v_0 = \sqrt[b]{\frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{T_{v_0}}{\tau} \right)}. \quad (3.23)$$

Учитывая, что ветровое давление  $w_0$  связано со скоростью ветра зависимостью (3.18), можно от формулы (3.23) перейти к формуле, связывающей нормативное ветровое давление с периодом повторяемости  $T_{v_0}$ :

$$w_0 = 0,43v_0^2 = 0,43 \sqrt[b]{\frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{T_{v_0}}{\tau} \right)}. \quad (3.24)$$

Формулы (3.23) и (3.24) позволяют назначать нормативные значения скорости ветра и ветрового давления исходя из заданного периода повторяемости.

Если нормативному значению ветрового давления  $w_0$  соответствует период повторяемости  $T_n$ , а расчетному значению ветрового давления  $w$  — период повторяемости  $T_p$ , то можно определить коэффициент надежности для ветровой нагрузки следующим образом:

$$\gamma_f = \frac{w}{w_0} = \frac{0,43 \sqrt[b]{\frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{T_p}{\tau} \right)}}{0,43 \sqrt[b]{\frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{T_n}{\tau} \right)}} = \left[ \frac{\ln \left( \frac{T_p}{\tau} \right)}{\ln \left( \frac{T_n}{\tau} \right)} \right]^{\frac{2}{b}}. \quad (3.25)$$

Нормативное ветровое давление вычисляется исходя из периода повторяемости 50 лет. Коэффициент надежности для ветровой нагрузки  $\gamma_f = 1,4$ . Зона корреляции для скорости ветра в первом приближении может быть принята равной одним суткам:  $\tau = 1$  сут. Подставив эти значения в формулу (3.25), получим:

$$1,4 = \left( \frac{\ln T_p - \ln 1}{\ln T_n - \ln 1} \right)^{\frac{2}{b}} = \left( \frac{\ln T_p}{\ln 18\,250} \right)^{\frac{2}{b}} = \left( \log_{18250} T_p \right)^{\frac{2}{b}}. \quad (3.26)$$

Возведем левую и правую часть равенства (3.26) в степень  $b/2$ :

$$\left( \log_{18250} T_p \right) = 1,4^{\frac{b}{2}},$$

тогда, согласно определению логарифма, получим

$$T_p = 18\,250^{1,4 \frac{b}{2}}. \quad (3.27)$$

### 3.5. Вероятность редких событий

Пусть некоторое событие  $N$  появляется случайно через достаточно большие сроки. Термин «достаточно большой срок» здесь означает, что корреляционная связь между вероятностями соседних по времени событий практи-

чески отсутствует, т. е. что на срок возникновения последующего события не влияют сроки появления предыдущих. Будем рассматривать процесс возникновения редких событий как стационарный. Тогда наблюдениями в течение очень большого промежутка времени (а в некоторых случаях теоретически) можно установить среднюю частоту появления события  $N$ , т. е. число событий, образующееся в среднем за единицу времени. Эту частоту можно отождествить с так называемой временной плотностью вероятности события

$$u = \frac{n}{T}, \quad (3.28)$$

где  $n$  — число событий, появившихся за большой промежуток времени  $T$ .

В малый промежуток времени  $\Delta t$  вероятность возникновения события  $N$  равна  $u\Delta t$ , поскольку влияние на эту вероятность возможности двукратного и многократного повторения события  $N$  за время  $\Delta t$  пренебрежимо мало. Вероятность появления события  $N$  хотя бы один раз за время  $t = k\Delta t$  равна

$$P_t = 1 - (1 - u\Delta t)^k = 1 - \left(1 - \frac{ut}{k}\right)^k. \quad (3.29)$$

Переходя к пределу, при  $\Delta t \rightarrow 0$ ;  $k \rightarrow \infty$ ;  $k\Delta t = t$  имеем

$$P_t = 1 - e^{-ut}. \quad (3.30)$$

При заданной вероятности  $P_t$  соответствующее время  $t$  определяется по формуле

$$t = \frac{-\ln(1 - P_t)}{u}. \quad (3.31)$$

Если  $u$  переменна во времени, то для конечного числа промежутков  $\Delta t$

$$P_t = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - u_i \Delta t), \quad (3.32)$$

откуда

$$\ln(1 - P_t) = \sum_{i=1}^k \ln(1 - u_i \Delta t). \quad (3.33)$$

Переходя к пределу и учитывая, что при малом  $\Delta t$

$$\ln(1 - u_i \Delta t) = -u_i \Delta t,$$

получим

$$\ln(1 - P_t) = -\int_0^t u(t) dt.$$

Окончательно:

$$P_t = 1 - \exp\left[-\int_0^t u(t) dt\right]. \quad (3.34)$$

Если событие  $N$  крайне нежелательно или недопустимо, то выражение

$$1 - P_t = \exp \left[ - \int_0^t u(t) dt \right] \quad (3.35)$$

называют функцией надежности, представляющей собой вероятность непоявления события  $N$  в течение времени  $t$  ни разу. При постоянной временной плотности вероятности возникновения нежелательного события  $N$  (отказа) функция надежности получает вид

$$1 - P_t = e^{-ut}. \quad (3.36)$$

## 4. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

### 4.1. Основные понятия

В настоящее время теория случайных функций, являющаяся разделом теории вероятностей, получила самостоятельное развитие и нашла широкое применение при решении задач, связанных с теорией регулирования, радиотехникой и электроникой, космонавтикой и расчетом строительных конструкций.

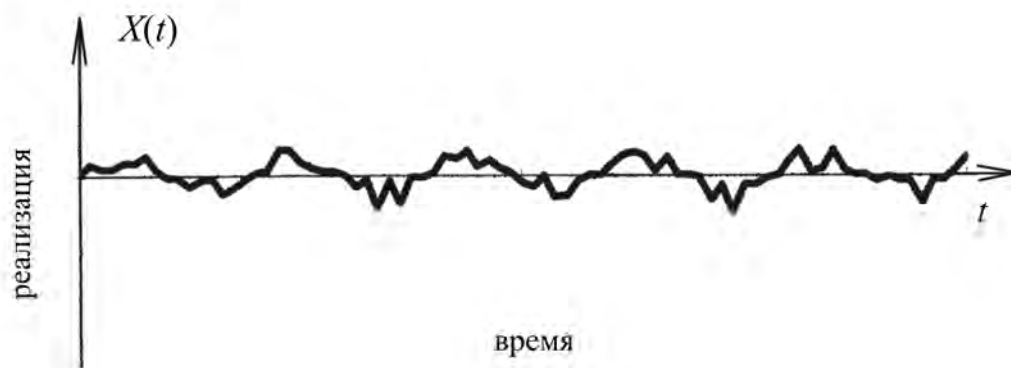
Многие нагрузки меняют свою интенсивность в зависимости от времени и места. Такие явления математически моделируются случайными функциями. Если рассматривается только изменение во времени, то говорят о случайных процессах, при многомерной зависимости (например от времени и координат) говорят о случайных полях.

По отношению к реакции механической системы нагрузки можно разделить на две группы:

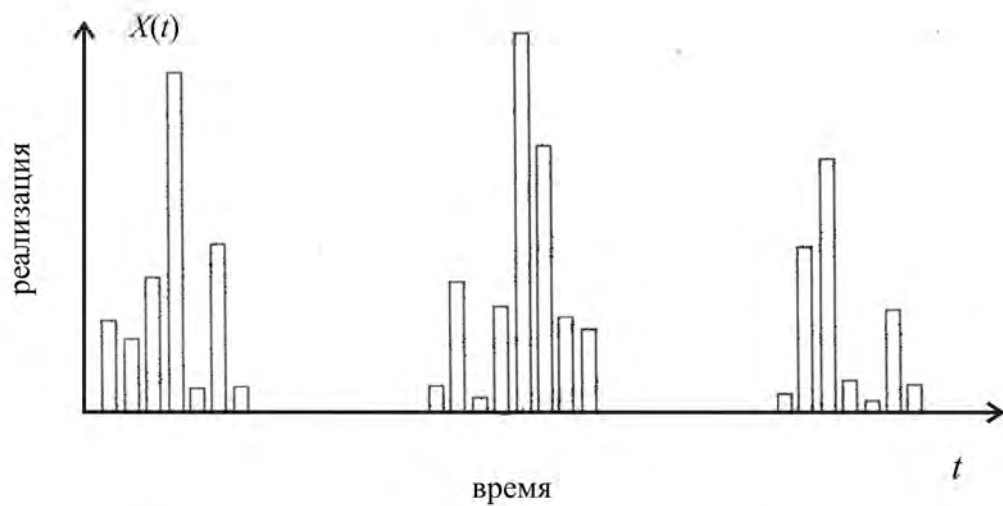
1) если изменчивость нагрузок во времени соизмерима с собственными частотами системы и в связи с этим возможны ее колебания, то такая нагрузка рассматривается как динамическая, или как нагрузка с микроизменениями во времени; такие нагрузки и реакция системы на них могут быть описаны как непрерывные случайные процессы (рис. 4.1, *а*);

2) если изменчивость нагрузок во времени лежит вне области собственных частот несущей конструкции, то такие нагрузки рассматриваются как статические, или нагрузки с макроизменениями во времени; изменение нагрузок протекает в интервалах времени, измеряемых часами, сутками, годами или десятилетиями (нагрузка от снега, мебели, складированных предметов или давления земли); такие нагрузки можно приближенно представить в виде последовательности прямоугольных импульсов со случайными интенсивностями  $A_i$ , длительностями  $\Delta t_i$  и временем приложения  $t_i$  (рис. 4.1, *б*).

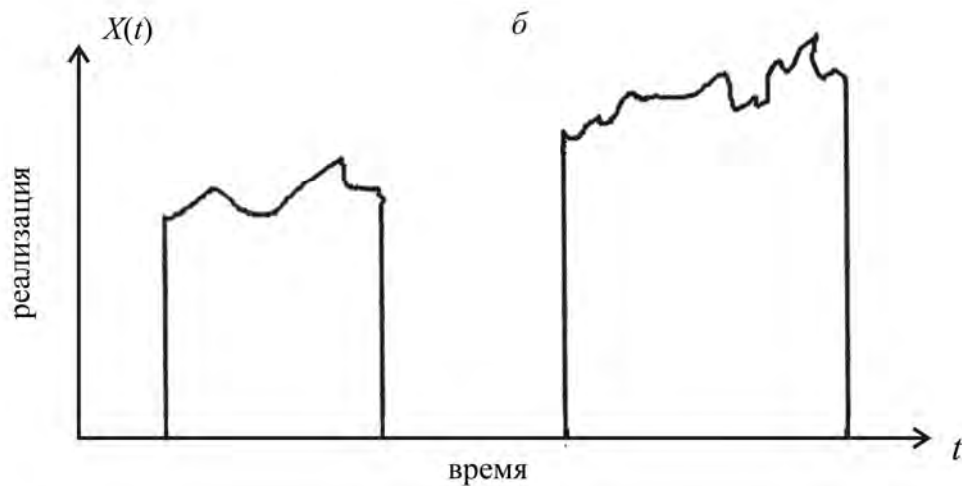
Если нагрузки меняются как в микро-, так и в макрообластях времени, их можно представить наложением непрерывного процесса на импульсный (рис. 4.1, *в*). Примерами таких процессов являются землетрясения, ветровые нагрузки, воздействия волн.



*a*



*б*



*в*

Рис. 4.1. Реализации случайных нагрузок: *a* — непрерывный случайный процесс; *б* — случайная последовательность независимых нагружений; *в* — наложение непрерывного и импульсного процессов

Для очень многих задач интерес представляют только экстремальные значения нагрузок, возникающие за срок службы сооружения. В этом случае нагрузки представляются в виде случайных величин с экстремальным распределением.

Ниже излагаются сведения из теории случайных функций, необходимые для моделирования нагрузок и проведения вероятностных расчетов строительных конструкций с упором на практическое применение.

*Случайной функцией*  $\tilde{X}(t)$  называется такая функция неслучайного аргумента  $t$ , которая при любом значении  $t$  является случайной величиной.

*Случайным процессом* называют такую функцию  $\tilde{X}(t)$ , аргумент которой  $t$  может принимать любые значения в заданном интервале.

*Случайной последовательностью* называется такая функция  $\tilde{X}(t)$ , аргумент которой может принимать только определенные дискретные значения.

Как результат эксперимента или наблюдения получим одну реализацию случайной функции. Эта реализация представляет собой обычную неслучайную (детерминированную) функцию. Новые эксперименты или наблюдения дают другие реализации, т. е. другие детерминированные функции. Однако вероятностные характеристики различных реализаций одной и той же случайной функции одинаковы.

## 4.2. Закон распределения случайной функции

Приближенно случайную функцию  $\tilde{X}(t)$  можно представить в виде системы  $m$  случайных величин

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}(t_1), \tilde{X}_2 = \tilde{X}(t_2), \dots, \tilde{X}_m = \tilde{X}(t_m). \quad (4.1)$$

По мере увеличения  $m$  такая замена становится все более точной. В пределе число значений аргумента  $t$  и соответственно число случайных величин (4.1) становится бесконечным.

Каждая случайная величина  $\tilde{X}_i = \tilde{X}(t_i)$  обладает законом распределения, который в общем случае зависит от  $t$ . Обозначим его  $p(x, t)$ . Закон распределения  $p(x, t)$  является одномерным законом распределения случайной функции  $\tilde{X}(t)$ . Однако знание плотности вероятностей только в один момент времени не является полной характеристикой случайной функции, так как этот закон никак не отражает взаимную зависимость ординат случайной функции.

Для получения более детальной характеристики случайной функции выбираем два значения аргумента  $t_1$  и  $t_2$ . Соответствующие им ординаты  $\tilde{X}(t_1)$  и  $\tilde{X}(t_2)$  будут случайными величинами  $\tilde{X}_1$  и  $\tilde{X}_2$ , статистическая взаимосвязь которых полностью характеризуется двумерным законом распределения  $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ . Очевидно, теоретически можно неограниченно увеличи-



вать число аргументов и получать при этом все более подробную характеристику случайной функции при помощи многомерного закона распределения.

Однако такой подход оказывается достаточно громоздким.

Для решения многих практических задач бывает вполне достаточно пользоваться характеристиками случайных функций, аналогичными числовым характеристикам случайных величин, причем соответствующий раздел прикладной теории случайных функций носит название корреляционной теории случайных функций.

### 4.3. Характеристики случайных функций

Аналогично числовым характеристикам случайных величин: математическому ожиданию и дисперсии для одной случайной величины, математическим ожиданиям и корреляционной матрице для системы случайных величин, вводятся основные характеристики случайных функций. В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой определенные числа, характеристики случайных функций в общем случае являются функциями.

*Математическим ожиданием* случайной функции  $\tilde{X}(t)$  называется неслучайная функция  $m_x(t)$ , которая при каждом значении аргумента  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. Это некоторая средняя функция, около которой варьируются конкретные реализации случайной функции

$$m_x(t) = M[\tilde{X}(t)]. \quad (4.2)$$

*Дисперсией* случайной функции  $t_2$  называется неслучайная функция  $D_x(t)$ , значение которой для каждого  $t$  равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции

$$D_x(t) = D[\tilde{X}(t)]. \quad (4.3)$$

Дисперсия случайной функции при каждом  $t$  характеризует разброс возможных реализаций случайной функции относительно среднего.

$D_x(t)$  — неотрицательная функция. Извлекая из нее корень, получим стандарт — среднее квадратическое отклонение случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \quad (4.4)$$

Математическое ожидание и дисперсия представляют собой важные характеристики случайной функции, но для описания всех ее особенностей их недостаточно.

Рассмотрим для примера две случайные функции  $\tilde{X}_1(t)$  и  $\tilde{X}_2(t)$ , имеющие одинаковые математические ожидания и дисперсии (рис. 4.2):

$$m_{x_1}(t) = m_{x_2}(t); D_{x_1}(t) = D_{x_2}(t). \quad (4.5)$$

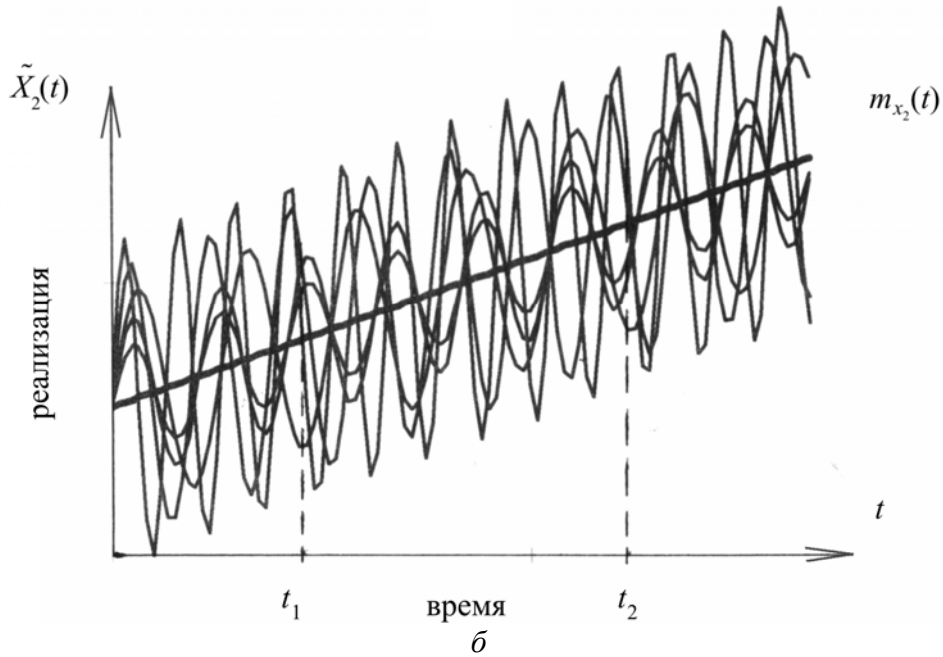
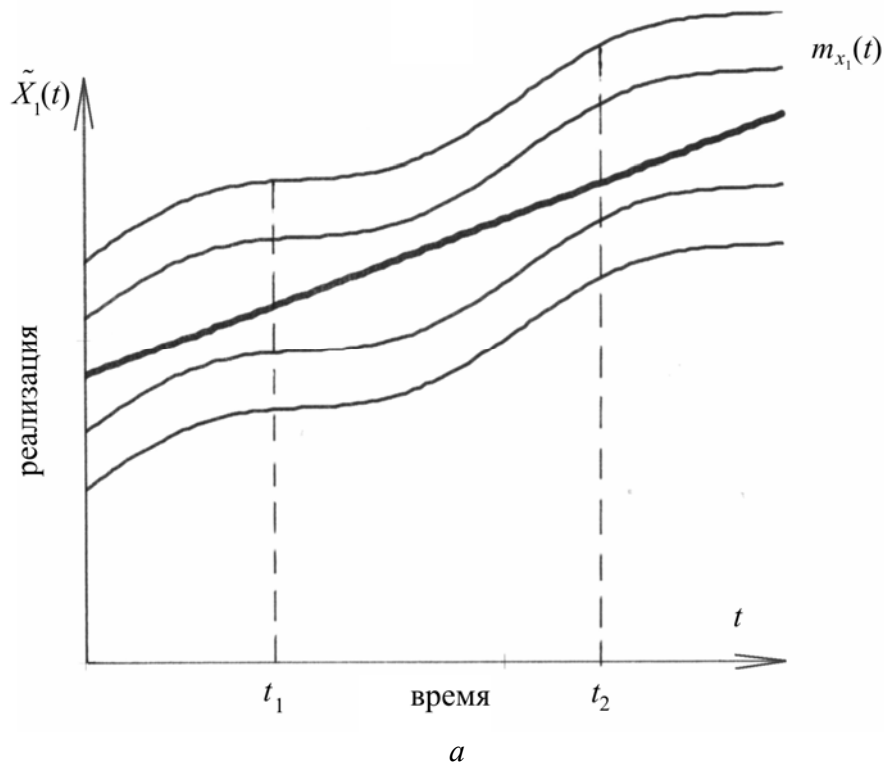


Рис. 4.2. Реализации случайных функций  $\tilde{X}_1(t)$  и  $\tilde{X}_2(t)$

По своей внутренней структуре эти функции различны. Для  $\tilde{X}_1(t)$  характерно плавное изменение. Зная значение  $i$ -й реализации  $x_{i_1}(t_1)$  в точке  $t_1$ , можно с большой вероятностью оценить ее значение  $x_{i_1}(t_2)$  в точке  $t_2$ . То есть, между сечениями функции  $\tilde{X}_1(t)$  существует ярко выраженная зависимость.

Функция  $\tilde{X}_2(t)$  характеризуется беспорядочными колебаниями. Зависимость между ее значениями быстро затухает по мере увеличения расстояния  $t_2 - t_1$ . Зная значение  $i$ -й реализации  $x_{2i}(t_1)$ , невозможно оценить значение этой же реализации в сечении  $t_2$ .

Для описания степени статистической зависимости между сечениями случайной функции вводится характеристика, называемая *корреляционной функцией*.

*Корреляционной функцией* случайной функции  $\tilde{X}(t)$  называется неслучайная функция двух аргументов  $K_x(t_1, t_2)$ , которая при каждой паре значений  $t_1$  и  $t_2$  равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции.

$$K_x(t_1, t_2) = M \left[ \overset{\circ}{X}(t_1), \overset{\circ}{X}(t_2) \right], \quad (4.6)$$

$$\text{где } \overset{\circ}{X}(t_1) = \tilde{X}(t_1) - m_x(t_1), \quad \overset{\circ}{X}(t_2) = \tilde{X}(t_2) - m_x(t_2). \quad (4.7)$$

Если случайную функцию рассматривать в виде совокупности  $m$  случайных величин, то оценки ее характеристик можно вычислить по формулам:

математическое ожидание

$$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(t_k)}{n}; \quad (4.8)$$

дисперсия

$$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)]^2}{n-1}; \quad (4.9)$$

корреляционная функция

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [X_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)][X_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l)]}{n-1}, \quad (4.10)$$

где  $n$  — число замеренных реализаций случайной функции  $k = 1, \dots, m$ ;  $l = 1, \dots, m$ .

При  $t_1 = t_2$  корреляционная функция обращается в дисперсию

$$K_x(t_1, t_1) = D_x(t_1). \quad (4.11)$$

Так как корреляционный момент двух случайных величин  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}(t_1)$  и  $\tilde{X}_2 = \tilde{X}(t_2)$  не зависит от последовательности, в которой эти величины рассматриваются, то корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1). \quad (4.12)$$

Если изобразить корреляционную функцию  $K_x(t_1, t_2)$  в виде поверхности, то эта поверхность будет симметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через биссектрису угла  $t_0 t_1$ .

Вместо корреляционной функции  $K_x(t_1, t_2)$  можно пользоваться *нормированной корреляционной функцией*

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{[\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)]}, \quad (4.13)$$

которая представляет собой коэффициент корреляции величин  $\tilde{X}_1 = \tilde{X}(t_1)$  и  $\tilde{X}_2 = \tilde{X}(t_2)$ . При  $t_1 = t_2$  нормированная корреляционная функция равна единице

$$r_x(t_1, t_1) = \frac{K_x(t_1, t_1)}{[\sigma_x(t_1)]^2} = \frac{D_x(t_1)}{D_x(t_1)} = 1. \quad (4.14)$$

#### 4.4. Стационарные случайные функции

Среди случайных функций особое место занимают стационарные случайные функции, протекающие во времени приблизительно однородно в виде непрерывных колебаний вокруг среднего значения. Примером могут служить колебания конструкции при работе механизма, процесс качки корабля и др. (рис. 4.3).

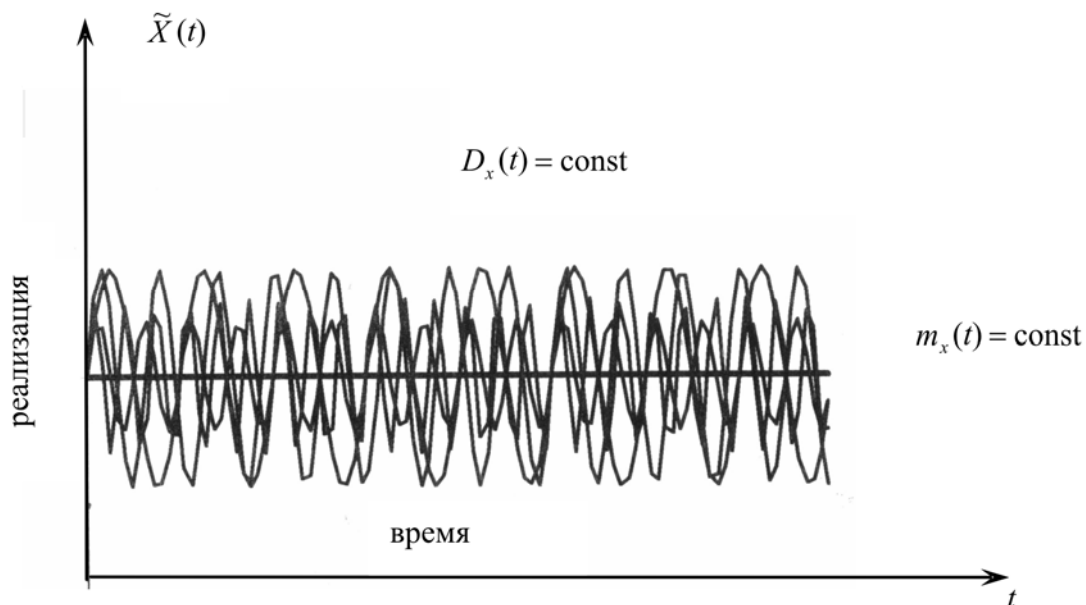


Рис. 4.3. Пример стационарной случайной функции

При исследовании стационарного процесса в качестве начала отсчета можно выбрать любой момент времени.

Случайная функция  $\tilde{X}(t)$  называется стационарной, если ее математическое ожидание и дисперсия не изменяются от времени, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов  $\tau = t_2 - t_1$ .

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau). \quad (4.15)$$

Корреляционная функция стационарной случайной функции является функцией не двух, а одного аргумента  $\tau$ . Разделив корреляционную функцию на дисперсию, получим нормированную корреляционную функцию

$$\rho_x(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}. \quad (4.16)$$

Это обстоятельство сильно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

В приложениях часто приходится встречаться с показательной корреляционной функцией

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}. \quad (4.17)$$

Другим типом часто встречающейся корреляционной функции стационарного случайного процесса является функция вида

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \theta \tau,$$

или более общая функция вида

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos \theta \tau + \gamma \sin \theta |\tau|). \quad (4.18)$$

На рис. 4.4 приведен график показательной корреляционной функции (4.17) и экспоненциально-косинусной корреляционной функции (4.18).

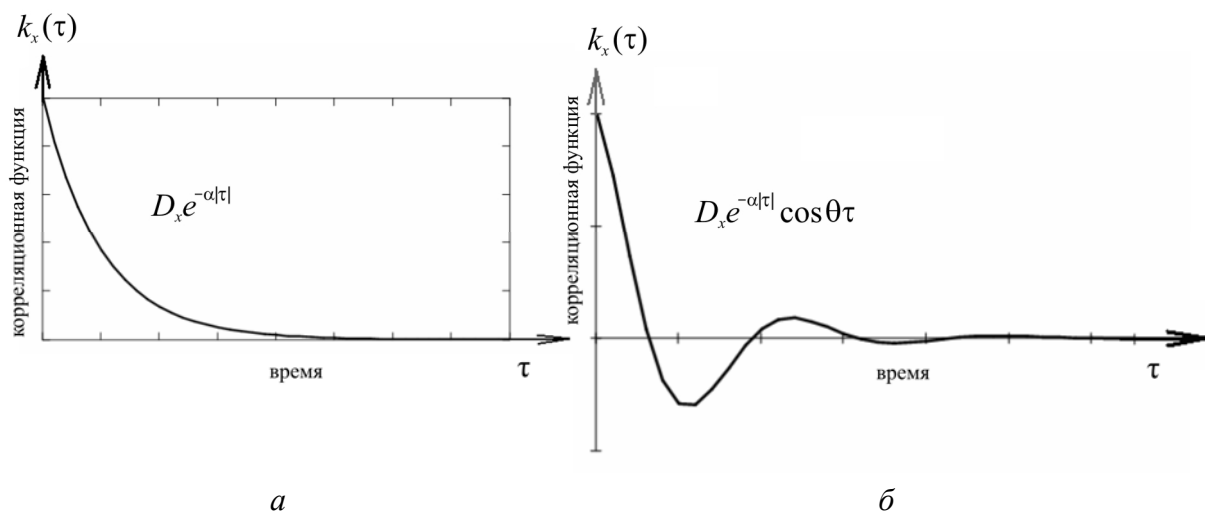


Рис. 4.4. Корреляционные функции стационарных случайных функций

## 4.5. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени

Так как стационарная случайная функция представляет собой хаотические колебания относительно своего математического ожидания, разложим ее в ряд, составленный из синусоид различных частот со случайными амплитудами и фазами:

$$\tilde{X}(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^n (\tilde{A}_i \cos \omega_i t + \tilde{B}_i \sin \omega_i t), \quad (4.19)$$

где  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — произвольно выбранные частоты,  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ ;  $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \dots, \tilde{B}_n$  — случайные величины, математические ожидания которых равны нулю. Рассматриваем только случаи, когда величины  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) не коррелированы и имеют попарно равные дисперсии. В этом случае запишем:

$$\begin{cases} D[\tilde{A}_i] = M[\tilde{A}_i^2]; D[\tilde{B}_i] = M[\tilde{B}_i^2]; \\ M[\tilde{A}_i] = M[\tilde{B}_i] = 0; D[\tilde{A}_i] = D[\tilde{B}_i] = D_i; \\ M[\tilde{A}_i \cdot \tilde{A}_j] = M[\tilde{B}_i \cdot \tilde{B}_j] = 0, \text{ при } i \neq j; \\ M[\tilde{A}_i \cdot \tilde{B}_j] = 0, \text{ при любых } i \text{ и } j. \end{cases} \quad (4.20)$$

Корреляционная функция случайной функции (4.20)

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M[\tilde{X}(t_1) \tilde{X}(t_2)] = \sum_{i=1}^n M[(\tilde{A}_i \cos \omega_i t_1 + \tilde{B}_i \sin \omega_i t_1) \times \\ &\quad \times (\tilde{A}_i \cos \omega_i t_2 + \tilde{B}_i \sin \omega_i t_2)] = \sum_{i=1}^n M[\tilde{A}_i^2 \cos \omega_i t_1 \cdot \cos \omega_i t_2 + \\ &\quad + \tilde{B}_i \tilde{A}_i \sin \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2 + \tilde{A}_i \tilde{B}_i \cos \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2 + \tilde{B}_i^2 \sin \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2] = \\ &= \sum_{i=1}^n \{ \cos \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2 M[\tilde{A}_i^2] + \sin \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2 M[\tilde{B}_i \tilde{A}_i] + \\ &\quad + \cos \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2 M[\tilde{A}_i \tilde{B}_i] + \sin \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2 M[\tilde{B}_i^2] \}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Используя соотношения (4.21), получим:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n (D_i \sin \omega_i t_1 \sin \omega_i t_2 + D_i \cos \omega_i t_1 \cos \omega_i t_2) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i (t_1 - t_2). \quad (4.22)$$

Формула (4.22) показывает, что при выполнении условия (4.21) корреляционная функция случайной функции зависит только от разности аргументов, т. е. является корреляционной функцией стационарной случайной функции

$$k_x(\tau) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i \tau, \quad (4.23)$$

где  $\tau = t_1 - t_2$ .

Этот результат справедлив при любом  $n$ , в том числе и при  $n = \infty$ .

Таким образом, все случайные функции, которые можно составить из некоррелированных синусоид различных частот со случайными амплитудами и фазами, являются стационарными случайными функциями, если только выполнены условия (4.21).

Совокупность частот  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  представляет собой *спектр частот* рассматриваемой случайной функции. Понятие «спектра» встречается не только в теории случайных функций, оно широко применяется в математике, физике и технике. Если какой-либо колебательный процесс представляется в виде суммы гармонических колебаний различных частот (так называемых «гармоник»), то *спектром* колебательного процесса называется функция, описывающая распределение амплитуд по различным частотам. Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данном процессе и какова его внутренняя структура.

Аналогичное спектральное описание можно дать и стационарному случайному процессу. Но амплитуды колебаний случайного процесса являются случайными величинами, поэтому его спектр описывает распределение не амплитуд, а *дисперсий амплитуд* по различным частотам.

Рассмотрим случай бесконечного множества равноотстоящих частот

$$\omega_i = \frac{\pi_i}{T} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad \Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \frac{\pi}{T}, \quad (4.24)$$

где  $T$  — произвольное положительное число. В этом случае корреляционная функция, определяемая формулой (4.22), будет периодической функцией с периодом  $2T$  и формула (4.23) определяет ее разложение в ряд Фурье. Коэффициенты этого ряда находятся по известной из теории рядов Фурье формуле для четной функции ( $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$ )

$$D_i = \frac{2}{T} \int_0^T k_x(\tau) \cos \omega_i \tau d\tau, \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.25)$$

Из формулы (4.23) следует, что при  $\tau = 0$  дисперсия случайной функции  $\tilde{X}(t)$  равна

$$D_x = k_x(0) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i. \quad (4.26)$$

Таким образом, дисперсия стационарной случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения. Формула (4.26) показывает, что дисперсия функции  $\tilde{X}(t)$  известным образом распределена

по различным частотам: одним частотам соответствуют большие дисперсии, другим — меньшие. Распределение дисперсий по частотам графически приведено на рис. 4.5.

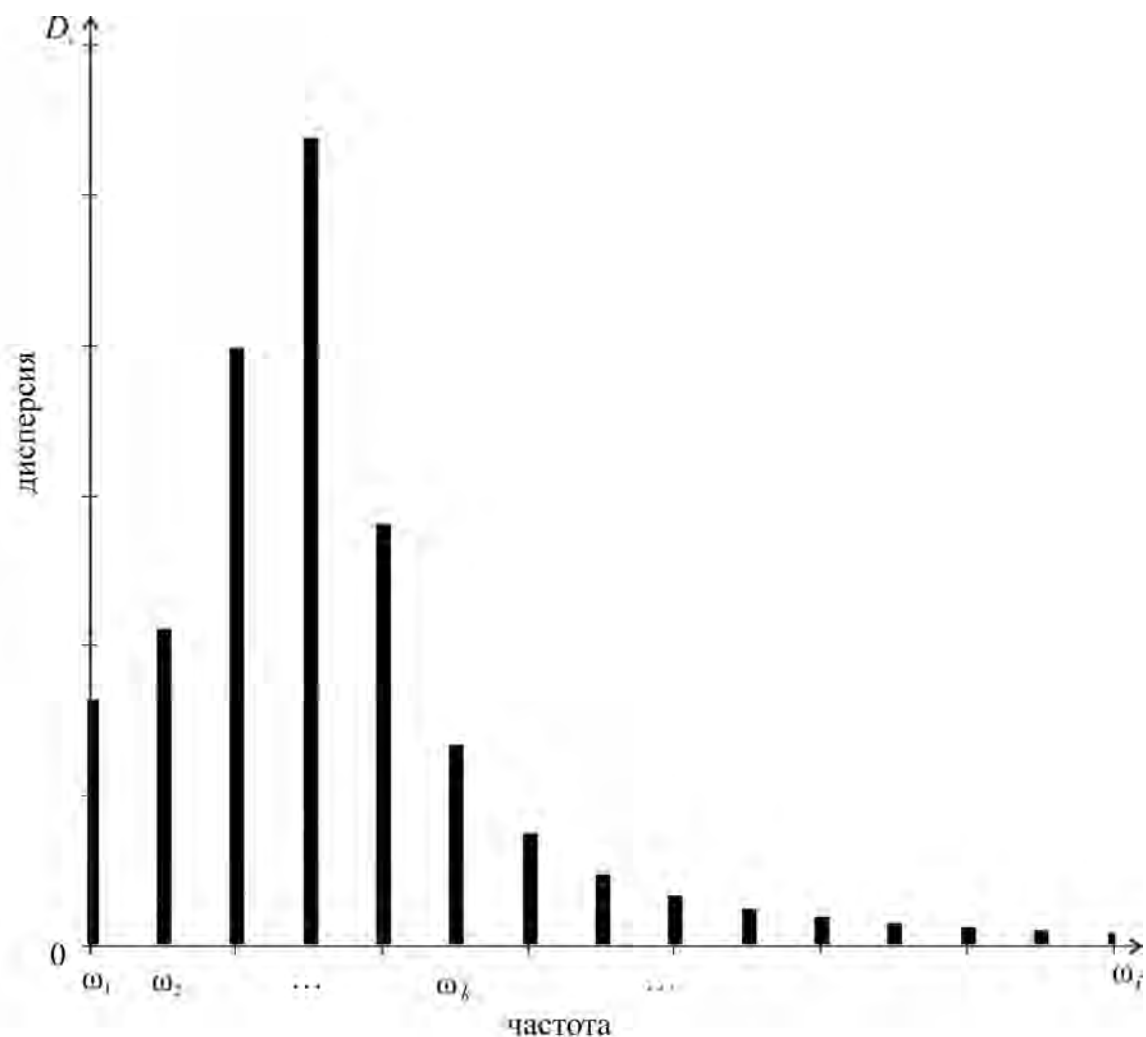


Рис. 4.5. Дискретный спектр стационарной случайной функции

#### 4.6. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени. Спектральная плотность стационарной случайной функции

Спектр дисперсий стационарной случайной функции на конечном участке времени  $(0, T)$  — прерывистый спектр в виде ряда отдельных дискретных линий, разделенных равными промежутками  $\Delta\omega$ . Величина интервала  $\Delta\omega$  или, что одно и то же, величина  $T$  в формулах (4.24) может быть любой. Поэтому все полученные результаты можно распространить и на суммы бесконечно малых слагаемых.

При  $T \rightarrow 0$   $\Delta\omega \rightarrow 0$ , поэтому расстояние между частотами  $\omega_i$ , на которых строится спектр, будут непрерывно уменьшаться. При этом дискретный спектр будет приближаться к непрерывному, в котором каждому сколь угодно



но малому интервалу частот  $\Delta\omega$  будет соответствовать элементарная дисперсия  $\Delta D(\omega)$ . Чтобы изобразить непрерывный спектр графически, по оси ординат следует откладывать не саму дисперсию  $D_i$  (которая неограниченно уменьшается при  $T \rightarrow \infty$ ), а среднюю плотность дисперсии, т. е. дисперсию, приходящуюся на единицу длины данного интервала частот. На каждом интервале  $\Delta\omega$ , как на основании, построим прямоугольник с площадью  $D_i$  (рис. 4.6). Получим ступенчатую диаграмму, напоминающую по принципу построения гистограмму статистического распределения. Высота диаграммы на участке  $\Delta\omega$ , центр которого точка  $\omega_i$ , равна

$$S_x(\omega_i) = \frac{D_i}{\Delta\omega} \quad (4.27)$$

и представляет собой среднюю плотность дисперсии на этом участке. Суммарная площадь всей диаграммы равна дисперсии случайной функции  $\tilde{X}(t)$ .

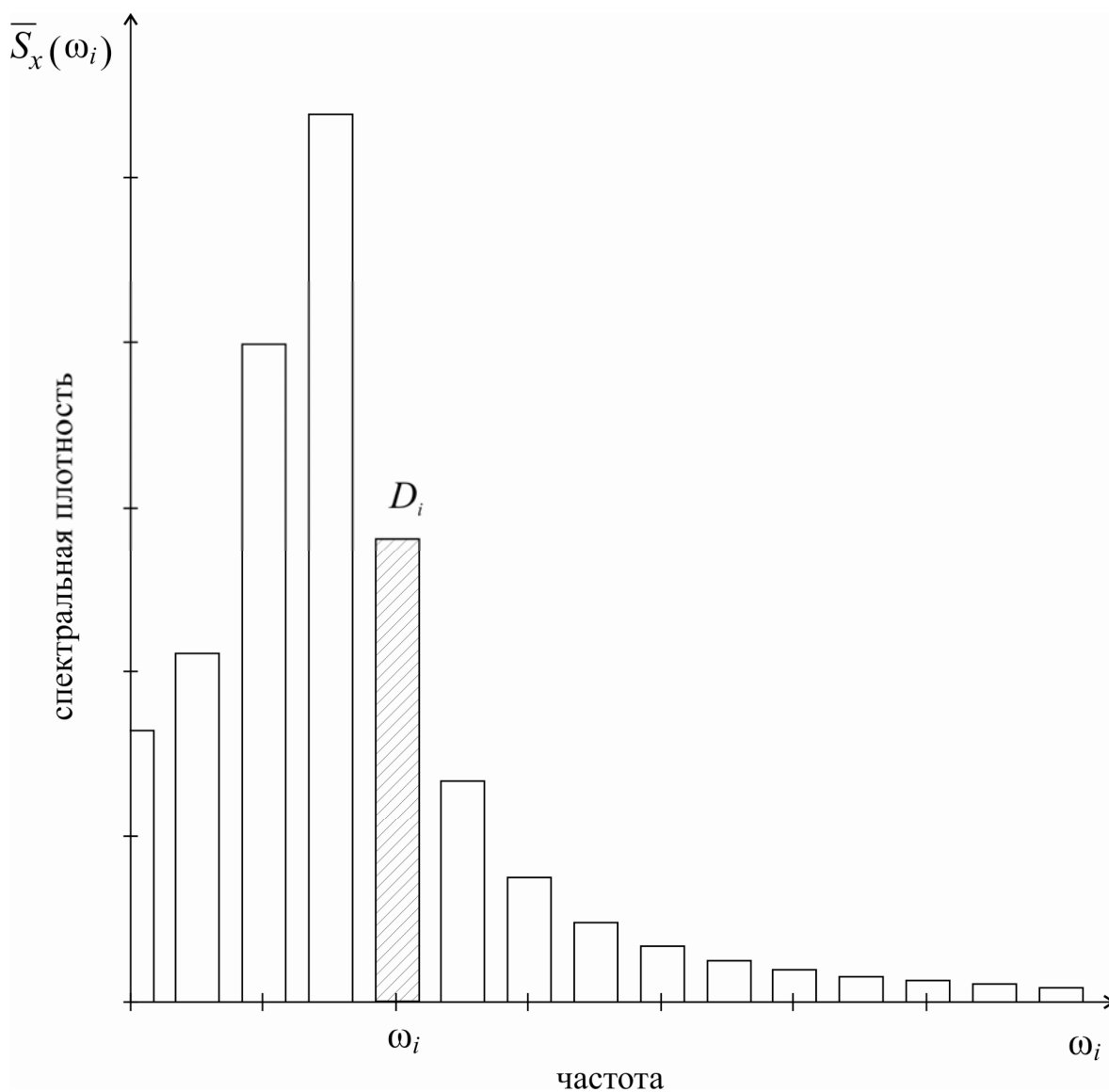


Рис. 4.6. Диаграмма спектральной плотности  $\bar{S}_x(\omega_i)$

При неограниченном увеличении интервала  $T$  и одновременном уменьшении  $\Delta\omega$  ступенчатая кривая  $\bar{S}_x(\omega_i)$  будет неограниченно приближаться к плавной кривой  $S_x(\omega)$  (рис. 4.7).

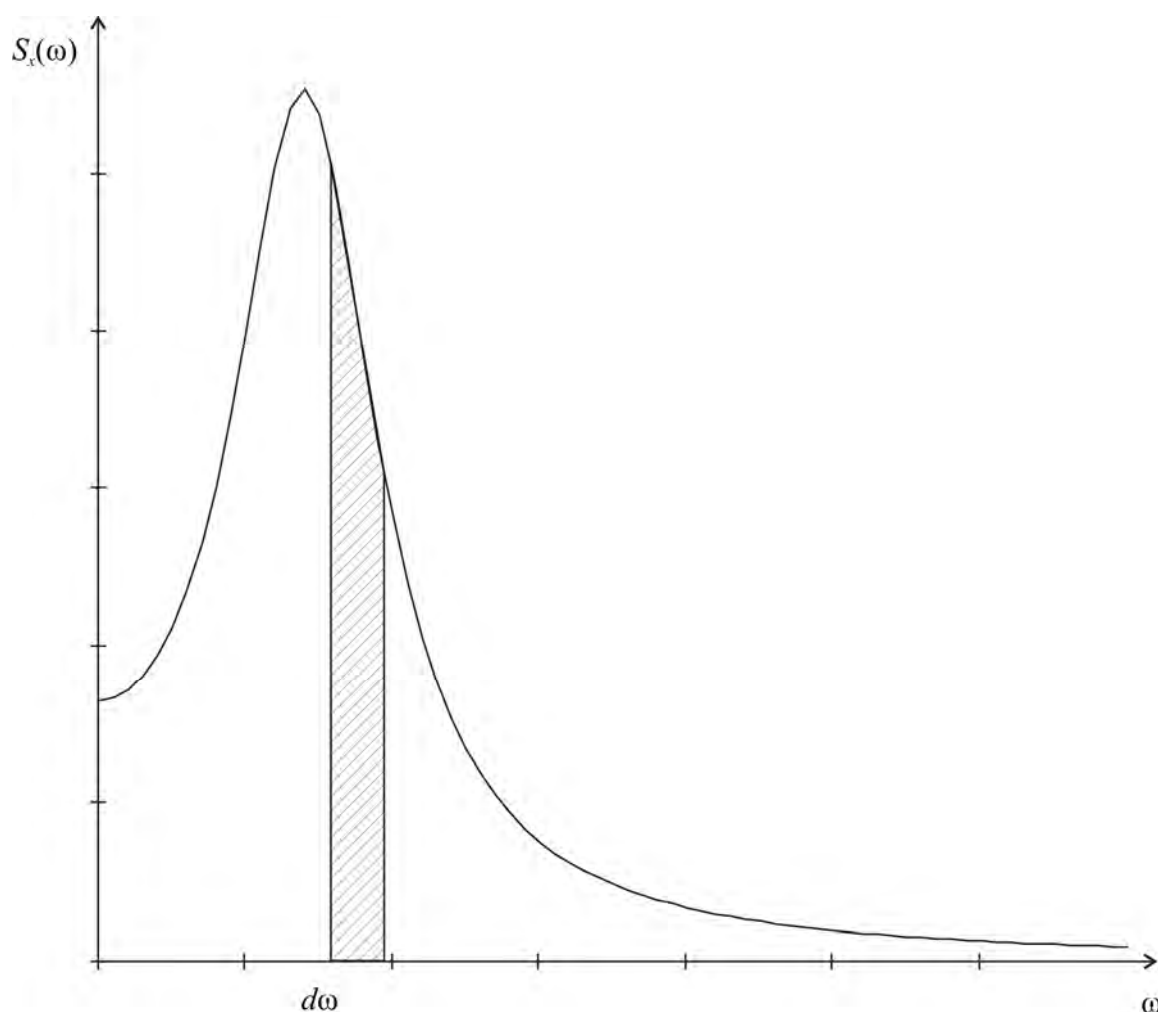


Рис. 4.7. Спектральная плотность стационарной случайной функции

Эта кривая является плотностью распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра. Функция  $S_x(\omega)$  называется спектральной плотностью стационарной случайной функции  $\tilde{X}(t)$ .

Очевидно,

$$D_x = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (4.28)$$

Формула (4.28) — разложение дисперсии  $D_x$  на сумму элементарных слагаемых  $S_x(\omega)d\omega$ , каждое из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный участок частот  $d\omega$ , прилежащий к точке  $\omega$ .

Спектральная плотность не является самостоятельной характеристикой случайного стационарного процесса. Она полностью определяется корреляционной функцией этого процесса. Между этими характеристиками существ-

вует взаимосвязь. Корреляционная функция и спектральная плотность выражаются одна через другую с помощью преобразования Фурье:

$$k_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega_i d\tau, \quad (4.29)$$

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_x(\tau) \cos \omega_i d\tau. \quad (4.30)$$

На практике вместо спектральной плотности  $S_x(\omega)$  часто пользуются нормированной спектральной плотностью

$$S_x^H(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}, \quad (4.31)$$

где  $D_x$  — дисперсия случайной функции  $\tilde{X}(t)$ .

Полная площадь, ограниченная графиком нормированной спектральной плотности, равна единице:

$$\int_0^{\infty} S_x^H(\omega) d\omega = 1. \quad (4.32)$$

Спектральное разложение является более эффективным при исследовании случайных функций, чем описание их при помощи корреляционных функций.

## 4.7. Примеры корреляционных функций и спектральных плотностей стационарных случайных процессов

Рассмотрим связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью на примерах, наиболее часто встречающихся в практических приложениях.

1. Корреляционная функция вида

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad (4.33)$$

где  $D_x$  — дисперсия случайного процесса  $\tilde{X}(t)$ . Коэффициент  $\alpha$  имеет размерность, обратную размерности времени и служит характеристикой быстроты убывания корреляционной связи между ординатами случайной функции при увеличении разности аргументов этих ординат.

Пользуясь формулой (4.30), получим

$$S_x(\omega) = \frac{D_x}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (4.34)$$

Графики функций  $k_x(\tau)$  и  $S_x(\omega)$  приведены на рис. 4.8.

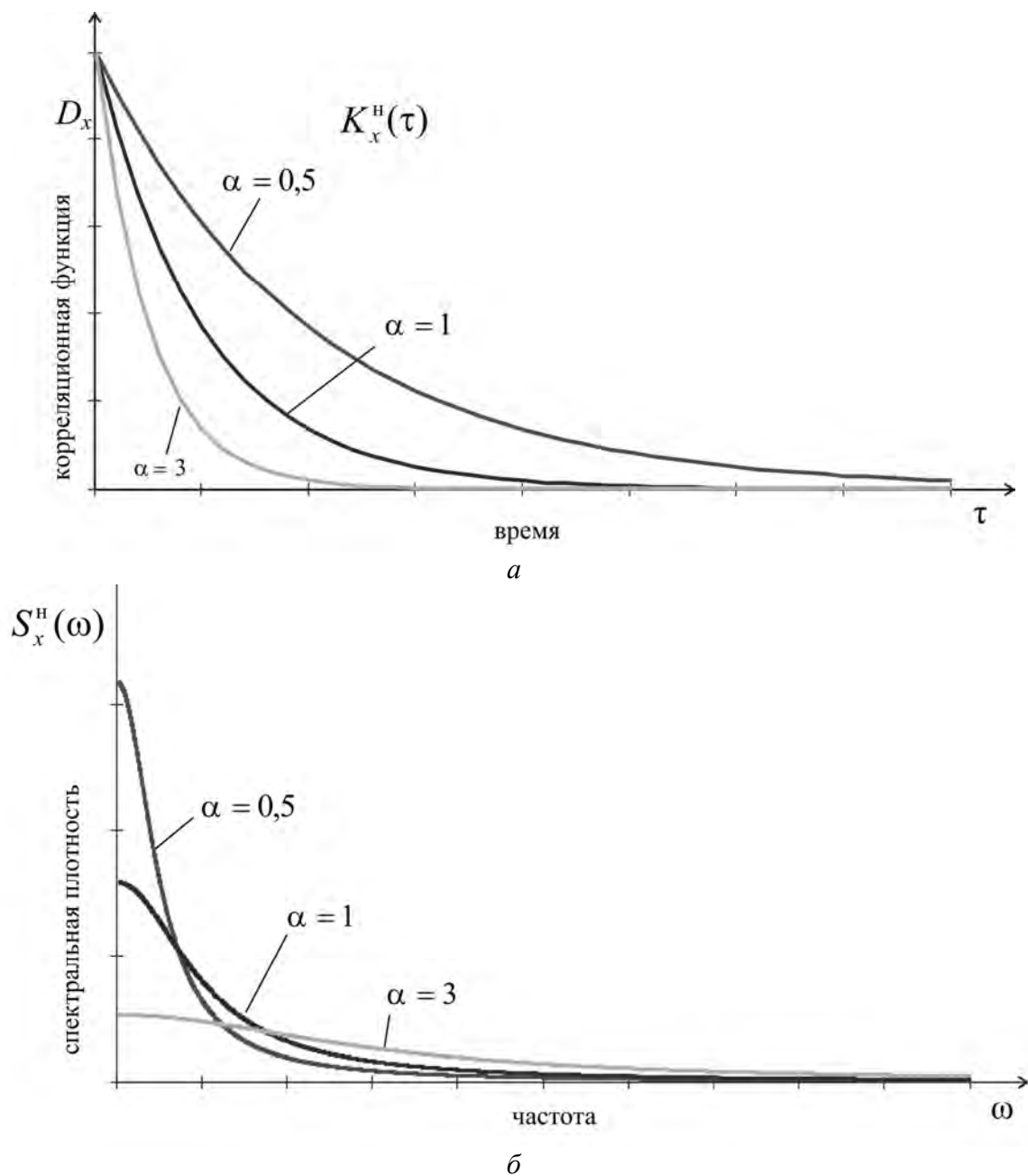


Рис. 4.8. Графики: *a* — корреляционной функции; *б* — спектральной плотности из примера 1

При увеличении  $\alpha$  быстрота убывания ординат функции  $k_x(\tau)$  увеличивается, начальная ордината спектральной плотности, равная  $\frac{D_x}{\pi\alpha}$ , уменьшается, и функция  $S_x(\omega)$  становится одновременно более полой.

Такое поведение функции  $S_x(\omega)$  при увеличении  $\alpha$  позволяет ввести весьма часто встречающееся в приложениях понятие «белого шума», т. е. случайной функции с постоянной спектральной плотностью. При  $\alpha \rightarrow \infty$   $k_x(\tau)$  превращается в пикообразную функцию, отличную от нуля только в очень узкой области значений  $\tau \approx 0$ . Одновременно с этим кривая спектральной плотности будет близка к постоянной

$$S_x(\omega) \approx c = \text{const},$$

где постоянная  $c$ , характеризующая интенсивность белого шума, равна

$$c = \frac{D_x}{\pi\alpha}. \quad (4.35)$$

При  $S_x(\omega) = c$  корреляционная функция белого шума превращается в  $\delta$ -функцию:

$$k_x(\tau) = 2\pi c \delta(\tau). \quad (4.36)$$

Физический смысл приведенного результата состоит в том, что ординаты «белого шума», взятые для любых различных моментов времени, являются некоррелированными случайными величинами. В соответствии с (4.36) дисперсия ординаты «белого шума» обращается в бесконечность, что является следствием предположения о постоянстве спектральной плотности для всех значений частоты  $\omega$ . Это предположение не выполняется у физически реализуемых случайных процессов, но является весьма полезной абстракцией в том случае, когда в пределах рассматриваемого диапазона изменения частот  $\omega$  спектральная плотность процесса практически постоянна (рис. 4.9).

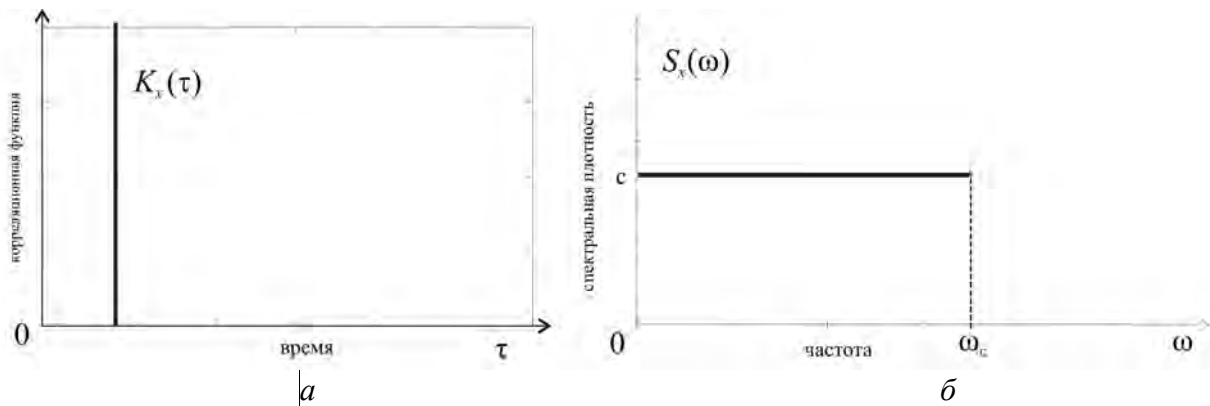


Рис. 4.9. Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного «белого шума»

Подобные процессы называют «белым шумом», так как слово «белый» напоминает их сходство с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден, а слово «шум» возникло потому, что подобные процессы исторически впервые рассматривались в электротехнике, где их наличие приводит к возникновению шумов в линиях электропередач.

Один и тот же процесс в одной задаче можно рассматривать как «белый шум», а в другой приходится учитывать зависимость  $S_x(\omega)$  от частоты.

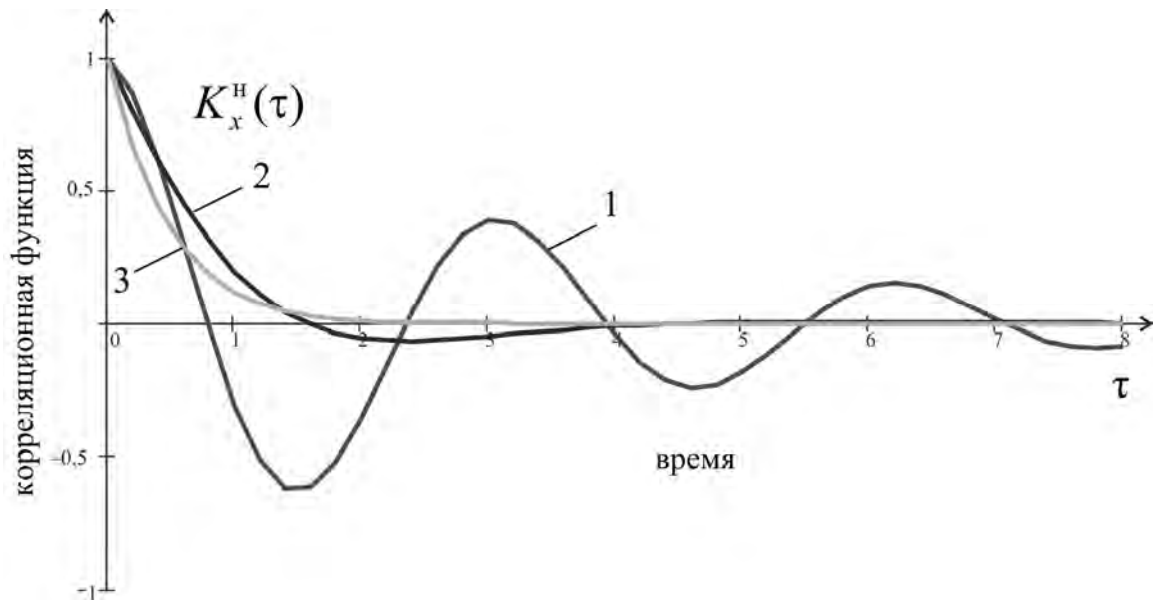
## 2. Корреляционная функция вида

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0.$$

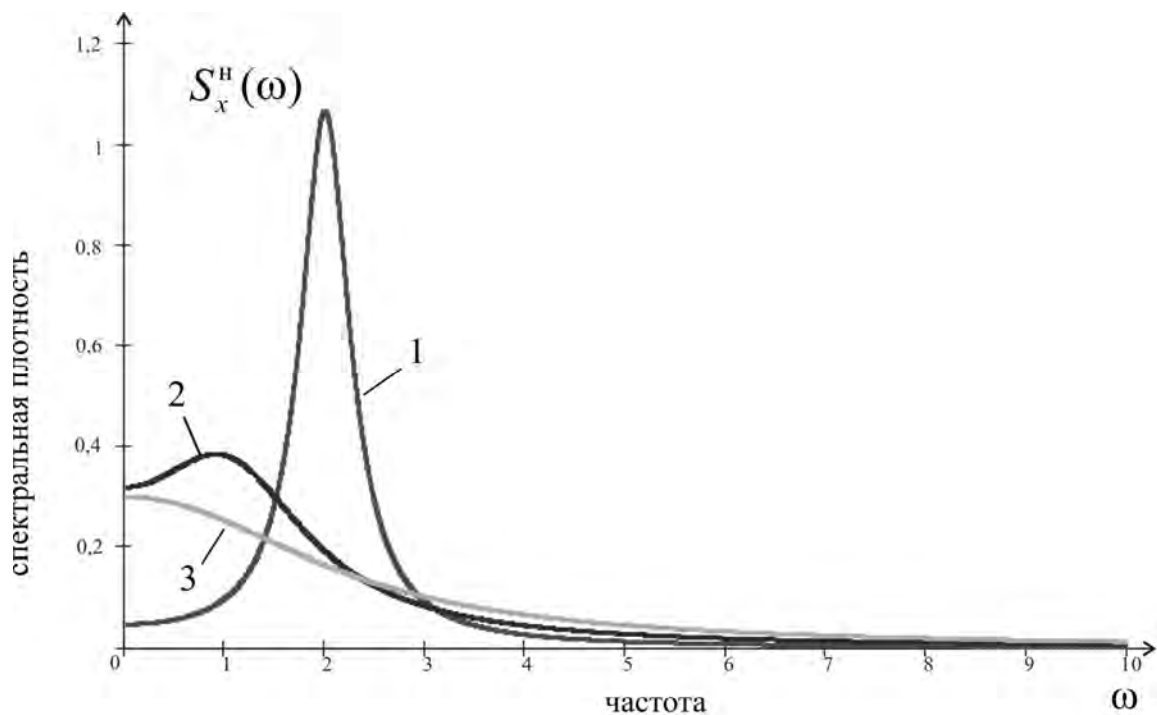
Соответствующая спектральная плотность

$$S_x(\omega) = D_x \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (4.37)$$

Графики функций приведены на рис. 4.10.



а



б

Рис. 4.10. Графики корреляционной функции и спектральной плотности из примера 2:  
 1 —  $\alpha = 0,3$ ,  $\beta = 2$ ; 2 —  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ; 3 —  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0,5$

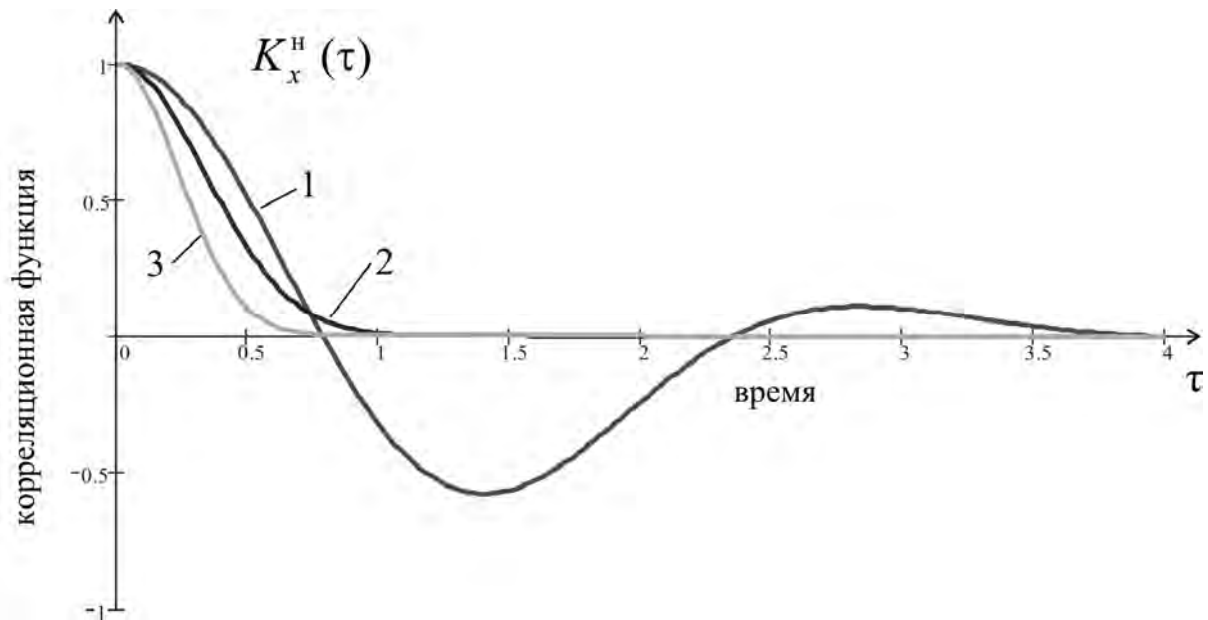
### 3. Корреляционная функция

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2\tau^2} \cos\beta\tau. \quad (4.38)$$

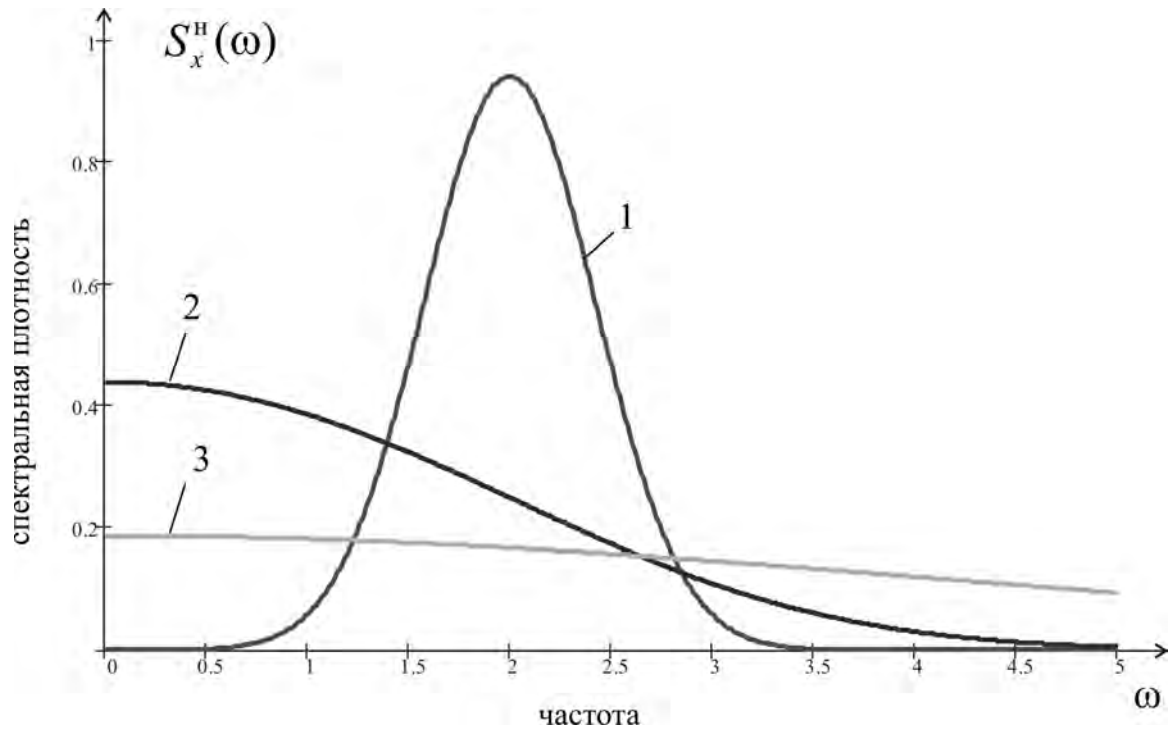
### Спектральная плотность

$$S_x(\omega) = D_x \frac{1}{4\alpha\sqrt{\pi}} \left[ e^{-\frac{(\omega+\beta)^2}{4\alpha^2}} + e^{-\frac{(\omega-\beta)^2}{4\alpha^2}} \right]. \quad (4.39)$$

Графики функций приведены на рис. 4.11.



*a*



*б*

Рис. 4.11. Графики корреляционной функции и спектральной плотности из примера 3:  
 1 —  $\alpha = 0,5, \beta = 2$ ; 2 —  $\alpha = 2, \beta = 1$ ; 3 —  $\alpha = 2, \beta = 0,5$

#### 4. Корреляционная функция

$$k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha^2|\tau|} \left( \cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta|\tau| \right), \alpha > 0. \quad (4.40)$$

Соответствующая спектральная плотность

$$S_x(\omega) = D_x \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (4.41)$$

Графики функций приведены на рис. 4.12.

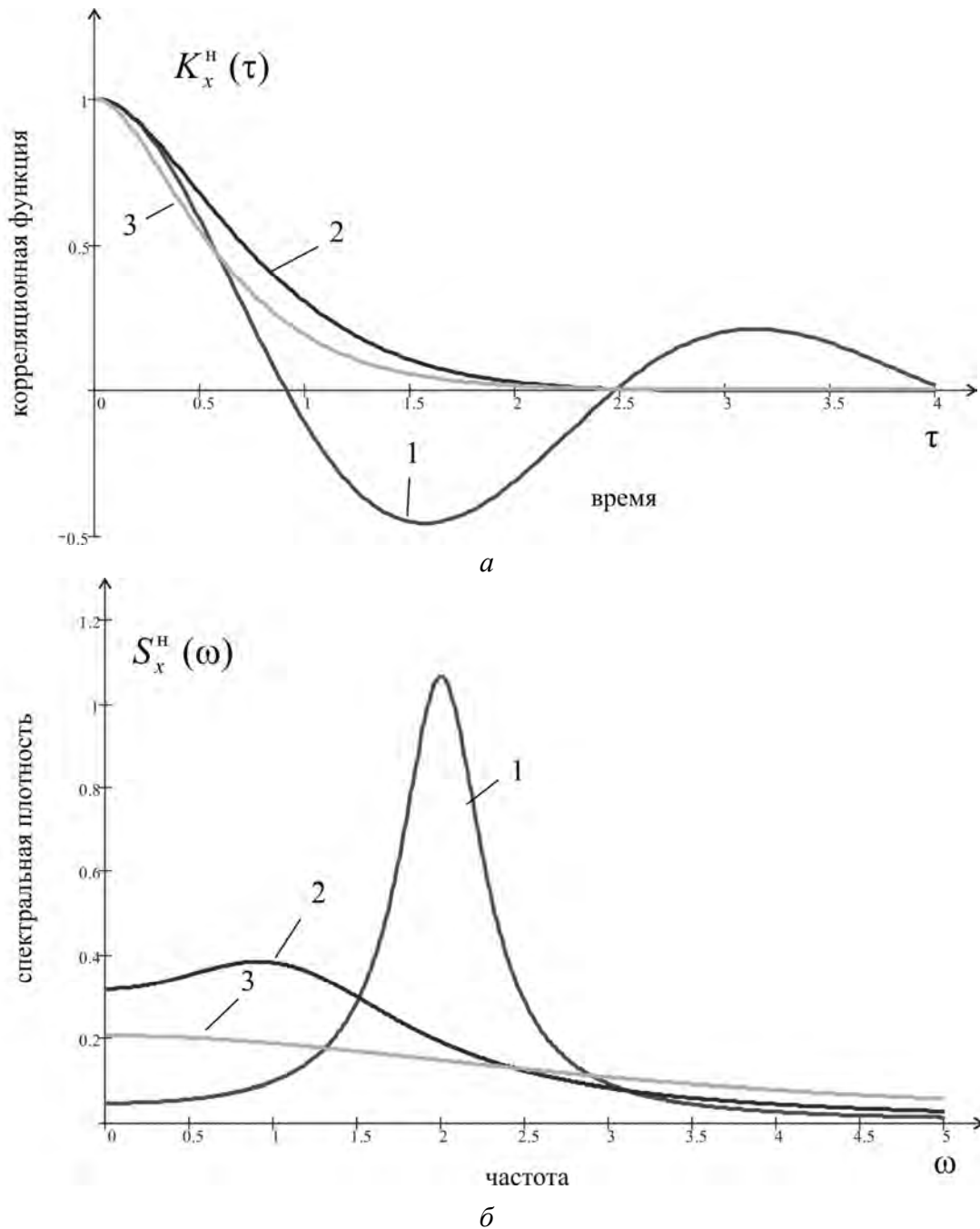


Рис. 4.12. Графики корреляционной функции и спектральной плотности из примера 4:  
 1 —  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 2$ ; 2 —  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ; 3 —  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0,5$



В примерах 2—4 рассмотрены случаи, когда корреляционная функция имеет вид затухающей кривой с частотой  $\beta$ , что описывает ослабление корреляционной связи по мере увеличения интервала  $\tau$ . При небольших значениях параметра  $\alpha$  спектральная плотность является узкополосной, когда подавляющая часть мощности процесса заключена в некотором интервале вокруг преобладающей частоты  $\omega = \beta$ . С увеличением  $\alpha$  график спектральной плотности растягивается вдоль оси частот  $\omega$ .

Практическое определение спектральных плотностей по эмпирическим данным сводится обычно к численному определению корреляционных функций и последующему преобразованию Фурье.

## 4.8. Линейные преобразования случайных функций. Понятие оператора

Понятие оператора является обобщением понятия функции. При функциональной связи между переменными  $y$  и  $x$  записываем:

$$y = f(x). \quad (4.42)$$

Под символом  $f$  понимается правило, по которому заданному значению  $x$  приводится в соответствие вполне определенное значение  $y$ . Знак  $f$  есть символ некоторого преобразования, которому нужно подвергнуть величину  $x$ , чтобы получить  $y$ .

Аналогичные понятия и соответствующая символика применяются и в тех случаях, когда преобразованию подвергаются не величины, а функции. Рассмотрим некоторую функцию  $x(t)$  и установим определенное правило  $L$ , согласно которому функция  $x(t)$  преобразуется в другую функцию  $y(t)$ . Запишем это преобразование

$$y(t) = L\{x(t)\}. \quad (4.43)$$

Правило  $L$  называется оператором.

Примерами операторов являются: оператор дифференцирования, оператор решения дифференциального уравнения, оператор математического ожидания, дисперсии и др. Так, в формуле (4.44) выражение  $M = [\tilde{X}(t)]$  является оператором математического ожидания, представляющего собой осреднение реализаций случайной функции  $\tilde{X}(t)$  в каждом ее сечении  $t$ .

Операторная запись дисперсии

$$D\{\tilde{X}(t)\} = M\left\{\left[\tilde{X}(t)\right]^2\right\} \quad (4.44)$$

есть осреднение квадратов реализаций центрированной случайной функции  $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t) - m_x(t)$  в каждом сечении  $t$ .

Расчет строительных конструкций заключается в установлении математической связи между нагрузками и воздействиями, воспринимаемыми конструкциями, и параметрами, определяющими напряженно-деформированное состояние системы. Схематично эти соотношения можно представить в виде

$$U = L\{q\}, \quad (4.45)$$

где  $q$  — вектор воздействий, элементами которого являются значения внешних нагрузок и воздействий;  $U$  — вектор параметров состояний (напряжения, моменты, прогибы, деформации и т. д.);  $L$  — оператор, устанавливающий связь вектора параметров состояний с вектором воздействий.

В общем случае вектор воздействий  $q$ , как и вектор реакции системы  $U$  могут содержать числа, функции одной или нескольких переменных. Оператор  $L$  задается уравнениями теории упругости, строительной механики и т. п. и начальными и (или краевыми условиями).

В теории случайных функций внешние воздействия принято называть входными параметрами, а параметры поведения системы — выходными.

Пусть задана система, представляющая собой невесомый однопролетный стержень, в центре которого сосредоточена масса  $M$ . На массу действует динамическая нагрузка, изменяющаяся во времени по закону  $P = f(t)$ . Система совершает вынужденные колебания. Перемещение массы в каждое мгновение  $t$  определяется выражением

$$y(t) = \frac{1}{\lambda M} \int_0^t f(\tau) \sin \lambda(t - \tau) d\tau, \quad (4.46)$$

где  $\lambda$  — собственная частота системы.

Схематично выражение (4.46) записывается в виде

$$y(t) = L\{f(t)\},$$

где  $L$  — интегральный оператор.

Операторы функций могут быть отнесены к различным типам: линейные и нелинейные, детерминированные и стохастические, однородные и неоднородные. Наиболее важным для практики является класс линейных операторов.

Линейный оператор обладает следующими свойствами:

$$1) L\{cq\} = cL\{q\}; \quad (4.47)$$

$$2) L\{q_1 + q_2\} = L\{q_1\} + L\{q_2\}, \quad (4.48)$$

где  $c$  — постоянная величина.

К числу линейных относятся операторы сложения, умножения на неслучайную функцию или постоянную, дифференцирования и интегрирования.

В настоящем пособии будем рассматривать только линейные системы и соответствующие им линейные операторы.

## 4.9. Преобразование случайной функции линейным оператором

Соотношение (4.45) устанавливает связь между входными и выходными параметрами системы. Если система детерминированная, то, задав определенные значения входных параметров (нагрузок), параметров самой системы (геометрические, физико-механические и прочностные характеристики конструкции и материала), получим определенные значения выходных параметров (напряжения, деформации, усилия). В строительной механике такой задаче соответствует прямой расчет конструкции на действие заданных сил.

Если входные параметры и (или) параметры системы являются случайными, то задача расчета конструкций формулируется следующим образом: нахождение *вероятностных свойств* выходных параметров при известных *вероятностных свойствах* входных параметров и параметров системы.

Если параметры системы являются случайными величинами или функциями, то такая система всегда будет стохастически нелинейной, даже если соответствующий детерминированный оператор является линейным.

Например, колебания системы с одной степенью свободы под действием динамической нагрузки  $f(t)$  описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$mx''(t) + cx'(t) + k^2x(t) = F(t). \quad (4.49)$$

Система рассматривается как детерминированная. Если нагрузка  $\tilde{F}(t)$  представляет собой случайный процесс, то и перемещения  $\tilde{x}(t)$  также являются случайным процессом. При такой постановке система (и соответствующий ей оператор (4.49)) является *стохастической линейной*:

$$m\tilde{x}''(t) + c\tilde{x}'(t) + k^2\tilde{x}(t) = \tilde{F}(t). \quad (4.50)$$

Рассматривая параметр частоты  $\tilde{k}$  и параметр диссипации  $\tilde{c}$  как случайные величины, запишем

$$m\tilde{x}''(t) + \tilde{c}\tilde{x}'(t) + \tilde{k}^2\tilde{x}(t) = \tilde{F}(t). \quad (4.51)$$

При такой постановке задачи уравнение (4.51) будет стохастически нелинейным.

Исследование стохастически нелинейных систем представляет серьезные трудности и их решение не рассматривается в данном пособии.

Пусть на вход линейной системы с оператором  $L$  воздействует случайная функция  $\tilde{x}(t)$ , причем известны ее характеристики: математическое ожидание  $m_x(t)$  и корреляционная функция  $k_x(t_1, t_2)$ .

Реакция системы представляет собой случайную функцию

$$\tilde{y}(t) = L\{x(t)\}. \quad (4.52)$$

Требуется найти характеристики случайной функции  $\tilde{y}(t)$ :  $m_y(t)$  и  $k_y(t_1, t_2)$ .

Как определяются характеристики выходной случайной функции, рассмотрим на примере оператора интегрирования. Пусть

$$\tilde{y}(t) = L\{\tilde{x}(t)\} = \int_0^t \tilde{x}(\tau) d\tau. \quad (4.53)$$

Представим интеграл (4.53) как предел суммы:

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \tilde{x}(\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i \tilde{x}(\tau_i) \Delta\tau \quad (4.54)$$

и применим к равенству (4.54) операцию математического ожидания:

$$m_y(t) = M\{\tilde{y}(t)\} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i M\{\tilde{x}(\tau_i)\} \Delta\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_i m_x(\tau_i) \Delta\tau = \int_0^{\Delta\tau \rightarrow 0} m_x(\tau) d\tau. \quad (4.55)$$

Итак,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau, \quad (4.56)$$

то есть *математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математического ожидания.*

Найдем корреляционную функцию  $k_y(t_1, t_2)$ . По определению

$$k_y(t_1, t_2) = M\left[\tilde{y}(t_1) \tilde{y}(t_2)\right], \quad (4.57)$$

где  $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t) - m_y(t)$  — центрированная случайная функция

$$\tilde{y}(t_1) = \int_0^{t_1} \tilde{x}(\tau_1) d\tau_1; \quad \tilde{y}(t_2) = \int_0^{t_2} \tilde{x}(\tau_2) d\tau_2. \quad (4.58)$$

Тогда

$$\tilde{y}(t_1) \tilde{y}(t_2) = \int_0^{t_1} \tilde{x}(\tau_1) d\tau_1 \cdot \int_0^{t_2} \tilde{x}(\tau_2) d\tau_2. \quad (4.59)$$

Так как подынтегральные функции в (4.59) зависят от разных аргументов, то

$$\tilde{y}(t_1) \tilde{y}(t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \tilde{x}(\tau_1) \tilde{x}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.60)$$

Применяя к (4.60) операцию математического ожидания и меняя ее в правой части местами с операцией интегрирования, получим:

$$k_y(t_1, t_2) = M \left[ \overset{\circ}{y}(t_1) \overset{\circ}{y}(t_2) \right] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M \left[ \overset{\circ}{x}(\tau_1) \overset{\circ}{x}(\tau_2) \right] d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.61)$$

Окончательно

$$k_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} k_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.62)$$

Таким образом, для того, чтобы найти корреляционную функцию интеграла от случайной функции, нужно *дважды проинтегрировать* корреляционную функцию исходной случайной функции: сначала по одному аргументу, затем — по другому. Правило преобразования характеристик случайных функций, рассмотренное в приведенном примере, является общим для всех линейных операторов.

Сформулируем это правило без доказательств.

Если случайная функция  $\tilde{x}(t)$  с математическим ожиданием  $m_x(t)$  и корреляционной функцией  $k_x(t_1, t_2)$  преобразуется линейным оператором  $L$  в случайную функцию

$$\tilde{y}(t) = L\{\tilde{x}(t)\},$$

то для нахождения математического ожидания случайной функции  $\tilde{y}(t)$  нужно применить тот же оператор к математическому ожиданию случайной функции  $\tilde{x}(t)$

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\}, \quad (4.63)$$

а для нахождения корреляционной функции нужно дважды применить тот же оператор к корреляционной функции случайной функции  $\tilde{x}(t)$ , сначала по одному аргументу, затем — по другому:

$$k_y(t_1, t_2) = L^{(t_1)} L^{(t_2)} \{k_x(t_1, t_2)\}. \quad (4.64)$$

В большинстве задач расчета строительных конструкций на выходе линейной системы достаточно определить не корреляционную функцию, а дисперсию

$$D_y(t) = k_y(t, t). \quad (4.65)$$

При этом, как правило, для определения дисперсии на выходе линейной системы недостаточно знать дисперсию на ее выходе, а существенно важно знать корреляционную функцию.

## 4.10. Канонические разложения случайных функций

Метод канонических разложений разработан В. С. Пугачевым. Идея метода состоит в том, что случайная функция, над которой можно произвести те или иные преобразования, предварительно представляется в виде суммы элементарных случайных функций.

Элементарной случайной функцией называется функция вида

$$\tilde{X}(t) = \tilde{V}\varphi(t), \quad (4.66)$$

где  $\tilde{V}$  — обычная случайная величина;  $\varphi(t)$  — неслучайная функция.

Элементарная случайная функция является наиболее простым типом случайной функции, в которой случайность сосредоточена в коэффициенте  $\tilde{V}$ , а зависимость от времени — неслучайная. Примеры элементарных случайных функций приведены на рис. 4.13, *а* и *б*.

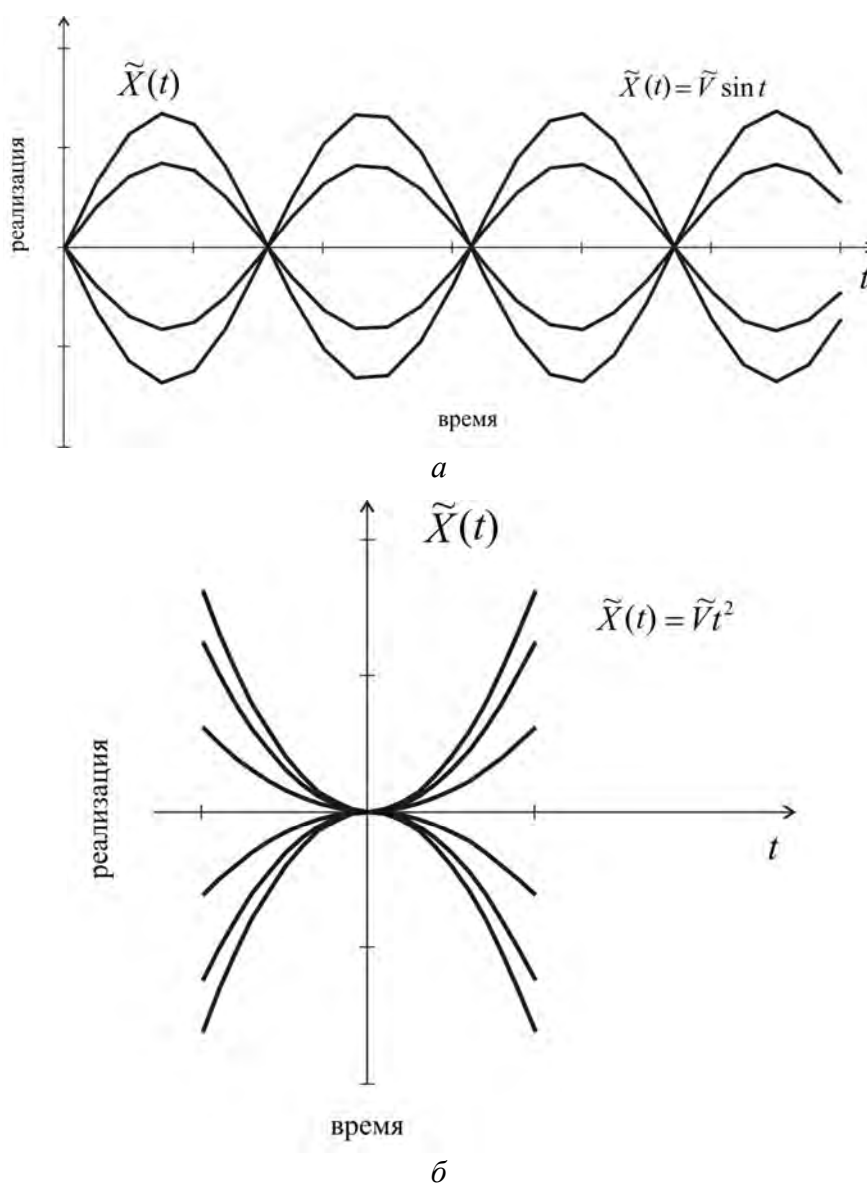


Рис. 4.13. Графики элементарных случайных функций

Все возможные реализации элементарной случайной функции  $\tilde{X}(t)$  могут быть получены из графика функции  $x = \varphi(t)$  простым изменением масштаба по оси ординат.

Определим характеристики элементарной случайной функции.

Математическое ожидание

$$m_x(t) = M[\tilde{V}\varphi(t)] = \varphi(t)M[\tilde{V}] = m_v\varphi(t), \quad (4.67)$$

где  $m_v$  — математическое ожидание случайной величины  $V$ .

Известно, что любую случайную функцию можно центрировать, т. е. представить ее в виде суммы математического ожидания и случайной централизованной функции

$$\tilde{X}(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t) \quad (4.68)$$

и все преобразование случайной функции  $\tilde{X}(t)$  производить отдельно для математического ожидания  $m_x(t)$  и централизованной составляющей  $\overset{\circ}{X}(t)$ .

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только централизованные элементарные случайные функции, для которых

$$m_v(t) = 0; \tilde{V} = \overset{\circ}{V}; m_x(t) = 0. \quad (4.69)$$

Корреляционная функция

$$K_x(t_1 t_2) = M[\tilde{X}(t_1)\tilde{X}(t_2)] = \varphi(t_1)\varphi(t_2)M[\tilde{V}^2] = \varphi(t_1)\varphi(t_2)D_v, \quad (4.70)$$

где  $D_v$  — дисперсия случайной величины  $\tilde{V}$ .

Над элементарными случайными функциями весьма просто выполняются всевозможные преобразования.

Например, продифференцируем случайную функцию (4.66). Случайная величина  $\tilde{V}$ , не зависящая от  $t$ , выйдет за знак производной

$$\tilde{X}'(t) = \tilde{V}\varphi'(t). \quad (4.71)$$

Аналогично

$$\int_0^t \tilde{X}(\tau)d\tau = \tilde{V}\int_0^t \varphi(\tau)d\tau. \quad (4.72)$$

Вообще, если элементарная случайная функция преобразуется линейным оператором  $L$ , то при этом случайный множитель  $\tilde{V}$ , как не зависящий от  $t$ , выходит за знак оператора, а неслучайная функция  $\varphi(t)$  преобразуется тем же оператором  $L$

$$L\{\tilde{X}(t)\} = \tilde{V}L\{\varphi(t)\}. \quad (4.73)$$

Таким образом, если элементарная случайная функция поступает на вход линейной системы, то задача ее преобразования сводится к простой задаче преобразования одной неслучайной функции  $\varphi(t)$ .

Если случайную функцию общего вида точно или приблизительно можно представить в виде суммы элементарных случайных функций, то ее преобразование значительно упрощается. Такая идея разложения случайной функции и лежит в основе метода канонических разложений. Пусть имеется случайная функция

$$\tilde{X}(t) = m_x(t) + \overset{\circ}{X}(t). \quad (4.74)$$

Представим ее в виде суммы

$$\tilde{X}(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m \overset{\circ}{V}_i \varphi_i(t), \quad (4.75)$$

где  $\overset{\circ}{V}_i$  — случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю,  $\varphi(t)$  — неслучайные функции,  $m_x(t)$  — математическое ожидание функции  $\tilde{X}(t)$ . Случайные величины  $\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2, \dots, \overset{\circ}{V}_m$  называются коэффициентами разложения, а функции  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$  — координатными функциями.

Определим реакцию  $\tilde{y}(t)$  линейной системы  $L$  на случайную функцию  $\tilde{X}(t)$ , заданную разложением (4.74)

$$\tilde{y}(t) = L\{\tilde{X}(t)\} = L\{m_x(t)\} + L\left\{\sum_{i=1}^m \overset{\circ}{V}_i \varphi_i(t)\right\} = L\{m_x(t)\} + \sum_{i=1}^m \overset{\circ}{V}_i L\{\varphi_i(t)\}, \quad (4.76)$$

или

$$\tilde{y}(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m \overset{\circ}{V}_i \psi_i(t), \quad (4.77)$$

где  $m_y(t) = L\{m_x(t)\}$ ;  $\psi_i(t) = L\{\varphi_i(t)\}$ .

Выражение (4.77) также является разложением случайной функции  $\tilde{y}(t)$  по элементарным функциям. Коэффициентами этого разложения являются те же случайные величины  $\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2, \dots, \overset{\circ}{V}_m$ , а математическое ожидание и координатные функции получены из математического ожидания и координатных функций исходной случайной функции тем же линейным преобразованием  $L$ , какому подвергается случайная функция  $\tilde{X}(t)$ . Если случайные величины  $\overset{\circ}{V}_1, \overset{\circ}{V}_2, \dots, \overset{\circ}{V}_m$  выбраны некоррелированными, то есть

$$K_{\overset{\circ}{V}_i \overset{\circ}{V}_j} = 0 \text{ при } i \neq j; K_{\overset{\circ}{V}_i \overset{\circ}{V}_j} = D_i \text{ при } i = j, \quad (4.78)$$

то разложение (4.74) называется *каноническим разложением*.



Если задано каноническое разложение случайной функции  $\tilde{X}(t)$ , то ее корреляционная функция также может быть представлена каноническим разложением, и оно имеет простой вид:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2) D_i. \quad (4.79)$$

При  $t_1 = t_2 = t$  в формуле (4.79) получим дисперсию случайной функции

$$D_x(t) = \sum_i^m [\varphi_i(t)]^2 D_i. \quad (4.80)$$

#### 4.11. Линейные преобразования случайных функций, заданных каноническими разложениями

Пусть на вход некоторой линейной системы  $L$  поступает случайная функция  $\tilde{x}(t)$ . Система преобразует функцию  $\tilde{x}(t)$  посредством линейного оператора  $L$ , и на выходе мы получаем случайную функцию

$$\tilde{y}(t) = L\{\tilde{x}(t)\}.$$

Случайная функция  $\tilde{x}(t)$  задана в виде канонического разложения

$$\tilde{x}(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^m \tilde{V}_i \varphi_i(t). \quad (4.81)$$

Определим реакцию системы на это воздействие. Так как оператор системы является линейным, то

$$\tilde{y}(t) = L\{\tilde{x}(t)\} = m_y(t) + \sum_{i=1}^m \tilde{V}_i \psi_i(t), \quad (4.82)$$

где  $m_y = L\{m_x(t)\}$  — математическое ожидание выходной случайной функции;  $\psi_i(t) = L\{\varphi_i(t)\}$  — координатные функции выхода.

*При линейном преобразовании канонического разложения случайной функции  $\tilde{x}(t)$  получается каноническое разложение случайной функции  $\tilde{y}(t)$ , причем математическое ожидание и координатные функции подвергаются тому же линейному преобразованию.*

Корреляционная функция и дисперсия выходной случайной функции  $\tilde{y}(t)$  находятся по формулам:

$$k_y(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^m \psi_i(t_1) \psi_i(t_2) D_i, \quad (4.83)$$

$$D_y(t) = \sum_{i=1}^m [\psi_i(t)]^2 D_i. \quad (4.84)$$

Таким образом, линейное преобразование случайной функции, заданной каноническим разложением, сводится к преобразованию неслучайных функций: математического ожидания и координатных функций. Решение проводится обычными детерминированными методами. Это делает особенно удобным использование метода канонических разложений в практических задачах вероятностного расчета систем.

#### Пример 4.1

Задана случайная функция  $\tilde{X}(t)$ , полученная опытным путем, в виде совокупности из 12 реализаций в табличном виде (табл. 4.1). Если аргументом случайной функции является время, то такие функции обычно называют случайным процессом.

Таблица 4.1

№	$t$							
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
1	-0,310	0,645	-0,151	-0,510	-0,905	-0,650	-0,381	-1,068
2	-0,254	1,133	0,725	0,049	-0,620	-1,281	-1,014	-0,526
3	0,801	0,389	0,275	-1,036	-1,092	-0,312	-0,599	-0,692
4	-0,143	-0,145	-0,700	-0,596	0,044	0,381	-0,510	-1,852
5	0,515	-0,221	-1,273	-1,296	0,324	1,100	1,741	1,009
6	-0,429	1,499	0,930	0,438	0,252	-0,782	-0,419	0,121
7	0,627	0,756	-0,298	0,036	-0,110	-0,637	-1,241	-0,205
8	-0,318	-0,988	-0,589	-0,508	-1,381	0,601	1,724	1,120
9	-1,262	-0,134	0,213	-0,180	0,311	0,227	0,395	1,117
10	-0,604	0,134	-0,890	0,136	-0,076	-0,490	-0,789	-0,313
11	-0,548	-1,110	-0,483	0,355	0,036	-0,093	-1,098	-0,051
12	-0,492	0,244	-0,538	-0,929	-0,686	0,062	0,580	-0,373

Требуется:

вычислить ее статистические характеристики: математическое ожидание  $m_x(t)$ , дисперсию  $D_x(t)$ , нормированную корреляционную функцию  $k_x^H(\tau)$ , нормированную спектральную плотность  $S^i(\omega)$ ;

смоделировать на компьютере реализации рассматриваемой случайной функции, используя полученные ее статистические характеристики (обратная задача).

Заданная случайная функция может рассматриваться как система из восьми случайных величин  $X_i(t_k)$ , отвечающих сечениям  $t = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4; 2,8$  и расположенных по столбцам таблицы. Тогда функция математического ожидания  $m_x(t)$  равна математическим ожиданиям случайных величин  $X_i(t_k)$ :

$$m_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i(t_k)}{n}, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, 8; n = 12. \quad (4.85)$$

Суммируя значения по столбцам и деля сумму на число реализаций  $n = 12$ , найдем зависимость математического ожидания от времени (табл. 4.2):

Таблица 4.2

$t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$m_x(t)$	-0,201	0,184	-0,232	-0,336	-0,325	-0,156	-0,134	-0,143

На рис. 4.14 показаны графики реализаций случайной функции  $\tilde{X}(t)$ , а также график функции ее математического ожидания  $m_x(t)$ .

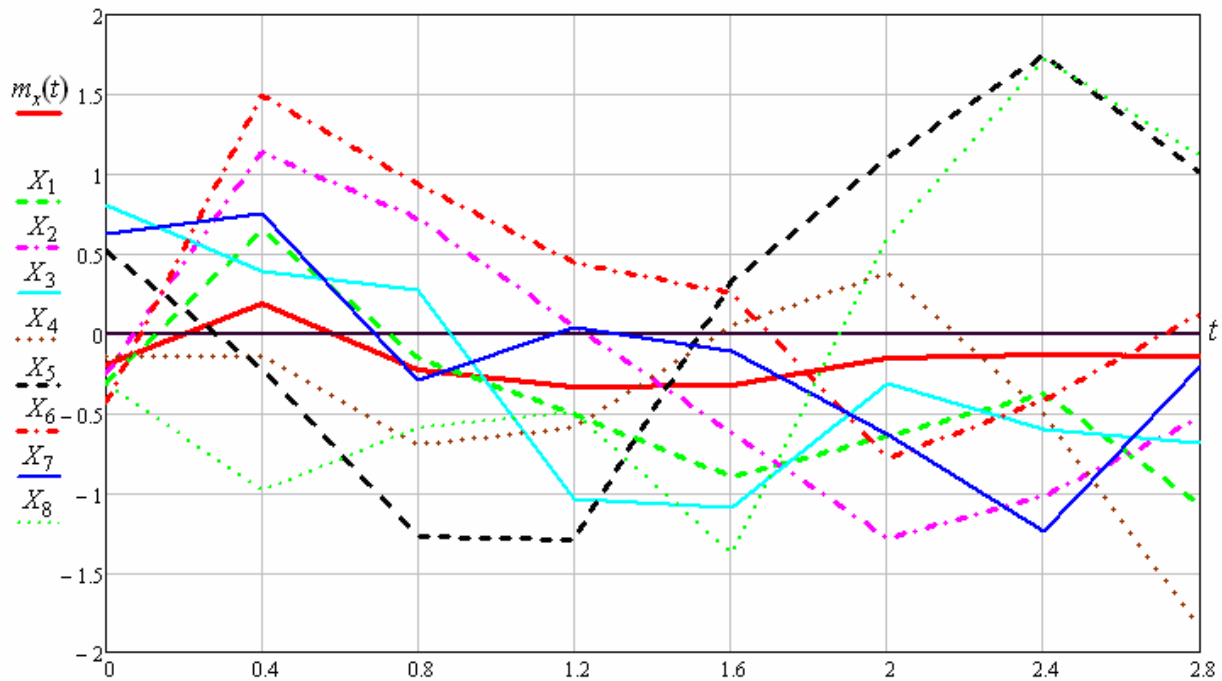


Рис. 4.14. Реализации случайной функции и ее математическое ожидание

Дисперсия функции  $\tilde{X}(t)$  в сечении  $t_k$  равна дисперсии случайной величины  $X_i(t_k)$

$$D_x(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i(t_k))^2 - (\tilde{m}_i(t_k))^2. \quad (4.86)$$

Результаты расчета приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

$t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$D_x(t)$	0,315	0,553	0,396	0,291	0,316	0,409	0,968	0,742

Корреляционная функция для случайной функции, заданной в дискретных точках, представляет собой матрицу корреляционных моментов между сечениями случайной функции  $X_i(t_k)$  и  $X_i(t_j)$  ( $k, j = 1, 2, \dots, 8$ ):

$$K_x(t_k, t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(t_k) X_i(t_j) - m_x(t_k) m_x(t_j). \quad (4.87)$$

Для вычисления корреляционного момента, отвечающего двум заданным сечениям, перемножаются числа, стоящие в соответствующих столбцах; произведения складываются алгебраически; полученный результат делится на  $n = 12$ . Полученная таким способом корреляционная матрица системы случайных величин  $X(0), X(0,4), \dots, X(2,8)$  — она же таблица значений корреляционной функции  $K_x(t_k, t_j)$  — приведена в табл. 4.4.

Ввиду того, что корреляционная матрица является симметричной, элементы нижней диагонали матрицы не приведены. По главной диагонали стоят оценки дисперсий.

Таблица 4.4

$t_k$	$t_j$							
	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
0	0,315	0,075	-0,053	-0,139	-0,069	0,015	-0,026	-0,010
0,4		0,553	0,311	0,087	0,027	-0,348	-0,310	-0,208
0,8			0,396	0,152	-0,033	-0,285	-0,259	-0,045
1,2				0,291	0,091	-0,214	-0,328	0,0005
1,6					0,316	0,049	-0,08	0,007
2,0						0,409	0,497	0,235
2,4							0,968	0,541
2,8								0,742

Приведем корреляционную матрицу к нормированному виду. Для этого разделим значения, стоящие в табл. 4.4, на произведение соответствующих средних квадратических отклонений (стандартов):

$$r_x(t_k, t_j) = \frac{K_x(t_k, t_j)}{\sqrt{D_x(t_k)} \cdot \sqrt{D_x(t_j)}}. \quad (4.88)$$

Нормированная корреляционная матрица приведена в табл. 4.6.

Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция (спектральная плотность) являются достаточными характеристиками случайной функции для проведения вероятностных расчетов, моделирования и оценки надежности систем. Используя эти характеристики, можно получить сколько угодно реализаций функции  $\tilde{X}(t)$ .

Таблица 4.5

$t_k$	$t_j$							
	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
0	1	0,179	-0,149	-0,461	-0,219	0,043	-0,047	-0,206
0,4		1	0,664	0,218	0,065	-0,731	-0,423	-0,325
0,8			1	0,447	-0,093	-0,707	-0,418	-0,083
1,2				1	0,326	-0,617	-0,616	0,001
1,6					1	0,137	-0,145	0,149
2,0						1	0,791	0,427
2,4							1	0,638
2,8								1

Статистические характеристики функции  $\tilde{X}(t)$  можно вычислить, используя стандартные функции Mathcad. Для этого обозначим соответственно каждый столбец табл. 4.1 в виде

$$X1 = X_i(0,0); X2 = X_i(0,4); \dots, X8 = X_i(2,8).$$

Тогда:

для математического ожидания  $m_x(0,0) = \text{mean}(X1)$ ;  $m_x(0,4) = \text{mean}(X2)$ ; ... ;  $m_x(2,8) = \text{mean}(X8)$ ;

для дисперсии  $D_x(0,0) = \text{var}(X1)$ ;  $D_x(0,4) = \text{var}(X2)$ ; ... ;  $D_x(2,8) = \text{var}(X8)$ ;

корреляционные моменты

$K_x(t_1, t_2) = K_x(0,0;0,4) = \text{corr}(X1, X2)$ ;  $K_x(t_1, t_3) = K_x(0,0;0,8) = \text{corr}(X1, X3)$  и так далее.

Результаты получаются аналогичными, поэтому они не приводятся.

Принимаем случайную функцию  $\tilde{X}(t)$  стационарной с постоянными математическим ожиданием и дисперсией

$$m_x(t) = m_x = 0; D_x(t) = D_x = \text{const.}$$

Найдем дисперсию случайной стационарной функции  $\tilde{X}(t)$  как среднее значение дисперсий по сечениям функции:

$$D_x = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^8 D_x(t_k) = 0,499.$$

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция не зависит от положения  $t$  первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка  $\tau$  между первым и вторым аргументами  $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$ . Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а всего одного аргумента. Нормированная корреляционная функция для стационарного процесса находится по формуле

$$k_x^i(\tau) = \frac{k_x(\tau)}{D_x}, \quad (4.89)$$

где  $D_x = k_x(0)$  — дисперсия стационарного процесса.

Функция  $k_x^i(\tau)$  есть не что иное, как коэффициент корреляции между сечениями случайной функции, разделенными интервалом  $\tau$  по времени. В табл. 4.5 постоянному  $\tau$  соответствуют: главная диагональ ( $\tau = 0$ ) и параллели этой диагонали ( $\tau = 0,4$ ;  $\tau = 0,8$ ;  $\tau = 1,2$  и т. д.). Осредняя оценки нормированной корреляционной функции вдоль этих параллелей главной диагонали, получим значения функции  $k_x^i(\tau)$  (табл. 4.6):

Таблица 4.6

$t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8
$k_x^i(\tau)$	1	0,455	-0,06	-0,314	-0,341	-0,154	-0,186	-0,206

График этой функции приведен на рис. 4.15.

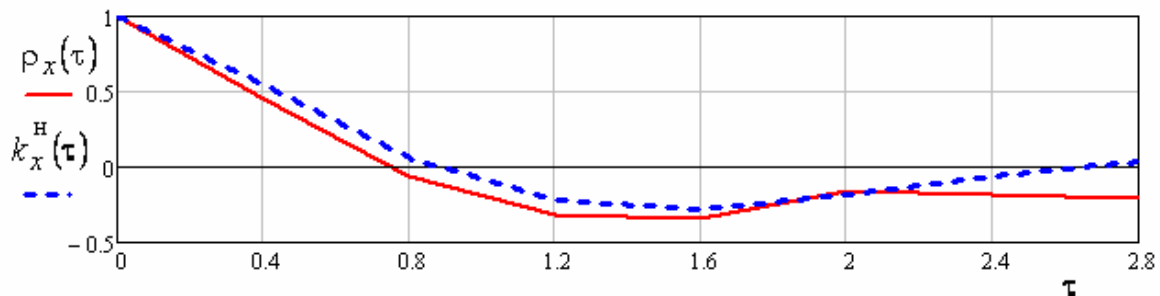


Рис. 4.15. График нормированной корреляционной функции

Наличие для некоторых отрицательных значений корреляционной функции указывает на то, что в структуре случайной функции имеется элемент периодичности, в связи с чем на расстоянии по времени, равном примерно половине периода основных колебаний, наблюдается отрицательная корреляция между значениями случайной функции: положительным отклонениям от среднего в одном сечении соответствуют отрицательные отклонения через определенный промежуток времени, и наоборот.

Такой характер корреляционной функции, с переходом на отрицательные значения, очень часто встречается на практике. Обычно в таких случаях по мере увеличения  $\tau$  амплитуда колебаний корреляционной функции уменьшается и при дальнейшем увеличении  $\tau$  корреляционная функция стремится к нулю.

Полученную нормированную корреляционную функцию  $\rho_x(\tau)$  аппроксимируем формулой:

$$\rho_x(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau. \quad (4.90)$$

Для нахождения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  используем встроенную процедуру Mathcad `genfit` — регрессии общего вида

$$\text{genfit}(t1, \rho1, g, F),$$

где  $t1 = (0,0 \ 0,4 \ 0,8 \ 1,2 \ 1,6 \ 2,0 \ 2,4 \ 2,8)$  — массив аргумента;

$$\rho1 = (1 \ 0,455 \ -0,06 \ -0,314 \ -0,341 \ -0,154 \ -0,186 \ -0,206)$$
 — массив функции;

$g$  — массив начальных приближений искомых коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Поскольку заранее значения коэффициентов неизвестны, зададим приблизительно  $g = (1 \ 2)$ ;

$F$  — вектор аппроксимирующей функции и ее частных производных по каждому из искомых коэффициентов:

$$F(t, u) = \begin{bmatrix} \exp(-u_0 t) \cos(u_1 t) \\ -t \exp(-u_0 t) \cos(u_1 t) \\ \exp(-u_0 t) (-\sin(u_1 t)) t \end{bmatrix};$$

$u = (u_0 \ u_1) = (\alpha \ \beta)$  — вектор искомых коэффициентов аппроксимирующей функции (результат работы процедуры).

В результате расчета получаем

$$u = (0,774 \ 1,813), \text{ то есть } \alpha = 0,774; \beta = 1,813.$$

Аппроксимированная функция  $\rho_x(\tau)$  показана на рис. 4.15 пунктиром.

Принятому типу корреляционной функции соответствует нормированная спектральная плотность (рис. 4.16):

$$S^H(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + m^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4}, \quad (4.91)$$

где  $m^2 = \alpha^2 + \beta^2$  и  $a = \alpha^2 - \beta^2$ .

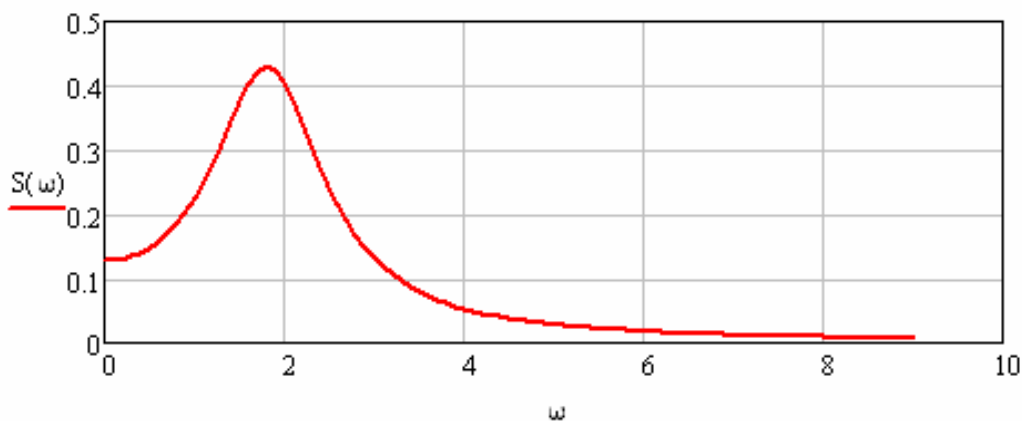


Рис. 4.16. График нормированной спектральной плотности

Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция (спектральная плотность) являются достаточными характеристиками случайной функции для проведения вероятностных расчетов, моделирования и оценки надежности систем. Используя эти характеристики, можно получить сколько угодно реализаций функции  $\tilde{X}(t)$ .

Для моделирования реализаций случайной функции  $\tilde{X}(t)$  с заданными статистическими характеристиками на ЭВМ представим ее в виде канонического разложения:

$$\tilde{X}(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{\infty} [\tilde{A}_i \cos(\omega_i t + \tilde{B}_i \sin(\omega_i t))], \quad (4.92)$$

где  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$  — некоррелированные случайные величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения с математическими ожиданиями, равными нулю:

$$m_{A_i} = m_{B_i} = 0,$$

и дисперсиями, равными:

$$D_{A_i} = D_{B_i} = d_i^H;$$

$\omega_i$  — частоты разложения.

Дисперсии  $d_i^H$  находим по формулам:

$$d_i^H = \int_{\omega_i - \Delta\omega/2}^{\omega_i + \Delta\omega/2} S^H(\omega) d\omega. \quad (4.93)$$

Графически эти дисперсии являются площадью участка спектральной плотности на несущей частоте  $\omega_i$ , то есть, раскладывая функцию  $\tilde{X}(t)$  по гармоникам с частотами  $\omega_i$ , мы одновременно раскладываем дисперсию  $D_x$  по этим же гармоникам. Площадь под кривой графика спектральной плотности равна дисперсии  $D_x$ , соответственно площадь под кривой нормированной спектральной плотности равна 1:

$$\int_0^{\infty} S^H(\omega) d\omega = 1. \quad (4.94)$$

Прежде чем приступить к моделированию реализаций, необходимо определить, сколько частот  $\omega_i$  следует учитывать в разложении (4.92). Интервал учитываемых частот  $(0, \Omega)$  обычно выбирается так, чтобы в разложении учитывалось не менее 95 % площади спектральной плотности (дисперсии случайной функции  $\tilde{X}(t)$ ).

$$\int_0^{\Omega} S^H(\omega) d\omega = 0,95.$$

Находим  $\int_0^{11} S^H(\omega) d\omega = 0,954$ . Принимаем  $N = 11$ . Тогда  $\omega_1 = 0,5$ ;  $\omega_2 = 1,5$ ; ...,

$\omega_i = i - 0,5$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\Delta\omega = 0,5$ .

Дисперсии  $d_i^H$ , вычисленные по формуле (4.93), представлены в табл. 4.7 и на рис. 4.17.

Таблица 4.7

$\omega_i$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
$d_i^H$	0,253	0,496	0,388	0,135	0,06	0,034	0,022	0,016	0,012	0,009	0,007

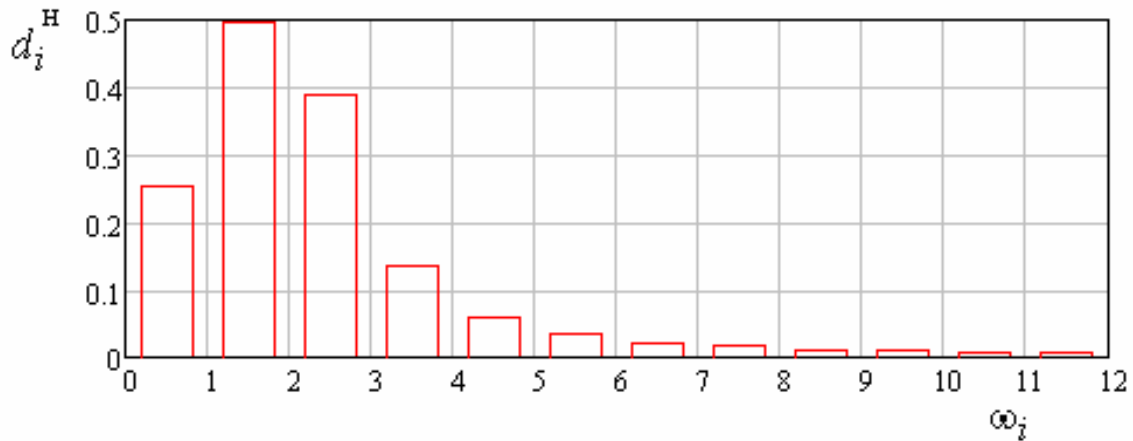


Рис. 4.17. График дисперсии

Зная математические ожидания и дисперсии случайных коэффициентов  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$ , можно при помощи датчика случайных чисел с нормальным распределением смоделировать на ЭВМ их значения (реализации). Используем функцию `norm(n,m,σ)`.

Параметры функции (индекс  $i$  опущен):  $n$  — требуемое число реализаций моделируемой случайной величины;  $m = m_A = m_B = 0$  — математическое ожидание;  $\sigma = \sqrt{D_A} = \sqrt{D_B} = \sqrt{d^H}$  — стандарт случайной величины.

Обращаясь к датчику `norm` при всех значениях стандартов  $\sqrt{d_i^H}$ , получим таблицу (табл. 4.8) коэффициентов разложения (4.92), с помощью которых можно вычислить любое количество реализаций случайной функции  $\tilde{X}(t)$ .

Таблица 4.8

$\omega_i$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
$A_{i1}$	-0,23	-0,67	-0,27	-0,25	0,24	0,16	0,33	0,10	-0,08	0,06	0,01
$B_{i1}$	-0,06	0,39	-1,05	0,02	-0,25	0,01	0,14	0,08	0,06	0,05	-0,00
$A_{i2}$	-0,09	-0,45	-0,47	0,26	-0,17	0,00	0,01	0,16	0,03	0,03	0,02
$B_{i2}$	0,28	-0,17	-0,45	-0,19	-0,71	-0,40	0,16	0,11	-0,02	0,01	-0,04
$A_{i3}$	-0,60	0,07	0,13	-0,23	-0,03	0,19	-0,06	-0,08	-0,10	0,08	0,07
$B_{i3}$	0,00	-0,54	0,48	0,11	0,18	0,00	0,03	0,06	0,08	0,06	0,09
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

На рис. 4.18 показаны восемь реализаций, вычисленных по формуле (4.92). Так как при моделировании случайных амплитуд  $\tilde{A}_i$  и  $\tilde{B}_i$  использовались нормированные характеристики — спектральная плотность  $S_x^H(\omega)$  и дисперсии  $d_i^H$ , то функцию (4.92) следует умножить на стандарт  $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,499} = 0,706$ .



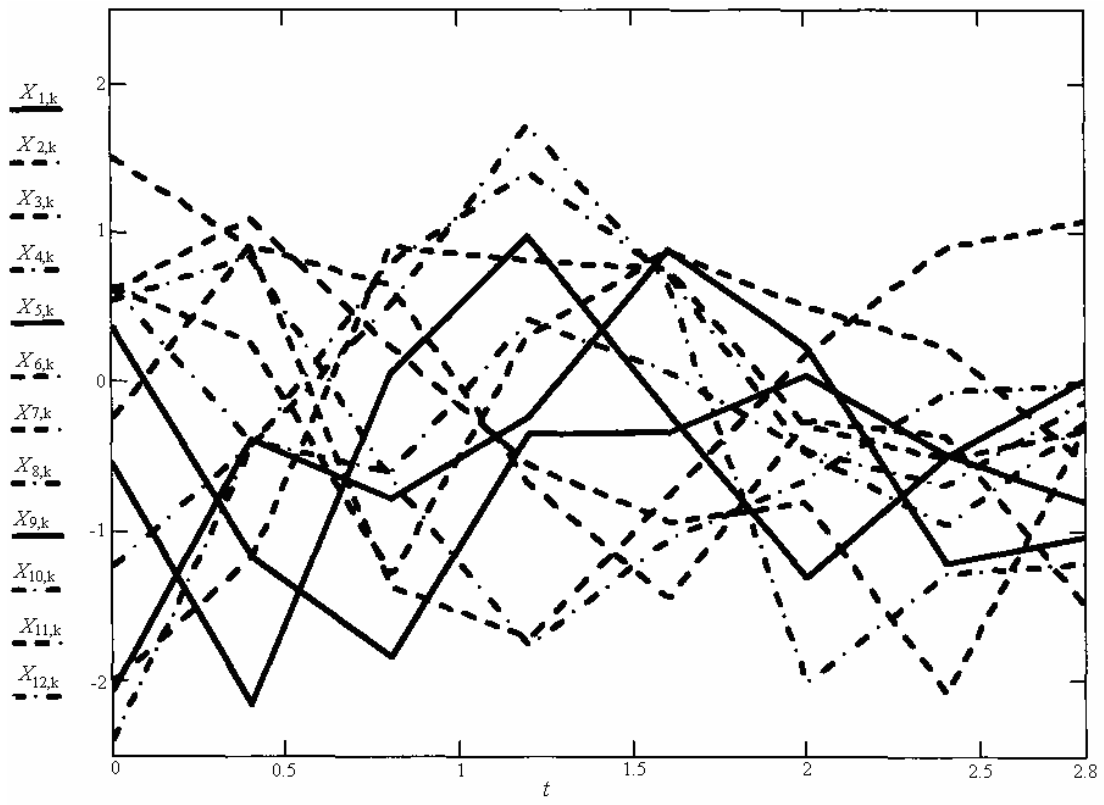


Рис. 4.18. Реализации случайной функции

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данном учебном пособии были приведены необходимые сведения из теории вероятностей и теории случайных процессов, без понимания которых нельзя профессионально решать достаточно сложные для инженерной практики задачи оценки надежности зданий и сооружений. Вместе с тем для обучающегося по специальности «Строительство уникальных зданий и сооружений» эти задачи являются наиболее актуальными, с ними он будет постоянно сталкиваться в своей профессиональной деятельности. К таким задачам относятся: накопление повреждений при сложных условиях эксплуатации и оценка остаточного ресурса; оценка риска повреждений и разрушений зданий при реализации экстремальных воздействий (сейсмических, взрывных, а также в сложных инженерно-геологических условиях); вычисление оптимального уровня риска (надежности) при проектировании уникальных зданий и сооружений и др.

Пособие снабжено подробным решением наиболее часто встречающихся на практике задач, которые могут быть легко адаптированы для конкретных приложений.

В настоящее учебное пособие не вошли разделы теории надежности зданий и сооружений. Данные материалы предполагается использовать во второй части пособия.

Изложенный в книге материал предназначен для систематизированного первоначального изучения дисциплины, а также, при необходимости, в качестве основы для разработки методик вероятностного расчета зданий и сооружений при оценке их надежности.

## Список рекомендуемой литературы

1. *Аугусти, Г.* Вероятностные методы в строительном проектировании: пер. с англ. / Г. Аугусти, А. Баратта, Ф. Кашнати. М. : Стройиздат, 1988. 584 с.
2. *Болотин, В. В.* Статистические методы в строительной механике / В. В. Болотин. М. : Изд-во лит. по стр-ву, архитектуре и строит. материалам, 1961. 202 с.
3. *Болотин, В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В. В. Болотин. М. : Стройиздат, 1971. 256 с.
4. *Культербаев, Х. П.* Случайные процессы и колебания строительных конструкций и сооружений / Х. П. Культербаев, В. А. Пшеничкина. Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. 335 с.
5. *Пшеничкин, А. П.* Надежность зданий и оснований в особых условиях / А. П. Пшеничкин, В. А. Пшеничкина. Волгоград : ВолгГАСУ, 2009. 218 с.
6. *Райзер, В. Д.* Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций / В. Д. Райзер. М.: Стройиздат, 1986. 194 с.
7. *Райзер, В. Д.* Теория надежности в строительном проектировании / В. Д. Райзер. М. : АСВ, 1998. 304 с.
8. *Райзер, В. Д.* Теория надежности сооружений / В. Д. Райзер. М. : АСВ, 2010. 384 с.
9. *Ржаницын, А. Р.* Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. Р. Ржаницын. М. : Стройиздат, 1978. 240 с.
10. *Ржаницын, А. Р.* Статистическое обоснование расчетных коэффициентов // Материалы к теории расчета конструкций по предельному состоянию. Вып. II. М. : Госстройиздат, 1961. С. 18—52.
11. *Шпете, Г.* Надежность несущих строительных конструкций / Г. Шпете; пер. с нем. О. О. Андреева. М. : Стройиздат, 1994. 288 с.

Учебное электронное издание

**Пшеничкина** Валерия Александровна  
**Воронкова** Галина Вячеславна  
**Рекунов** Сергей Сергеевич  
**Чураков** Алексей Александрович

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ  
И ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Учебное пособие

В двух частях

Часть I

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*  
Редактор *Р. В. Худадян*  
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Минимальные систем. требования:  
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 09.04.2015.  
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 5,2. Объем данных 6,9 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
Редакционно-издательский отдел  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)