Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Теория вероятностей и математическая статистика

Методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 4

Составители К. В. Катеринин, А. П. Поздняков

Волгоград. ВолгГАСУ. 2016

УДК 519.2(076.5)

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 4 / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. К. В. Катеринин, А. П. Поздняков. — Электронные текстовые и графические данные (0,4 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2016. — Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов всех профилей подготовки направлений «Строительство», СУЗ, ТТП, ПБ, ТБ заочной формы обучения по дисциплине «Математика».

УДК 519.2(076.5)

План выпуска учеб.-метод. документ. 2016 г., поз. 16

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0

Подписано в свет 30.08.2016.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,5. Объем данных 0,4 Мбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Основные определения

Изучение каких-либо явлений связано с осуществлением определенной совокупности условий и действий, при которых это явление может наблюдаться. Если говорить кратко — связано с *испытанием*. Всякий результат или *исход* испытания называется *событием*. Событие называется *достоверным*, если оно является единственно возможным исходом испытания при заданной совокупности условий. Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти при заданных условиях. Событие называется *случайным*, если в результате испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Так, случайным событием является поражение мишени в результате произведенного выстрела (испытания). Случайным событием является извлечение белого шара из урны, в которой находятся шары, различающиеся по своему цвету, включая и белый.

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого события в одном и том же испытании.

События называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в данном испытании.

Несколько событий называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

События называются *равновозможными*, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Несколько событий в данном опыте образуют *полную группу событий*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

События, которые в данном испытании несовместны, равновозможны и образуют полную группу, называются *элементарными* событиями или исходами.

1.2. Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется отношение

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A, n — общее число элементарных исходов испытания.
Из определения вероятности вытекают следующие её свойства:

$P(A)=1$ — вероятность достоверного события, $P(A)=0$ — вероятность невозможного события. Для случайного события $0 < P(A) < 1$.

1.3. Основные формулы комбинаторики

Перестановками из n элементов называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся друг от друга только порядком расположения элементов в них.

Число перестановок из n различных элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \tag{2}$$

Размещениями из n элементов по m называют комбинации, составленные выбором из n различных элементов каких-либо m элементов. Размещения отличаются друг от друга составом элементов или их порядком.

Число размещений из n различных элементов по m:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{3}$$

Сочетаниями из n элементов по m называют комбинации, составленные выбором из n различных элементов каких-либо m элементов без учета порядка их расположения.

Число сочетаний из n различных элементов по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{4}$$

Пример 1. В ящике имеется 10 деталей, среди которых 7 стандартных. Найти вероятность того, что взятые наудачу 3 детали окажутся стандартными.

Решение. Пусть событие A — 3 взятые наудачу детали стандартные. Обозначим через m число способов выбора трёх стандартных деталей из 7 стандартных деталей, т.е. число исходов испытания, благоприятствующих появлению события A. Оно равно числу сочетаний из 7 по 3 и вычисляется по формуле (4):

$$m = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35.$$

Пусть n — общее число возможных элементарных исходов испытания, т.е. число всех возможных способов выбора трёх деталей из 10. Оно равно числу сочетаний из 10 по 3:

$$n = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Вероятность события A найдём по формуле (1):

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

1.4. Основные теоремы теории вероятностей

Определение 1. Суммой двух событий A и B называется событие, обозначаемое $A+B$ и состоящее в появлении хотя бы одного из них (т. е. в появлении или A, или B, или A и B).

Аналогично определяется сумма n событий — событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них и обозначаемое $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Определение 2. Произведением двух событий A и B называется событие, обозначаемое $A \cdot B$, состоящее в одновременном появлении этих событий.

Аналогично определяется произведение нескольких событий.

Определение 3. Противоположными событиями называются два несовместных события, образующих полную группу. Событие, противоположное событию A, обозначается $\overline{A}$.

Пример 2. Производится три выстрела по мишени. Записать события: D — ровно одно попадание; E — не менее двух попаданий.

Решение. Пусть события A — попадание при первом, B — попадание при втором, C — попадание при третьем выстрелах, а события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ — противоположные им события, т.е. промахи (определение 3).

Событие D — ровно одно попадание состоит в том, что при трёх выстрелах попадание может произойти или при первом, или при втором, или при третьем выстрелах. Тогда по определению 2 попадание при первом выстреле равносильно появлению события $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$ (появится событие A и не появятся события B и C). Аналогично, $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$ — попадание при втором, $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$ — при третьем выстрелах. Теперь по определению 1 событие D можно представить как сумму этих событий: $D = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

Событие E — не менее двух попаданий означает, что при трёх выстрелах произойдут два попадания и один промах (причём безразлично в каком порядке) или три попадания. Поэтому событие E представим как сумму событий: $E = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$.

Теорема 1. (*Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий*). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (5)$$

Пример 3. В урне 30 шаров. Из них 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность того, что наудачу взятый шар будет цветным (красным или синим).

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что вынут красный шар, B — вынут синий шар. Тогда событие «появление цветного шара» есть сумма $A+B$ событий A и B. По формуле (1) найдём вероятности наступления событий A и B: $P(A)=\frac{10}{30}$, $P(B)=\frac{5}{30}$. Так как события A и B несовместные, то вероятность их суммы находим по формуле (5): $P(A+B)=\frac{10}{30}+\frac{5}{30}=\frac{1}{2}$.

Теорема 2. Вероятность суммы n попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \tag{6}$$

Теорема 3. Сумма вероятностей событий A_1, $A_2,\ldots,A_n$, образующих полную группу, равна 1:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \tag{7}$$

Теорема 4. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{8}$$

Пример 4. В Волгограде по многолетним наблюдениям в июне три дождливых дня. Какова вероятность того, что в любой день июня дождя не будет?

Решение. Пусть событие A — дождливый день. Противоположное ему событие, т.е. сухой день, обозначим $\overline{A}$. Вероятность $P(A)$ вычислим по формуле (1): $P(A)=\frac{3}{30}=0{,}1$. Тогда по формуле (8) найдем $P(\overline{A})=1–0{,}1=0{,}9$.

Пример 5. Деканат получает пакеты с работами из городов A, B и C. Вероятность получения пакета из города A равна 0, 7, из B — 0,2. Найти вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C.

Решение. Обозначим события: A — пакет из города A; B — пакет из города B; C — пакет из города C.

Тогда по условию задачи $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}2$. Так как события A, B и C образуют полную группу, то по теореме 3 сумма их вероятностей равна 1, т. е. $P(A)+P(B)+P(C)=1$; $0{,}7+0{,}2+P(C)=1$. Следовательно, $P(C)=1–0{,}9=0{,}1$.

Определение 4. Два события называются независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Определение 5. Два события называются зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от появления или не появления другого.

Теорема 5 (*умножения вероятностей независимых событий*). Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \tag{9}$$

Пример 6. В каждом из двух ящиков имеется по 20 деталей. В первом ящике 15, во втором — 16 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу берут по одной детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали стандартные.

Решение. Пусть событие A — стандартная деталь извлечена из первого ящика, событие B — стандартная деталь извлечена из второго ящика.

Тогда $P(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$; $P(B)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

Так как события A и B независимые, то по формуле (9) имеем:

$P(AB)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$.

Определение 6. Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 7. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их в урну. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании (событие A) а) был извлечен черный шар; б) был извлечен белый шар.

Решение. а) n=5; m=3; $P_A(B)=\frac{3}{5}$; б) n=5; m=2; $P_A(B)=\frac{2}{5}$.

Теорема 6 (*умножения вероятностей зависимых событий*). Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(A\cdot B)=P(A)\ P_A(B)=P(B)P_B(A). \qquad (10)$$

Пример 8. В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Наудачу берут один шар, потом второй. Найти вероятность того, что первый шар — белый, а второй — чёрный.

Решение. Введем обозначения: событие A — первым вынут белый шар, событие B — вторым вынут чёрный шар. Тогда $P(A)=\frac{3}{10}$; $P_A(B)=\frac{7}{9}$. Следовательно, $P(AB)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$.

Теорема 7. (*сложения вероятностей двух совместных событий*). Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (11)$$

Пример 9. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена равна 0,85, а для второго — 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

Решение. Первый способ. Пусть событие A — попадание в мишень первого спортсмена, событие B — второго. События A и B совместные . Поэтому событие «в мишень попадёт хотя бы один спортсмен» означает, что или первый попал, или второй , или оба попали в мишень, что равносильно событию

$A+B$. Вероятность такого события вычислим по формуле (11). События A и B независимые, поэтому $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

По условию $P(A)=0{,}85$, $P(B)=0{,}8$, тогда

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}85+0{,}8-0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}97.$$

Второй способ решения. События C — «хотя бы одно попадание» и $\overline{C}$ — «ни одного попадания» противоположные, поэтому по формуле (8) $P(C)+P(\overline{C})=1$, отсюда $P(C)=1-P(\overline{C})$. Так как $\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ и $P(\overline{A})=1-0{,}8=0{,}2$, $P(\overline{B})=1-0{,}85=0{,}15$, то $P(C)=1-0{,}2\cdot 0{,}15=1-0{,}03=0{,}97$.

1.5. Формула полной вероятности

Теорема 8. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A). \qquad (12)$$

Пример 10. В первой урне содержится 7 белых и 5 чёрных шаров, а во второй — 8 белых и 12 чёрных. Из наудачу взятой урны случайно извлечён шар. Найти вероятность того, что он белый.

Решение. Пусть событие A — извлечённый шар белый. Возможны следующие предположения: B_1 — шар извлечён из первой урны, B_2 — шар извлечён из второй урны.

События B_1 и B_2 равновозможны и образуют полную группу, поэтому $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$.

Вероятность события A найдём по формуле (12): $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)$.

Вычислим условные вероятности: $P_{B_1}(A)=\frac{7}{12}$, $P_{B_2}(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

Тогда $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{59}{120}$.

1.6. Повторение испытаний

Испытания называются независимыми относительно события A, если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний.

1.6.1. Формула Бернулли

Теорема 9. Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью

$P(A)=p$, и не произойти с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{13}$$

Пример 11. Вероятность того, что расход электрической энергии на протяжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электрической энергии в течении 4 суток не превысит нормы.

Решение. Так как p=0,75, q=0,25, то

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}3.$$

Определение 7. Число k_0 появления события в n независимых испытаниях называется наивероятнейшим, если его вероятность в этой серии испытаний наибольшая по сравнению с вероятностями других исходов.

Число k_0 удовлетворяет двойному неравенству

$$n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + p. \tag{14}$$

Если $n \cdot p + p$ — целое число, то k_0 имеет два значения: $n \cdot p - q$ и $n \cdot p - p$.

Пример 12. Всхожесть семян составляет в среднем 80%. Найти наивероятнейшее число всхожих среди девяти семян.

Решение. По условию задачи n=9, p=0,8. Тогда q=0,2, и по формуле (14) найдём:

$$9 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le k_0 \le 9 \cdot 0{,}8 + 0{,}8; \; 7 \le k_0 \le 8.$$

Значит, существует два наивероятнейших числа всхожих семян, равных 7 и 8.

1.6.2. Формула Пуассона

Для редких событий, когда вероятность наступления события A в одном испытании достаточно мала, а число испытаний велико (параметр $\lambda = n \cdot p \le 10$), применяется формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{15}$$

Пример 14. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 человек?

Решение. Имеем схему независимых испытаний, в которой n=800, p=0,01, k=5. Здесь $\lambda = n \cdot p = 8$, тогда

$$P_{800}(5) = \frac{8^5}{5!} e^{-8} \approx 0{,}0916.$$

1.6.3. Локальная теорема Муавра – Лапласа

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p ($0<p<1$), то вероятность появления этого события ровно k раз приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{16}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1 (столбцы таблицы соответствуют сотым долям значения аргумента x). Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т.к. функция $\varphi(x)$ четная и $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Пример 13. Игральная кость брошена 500 раз. Найти вероятность того, что одно очко выпадет ровно 83 раза.

Решение. Проводятся $n=500$ независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p = \frac{1}{6}$ появляется одно очко, и с вероятностью $q = \frac{5}{6}$ — не появляется. Искомую вероятность найдём по формуле (16), для чего предварительно вычислим $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{83 - \frac{500}{6}}{\sqrt{500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = -\,0,04.$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (приложение 1) находим

$$\varphi(-0,04)=\varphi(0,04)=0,3986.$$

Тогда $P_{500}(83) \approx \frac{1}{\sqrt{n\,p\,q}} \varphi(x) = 0,048.$

1.6.4. Интегральная теорема Муавра – Лапласа

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p ($0<p<1$), то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ появления события A не менее k_1 и не более k_2 раз приближенно равна

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{17}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$, $x_2 = \frac{k_2 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$.

Таблица значений функции $\Phi(x)$ приведена в приложении 2. Для значений $x \geq 5$ принимают $\Phi(x)=0,5$. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, учитывая, что функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x)= -\Phi(x)$.

Пример 14. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий бракованных будет не более 17?

Решение. По условию n=1100, p=0,01, q=0,99, $0\le k\le 17$. Искомую вероятность найдём по формуле (17). Вычислим:

$$x_1=\frac{k_1-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{0-1100\cdot 0{,}01}{\sqrt{1100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}=-\frac{11}{\sqrt{10{,}89}}=-\frac{11}{3{,}3}=-3{,}33,$$

$$x_2=\frac{k_2-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{17-1100\cdot 0{,}01}{\sqrt{1100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}=\frac{6}{\sqrt{10{,}89}}=\frac{6}{3{,}3}=1{,}82.$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$: $\Phi(x_1)=\Phi(-3{,}33)=-\Phi(3{,}33)=-0{,}4995$, $\Phi(x_2)=\Phi(1{,}82)=0{,}4656$. Тогда $P_{1100}(0;\,17)=0{,}4656-(-0{,}4995)=0{,}9651$.

Замечание. Приближенные формулы Муавра-Лапласа применяют в том случае, когда число испытаний n велико и формула Бернулли приводит к громоздким вычислениям.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

Определение 8. Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно из своих возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Определение 9. Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определёнными вероятностями.

Определение 10. Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между её возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины Х может быть задан в виде таблицы (ряд распределения). В первой строке перечисляются возможные значения случайной величины, во второй — вероятности появления этих значений, причём $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

2.2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Определение 11. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений с законом распределения

$$P(X=x_i)=p_i\ (i=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n),$$

называется сумма произведений ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{18}$$

Определение 12. Разность $X–M(X)$ называется отклонением случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$.

Определение 13. Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X)=M[X–M(X)]^2.$$

Дисперсию дискретной случайной величины удобно вычислять по формуле

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2. \tag{19}$$

Определение 14. Средним квадратическим отклонением, или стандартным отклонением случайной величины X, называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{20}$$

Пример 15. Случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	0	2	4	6
p_i	0,1	0,34	0,23	0,2	0,13

Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. Вычислим математическое ожидание по формуле (18):
$M(X)=(–2)\cdot0,1+0\cdot0,34+2\cdot0,23+4\cdot0,2+6\cdot0,13=1,84$.

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (19), сделав промежуточные вычисления:
$M(X^2)=(–2)^2\cdot0,1+0^2\cdot0,34+2^2\cdot0,23+4^2\cdot0,2+6^2\cdot0,13=9,2$, $[M(X)]^2=(1,84)^2=3,39$,
тогда $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=9,2–3,39=5,81$.

Согласно формуле (20): $\sigma(X)=\sqrt{5,81}=2,41$.

3. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Одной из важных задач математической статистики является оценка параметров распределения случайной величины X по данным выборки. Часто среднее квадратическое отклонение ошибки измерения σ известно нам заранее (например, когда измерения производят одним прибором, погрешность которого установлена результатами поверки). В таких случаях, если исследуемая величина распределена по нормальному закону, то несложно найти границы доверительного интервала, покрывающего истинное значение математического ожидания a, с требуемой надежностью γ, по формуле:

$$P\left(\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma\,. \qquad (21)$$

Здесь n — объем выборки, $\bar{x}_{\text{в}}$ — выборочная средняя, γ — доверительная вероятность (надежность) интервальной оценки параметра a, t — значение аргумента функции Лапласа (определяется по приложению 2), при котором $\Phi(t) = \gamma/2$.

Практическая польза соотношения (21) заключается в следующем. На его основании мы можем утверждать, что при формировании выборки объема n для нормально распределенной случайной величины, значение математического ожидания a будет с вероятностью γ заключено в интервале $\left(\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Пример 16. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 50{,}42; n = 90; \sigma = 6$.

Решение. Доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины, согласно формуле (21), имеет вид: $\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Найдем по таблице функции Лапласа (приложение 2) такое значение аргумента t, при котором $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}475$. Так как $\Phi(1{,}96) = 0{,}4750$, то t=1,96. Остальные величины известны, вычисляем границы доверительного интервала: $50{,}42 - 1{,}96\frac{6}{\sqrt{90}} < a < 50{,}42 + 1{,}96\frac{6}{\sqrt{90}}$. Значит, 49,18< a <51,66 — искомый доверительный интервал.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Вариант 1.

Задача 1. Вероятность изготовления не бракованного пластмассового ведра равна 0,93. Сделано три ведра. Найти вероятность того, что: а) все ведра не бракованные; б) два ведра не бракованные; в) только одно ведро не бракованное; г) хотя бы одно ведро не бракованное; д) все ведра бракованные.

Задача 2. Два контролера производят оценку качества выпускаемых изделий. Вероятность того, что очередное изделие попадет к первому контролеру, равна 0,55, ко второму — 0,45. Первый контролер выявляет имеющийся дефект с вероятностью 0,8, а второй — с вероятностью 0,9. Вычислить вероятность того, что изделие с дефектом будет признано годным к эксплуатации.

Задача 3. Вероятность того, что отклонение технических данных изделия в серийном производстве превышает норму от допустимого, равна 0,005. Найти вероятность того, что среди поступивших 1600 изделий с отклонениями их технических данных от допустимых, превышающими норму, будет: а) ровно три; б) менее трех.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 100{,}31; n = 100; \sigma = 5$.

Вариант 2.

Задача l. В начале месяца в комнате повесили два новых светильника. Вероятность того, что светильник не выйдет из строя в течение месяца, равна 0,84. Найти вероятность того, что к концу месяца выйдут из строя: а) оба светильника; б) только один светильник; в) хотя бы один светильник; г) ни одного светильника.

Задача 2. В магазин поступил одноимённый товар, изготовленный двумя фирмами. От первой фирмы поступило 150 единиц товара, из них 30 единиц первого сорта, а от второй фирмы поступило 200 единиц товара, из них 50 - первого сорта. Из общей массы товара наугад извлекается одна единица. Какова вероятность того, что она первого сорта?

Задача 3. Вероятность получения положительного результата в каждом из 2100 опытов равна 0,7. Найти вероятность того, что положительный результат дадут:

а) 1500 опытов; б) не более 1460 опытов.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	0,2	0,5	0,6	0,8
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 87{,}56; n = 64; \sigma = 8$.

Вариант 3.

Задача 1. В России 10% всех семей имеют трех и более детей. Найти вероятность того, что из трех наудачу выбранных семей многодетными окажутся: а) все три; б) только две; в) лишь одна; г) хотя бы одна; д) ни одна.

Задача 2. Покупатель может приобрести нужный ему товар в двух гипермаркетах. Вероятность обращения в первый гипермаркет 0,4, во второй — 0,6. Вероятность того, что в гипермаркете есть в наличии нужный ему товар равна 0,5 для первого, и 0,3 — для второго. Какова вероятность того, что покупатель приобретёт нужный ему товар?

Задача 3. Вероятность положительного результата при химическом анализе 0,75. Найти вероятность того, что из 400 анализов положительный результат получится: а) в 300; б) не более, чем в 320 анализах.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-6	-2	1	4
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 69{,}9;\, n = 68;\, \sigma = 3$.

Вариант 4.

Задача 1. Вероятность выпуска стандартной упаковки некоторого товара составляет 0,95. Найти вероятность того, что из трёх произведенных упаковок стандартными окажутся: а) все три; б) только две; в) лишь одна; г) хотя бы одна; д) ни одной упаковки.

Задача 2. Магазин получил две равные по количеству партий дубленок. Известно, что 25% первой партии и 40% второй партии составляют мужские дубленки. Какова вероятность того, что наугад выбранная дубленка окажется женской?

Задача 3. Вероятность того, что при транспортировке фруктов процент порчи превысит норму, равна 0,03. Найти вероятность того, что среди 100 вагонов-рефрижераторов. прибывших в течение года, процент порчи груза будет в пределах нормы: а) в 98; б) менее чем в 98 вагонах.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	0,2	0,5	0,6
p_i	0,5	0,4	0,1

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 78{,}64;\, n = 70;\, \sigma = 10$.

Вариант 5.

Задача 1. В автосалон поступило 14 автомобилей, из которых 5 требуют дополнительной регулировки. Какова вероятность того, что среди двух отобранных случайным образом для продажи машин, потребуют регулировки: а) оба автомобиля; б) хотя бы один автомобиль?

Задача 2. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу 0,4, а во вторую — 0,6: Вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билеты будут распроданы, равна 0,35 для первой кассы и 0,7 — для второй. Какова вероятность того, что пассажир приобретёт билет?

Задача 3. Мастер и ученик выпускают однотипные изделия, причем производительность мастера в два раза выше производительности ученика. Изделия без маркировки поступают для упаковки. Найти вероятность того, что среди 450 изделий, случайно взятых из упаковочного контейнера, окажутся изготовленными мастером: а) 300 изделий; б) не менее 275 изделий.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-8	-2	1	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 56{,}89; n = 78; \sigma = 10$.

Вариант 6.

Задача 1. У студента с собой имеется пять одинаковых флешек, из которых три полностью заполнены, а две — пустые. Будучи не в состоянии установить, какие из них пустые, он решает отобрать наугад три флешки. Какова вероятность того, что среди отобранных окажутся пустыми:
а) обе флешки; б) хотя бы одна флешка.

Задача 2. Два контролера проверяют качество выпускаемых изделий, причем каждое изделие с одинаковой вероятностью может быть проверено любым из них. Вероятность выявления дефектов первым специалистом равна 0,8, а вторым — 0,9. Из массы проверенных изделий наугад выбирается одно. Какова вероятность того, что изделие окажется с дефектом?

Задача 3. Сельскохозяйственной авиацией обрабатывается 5000 гектаров посадок зерновых. Вероятность неправильной обработки каждого из гектаров равна в среднем 0,001. Какова вероятность того, что будет неправильно обработано не более пяти гектаров?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-2	1	3	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 78{,}98; n = 135; \sigma = 8$.

Вариант 7.

Задача 1. Из аэровокзала отправились два автобуса-экспресса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что: а) оба автобуса прибудут вовремя; б) оба автобуса опоздают; в) только один автобус прибудет вовремя; г) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

Задача 2. Банки закатывают два автомата с одинаковой производительностью. Доля банок с дефектом укупорки для первого автомата составляет 1%, а для второго - 0,5%. Какова вероятность того, что взятая наугад банка будет иметь дефект укупорки?

Задача 3. Всхожесть семян составляет 80%. Найти вероятность того, что из 2500 посеянных семян взойдет: а) 1940; б) по крайней мере 1950 семян.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-3	2	3	5
p_i	0,3	0,4	0,1	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 90{,}25; n = 65; \sigma = 9$.

Вариант 8.

Задача 1. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,9. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) только один стрелок поразит мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень; г) оба стрелка промахнутся.

Задача 2. В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Количество обуви, поступившей от первого поставщика, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 7% обуви от первого поставщика и 5% обуви от второго поставщика имеют различные дефекты отделки верха. Из общей массы наугад отбирают одну упаковку с обувью. Какова вероятность того, что она не имеет дефектов?

Задача 3. В среднем 75% выпускаемых фабрикой изделий высшего сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наугад 300 изделий число первосортных будет: а) ровно 219; б) от 219 до 234 изделий.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	3	10
p_i	0,1	0,4	0,5

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 98{,}87; n = 70; \sigma = 8$.

Вариант 9.

Задача 1. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает: а) два вопроса, содержащиеся в билете; б) только один вопрос; в) хотя бы один вопрос.

Задача 2. В двух одинаковых коробках находится одинаковое количество карандашей. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и 1/4 карандашей во второй — твердости ТМ. Наугад выбирается одна коробка и из нее наугад извлекается один карандаш. Какова вероятность того, что он твёрдости ТМ?

Задача 3. В магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит хотя бы одну разбитую бутылку.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-4	-1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 56{,}54; n = 87; \sigma = 3$.

Вариант 10.

Задача 1. Из трёх орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд поразит цель; б) только два снаряда попадут в цель; в) все три снаряда попадут в цель; г)хотя бы один снаряд попадёт в цель.

Задача 2. В первой урне 5 белых и 10 чёрных шаров, во второй — 3 белых и 7 чёрных. Из первой урны во вторую переложили один шар. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлечённый из второй коробки — белый.

Задача.3. Известно, что в среднем 90% студентов потока выполняют контрольные работы в срок. Оценить вероятность того, что из выбранных наугад 100 студентов задержат представление контрольных работ:
а) ровно 7; б) от 7до 16 студентов.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-3	2	3	5
p_i	0,3	0,4	0,1	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 156{,}65; n = 88; \sigma = 5$.

Вариант 11.

Задача 1. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7, для второго и. третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что цель поразят: а) все три стрелка; б) только два стрелка; в) лишь один стрелок; г) хотя бы один стрелок.

Задача 2. Литьё в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого и 30% из второго. При этом материал первого цеха имеет 3% брака, а второго — 2%. Найти вероятность того, что одна, взятая наугад болванка без дефектов.

Задача 3. Вероятность того, что саженец ёлки приживется при пересадке, составляет 0,8. Какова вероятность того, что из 450 пересаженных ёлок:
а) 368 приживется; б) погибнет от 82 до 106?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-6	-2	2	3
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 22{,}45; n = 36; \sigma = 8$.

Вариант 12.

Задача 1. Определить вероятность того, что в семье, имеющей троих детей, будут: а) три девочки; б) две девочки; в) не менее двух девочек. Вероятность рождения девочки принять равной 0,49.

Задача 2. В каждой из двух урн содержится 8 чёрных и 2 белых шара. Из второй урны наугад извлечён один шар и переложен в первую. Найти вероятность того, что шар, извлечённый после этого из первой урны, окажется чёрным.

Задача 3. При оценке качества продукции было установлено, что в среднем 4% выпускаемой фабрикой обуви имеют различные дефекты отделки. Какова вероятность того, что в полученной магазином партии из 189 пар обуви: а) будут иметь дефекты отделки ровно 6 пар; б) не будут иметь дефектов от 7 до 14 пар обуви?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	5	6
p_i	0,5	0,1	0,4

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 33{,}12; n = 85; \sigma = 5$.

Вариант 13.

Задача 1. На тридцати карточках написаны числа от 11 до 40. Найти вероятность того, что сумма цифр числа на взятой наугад карточке равна 5 или 9.

Задача 2. В каждой из двух урн содержится 6 чёрных и 4 белых .шара. из первой урны Наугад извлечён один шар и . переложен во вторую. Найти вероятность того, что шар, извлечённый после .этого из второй урны, окажется чёрным.

Задача 3. Пусть вероятность поражения цели при отдельном выстреле постоянна и равна 0,7. Определить вероятность того, что в серии из 100 выстрелов окажется:

а) ровно 64 попадания; б) от 25 до 33 промахов.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-5	-3	1	3
p_i	0,2	0,1	0,1	0,6

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 56{,}12; n = 45; \sigma = 9$.

Вариант 14.

Задача 1. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу три пуговицы. Найти вероятность того, что среди них: а) три красных пуговицы; б) хотя бы одна красная пуговица.

Задача 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 15 белых и 5 черных шаров, во втором — 10 белых и 10 чёрных, в третьем — 15 чёрных и 5 белых. Из выбранного наугад ящика вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.

Задача 3. Вероятность появления события A в каждом из 1500 испытаний равна 0.4. Найти вероятность того, что число появлений события A заключено между: а) 570 и 630, б) 600 и 660.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	5	6	8
p_i	0,2	0,2	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 145{,}78;\ n = 250;\ \sigma = 2$.

Вариант 15.

Задача 1. В среднем 15% студентов сдают экзамен по математике на "отлично". Найти вероятность того, что из пяти случайно выбранных студентов оценку "отлично" получат: а) все студенты; б) хотя бы один студент.

Задача 2. На склад поступило 200 подшипников с первого завода, 460 — со второго и 340 — с третьего. Вероятность брака в продукции первого завода равна 0,03, второго — 0,02, третьего — 0,01. Взятый наугад подшипник оказался бракованным. Найти вероятность, что он изготовлен на первом заводе.

Задача 3. При оценке качества продукции было установлено, что 7% выпускаемой фабрикой обуви имеет незначительные дефекты отделки. Какова вероятность того, что в партии из 200 пар, поступившей в магазин, будут иметь дефекты: а) 12 пар обуви; б) от 10 до 14 пар обуви.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	4	6	8	12
p_i	0,3	0,1	0,3	0,3

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 54{,}65;\ n = 150;\ \sigma = 8$.

Вариант 16.

Задача 1. Из 15 билетов выигрышными являются два. Какова вероятность того, что среди взятых наугад трех билетов будет:
а) один выигрышный; б) хотя бы один выигрышный?

Задача 2. На автозавод поступили бензонасосы от трёх поставщиков. От первого поступило 100 единиц товара, от второго — 160 и от третьего — 140. Вероятности безотказной работы бензонасосов в течение гарантийного срока соответственно равны 0,95; 0,9; 0,85. Найти вероятность того, что установленный на машине бензонасос будет безотказно работать в течение гарантийного срока.

Задача 3. Полагая, что выпадение герба или цифры при подбрасывании монеты равновозможны, определить вероятность того, что в серии из 144 подбрасываний монеты герб выпадет: а) ровно 67 раз; б) от 66 до 75 раз.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	4	6	9
p_i	0,4	0,3	0,3

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 54{,}2;\ n = 150;\ \sigma = 6$.

Вариант 17.

Задача 1. В магазине работают 12 мужчин и 18 женщин. Из них случайным образом отобраны четыре человека. Найти вероятность того; что будут выбраны: а) две женщины и два мужчины; б) все мужчины; в) все женщины.

Задача 2. Фасовка сахара производится двумя полуавтоматами с одинаковой производительностью. Их продукция поступает на общий конвейер. Вероятность появления дефектной упаковки для первого полуавтомата составляет 0,01,а для второго 0,005. Найти вероятность того, что выбранная наугад упаковка будет иметь дефект.

Задача 3. Установлено, что данная химчистка выполняет в срок в среднем 90% заказов. В течение некоторого времени было принято 225 заказов. Какова вероятность того, что из них в срок будут выполнены: а) ровно 200 заказов; б) от 180 до 210 заказов?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	4	6	8	9
p_i	0,3	0,1	0,1	0,5

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 65{,}45; n = 100; \sigma = 3$.

Вариант 18.

Задача 1. На заочном отделении ВУЗа 80% всех студентов работают по специальности. Какова вероятность того, что из трёх отобранных случайным образом студентов по специальности работают:
а) два студента; б) хотя бы один студент?

Задача 2. Два товароведа производят приёмку партии изделий по качеству. Вероятность того, что очередное изделие попадёт к первому товароведу, равна 0,4, а ко второму — 0,6. Первый товаровед выявляет дефект с вероятностью 0,95, второй — с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что взятое наугад проверенное изделие окажется с дефектом.

Задача 3. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Для контроля качества наудачу отобрали тысячу деталей. Какое количество бракованных деталей наиболее вероятно будет в этой партии? Какова вероятность такого итога проверки?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	3	6	7	9
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 22.25; n = 200; \sigma = 9$.

Вариант 19.

Задача 1. Стрелок ведет огонь по приближающейся цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,4 и увеличивается на 0,1 для каждого последующего выстрела. Какова вероятность двух попаданий при трех выстрелах?

Задача 2. В двух одинаковых урнах находится по 10 шаров двух цветов: белого и синего. Количество синих шаров в первой урне 3 шт, а во второй — 6 шт. Студент выбирает наугад одну из урн и извлекает из неё случайным образом шар. Какова вероятность того, что извлечённый шар — синий?

Задача3. Известно, что 64% студентов второго курса выполняют контрольные работы в срок. Какова вероятность того, что из 100.студентов курса .задержат представление контрольных работ: а) 30 студентов; б) от 30 до 48 студентов?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	5	10	12	14
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 56{,}45;\, n = 60;\, \sigma = 5$.

Вариант 20.

Задача 1. Вероятность того, что каждый из четырех кассиров занят обслуживанием покупателей, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент: а) хотя бы один из кассиров занят обслуживанием; б) все кассиры заняты обслуживанием покупателей.

Задача 2. В магазин от двух поставщиков поступила женская обувь в одинаковых упаковках. От первого поставщика поступило 480 пар, из них 360 пар черного цвета. От второго поставщика поступило 320 пар, в том числе 120 пар черного цвета. Какова вероятность того, что в наугад выбранной упаковке оказалась обувь чёрного цвета?

Задача.3 Книга издана тиражом 10 тысяч экземпляров. Вероятность того, что экземпляр книги сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	6	8	14
p_i	0,2	0,4	0,4

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 12{,}78;\, n = 50;\, \sigma = 8$.

Вариант 21.

Задача 1. Имеется 12 мобильных телефонов в одинаковых упаковках. Известно, что четыре из них — черного цвета. Вычислить вероятность того, что среди двух наугад выбранных из них телефонов: а) хотя бы один черного цвета; б) только один черного цвета.

Задача 2. Два контролера проверяют качество выпускаемых изделий, причём каждое изделие может с одинаковой вероятностью быть проверено как первым, так и вторым специалистом. Вероятность пропуска дефекта первым контролером равна 0,1, вторым — 0,05. Какова вероятность того, что выбранное наугад изделие будет качественным?

Задача 3. Полагая вероятность рождения девочки 0,49, найти наивероятнейшее число девочек среди 204 новорождённых и вычислить соответствующую им вероятность.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	1	3	4	5
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в} = 98; n = 120; \sigma = 16$.

Вариант 22.

Задача 1. Из 40 вопросов курса высшей математики студент знает 32. На экзамене ему случайным образом предлагается два вопроса. Какова вероятность того, что студент ответит правильно:

а) хотя бы на один вопрос;

б) на оба вопроса?

Задача 2. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения его в первую кассу составляет 0,4, а во вторую — 0,6. Вероятность того, что в кассах билетов уже нет: для первой кассы — 0,1, а для второй — 0,5. Какова вероятность того, что пассажир купит билет?

Задача 3. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад уложенных монет число монет, расположенных «орлом» вверх, находится в пределах от 45 до 55?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	4	5	7	8
p_i	0,1	0,5	0,2	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в} = 87{,}45; n = 70; \sigma = 9$.

Вариант 23.

Задача 1. Среди 30 лотерейных билетов имеется четыре выигрышных. Какова вероятность того, что среди двух взятых наугад билетов окажется:

а) хотя бы один выигрышный; б) хотя бы один не выигрышный?

Задача 2. Вся продукция цеха проверяется двумя контролёрами, причём первый контролёр проверяет 55% изделий, а второй — остальные. Вероятность того, что первый контролёр пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй — 0,02. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется нестандартным.

Задача 3. Установлено, что в результате обращения в службу заказа такси в среднем 60% клиентов оказываются удовлетворенными качеством оказания услуг. Какова вероятность того, что из 150 клиентов положительный отзыв оставят: а) ровно 90 клиентов; б) от 93 до 107 клиентов?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	4	5	6
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 35; n = 90; \sigma = 6$.

Вариант 24.

Задача 1. Имеется семь энергосберегающих ламп, среди которых две неисправные, на вид не отличающиеся от исправных. Наугад выбирают друг за другом две лампы. Какова вероятность того, что: а) обе лампы окажутся исправными; б) хотя бы одна из них исправна?

Задача 2.На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем три четверти всей продукции с процентом брака 4%, вторая — оставшуюся четверть с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется бракованным.

Задача 3. По данным опроса установлено, что 30% покупателей требуется женская обувь 37 размера. Известно, что ежедневно магазин посещает в среднем 189 человек. Найти наивероятнейшее число покупателей, которым потребуется женская обувь 37 размера, и вычислить соответствующую этому событию вероятность.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	4	8
p_i	0,1	0,4	0,5

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 98; n = 65; \sigma = 7$.

Вариант 25.

Задача 1. В группе из 30 студентов из которых 9 слабо успевающих. Из группы наугад выбирают четырех человек. Какова вероятность того, что среди них: а) только один слабо успевающий студент;
б) хотя бы один слабо успевающий студент?

Задача 2. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0.9, для велосипедиста — 0.8, для бегуна — 0.75. Найти вероятность того, что выбранный наугад спортсмен выполнит норму.

Задача 3. Известно, что одна четвертая часть пересаженных саженцев липы погибает. Какова вероятность того, что из 300 саженцев:

а) погибнет ровно 76; б) приживется от 210 до 224?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	-3	-1	3	5
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 35; n = 65; \sigma = 4$.

Вариант 26.

Задача 1. Прибор состоит из двух узлов, которые во время работы независимо друг от друга могут выходить из строя. Вероятность безотказной работы первого узла в течение гарантийного срока равна 0,75, а второго — 0,8. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока прибор: а) будет работать исправно; б) выйдет из строя.

Задача 2. Два товароведа производят приёмку партии товара по качеству. Вероятность того, что очередное изделие попадёт к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность пропуска дефекта первым товароведом равна 0,05, а вторым — 0,15, Определить вероятность того, что в процессе приёмки дефектное изделие будет обнаружено.

Задача 3. Известно, что в данном технологическом процессе 10% изделий имеют дефект. Какова вероятность того, что в партии из 400 изделий:
а) не будут иметь дефектов 378 изделий; б) будут иметь дефект от 25 до 43 изделий?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	4	6	9
p_i	0,1	0,3	0,3	0,3

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 88; n = 66; \sigma = 12$.

Вариант 27.

Задача 1. В начале года в лабораторию поставили два новых копировальных устройства. Вероятность того, что каждое из них не выйдет из строя в течение года, равна 0,85. Найти вероятность того, что к концу года выйдут из строя: а) оба копировальных устройства; б) только одно; в) хотя бы одно.

Задача 2. В шкафу стоят однотипные приборы, из которых 15 новых и 10 уже бывших в эксплуатации. Берутся наугад два прибора и эксплуатируются в течение некоторого времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично берутся наугад два прибора. Найти вероятность того, что оба вторично взятых прибора новые.

Задача 3. Наблюдения показали, что 25% покупателей приобретают одежду 48 размера. В среднем этот магазин посещают в день 300 человек. Найти наивероятнейшее число покупателей в день, которым потребуется одежда 48 размера и вычислить соответствующую этому событию, вероятность.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	2	4	5	6
p_i	0,5	0,1	0,3	0,1

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в} = 100; n = 100; \sigma = 10$.

Вариант 28.

Задача 1. Студенты на каникулах отправились на экскурсию в Санкт-Петербург. До аэропорта можно добраться двумя автобусами-экспрессами. Вероятность своевременного прибытия первого автобуса в аэропорт равна 0,9, а второго — 0,95. Найти вероятность того, что: а) оба автобуса прибудут в аэропорт вовремя; б) оба автобуса опоздают; в) только один автобус прибудет вовремя; г) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

Задача 2. Упаковка товара в обёртку производится двумя автоматами, причём производительность второго в два раза меньше, чем первого. Вероятность появления дефектной упаковки для первого автомата составляет 0,01, а для второго — 0,006. Найти вероятность того, что выбранная наугад упаковка будет иметь дефект.

Задача 3. 45% студентов первых курсов в среднем выполняют контрольные работы в срок. Какова вероятность того, что из 65 студентов курса задержат выполнение контрольных работ а) 25 студентов; б) от 25 до 45 студентов?

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	1	3	8
p_i	0,2	0,1	0,7

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в} = 78; n = 64; \sigma = 8$.

Вариант 29.

Задача 1. Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов будут: а) оба выигрышных; б) хотя бы один выигрышный.

Задача 2. Однотипные детали изготавливают на трёх станках. Первый станок даёт 50% всех деталей, второй — 30%, третий — 20%. Среди деталей, изготовленных на первом станке в среднем 0,025 нестандартных, на втором — 0,02, на третьем — 0,015. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь соответствует стандарту.

Задача 3. Всхожесть семян составляет 70%. Найти вероятность того, что из 4000 посеянных семян взойдет: а) 2800 семян; б) не менее 2800.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	4	6	8	10
p_i	0,3	0,2	0,4	0,1

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в} = 11; n = 48; \sigma = 3$.

Вариант 30.

Задача 1. Вероятность того, что каждый из трёх кассиров занят обслуживанием покупателей, равна соответственно 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент заняты обслуживанием покупателей: а) все кассиры; б) два кассира; в) только один кассир; г) хотя бы один кассир.

Задача 2. В магазин поступил одноименный товар двумя партиями, причем объем первой партии в три раза больше второй. Известно, что 20% первой партии и 40% второй составляет товар первого сорта. Какова вероятность того, что наугад выбранная единица товара не будет первого сорта?

Задача 3. Вероятность положительного результата при анализе качества молока составляет 0,85. Найти вероятность того, что из 500 анализов положительный результат получится:

а) в 400; б) не более, чем в 430 анализах.

Задача 4. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$для величины X, заданной законом:

x_i	6	8	12	16
p_i	0,2	0,3	0,1	0,4

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального закона с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 12; n = 50; \sigma = 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высш. шк., 2004.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М. : Высш. шк., 2004.

3. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» : Мир и Образование, 2003. — 304 с.

4. *Меркулова Н.И.* Прикладная математика для экономистов в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов и колледжей — Волгоград : Комитет по печати и информации, 1999.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4664	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4750	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4976
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,499841
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,499997
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,5