Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Введение в математический анализ

Методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 2

2-е издание, переработанное

Составители К. В. Катеринин, А. П. Поздняков

Волгоград. ВолгГАСУ. 2016

УДК 517(076.5)

Введение в математический анализ [Электронный ресурс] : методические указания и индивидуальные задания к контрольной работе № 2. — 2-е изд., перераб. / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. К. В. Катеринин, А. П. Поздняков. — Электронные текстовые и графические данные (0,3 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2016. — Учебное электронное издание. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, индивидуальные задания.

Для студентов всех профилей подготовки направлений «Строительство», СУЗ, ТТП, ПБ, ТБ заочной формы обучения по дисциплине «Математика».

1-е издание выпущено в 2011 году под названием «Введение в математический анализ. Производная и ее приложения», составители: Н. А. Болотина, К. В. Катеринин, Р. К. Катеринина, А. П. Поздняков, И. П. Руденок.

УДК 517(076.5)

План выпуска учеб.-метод. документ. 2016 г., поз. 14

Минимальные систем. требования:
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0

Подписано в свет 30.08.2016.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,5. Объем данных 0,3 Мбайт

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
И РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. Основные определения

Пусть $y = f(x)$ — функция непрерывного аргумента x и пусть x неограниченно приближается к x_o. При этом говорят, что x стремится к x_o и пишут $x \to x_o$.

Если x неограниченно возрастает, то говорят, что x стремится к положительной бесконечности и пишут $x \to +\infty$. Если x неограниченно убывает, то говорят, что x стремится к отрицательной бесконечности и пишут $x \to -\infty$. Аргумент функции, изменяющийся таким образом, называют бесконечно большим.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_o, исключая, быть может, эту точку.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_o$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от числа x_o, значения функции как угодно мало отличаются от числа A. Коротко это записывают так:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = A.$$

Если аргумент функции $y = f(x)$ бесконечно большой, то пишут:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ или } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_o$, если она неограниченно возрастает по абсолютной величине при $x \to x_o$. При этом пишут:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \infty.$$

Если бесконечно большая функция $y = f(x)$ при $x \to x_o$ принимает только положительные или только отрицательные значения, то пишут соответственно $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = -\infty$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_o$, если $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$.

1.2. Основные теоремы о пределах функций
(правила вычисления пределов)

Теорема 1. Предел постоянной величины равен этой величине:

$$\lim_{x\to x_o} C = C\,. \tag{1}$$

Теорема 2. Если при $x \to x_o$ функция $f(x)$ есть бесконечно большая величина, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая величина; если $\varphi(x)$ — бесконечно малая величина, не обращающаяся в нуль в некоторой окрестности точки x_o, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая величина.

Символически это можно записать так:

$$\text{если } \lim_{x\to x_o} f(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)} = 0\,;$$

$$\text{если } \lim_{x\to x_o} \varphi(x) = 0, \text{ то } \lim_{x\to x_o} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty\,.$$

Теорема 3. Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_o} \varphi(x) = B$, тогда функции $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также имеют пределы и справедливы формулы:

$$\lim_{x\to x_o} \big(f(x) \pm \varphi(x)\big) = \lim_{x\to x_o} f(x) \pm \lim_{x\to x_o} \varphi(x) = A \pm B\,, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to x_o} \big(f(x) \cdot \varphi(x)\big) = \lim_{x\to x_o} f(x) \cdot \lim_{x\to x_o} \varphi(x) = A \cdot B\,, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to x_o} Cf(x) = C \lim_{x\to x_o} f(x), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o} \varphi(x)} = \frac{A}{B} \ (\text{если } B\neq 0). \tag{5}$$

Замечание 1. Формулы (2) и (3) справедливы для алгебраической суммы и произведения любого конечного числа функций.

Теорема 4. Если k — любое натуральное число, то

$$\lim_{x\to x_o} \left(f(x)^k\right) = \left(\lim_{x\to x_o} f(x)\right)^k. \tag{6}$$

Теорема 5 (первый замечательный предел). Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{7}$$

Справедливы также формулы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1\,.$$

Эти формулы помогают раскрывать неопределенность вида $\frac{0}{0}$, когда в выражении присутствует хотя бы одна тригонометрическая функция.

Теорема 6 (второй замечательный предел). Функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x \to \infty$ имеет предел, равный числу e (основание натурального логарифма, e≈2,718):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e. \tag{8}$$

Справедлива также формула:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{9}$$

Эти формулы помогают раскрывать неопределенность вида $(1+0)^{\infty}$, которую чаще обозначают как 1^{∞}.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2x + 7)$.

Решение. Применяя теоремы о пределах (формулы 1, 2, 4, 6), получим:
$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2x + 7) = 3(\lim\limits_{x\to 2} x)^2 - 2\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 7 = 3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 + 7 = 15.$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 6x^2 - 5}$.

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют, и предел знаменателя не равен нулю:
$\lim\limits_{x\to 3}(3x^2 - 1) = 3\cdot 9 - 1 = 26$, $\lim\limits_{x\to 3}(2x^3 + 6x^2 - 5) = 2\cdot 27 + 6\cdot 9 - 5 = 103$.

Пользуясь теоремой о пределе частного (формула 5), получаем:
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 6x^2 - 5} = \frac{26}{103}$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2 + 3x - 1}$.

Решение. По формуле (5) находим $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2 + 3x - 1} = \frac{0}{9} = 0.$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$.

Решение. Предел знаменателя равен 0 и применять теорему о пределе частного нельзя. Так как знаменатель есть бесконечно малая величина при $x \to 3$, то по теореме 2 обратная величина $\frac{1}{x-3}$ есть бесконечно большая и $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3} = \infty$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2x + 1)\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3} = 4\cdot\infty = \infty.$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$.

Решение. Теорему о пределе частного здесь применять нельзя, так как числитель и знаменатель конечных пределов не имеют. В этом случае говорят о неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель разделим на x^3, а затем перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{5}.$$

Здесь функции $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ и $\dfrac{2}{x}$ являются бесконечно малыми при $x\to\infty$ и их пределы равны 0.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

Решение. Применять теорему о пределе частного нельзя, так как предел знаменателя равен 0, и предел числителя здесь также равен 0. В этом случае говорят о неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ ($\dfrac{0}{0}$ — символическая запись отношения двух бесконечно малых величин) и вычисление предела сводится к раскрытию этой неопределенности.

Выполним тождественные преобразования, а именно, числитель и знаменатель дроби умножим на выражение, сопряженное числителю, то есть перенесем иррациональность в знаменатель. Потом сократим полученную дробь на x и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

Здесь сокращение на x допустимо, так как условие $x\to 0$ предполагает, что $x\neq 0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. Непосредственная подстановка значения x=4 в заданную функцию приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, умножим числитель и знаменатель на произведение $(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})$ и затем сократим дробь на множитель $(4–x)$, полагая $x\neq 4$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=\frac{3}{4}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем ее, используя первый замечательный предел (теорема 5). Для этого преобразуем даное выражение и по формуле 7 получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)^2=\frac{9}{5}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=\frac{9}{5}\cdot 1=\frac{9}{5}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(x+7)\big(\ln(5x+9)-\ln(5x+1)\big)$.

Решение. Непосредственная подстановка дает неопределенность $\infty-\infty$. Преобразуем ее к виду 1^{∞}, используя свойства логарифмов и выделяя в получившейся дроби единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{5x+9}{5x+1}\right)^{x+7}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{5x+1+8}{5x+1}\right)^{x+7}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{8}{5x+1}\right)^{x+7}.$$

Обозначим $\alpha=\dfrac{8}{5x+1}$, тогда при $x\to\infty,\ \alpha\to 0.$ Выразим x: $5x+1=\dfrac{8}{\alpha}$,

$x=\dfrac{8}{5\alpha}-\dfrac{1}{5}$. Здесь удобно использовать свойство о допустимости взаимной перестановки предела и логарифма, и тогда переходя от переменной x к α, получим:

$$\ln\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{8}{5\alpha}-\frac{1}{5}+7}=\ln\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{8}{5\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{34}{5}}=\ln\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{8}{5}}\lim_{\alpha\to 0}\left((1+\alpha)^{\frac{8}{5}}\right).$$

Очевидно, что первый из пределов на основании формул (9) и (6) равен $e^{\frac{8}{5}}$, а второй предел равен единице. Отсюда получаем ответ:

$$\lim_{x\to\infty}(x+7)\big(\ln(5x+9)-\ln(5x+1)\big)=\ln e^{\frac{8}{5}}=\frac{8}{5}.$$

Замечание. Часто при исследовании функции в точке требуется находить предел в предположении, что x приближается к x_o, оставаясь больше него, т.е. справа (такой предел называют правосторонним и обозначают $\lim\limits_{x\to x_o+0} f(x)$), либо когда x приближается к x_o слева (обозначают $\lim\limits_{x\to x_o-0} f(x)$ — левосторонний предел). Такие пределы называют односторонними пределами, и только в случае их взаимного равенства в исследуемой точке x_o говорят, что функция имеет предел в этой точке.

Нахождение одностороннего предела производится по обычным правилам нахождения пределов, но с учетом того факта, что $x > x_0$ для правосторонних пределов, и $x < x_0$ для левосторонних.

1.3. Асимптоты графиков функций и их нахождение с помощью пределов

Асимптотой графика функции называется прямая, к которой линия графика постепенно приближается при совместном их удалении в бесконечность. Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

Вертикальные асимптоты могут существовать только на границах интервалов области определения, когда односторонний предел при приближении к точке разрыва бесконечен.

Правая горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$ существует и имеет уравнение $y = C_1$, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C_1 = const$. Если же $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = C_2 = const$, то существует левая горизонтальная асимптота, и ее уравнение имеет вид $y = C_2$.

Правую наклонную асимптоту следует искать в случае отсутствия правой горизонтальной асимптоты в виде прямой $y = k_1x + b_1$, коэффициенты которой определяются: $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - k_1x\right)$. Если хотя бы один из пределов бесконечен, то это означает отсутствие наклонной асимптоты.

Аналогично ищут левую наклонную асимптоту в виде $y = k_2x + b_2$, где $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - k_2x\right)$.

Нахождение асимптот графика функции показано далее в примере 16.

2. ПРОИЗВОДНАЯ

2.1. Понятие производной

Определение 4. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Для обозначения производной используют символы y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом, по определению $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Нахождение производной называется *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в некоторой точке, называют *дифференцируемой* в этой точке.

2.2. Производные основных элементарных функций

В любой точке области определения основных элементарных функций справедливы формулы:

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}, \text{ в частности } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad (10)$$

$$(a^x)' = a^x\cdot\ln a, \text{ в частности } (e^x)' = e^x; \qquad (11)$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \text{ в частности } (\ln x)' = \frac{1}{x}; \qquad (12)$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (13)$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (14)$$

$$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad (15)$$

$$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \qquad (16)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (17)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad (18)$$

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}; \qquad (19)$$

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (20)$$

2.3. Правила вычисления производных

Пусть функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы в точке x и C — постоянная величина. Тогда:

$$C' = 0; \qquad (21)$$

$$(C\cdot U)' = C\cdot U'; \qquad (22)$$

$$(U \pm V)' = U' \pm V'; \qquad (23)$$

$$(U\cdot V)' = V\cdot U' + U\cdot V'; \qquad (24)$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'\cdot V - U\cdot V'}{V^2}, \ V \neq 0. \qquad (25)$$

Пример 10. Найти y' если $y = 7^x - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Используя формулы (23,22,11,10) получим:

$$y' = (7^x)' - 5\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 7^x \ln 7 + \frac{5}{3} x^{-\frac{4}{3}} = 7^x \ln 7 + \frac{5}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 11. Найти производную функции $y = x^3 \log_5 x$.

Решение.

$$y' = (x^3)' \log_5 x + x^3 (\log_5 x)' = 3x^2 \log_5 x + x^3 \frac{1}{x \ln 5} = x^2 \left(3 \log_5 x + \frac{1}{\ln 5}\right).$$

Здесь использованы формулы (24,12,10).

Пример 12. Найти производную функции $y = \dfrac{x}{2 - \cos x}$.

Решение. Производную частного находим по формуле (25):

$$y' = \frac{x'(2 - \cos x) - x(2 - \cos x)'}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 - \cos x - x \sin x}{(2 - \cos x)^2}.$$

2.4. Производная сложной функции

Если *y* является функцией от *u*, а *u* зависит от *x*, то *y* также зависит от *x*. Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ называется функцией от функции или сложной функцией переменной *x*. Переменная *u* называется промежуточным аргументом, а *x* — основным.

Теорема 7. Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке *x*, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке *u*, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке *x* и справедлива формула:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Правило дифференцирования сложной функции может быть записано в другой форме:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \tag{26}$$

здесь индексы *u* и *x* указывают, по какой переменной берется производная.

Пример 13. Найти производную функции $y = tg^5 x$.

Решение. Данную функцию можно представить в виде $y = u^5$, $u = tgx$. Найдем $y'_u = (u^5)' = 5u^4$; $u'_x = (tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Тогда по формуле (26):

$$y'_x = 5u^4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5tg^4 x}{\cos^2 x}.$$

Замечание. Если число простейших функций, из которых составлена сложная функция, больше двух, то ее производная вычисляется последовательным применением формулы (26).

Пример 14. $y = \operatorname{arctg} \ln \sin x$. Вычислить y'_x.

Решение.

$$y'_x = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x} \cdot (\ln \sin x)' = \frac{1}{1+\ln^2 \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{ctgx}{1+\ln^2 \sin x}.$$

2.5. Производная неявной функции

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *неявной*, если зависимость между x и y выражена уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{27}$$

не разрешенным относительно y.

Чтобы найти производную от неявной функции, надо данное уравнение (27) продифференцировать по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и полученное уравнение разрешить относительно y'.

Пример 15. Найти производную функции y, заданной уравнением $e^y + xy = e$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения по x, учитывая, что y есть функция от x:

$e^y \cdot y' + y + xy' = 0$.

Из полученного уравнения находим y':

$$y' = -\frac{y}{e^y + x}.$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

3.1. Возрастание и убывание функций

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности* функции.

Теорема 8 (Достаточный признак возрастания и убывания функции). Если во всех точках некоторого интервала выполняется условие $f'(x) > 0$, то в этом интервале функция $f(x)$ возрастает, если же во всех точках некоторого интервала $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом интервале.

3.2. Экстремумы функций

Определение 8. Точка x_o называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_o выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Определение 9. Точка x_o называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_o выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *экстремумами* функции.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_o, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует. Сформулированное условие называется *необходимым условием существования экстремума*.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует называются *критическими точками* (первого рода).

Замечание. Необходимое условие экстремума не является достаточным, так как наличие у функции критической точки вовсе не означает, что функция в этой точке обязательно достигает экстремума.

Теорема 9 (достаточный признак существования экстремума). Если x_o— критическая точка функции $f(x)$ и при переходе через x_o производная меняет знак с плюса на минус, то x_o является точкой максимума функции, а если с минуса на плюс, то x_o — точка минимума.

3.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение 10. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* в некотором интервале, если он расположен ниже любой своей касательной в этом интервале.

Определение 11. График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* в некотором интервале, если он расположен выше любой своей касательной в этом интервале.

Теорема 10 (достаточное условие выпуклости и вогнутости кривой). Если во всех точках некоторого интервала $f''(x) > 0$, то в этом интервале график функции $y = f(x)$ вогнутый, если $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый.

Определение 12. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*.

Необходимое условие существования точки перегиба состоит в том, что если $M_o(x_o,y_o)$ — точка перегиба кривой, то вторая производная в точке x_o равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует называются *критическими точками* (второго рода).

Теорема 11 (достаточное условие существования точки перегиба). Пусть x_0 — критическая точка второго рода функции $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка графика функции с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

Пример 16. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1) Областью определения функции являются все значения аргумента, за исключением x=2 и x=-2, при которых функция теряет смысл. Поэтому $D(f)$: $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

2) Данная функция является нечетной, т.к. $y(-x) = -y(x)$, что обусловливает симметрию ее графика относительно точки начала координат.

3) Пересечение графика с осью Oy: при x=0 y=0. Пересечение графика с осью Ox: y=0 только при x=0, т.к. только при этом значении х числитель дроби равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Следовательно, пересечение графика с обеими осями координат происходит в точке O.

4) Исследуем наличие асимптот у графика функции (см. п. 1.3).

а) Ищем вертикальные асимптоты в точках разрыва области определения. Для этого найдем односторонние пределы функции при $x \to 2$ и $x \to -2$: $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{8}{-0} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{8}{0} = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{-8}{-0} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{-8}{0} = -\infty$.

Следовательно, график функции имеет две вертикальные двухсторонние асимптоты в указанных точках.

б) Ищем горизонтальные асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{4-x^2} = \dfrac{\infty}{-\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{4}{x^3} - \dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{0-0} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right)} = \dfrac{1}{0(0-1)} = -\infty$. Следовательно, правая горизонтальная асимптота отсутствует, а в силу симметрии графика нечетной функции отсутствует и левая горизонтальная асимптота.

в) Ищем правую наклонную асимптоту в виде прямой $y = k_1 x + b_1$. Определим значения коэффициентов: $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{4-x^2} = -1$,

$b_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - k_1 x\big) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{4-x^2} + x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{4-x^2} = 0$. Оба коэффициента конечны, значит, правая наклонная асимптота существует и ее уравнение $y = -x$. В силу симметрии графика нечетной функции относительно точки начала координат эта же прямая, проходя через точку O в третий координатный угол, будет являться и левой наклонной асимптотой (в этом можно убедиться вычислив ее коэффициенты через аналогичные пределы при $x \to -\infty$).

5) Исследуем функцию на монотонность. Для этого найдем ее производную $y' = \left(\dfrac{x^3}{4-x^2}\right)' = \dfrac{3x^2(4-x^2)-x^3(0-2x)}{\left(4-x^2\right)^2} = \dfrac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2} = \dfrac{x^2\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$ и решим уравнение $f'(x)=0$. Получим $x_1=0$, $x_2=\sqrt{12}$, $x_3=-\sqrt{12}$. Это критические точки. Также к критическим относятся точки x=2 и x=-2, так как производная при этих значениях x не существует. Критические точки разбивают область существования функции на интервалы $(-\infty;-\sqrt{12})$, $(-\sqrt{12};-2)$, $(-2;0)$, (0;2) $(2;\sqrt{12})$, $(\sqrt{12};+\infty)$. В каждом из них функция монотонна и производная сохраняет свой знак. Для определения знака выберем в каждом интервале по одной произвольной точке, и вычислим значение производной в ней, например: $f'(4)=\dfrac{16\cdot(-4)}{144}<0$, $f'(-3)=\dfrac{27}{25}>0$, $f'(-1)=\dfrac{11}{9}>0$, $f'(1)=\dfrac{11}{9}>0$, $f'(3)=\dfrac{27}{25}>0$, $f'(-4)=\dfrac{16\cdot(-4)}{144}<0$. По теореме 8 заключаем, что в интервалах $(-\infty;-\sqrt{12})$ и $(\sqrt{12};+\infty)$ функция убывает, а в остальных интервалах — возрастает.

Определим точки экстремума. По необходимому условию существования экстремума их следует искать среди критических точек первого рода.

При переходе через точку $x=-\sqrt{12}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по теореме 9, в этой точке функция имеет минимум.

При переходе через точку x=0 производная знак не меняет, следовательно, экстремума в ней нет. (Эту точку можно отнести к классу стационарных точек, т.к. производная в ней существует и равна нулю. Это означает, что касательная к графику функции в этой точке пройдет параллельно оси Ox, и функция будет сохранять свое значение в некоторой окрестности данной точки).

При переходе через точку $x=\sqrt{12}$ производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, по теореме 9, в этой точке функция имеет максимум.

Точки x=2 и x=-2 не могут быть точками экстремума, т.к. в пункте 1 установлено, что это – точки разрыва, в которых функция не существует.

Вычислим экстремумы функции:

$y_{\max} = f(-\sqrt{12}) = \dfrac{-12\sqrt{12}}{-8} = 5{,}196$, $y_{\min} = f(\sqrt{12}) = \dfrac{12\sqrt{12}}{-8} = -5{,}196$.

6) Определим интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Для этого найдем $y'' = \left(\dfrac{12x^2-x^4}{\left(4-x^2\right)^2}\right)' = \dfrac{\left(24x-4x^3\right)\left(4-x^2\right)^2 - 2\left(4-x^2\right)\left(0-2x\right)\left(12x^2-x^4\right)}{\left(4-x^2\right)^4} =$

$$= \frac{(24x - 4x^3)(4 - x^2) + 4x(12x^2 - x^4)}{(4 - x^2)^3} = \frac{8x(12 + x^2)}{(4 - x^2)^3}.$$ Полученная вторая производная обращается в нуль только при x=0, а в точках x=2 и x=-2 существует. Это и есть критические точки второго рода. Они разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$. Во всех точках внутри каждого интервала функция будет либо выпуклой, либо вогнутой.

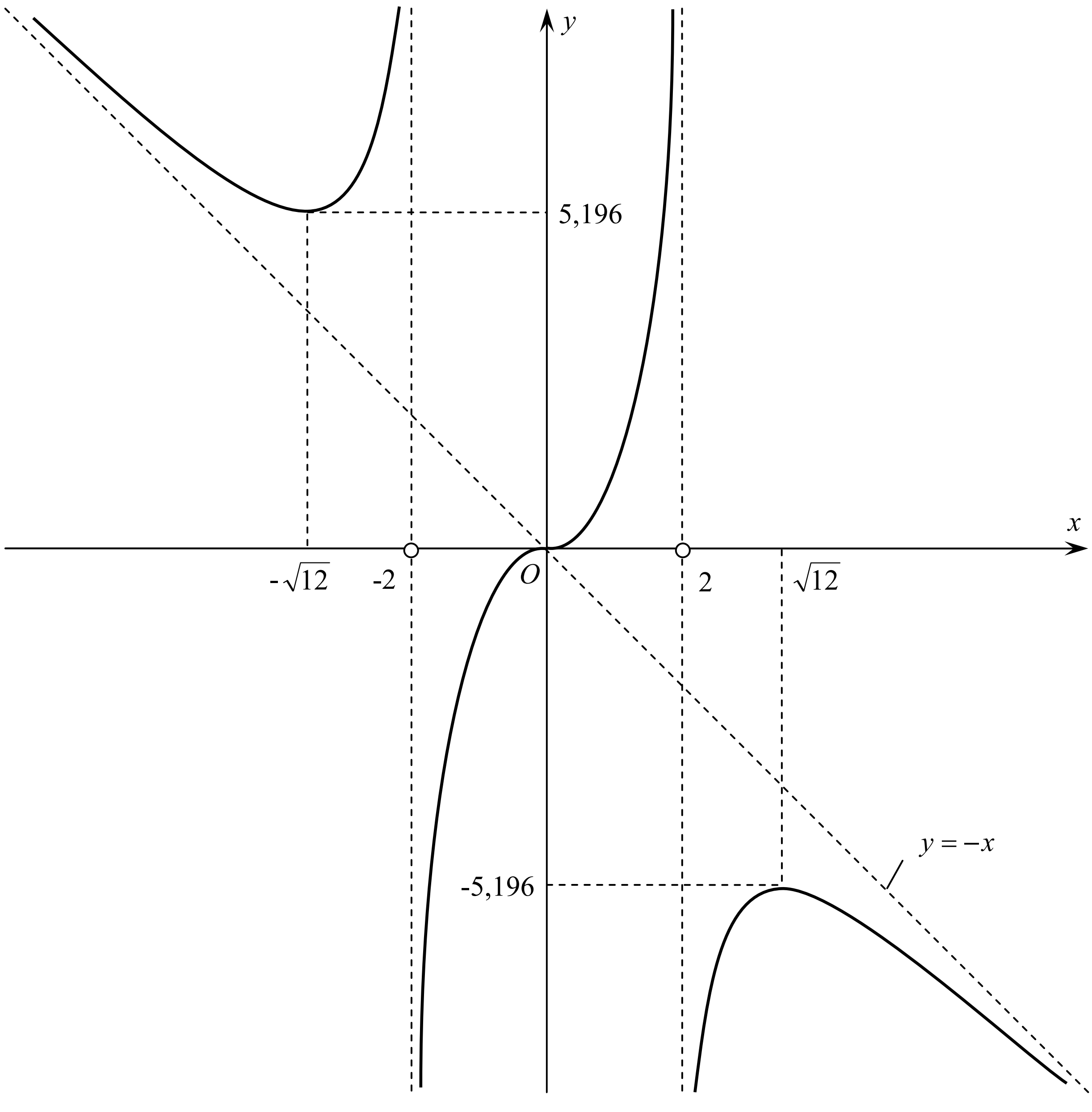

Рис.1

Для определения характера кривизны выберем в каждом интервале по одной произвольной точке, и вычислим значение второй производной в ней, например: $f''(-3)=\dfrac{-24\cdot 21}{-125}>0$, $f''(-1)=\dfrac{-8\cdot 13}{27}<0$, $f''(1)=\dfrac{8\cdot 13}{27}>0$, $f''(3)=\dfrac{24\cdot 21}{-125}<0$.

По теореме 10 заключаем, что в интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;2)$ кривая вогнутая, в интервалах $(-2;0)$ и $(2;+\infty)$ — выпуклая.

Так как при переходе через точку x=0 вторая производная меняет знак, то график функции имеет перегиб в этой точке (теорема 11). В точках x=2 и x=-2, как было отмечено выше, функция не существует.

7) По результатам исследования строим график функции (рис.1).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание № 1. Найти пределы функций.

Вариант 1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x^2+x^3}{3x^3+3x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{2x-1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

Вариант 2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{8+x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\arcsin^2 x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)(\ln(2x+4)-\ln(2x+1))$.

Вариант 3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{x+3x^2-4x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x}{4x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)(\ln(2x-1)-\ln(2x+1))$.

Вариант 4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7+4x^5-10}{3x-5x^2+14x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\operatorname{ctg}^2 2x)$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sqrt{x})(\ln(5x+2)-\ln(5x-3))$.

Вариант 5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{1-2x^2+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 8x}{x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-3)(\ln(x+2)-\ln(x-1))$.

Вариант 6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;
в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{ctg} x\cdot\arcsin^2 x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)(\ln(x+5)-\ln x)$.

Вариант 7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^4-(x-1)^4}{(2x+1)^4+(x-1)^4}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{3x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)\left(\ln(x+4)-\ln(x+1)\right)$.

Вариант 8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^4+9x^3}{1-x+3x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-5x+4x^2}-3}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}x-\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+3)\left(\ln(x+1)-\ln(x-4)\right)$.

Вариант 9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{4+x^4+3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)\left(\ln(1-2x)-\ln(3-2x)\right)$.

Вариант 10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\left(\ln(x-2)-\ln(x+1)\right)$.

Вариант 11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x^2-2}{2x-3x^5+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin^2 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left(\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right)$.

Вариант 12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{3+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{36-x^2}{\sqrt{3+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg}3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$.

Вариант 13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+3x-5}{4+2x^2+3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Вариант 14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9+8x^5-3x^3}{3+2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\cos^3 x-\cos x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left(\ln(x+3)-\ln x\right)$.

Вариант 15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-2x^4-x^3-3}{x^7+x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$.

Вариант 16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-21x}{x^6-4x^2+3x^5-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{x+8}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left(\ln(2x^2+1)-\ln(2x^2+3)\right)$.

Вариант 17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+1}{1+3x^2-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)(\ln(2-4x)-\ln(1-x))$.

Вариант 18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^2+1}{2x^5+3x^3-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\arcsin 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$.

Вариант 19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x^2+1}{4x^4-3x^3-9}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{x\sin 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)(\ln(x-2)-\ln(1+2x))$.

Вариант 20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+5x^5+9}{5x^6+4x^3+7}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{8+x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\operatorname{tg}3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3+x)(\ln(1+x)-\ln(2x-3))$.

Вариант 21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5}{2x^2-3x^3+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{1-\sqrt{x-2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{3x}{2}}{x\sin 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)(\ln(3+x)-\ln(x-7))$.

Вариант 22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+5}{6x^3-2x^2+4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{49-x^2}{\sqrt{8-x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)(\ln(2x+5)-\ln(2x-7))$.

Вариант 23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2+5}{4-2x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{2x-6}-2}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\arcsin x}{1-\cos x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+1)-\ln(2x-9))$.

Вариант 24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{3x^2-5x^4+4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x\operatorname{ctg}3x)$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(7x-1)(\ln(x-2)-\ln(1+x))$.

Вариант 25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-(x-1)^2}{(x+1)^3+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)(\ln(2x+4)-\ln(2x+1))$.

Вариант 26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(3-x)^2-(3+x)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{x\sin 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-7)(\ln(3x-1)-\ln(3x+5))$.

Вариант 27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{x-5x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos 4x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty} 3x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$.

Вариант 28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-1)^5-(x+1)^5}{(2x-3)^5+(x-1)^5}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{x+4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2\operatorname{ctg}^2 x$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-3)\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)$.

Вариант 29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-4x-2x^3}{3x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left(\ln(x+3)-\ln(x+4)\right)$.

Вариант 30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-7x^2-3x^4}{2x^4+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2\cos^5 x}{3x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+7)\left(\ln(x+4)-\ln x\right)$.

Задание № 2. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

Вариант 1. а) $y=x\arcsin\dfrac{1}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; б) $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{3}}$;
в) $3xy^2+2\sqrt{\sin x+\cos y}=5x+2y$.

Вариант 2. а) $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$; б) $y=2\sqrt{x}-4\ln\left(2+\sqrt{x}\right)$;
в) $3x^3y+2\sqrt{x^2+4xy-y^2}=ye^{5x}$.

Вариант 3. а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{2+4x}}$; б) $y=\sqrt{1+2x}-\ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$;
в) $xy+2\operatorname{arctg}(xy)=\cos(3x^2y^3)$.

Вариант 4. а) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; б) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;
в) $x-y^2+\sqrt{x\sin y}=\arccos\dfrac{y}{x}$.

Вариант 5. а) $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$; б) $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$;
в) $x^4y^2+2\operatorname{ctg}\sqrt{xy}=5e^{x+2y}$.

Вариант 6. а) $y=\ln\frac{5+x^2}{5-x^2}$; б) $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x}$;

в) $\ln(x^2y)+\sqrt{\sin y^3+\cos x}=x+2y$.

Вариант 7. а) $y=\ln^2(x+\cos x)$; б) $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^{\frac{3}{4}}}{x^8}}$

в) $x^3-y^2+2x\sqrt{\operatorname{tg} y}=\cos(5^x+2^y)$.

Вариант 8. а) $y=\frac{4+3x^3}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y=\ln(x^2-1)-\frac{1}{x^2-1}$;

в) $y^2+\sqrt{\sin x\cdot\cos y}=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$.

Вариант 9. а) $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)$; б) $y=x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+3})-\sqrt{x^2+3}$;

в) $x-3y^2+2\arcsin\sqrt{xy}=3\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}y$.

Вариант 10. а) $y=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=\ln(2x+2\sqrt{x^2+x+1})$;

в) $x^2y^4-\sqrt{e^{\sin x}+\operatorname{tg}y}=\frac{5x}{y}$.

Вариант 11. а) $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

в) $\cos(xy^2)+\sqrt{3\sin y-4\cos x}=\ln(5x+2y)$.

Вариант 12. а) $y=\frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=\ln(\cos\sqrt{x})+\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$;

в) $\operatorname{arcctg}(x^2y^2)+\sqrt{x^2+y^2}=e^{2x-3y}$.

Вариант 13. а) $y=\frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$;

в) $x^3+2xy^3+2\sqrt{\frac{\sin x}{\cos y}}=3\ln(x+y)$.

Вариант 14. а) $y=e^x(\cos 2x+2\sin 2x)$; б) $y=\ln\arccos\sqrt{1-e^{4x}}$;

в) $(y+2)\sqrt{2\sin x-3\cos y}=4x^3+2y^2$.

Вариант 15. а) $y=(1-x^2)\sqrt{x^3+1}$; б) $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})-\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x$;

в) $\log_3(xy)+\sqrt{3\operatorname{ctg}x-2\operatorname{tg}y}=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$.

Вариант 16. а) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=x\big(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\big)$;

в) $4x-3y^2+\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 y}=5^y$.

Вариант 17. а) $y=e^{2\sqrt{x-1}}\left(\sqrt{x-1}-0{,}5\right)$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\cdot tgx+\sqrt{1+2tg^2x})$;

в) $x-y^3+\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos y}=\ln(x^3y^2)$.

Вариант 18. а) $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

в) $x^3y^2+\sqrt{\ln x-\ln y}=3^{x-y}$.

Вариант 19. а) $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$; б) $\mathrm{y}=\ln(\arcsin\sqrt{1-e^{2x}})$;

в) $e^{\frac{x}{y}}+\sqrt{\ln\dfrac{y}{x}}+3x-2y=0$.

Вариант 20. а) $y=\ln\left(\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)$; б) $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$;

в) $\operatorname{arctg}(xy)+\sqrt{y\sin x-x\cos y}=3-4x$.

Вариант 21. а) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$;

в) $x+3y^2-4\operatorname{ctg}\sqrt{2xy}=e^{x-y}$.

Вариант 22. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}-3x}$; б) $y=x\sqrt{4-x^2}+8\arcsin\dfrac{x}{2}$;

в) $\dfrac{xy^2}{x^2+y}+2\ln\sqrt{\sin x+\cos y}=0$.

Вариант 23. а) $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$; б) $y=\ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$;

в) $x^3y^3+2x-\sqrt{\sin x}\ln y=3^{2x+y}$.

Вариант 24. а) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$; б) $y=\sqrt{3+x^2}-x\ln\left(x+\sqrt{3+x^2}\right)$;

в) $\dfrac{2x}{y}+\arccos\sqrt{\dfrac{y}{x}}=x^3+y^2$.

Вариант 25. а) $y=\ln\dfrac{\ln x}{\sin(1-x)}$; б) $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)}}{12(x-1)^2}$;

в) $3x+y^2+\sqrt{\ln\sin x+\ln\cos y}=e^{\frac{y}{x}}$.

Вариант 26. а) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$; б) $y=\sqrt{x}\ (1+x)\ \mathrm{arctg}\sqrt{x}$;

в) $e^{xy^2}+\sqrt{\mathrm{tg}(3xy)}=5xy-4x$.

Вариант 27. а) $y=2x+\ln(\sin x+2\cos x)$; б) $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$;

в) $\ln\sqrt{\sin x+\cos y}=e^{x+2y}+\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$.

Вариант 28. а) y=tg(ln(sin(1+$\dfrac{1}{x}$))); б) $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$;

в) $xy^2+2\sqrt{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,y}=\ln(3x+2y)$.

Вариант 29. а) $y=\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$; б) $y=x\ \mathrm{arctg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

в) $\mathrm{tg}\dfrac{y^2}{x}+\sqrt{3\sin x+2\cos y}=e^{\frac{x}{y}}$.

Вариант 30. а) $y=\mathrm{arctg}\,\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x}{\sqrt{2}}$; б) $y=\dfrac{e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x)}{8}$;

в) $\arcsin\dfrac{x}{y}+\sqrt{\sin\dfrac{y}{x}}=2x-y$.

Задание № 3. Исследовать функцию и построить её график.

Вариант 1. а) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$, б) $y=\dfrac{x+1}{e^x}$.

Вариант 2. а) $y=\dfrac{x^2-9}{9+x^2}$, б) $y=\dfrac{3\ \ln x}{\sqrt{x}}$.

Вариант 3. а) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, б) $y=x^2\ e^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 4. а) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-9}$, б) $y=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

Вариант 5. а) $y=\dfrac{x}{(x-3)^2}$, б) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Вариант 6. а) $y=\dfrac{8}{x^2-4}$, б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Вариант 7. а) $y=\dfrac{x-1}{x^2}$, б) $y=x^2\ln x$.

Вариант 8. а) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$, б) $y=\dfrac{2x+1}{e^x}$.

Вариант 9. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+9}$, б) $y=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$.

Вариант 10. а) $y=\dfrac{9x}{2+x^3}$, б) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

Вариант 11. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$, б) $y=\ln(x^2+1)$.

Вариант 12. а) $y=\dfrac{3x-1}{x^2}$, б) $y=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$.

Вариант 13. а) $y=\dfrac{3x}{9-x^2}$, б) $y=\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

Вариант 14. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}$, б) $y=xe^{\frac{x}{2}}$.

Вариант 15. а) $y=\dfrac{4x}{(x+2)^2}$, б) $y=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

Вариант 16. а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, б) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$.

Вариант 17. а) $y=\dfrac{3x^2-4}{x^3}$, б) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$.

Вариант 18. а) $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$, б) $y=xe^{2x-1}$.

Вариант 19. а) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Вариант 20. а) $y=\dfrac{x}{1+3x^2}$, б) $y=4x^2\,e^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 21. а) $y=\dfrac{2x^2}{4+x^2}$, б) $y=\ln(x^2-1)$.

Вариант 22. а) $y=\dfrac{x}{16+x^2}$, б) $y=x^2\ \ln x$.

Вариант 23. а) $y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$, б) $y=\dfrac{1}{x^2\ e^x}$.

Вариант 24. а) $y=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$, б) $y=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Вариант 25. а) $y=\dfrac{2x}{x^2-9}$, б) $y=x\ln^3 x$.

Вариант 26. а) $y=\dfrac{8x}{1+4x^2}$, б) $y=\ln(2x^2+3)$.

Вариант 27. а) $y=\dfrac{1}{3-x^2}$, б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 28. а) $y=\dfrac{-6x}{9+x^2}$, б) $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 29. а) $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$, б) $y=\dfrac{x}{e^{x^2}}$.

Вариант 30. а) $y=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2}$, б) $y=\dfrac{1}{xe^x}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М. : Высш. шк., 2005. — 479 с.

2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М. : Наука. Главная редакция физико-математической лит-ры, 1985. — Т 1, 2.

3. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М. : Изд. дом «ОНИКС 21 век» : Мир и Образование, 2003. — 304 с.