

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев,  
В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко

# НЕЛИНЕЙНАЯ СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ. Основы теории. Примеры расчета

Учебное пособие

Волгоград. ВолгГАСУ. 2014



© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный  
архитектурно-строительный университет», 2014

УДК 624.072.2(075.8)  
ББК 38.112.5я73  
И266

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор *В. В. Петров*,  
заведующий кафедрой прикладной механики  
Саратовского государственного технического университета, академик РААСН;  
доктор технических наук профессор *С. Н. Кривошапко*,  
заведующий кафедрой строительной механики  
Российского университета дружбы народов

*Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия*

**Игнатъев, В. А.**

И266      Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета [Электронный ресурс]: учебное пособие / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (4,0 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2014. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета.      Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 987-5-98276-724-0

Изложены основы метода конечных элементов в форме классического смешанного метода и реализующий его алгоритм расчета в линейной постановке, что необходимо для решения нелинейных задач с использованием инкрементного подхода. Дано краткое изложение методов решения нелинейных задач применительно к стержневым системам. Изложены методики расчета стержневых систем с различными видами нелинейностей — геометрической, физической, конструктивной. Приведены примеры расчетов.

Пособие предназначено для бакалавров и магистров направления «Строительство» дневной формы обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

Имеется печатный аналог (Игнатъев, В. А. Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. примеры расчета / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев, В. В. Галишникова, Е. В. Онищенко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Волгоград : ВолГАСУ, 2014. — 97, [1] с.).

УДК 624.072.2(075.8)  
ББК 38.112.5я73

Нелегальное использование данного продукта запрещено

ISBN 978-5-98276-724-0



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Общие положения.....	6
2. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода.....	10
2.1. Плоские стержневые системы.....	10
2.2. Оценка сходимости решений по методу конечных элементов в перемещени- ях и форме классического смешанного метода.....	20
3. Методы решения нелинейных задач.....	24
3.1. Метод последовательных приближений.....	24
3.2. Метод итераций Ньютона.....	25
3.3. Метод последовательных догрузений (приращений параметров).....	27
4. Расчет геометрически нелинейных стержневых систем по методу конечных эле- ментов в форме классического смешанного метода.....	29
4.1. Ферма Мизеса.....	29
4.2. Расчет преднапряженной нити.....	36
4.3. Преднапряженная контргрузом нерастяжимая нить.....	45
4.4. Нить переменной жесткости.....	53
5. Физически нелинейные задачи.....	56
5.1. Нелинейно-упругий и упруго-пластический материал.....	56
5.2. Упруго-пластический расчет стальных конструкций.....	68
5.2.1. Свойства сталей.....	68
5.2.2. Упруго-пластическое поведение стального стержня.....	70
5.2.3. Прямой метод расчета по предельному равновесию.....	72
5.2.4. Расчет двухпролетной фермы на предельную пластическую нагрузку.....	75
6. Конструктивно-нелинейные задачи. Прямые методы расчета.....	78
6.1. Основные типы дискретных связей в конструктивно-нелинейных системах и диаграммы работы.....	78
6.2. Основные идеи и подходы к расчету систем с односторонними связями.....	79
6.3. Сущность метода компенсирующих нагрузок для расчета конструктивно- нелинейных задач.....	80
6.4. Расчет балки на разупрочняющихся опорах по методу компенсирующих нагрузок.....	81
Заключение.....	95
Библиографический список.....	96

## ВВЕДЕНИЕ

Крупногабаритные плоские и пространственные стержневые системы широко применяются в промышленном и гражданском строительстве. Требования экономичности и предельного использования их несущей способности приводят к необходимости использования легких и гибких конструкций, а также обеспечения их надежной эксплуатации за пределами упругой работы материала конструкций.

Для таких стержневых систем с применением высокопрочных материалов расчет по недеформированной схеме, предполагающей малость перемещений, становится неприемлемым. При расчете подобных конструкций необходимы отказ от приближенных основных гипотез линейной строительной механики и переход к расчету по деформированной схеме, т. е. с учетом геометрически нелинейного их поведения.

Кроме того, необходимо учитывать также физическую нелинейность большинства современных строительных материалов, из которых изготавливаются конструкции, и изменения расчетной схемы сооружения в процессе его нагружения, т. е. конструктивную нелинейность, выражающуюся во включении или выключении связей во время этого процесса.

Решение нелинейных задач вызывает существенные математические трудности, так как некоторые принципы линейной строительной механики не применимы для нелинейных задач [1, 15].

В связи с этим стали активно развиваться так называемые инкрементальные методы [1, 20, 21, 33, 34], позволяющие решать нелинейные задачи путем сведения к решению линейных задач. Инкрементальные методы заключаются в том, что на основе нелинейных уравнений получают линейные инкрементальные уравнения относительно неизвестных приращений (инкрементов) искомым функций. Это дает возможность использовать на каждом шаге приращения неизвестного параметра (нагрузки, перемещения и т. д.) принципы линейной строительной механики и учитывать историю нагружения конструкции.

Из всего этого следует необходимость углубленного изучения современных методов нелинейной строительной механики с ее основными положениями. Однако на их изучение, в связи с сокращением часов учебных занятий, времени у студентов, магистрантов и аспирантов крайне мало. Самостоятельное изучение ими капитальных трудов [45, 17, 20, 21, 33] практически невозможно.

Данное учебное пособие ставит своей целью ознакомить их в систематизированной форме с основными положениями нелинейной строительной ме-

ханики стержневых систем и на конкретных примерах расчета показать особенности алгоритмов расчета и их реализацию.

В связи с тем, что решение некоторых важных задач в пособии построено на использовании метода конечных элементов (МКЭ) в форме классического смешанного метода (альтернативного по отношению к традиционному в перемещениях МКЭ), то, в целях устранения необходимости обращения к первоисточникам [10, 11, 13, 14], в главе 1 изложены основные положения этого метода и основанный на нем алгоритм расчета стержневых систем.

Во второй главе дано краткое изложение методов решения нелинейных задач применительно к стержневым системам.

Третья глава посвящена расчету геометрически нелинейных стержневых систем по методу конечных элементов в форме смешанного метода. Приведены примеры расчетов на основе инкрементального подхода.

В четвертой главе рассматриваются физически нелинейные задачи, связанные с нелинейно-упругим и упруго-пластическим поведением материала конструкции.

Пятая глава посвящена прямому методу расчета конструктивно-нелинейных систем. Приведены примеры таких расчетов.

Все особенности используемых в пособии методов и алгоритмов показаны на примерах расчета простых стержневых систем, где они проявляются наиболее отчетливо.

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основной задачей строительной механики с самого начала ее зарождения как науки является разработка методов расчета строительных конструкций на различные виды воздействий (силовые, кинематические, температурные, агрессивные среды и т. д.) и предсказание их поведения на основе расчетов. Основная цель расчетов — обеспечение прочности, устойчивости, надежности и безопасности эксплуатации сооружений.

На первом этапе своего становления основная задача расчета конструкций формировалась как задача определения их напряженно-деформированного состояния (НДС), вызванного действием эксплуатационных нагрузок.

В первой четверти XIX в. французским ученым и инженером Навье был предложен принцип расчета конструкций по начальному, т. е. заданному недеформированному состоянию. Согласно этому принципу, называемому принципом малости перемещений, форма и размеры конструкций до и после нагружения отождествляются.

Этот принцип совместно с законом Гука позволил разработать в дальнейшем методы расчета, составляющие основу линейной строительной механики. В ее рамках был решен большой круг задач по исследованию напряженно-деформированного состояния всех типов конструкций: одномерных, двумерных и трехмерных (стержневых, пластинчатых, оболочечных, массивных, комбинированных и др.).

Применяемые в настоящее время строительные материалы, виды, формы и условия эксплуатации конструкций требуют для обеспечения надежности работы учета большого количества факторов, не вписывающихся в рамки физических и математических моделей линейной строительной механики.

Отсюда следует, что для решения основной задачи расчета конструкций с учетом особенностей деформирования материалов и самих конструкций необходимо отказаться от простых допущений линейной строительной механики и перейти к теоретическим обоснованиям более общей нелинейной строительной механики.

Прежде всего это относится к расчету конструкций по недеформированному состоянию, основанному на допущении о малости перемещений. В действительности во многих конструкциях, особенно в так называемых гибких, даже при работе материала в упругой стадии нагружение приводит к большим перемещениям и изменению формы и размеров. В этом случае соотношение между деформациями и перемещениями оказываются нелинейными.

Подобного рода нелинейность называется **геометрической**.

При расчете с учетом такой нелинейности в теорию вводят нелинейные соотношения между деформациями и перемещениями и не отождествляют формы и размеры конструкции, находящейся в различных текущих состояниях нагружения.

Важной особенностью большинства материалов конструкций является нелинейная зависимость между напряжением и деформацией. Эти зависимости не одинаковы для различных материалов, но в целом их можно объединить в четыре основные группы, представленные на рис. 1.1 в виде диаграмм, где *a* — линейно упругое деформирование, *б* — идеальное упруго-пластическое, *в* — жестко-пластическое, *г* — нелинейно-упругое.

Замена закона Гука нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями для конкретного материала лежит в основе так называемой **физической нелинейности**.

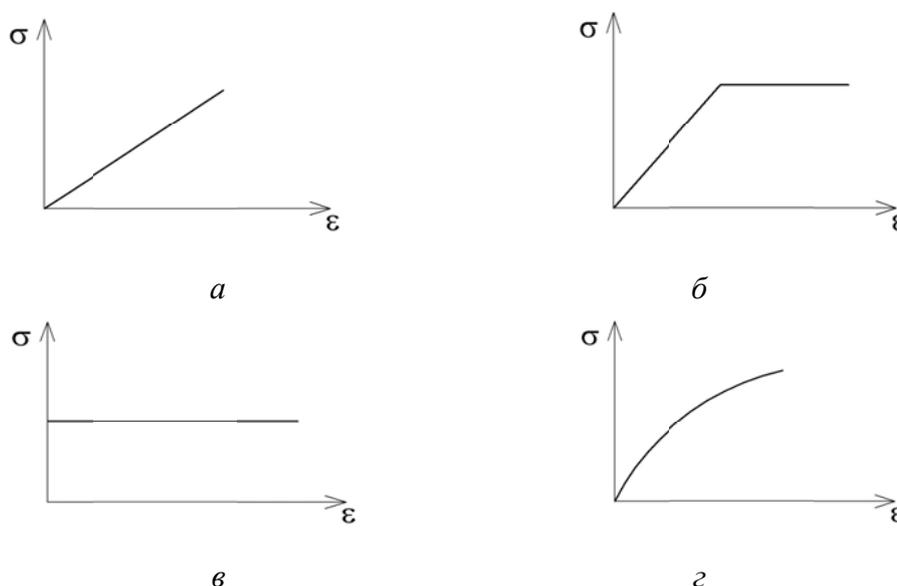


Рис. 1.1

Вследствие особенностей той или иной конструкции в процессе ее нагружения может происходить скачкообразное или непрерывное изменение ее расчетной схемы: включение новых связей, выключение старых, т. е. наличие односторонних связей и т.д.

В таких случаях говорят о **конструктивной нелинейности**. Примеры таких систем приведены на рис. 1.2.

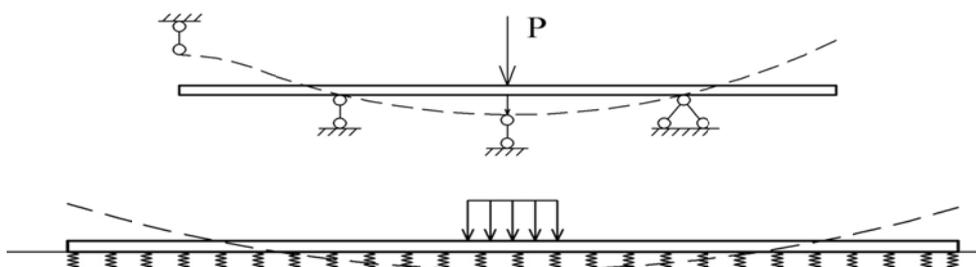


Рис. 1.2

Одновременный учет в расчетах всех трех видов нелинейности дает наиболее достоверную информацию о поведении конструкции на любом этапе ее жизненного цикла.

Вместе с тем такой расчет не всегда целесообразен не только из-за своей сложности, но и из-за того, что, как правило, в большинстве конструкций по условиям их работы преобладает тот или иной вид нелинейности. Именно поэтому в данном учебном пособии расчет с учетом каждого из трех видов нелинейности рассматривается отдельно.

Однако для всех трех видов нелинейности при решении систем нелинейных уравнений, соответствующих им, в настоящее время используется один и тот же численный метод — метод приращений параметров. Он был разработан математиками в середине XX в., назван методом вариации параметров и применялся для решения задач прикладной математики.

Во второй половине XX в. этот метод интенсивно развивался многими учеными применительно к задачам строительной механики и механики деформируемого твердого тела под разными названиями: «метод последовательных нагружений», «метод последовательных приращений жесткостей», «метод последовательных приращений времени». Все эти разновидности метода приращения параметров получили в последующем объединяющее название «шаговые методы».

Их объединяет общая идея варьирования различных параметров (нагрузочных воздействий, жесткости системы, времени), входящих в систему нелинейных уравнений, описывающих задачу. Пошаговая линеаризация этой системы уравнений производится по выбираемому параметру  $x$ . Исходное значение этого параметра  $x$  и соответствующее ему исходное напряженно-деформированное состояние считаются известными. Затем варьированному параметру придается малое приращение  $\Delta x$  и находится соответствующее ему изменение напряженно-деформированного состояния. Последовательно

выполняя эту операцию до окончательного значения  $x = \sum_{i=1}^n \Delta x_i$ , можно решить задачу, т. е. систему нелинейных уравнений.

Величина малого шага  $\Delta x$  должна выбираться такой, чтобы можно было пренебрегать нелинейными членами в системе разрешающих уравнений на каждом шаге. Это означает, что на каждом из шагов решается система линейных алгебраических уравнений, описывающая линейное поведение системы на данном шаге.

Расчеты реальных конструкций с учетом нелинейного их поведения стали возможны лишь в связи с бурным развитием вычислительной техники (ЭВМ) и численных методов. Если самым значительным достижением строительной механики в первой половине XX в. являлся метод сеток, то величайшим достижением во второй половине века, безусловно, является метод конечных элементов (МКЭ).

Говоря об МКЭ в строительной механике и механике деформируемого твердого тела, подразумевают, как правило, классический вариант в форме метода перемещений. Абсолютное большинство статей, монографий и обзоров по численным методам посвящены именно ему. Объясняется это основным преимуществом классического метода перемещений по сравнению с методом сил — возможностью формализации расчета и разработки эффективных алгоритмов и реализующих их программных продуктов.

В настоящее время за рубежом и нашей стране в расчетах конструкций используется большое количество как универсальных, так и специализированных программных продуктов, реализующих МКЭ в форме метода перемещений.

Однако, как показывает практика их применения, полностью доверять этим численным решениям на основе МКЭ в перемещениях нельзя. Это признается многими специалистами и поэтому все программные комплексы, реализующие МКЭ в перемещениях, проходят тестовые проверки на различных так называемых задачах-ловушках. По этой причине необходимо иметь второй альтернативный метод расчета, базирующийся на другой концепции и позволяющий выполнить сравнительный анализ результатов для оценки их достоверности.

Одним из таких альтернативных методов служит предложенный и развиваемый авторами данного учебного пособия метод конечных элементов в форме классического смешанного метода.

Эта форма МКЭ является более общей по отношению к МКЭ в перемещениях, сохраняя ту же степень формализации расчета, не имеет его специфических недостатков, позволяет получить полную картину перемещений и усилий в узлах конечно-элементной сетки рассматриваемой конструкции.

По этой причине в данном учебном пособии получение разрешающих уравнений для рассматриваемых задач базируется, в основном, на МКЭ в форме классического смешанного метода. Теоретические основы этой формы МКЭ и его применение в задачах линейной строительной механики изложены в [13].

## 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

### 2.1. Плоские стержневые системы

Суть этой формы МКЭ покажем на примере плоской стержневой системы.

Как и при расчете по методу конечных элементов в перемещениях система представляется в виде ансамбля конечных элементов.

В зависимости от типа стержневой системы (фермы с шарнирным соединением в узлах или рамы с жестким соединением в узлах) используются два типа конечных элементов:

1) прямолинейный стержень с шарнирным закреплением по концам (рис. 2.1, *a*) для расчета шарнирно-стержневых систем (ферм);

2) прямолинейный стержень с жестким закреплением по концам (рис. 2.1, *б*) для расчета плоских стержневых систем с жесткими узлами (рам).

Основные системы смешанного метода для этих двух типов конечных элементов приведены на рис. 2.1, *в* и рис. 2.1, *г* соответственно.

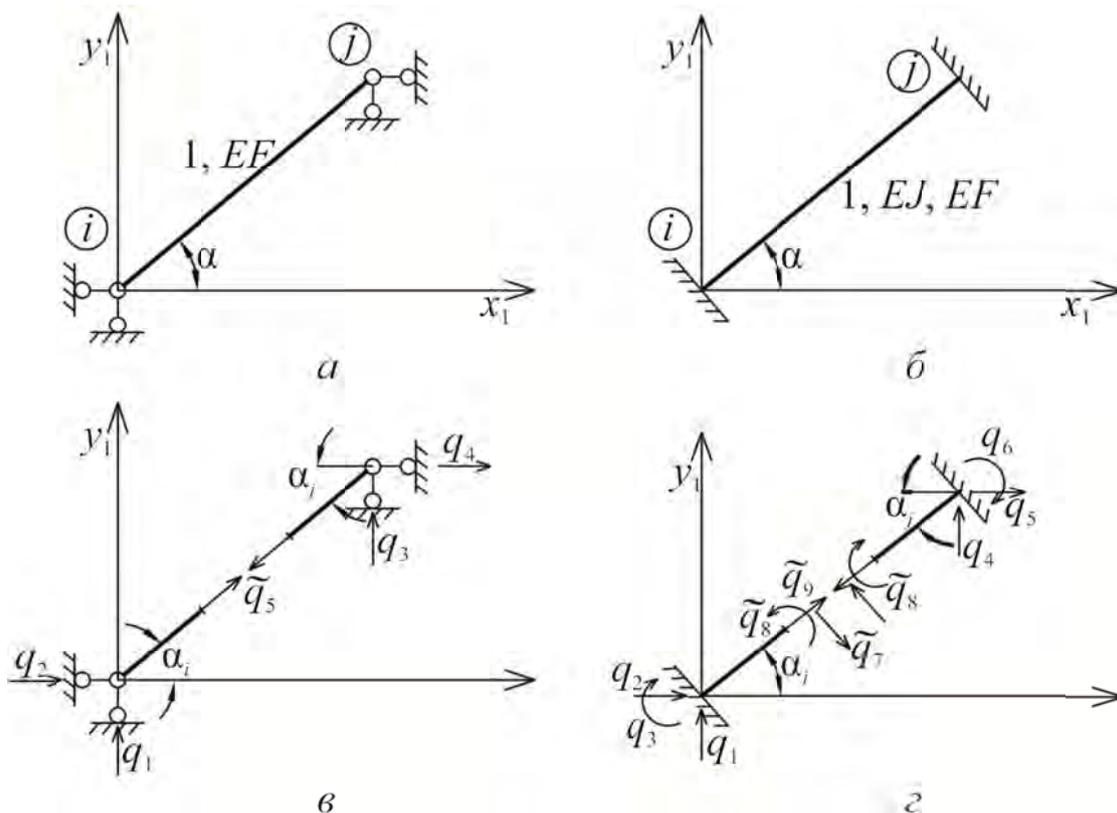


Рис. 2.1

Для конечного элемента первого типа введены следующие обозначения неизвестных: кинематические неизвестные  $q_1, q_2, q_3, q_4$  — линейные перемещения конечных связей по направлениям глобальных координатных осей; силовое неизвестное  $\tilde{q}_5$  — продольное усилие  $N_{i,j}$  в конечном элементе между узлами  $i$  и  $j$ .

Для конечного элемента второго типа приняты следующие обозначения: кинематические неизвестные  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$  (линейные и угловые перемещения конечных связей) и  $\tilde{q}_7, \tilde{q}_8, \tilde{q}_9$  — силовые неизвестные (поперечная сила, изгибающий момент, продольное усилие) в сечении посередине длины конечного элемента или в любом другом сечении.

Ввиду простоты статически определимой основной системы элементы матрицы откликов для этих двух типов конечных элементов (КЭ) получают, как и в классическом смешанном методе, непосредственно из рассмотрения физических соотношений — из условий неразрывности и равновесия, то есть из кинематических и статических условий.

Подробное рассмотрение получения коэффициентов матрицы откликов выполнено в [13].

В блочной форме эта матрица имеет следующий вид:

$$[d] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,n} & r_{n,n} & \dots & r_{n,n} \end{bmatrix} \quad (n \times t)$$

является матрицей реакций в связях основной системы КЭ от единичных смещений этих связей (единичных значений кинематических неизвестных):  $q = 1, \dots, q = 1$  ( $n = 4$  для КЭ первого типа,  $n = 6$  для КЭ второго типа);

$$[\tilde{r}] = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{1;n+1} & \tilde{r}_{1;n+2} & \dots & \tilde{r}_{1;n+t} \\ \tilde{r}_{2;n+1} & \tilde{r}_{2;n+2} & \dots & \tilde{r}_{2;n+t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{r}_{n;n+1} & \tilde{r}_{n;n+2} & \dots & \tilde{r}_{n;n+t} \end{bmatrix} \quad (n \times t)$$

является матрицей реакций в кинематических связях основной системы КЭ от единичных силовых воздействий (кинематических неизвестных):  $\tilde{q}_{n+1} = 1, \dots, \tilde{q}_{n+t} = 1$  ( $t = 1$  для КЭ первого типа,  $t = 3$  для КЭ второго типа);

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{n+1;n+1} & \delta_{n+1;n+2} & \cdots & \delta_{n+1;n+t} \\ \delta_{n+2;n+1} & \delta_{n+2;n+2} & \cdots & \delta_{n+2;n+t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n+t;n+1} & \delta_{n+t;n+2} & \cdots & \delta_{n+t;n+t} \end{bmatrix} \quad (t \times t)$$

является матрицей податливости КЭ (перемещений сечения) по направлениям силовых неизвестных в сечении на воздействие каждого из этих неизвестных при их единичных значениях ( $\tilde{q}_{n+1} = 1, \dots, \tilde{q}_{n+t} = 1$ );

$$[\tilde{\delta}] = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_{n+1;1} & \tilde{\delta}_{n+1;2} & \cdots & \tilde{\delta}_{n+1;n} \\ \tilde{\delta}_{n+2;1} & \tilde{\delta}_{n+2;2} & \cdots & \tilde{\delta}_{n+2;n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{\delta}_{n+t;1} & \tilde{\delta}_{n+t;2} & \cdots & \tilde{\delta}_{n+t;n} \end{bmatrix} \quad (t \times n)$$

является матрицей перемещений по направлениям силовых неизвестных  $\tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+t}$  от каждого из единичных смещений связей в основной системе (кинематических неизвестных)  $q_1 = 1, \dots, q_n = 1$ .

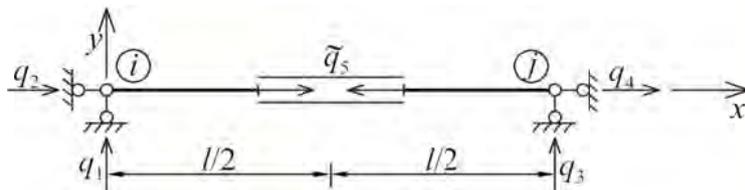
В соответствии с теоремой о взаимности реакций и перемещений

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T. \quad (2.2)$$

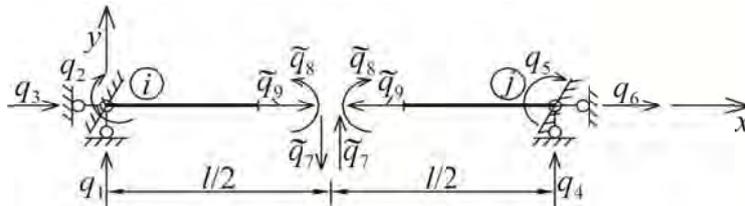
Для конечного элемента первого типа блоки матрицы откликов (2.1) в локальной системе координат (рис. 2.2, а) имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} r \end{bmatrix}_{(4 \times 4)} = 0, \quad \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix}_{(1 \times 1)} = \left[ \left( \frac{l}{EF} \right)_{i,j} \right]_{(1 \times 1)}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{r} \end{bmatrix}_{(1 \times 4)} = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0], \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\delta} \end{bmatrix}_{(4 \times 1)} = -\begin{bmatrix} \tilde{r} \end{bmatrix}_{(1 \times 4)}^T = [1 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T.$$



а



б

Рис. 2.2



Для КЭ второго типа

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & 0 & -\sin \alpha_i & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & & & 0 \\ \sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i & & & & & & \\ \hline & & & \cos \alpha_j & 0 & -\sin \alpha_j & & & \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ & & & \sin \alpha_j & 0 & \cos \alpha_j & & & \\ \hline & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

(9×9)

Здесь  $\alpha_i, \alpha_j$  — углы наклона концевых сечений в узлах  $i$  и  $j$  в общей системе координат.

Матрицы откликов КЭ и первого и второго типов получаются с помощью матрицы перехода:

$$[d_1] = [\Lambda]^T [d] [\Lambda]. \quad (2.7)$$

Для КЭ первого типа получаем в результате  $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$ :

$$[d_1^I]^T = \begin{bmatrix} & & & & -\sin \alpha \\ & 0 & & & -\cos \alpha \\ & & & & \sin \alpha \\ & & & & \cos \alpha \\ \hline \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha & \cos \alpha & \frac{l}{EF} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

(5×5)

Для КЭ второго типа

$$[d_1^{II}] = \begin{bmatrix} r^{II} & \tilde{r}^{II} \\ \tilde{\delta}^{II} & \delta^{II} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix} r^{II} \\ \tilde{\delta}^{II} \end{bmatrix} = 0, \quad (6 \times 3)$$

$$\begin{aligned}
\left[ \tilde{r}^{\text{II}} \right]_{(6 \times 3)} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & 0 & -\sin \alpha_i \\ -\left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_i & 0 & -\cos \alpha_i \\ -\cos \alpha_j & 0 & \sin \alpha_j \\ -\left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & -1 & 0 \\ \sin \alpha_j & 0 & \cos \alpha_j \end{bmatrix}, \\
\left[ \delta^{\text{II}} \right]_{(3 \times 3)} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{l^3}{12EJ}\right)_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{l}{EJ}\right)_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{l}{EF}\right)_{i,j} \end{bmatrix}, \\
\left[ \tilde{\delta}^{\text{II}} \right]_{(3 \times 6)} &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha_i & \left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & \sin \alpha_i & \cos \alpha_j & \left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & -\sin \alpha_j \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_j & 0 & -\cos \alpha_j \end{bmatrix} = -\left[ \tilde{r} \right]^T.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Те же самые выражения (2.8) и (2.9) можно получить из непосредственного рассмотрения конечного элемента в общей системе координат.

Если после приведения нагрузки, действующей на стержневую систему, к узловой и расчета в линейной постановке получаем значения усилий  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  и узловых перемещений каждого КЭ, то в первой итерации нелинейного расчета учитывается полученная после первого шага нагружения геометрия (конфигурация) стержневой системы и используются матрицы откликов для КЭ с учетом влияния продольной силы  $N$ .

Это влияние с достаточной точностью может быть определено при аппроксимации точной функцией прогибов, функции прогибов от единичных нагрузок  $\tilde{q}_7 = 1$  или  $\tilde{q}_8 = 1$  (рис. 2.3, *a*, *b*).

Для варианта *a* от  $\tilde{q}_7 = 1$

$$y^{(7)}(x) = \frac{l_1^3}{EJ} \left( \frac{1}{2} \frac{x^2}{l_1^2} - \frac{x^3}{6l_1^3} \right); \quad y^{(7)}(l_1) = \frac{l_1^3}{3EJ}. \tag{2.10}$$

Для варианта *b* от  $\tilde{q}_8 = 1$

$$y^{(8)}(x) = \frac{x^2}{2EJ}; \quad y^{(8)}(l_1) = \frac{l_1^2}{2EJ}. \tag{2.11}$$

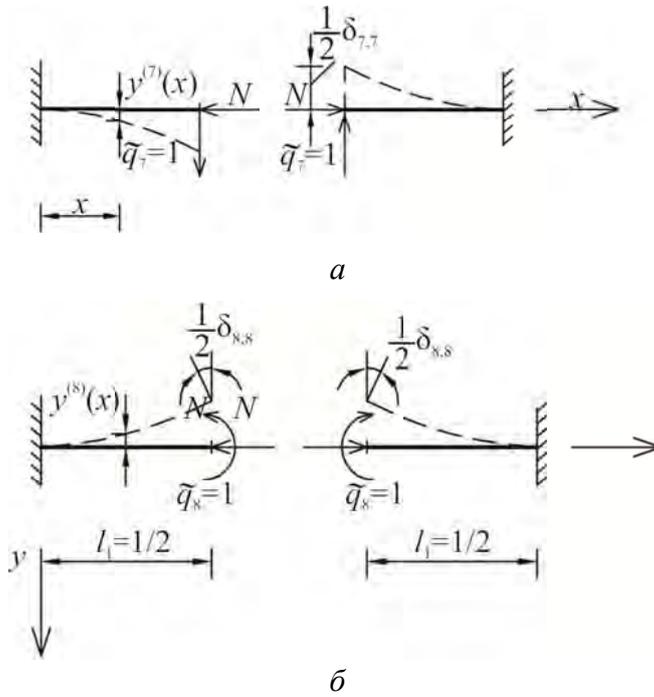


Рис. 2.3

Тогда изгибающие моменты с учетом действия продольной силы  $N$  определяются выражениями

$$M^{(7)}(N, x) = N \left( \frac{l_1^3}{3EJ} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2l_1^2} + \frac{x^3}{6l_1^3} \right); \quad (2.12)$$

$$M^{(8)}(N, x) = N \left( \frac{l_1^2}{2EJ} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{l_1^2} \right).$$

От единичных значений  $\tilde{q}_7 = 1$  и  $\tilde{q}_8 = 1$  изгибающие моменты определяются выражениями

$$\bar{M}_{(x)}^{(7)} = l_1 - x; \quad \bar{M}_{(x)}^{(8)} = 1. \quad (2.13)$$

Используя выражения (2.12) и (2.13), находим

$$\delta_{7,7}^{(N)} = \frac{2}{EJ} \int_0^{l_1} M^{(7)}(N, x) \cdot \bar{M}^{(7)}(x) dx = \frac{4}{15} \frac{Nl_1^5}{(EJ)^2}; \quad (2.14)$$

$$\delta_{8,8}^{(N)} = \frac{2}{EJ} \int_0^{l_1} M^{(8)}(N, x) \cdot \bar{M}^{(8)}(x) dx = \frac{2}{3} \frac{Nl_1^3}{EJ}.$$

В блоке  $[r]$  матрицы откликов влияние продольной силы  $N$  проявляется только при угловых перемещениях  $q_2 = 1$  и  $q_5 = 1$  (рис. 2.4).

Из условий равновесия следует (см. рис. 2.4):

$$r_{2,2}^{(N)} = -Nl_1; \quad r_{5,5}^{(N)} = -Nl_1 \quad \bar{M}_{(x)}^{(8)} = 1. \quad (2.15)$$

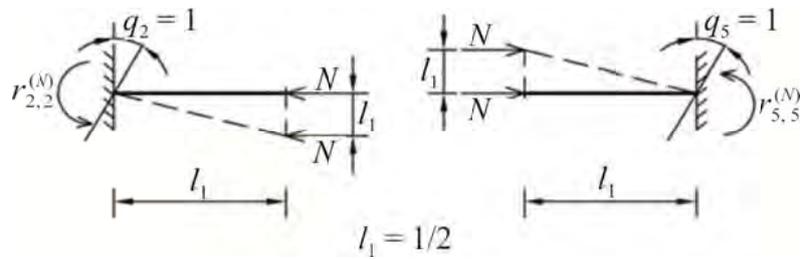


Рис. 2.4

Полные выражения для элементов матрицы откликов с учетом влияния продольной силы  $N$  имеют следующий вид:

$$\delta_{7,7}^* = \delta_{7,7} + \delta_{7,7}^{(N)} = \left( \frac{l_1^3}{12EJ} \right)_{i,j} \left( 1 + \frac{2 N l_1^2}{15 EJ} \right)_{i,j}; \quad (2.16)$$

$$\delta_{8,8}^* = \delta_{8,8} + \delta_{8,8}^{(N)} = \left( \frac{l_1}{EJ} \right)_{i,j} \left( 1 + \frac{2 N l_1^2}{3 EJ} \right)_{i,j}.$$

Для КЭ первого типа (рис. 2.5)

$$r_{1,1}^{(N)} = \frac{N}{l}; \quad r_{3,1}^{(N)} = -\frac{N}{l} = r_{1,3}^{(N)}; \quad r_{3,3}^{(N)} = r_{1,1}^{(N)}.$$

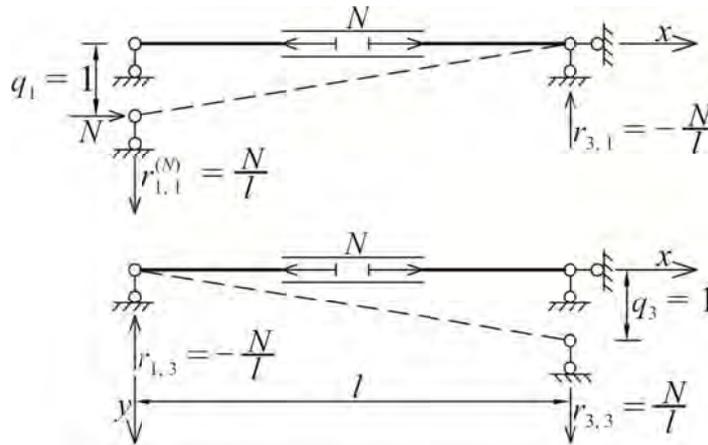


Рис. 2.5

Матрицы откликов для конечных элементов первого и второго типов с учетом влияния продольной силы приведены ниже.

$$[d_1'] = \begin{bmatrix} -AD & AB & AD & AB & -\sin \alpha \\ AB & -AC & -AB & AC & -\cos \alpha \\ AD & -AB & -AD & -AB & \sin \alpha \\ AB & AC & AB & -AC & \cos \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & -\sin \alpha & -\cos \alpha & \left( \frac{l}{EF} \right)_{i,j} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

(5×5)

$$A = \frac{N}{l}; B = \sin \alpha \cdot \cos \alpha; C = \sin^2 \alpha; D = \cos^2 \alpha;$$

$$[d_1^{\text{II}}]^T = \begin{bmatrix} r^{\text{II}} & \tilde{r}^{\text{II}} \\ \tilde{\delta}^{\text{II}} & \delta^{\text{II}} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

где

$$[r^{\text{II}}]_{(6 \times 6)}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{Nl}{2}\right)_{i,j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{Nl}{2}\right)_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{r}^{\text{II}}]_{(6 \times 3)} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_i & 0 & -\sin \alpha_i \\ -\left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & 1 & 0 \\ \sin \alpha_i & 0 & -\cos \alpha_i \\ \cos \alpha_j & 0 & \sin \alpha_j \\ -\left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & -1 & 0 \\ -\sin \alpha_j & 0 & \cos \alpha_j \end{bmatrix}, \quad [\delta^{\text{II}}]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} \delta_{7,7} + \delta_{7,7}^{(N)} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{8,8} + \delta_{8,8}^{(N)} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{9,9} \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{\delta}^{\text{II}}]_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & \sin \alpha_i & -\cos \alpha_j & \left(\frac{l}{2}\right)_{i,j} & \sin \alpha_j \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_j & 0 & -\cos \alpha_j \end{bmatrix} = -[\tilde{r}^{\text{II}}]^T.$$

Элементы вектора откликов на воздействия заданных нагрузок  $[R_p, \Delta_p]^T$  в поле конечного элемента второго типа представляют в данном случае реакции и перемещения концов двух консольных балок (рис. 2.6) по направлениям соответствующих неизвестных.

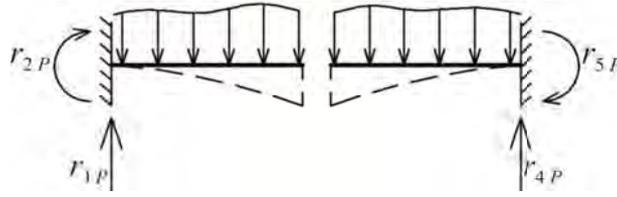


Рис. 2.6

В общей системе координат этот вектор находится так же, как и матрица откликов с использованием матрицы перехода:

$$\begin{Bmatrix} R_p \\ \Delta_p \end{Bmatrix} = [\Lambda]^T \begin{Bmatrix} r_p \\ \delta_p \end{Bmatrix} [\Lambda]. \quad (2.19)$$

Для линейно-деформируемой упругой стержневой системы разрешающая система линейных алгебраических уравнений имеет следующий вид:

$$[D] \begin{Bmatrix} q \\ \tilde{q} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_p \\ \Delta_p \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.20)$$

где  $[D] = \begin{bmatrix} r & \tilde{r} \\ \tilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}$  — глобальная матрица откликов стержневой системы;

$\{r\}$  — матрица реакций в связях основной системы от единичных смещений этих связей;  $[\tilde{r}]$  — матрица реакций в связях основной системы от силовых неизвестных  $\tilde{q}$  при их единичных значениях;  $[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T$  — матрица перемещений (податливостей) по направлениям силовых неизвестных  $\tilde{q}$  от единичных смещений связей основной системы;  $[\delta]$  — матрица перемещений (податливостей) по направлениям силовых неизвестных  $\tilde{q}$  при их единичных значениях;  $\{R_p\}$  — вектор реакций во выведенных связях в основной системе от узловых нагрузок;  $\{\Delta_p\}$  — вектор перемещений по направлениям силовых неизвестных от нагрузки в основной системе;  $\{q\}$  — подвектор неизвестных перемещений;  $\{\tilde{q}\}$  — подвектор неизвестных усилий.

Глобальная матрица откликов  $[D]$  строится по тому же алгоритму, что и глобальная матрица жесткости конструкции при расчете по МКЭ в перемещениях:

$$D = \sum_{t=1}^n h_t^T d_t h_t, \quad (2.21)$$

где  $n$  — количество КЭ в системе;  $d_t$  — матрица откликов КЭ с номером  $t$ ;  $h_t$  — матрица связи неизвестных КЭ с номером  $t$  с другими КЭ системы.

В матрице  $[h_t]$  число строк равно числу неизвестных в основной системе для КЭ с номером  $t$ , а число столбцов равно общему количеству неизвестных для всей рассматриваемой конструкции.

Вектор воздействия нагрузки в основной системе строится аналогично:

$$\begin{Bmatrix} R_P \\ \Delta_P \end{Bmatrix} = \sum_{t=1}^n h_t^T \begin{Bmatrix} r_{P,t} \\ \delta_{P,t} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

Решения разнообразных задач линейной строительной механики, выполненные на основе изложенной формы МКЭ и приведенные в учебном пособии [13], показали полное совпадение результатов расчета с результатами по другим классическим методам и МКЭ в перемещениях, так как все они основаны на одних и тех же допущениях и принципах.

## 2.2. Оценка сходимости решений по методу конечных элементов в перемещениях и в форме классического смешанного метода

Рассмотрим шарнирно опертую по концам балку длиной  $L$ , нагруженную распределенной поперечной нагрузкой и имеющую постоянную по длине изгибную жесткость  $EJ$  (рис. 2.7, а).

В соответствии с МКЭ (в форме метода перемещений) расчленим балку на отдельные элементы (балки длиной  $l$ ). Основная система метода перемещений при расчленении балки на  $n$  элементов показана на рис. 2.7, б.

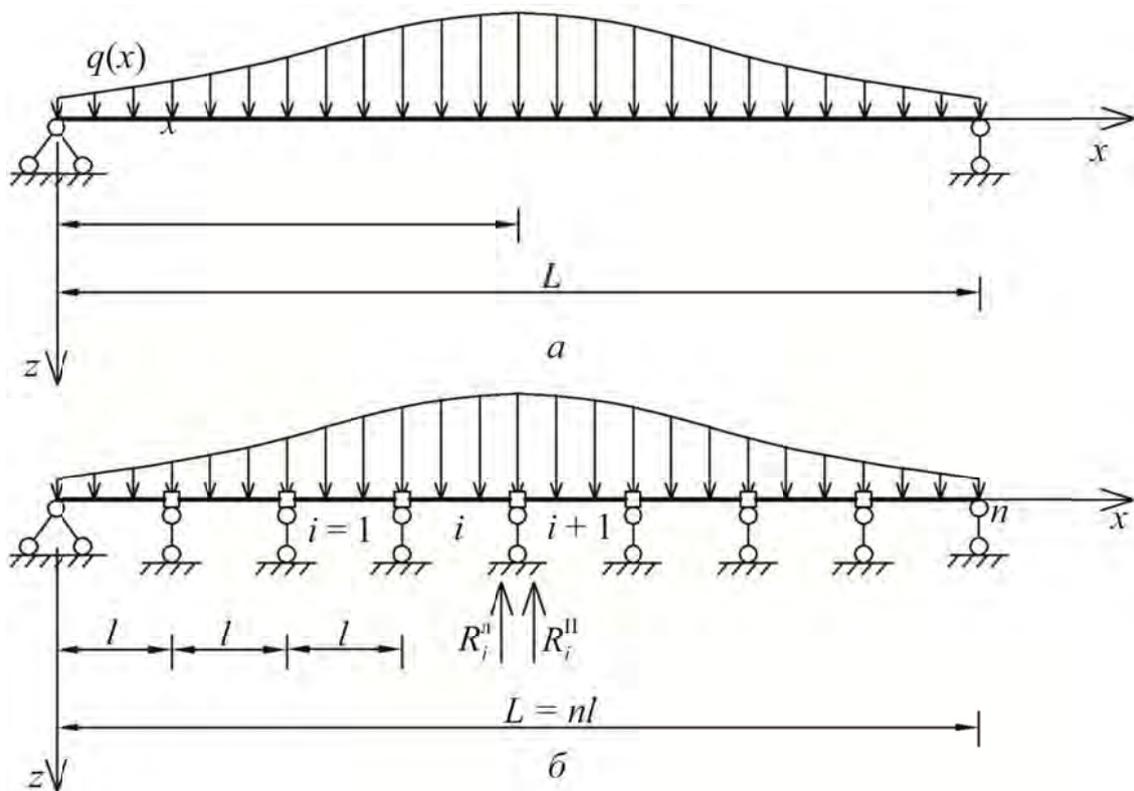


Рис. 2.7

Система разрешающих уравнений метода конечных элементов в данном случае полностью совпадает с уравнениями метода перемещений:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{12EJ}{l^3}(z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) + \frac{6EJ}{l^2}(\theta_{i-1} - \theta_{i+1}) + (R_i^n + R_i^n) = 0; \\ M_i &= \frac{6EJ}{l^2}(z_{i-1} - z_{i+1}) + \frac{2EJ}{l}(\theta_{i-1} + 4\theta_i + \theta_{i+1}) + (M_i^n + M_i^n) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $R_i^n, R_i^n, M_i^n, M_i^n$  — реакции и реактивные моменты на  $i$ -й опоре системы от нагрузки в пролетах справа и слева от  $i$ -й опоры соответственно (см. рис. 2.7, б).

Для случая равномерно распределенной нагрузки, то есть  $q = \text{const}$ , имеем

$$\begin{aligned} R_i^n &= R_i^n = \frac{ql}{2}; \quad M_i^n = M_i^n = \frac{ql^2}{12}; \\ M_i &= \frac{6EJ}{l^2}(z_{i-1} - z_{i+1}) + \frac{2EJ}{l}(\theta_{i-1} + 4\theta_i + \theta_{i+1}) = 0; \\ R_i &= \frac{12EJ}{l^3}(z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) + \frac{6EJ}{l^2}(\theta_{i-1} - \theta_{i+1}) + ql = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

После умножения первого и второго уравнений системы (2.24) на  $l / 2EJ$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(z_{i-1} - z_{i+1})}{2l} + \frac{(\theta_{i-1} + 4\theta_i + \theta_{i+1})}{6} &= 0; \\ \frac{(-z_{i-1} - 2z_i - z_{i+1})}{2l^2} + \frac{(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}{2l} + \frac{ql^2}{12EJ} &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Увеличив число  $n$  до бесконечности, то есть перейдя к пределу  $l \rightarrow dx$ , имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow dx} \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{2l^2} &= z_i''; \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2l} = \theta_i'; \\ \lim_{l \rightarrow dx} \frac{ql^2}{12EJ} &= 0; \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2l} = z_i'; \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{\theta_{i-1} + 4\theta_i + \theta_{i+1}}{6} = \theta_i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Таким образом, система разрешающих уравнений (1.23) метода перемещений при предельном переходе преобразуется к виду

$$z_i'' = \theta_i', \quad -z_i' = \theta_i. \quad (2.27)$$

Оба эти уравнения тождественны, так как одно вытекает из другого. Вырождение системы алгебраических уравнений (2.23) при предельном переходе в одно дифференциальное уравнение приводит к неустойчивости счета и к ухудшению сходимости численного решения к точному решению при сгущении сетки конечных элементов.

Таким образом, при достаточно малой длине конечного элемента математическая модель в виде системы уравнений (2.25) не сходится к точному решению при любом заранее заданном, но конечном числе значащих цифр выполняемых операций. Впервые это было замечено В. С. Чувиловским [32].

Причину этого нетрудно объяснить. В первое и второе уравнения системы (2.25) входят оба неизвестных —  $z$  и  $\theta$ . Так как между ними существует лишь одна дифференциальная зависимость  $\theta = z'$  (или вытекающий из нее вариант  $\theta' = z''$ ), то при предельном переходе два независимых конечно-разностных уравнения (2.25) должны обязательно вырождаться в два тождественных дифференциальных уравнения. Вполне очевидно, что то же самое будет и в двумерных системах.

Рассмотрим теперь решение той же задачи по смешанному методу. Основная система смешанного метода показана на рис. 2.8.

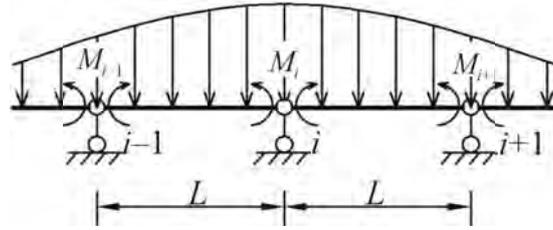


Рис. 2.8

Систему разрешающих уравнений в данном случае можно сразу записать как в МКЭ в виде типовых уравнений совместности деформаций и равновесия для  $i$ -го узла и двух смежных конечных элементов (см. рис. 2.8) системы:

$$R_i = R_i^n + R_i^r = 0; \quad \theta_i^n - \theta_i^r = 0. \quad (2.28)$$

В случае равномерно распределенной нагрузки, то есть  $q = \text{const}$  имеем:

$$\begin{aligned} \theta_i^n &= \frac{M_i l}{3EJ} + \frac{M_{i-1} l}{6EJ} - \frac{(z_i - z_{i-1})}{l} - \frac{ql^3}{24EJ}; \\ \theta_i^r &= -\frac{M_i l}{3EJ} - \frac{M_{i+1} l}{6EJ} - \frac{(z_{i+1} - z_i)}{l} - \frac{ql^3}{24EJ}; \\ R_i^n &= \frac{M_{i+1} - M_i}{l} + \frac{ql}{2}; \quad R_i^r = \frac{M_{i+1} - M_i}{l} + \frac{ql}{2}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.28), после преобразований систему конечно-разностных уравнений смешанного метода, соответствующую уравнениям МКЭ в форме смешанного метода, получим:

$$\begin{aligned} \frac{M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}}{6} + \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{l^2} &= 0; \\ \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{l^2} + q &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

При предельном переходе  $l \rightarrow dx$  получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow dx} \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{l^2} &= z_i''; \quad \lim_{l \rightarrow dx} \frac{M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1}}{6} = M_i; \\ \lim_{l \rightarrow dx} \frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{l^2} &= M_i''. \end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (2.29) преобразуется к виду

$$M + EJz'' = 0; M + q = 0. \quad (2.30)$$

Система дифференциальных уравнений (2.30) разрешима. Это означает, что при предельном переходе система алгебраических уравнений (2.29) не вырождается и при сгущении сетки конечных элементов счет будет устойчивым. Следовательно, при решении задачи по МКЭ в смешанной форме математическая модель в виде системы уравнений (2.29) сходится к точному решению.

Это позволяет сделать вывод о том, что вырождение системы алгебраических уравнений МКЭ при предельном переходе не является специфическим свойством этого метода вообще, а проявляется лишь в некоторых конкретных случаях. В то же время полученные результаты свидетельствуют о том, что МКЭ в смешанной форме обеспечивает получение более устойчивых решений при сгущении сетки конечных элементов, чем МКЭ в форме метода перемещений. Вполне очевидно, что те же свойства будут проявляться и в двумерных системах [10, 11].

### 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Расчет нелинейных стержневых или расчет континуальных систем с использованием дискретной расчетной схемы (метод сеток, метод конечных элементов) приводит к получению системы нелинейных алгебраических уравнений относительно определяемых неизвестных параметров [1, 5, 6, 7, 9, 15, 16, 20, 21, 22, 33, 34]. В частном случае использования смешанной формы МКЭ она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} l_1(q_1, q_2, \dots, q_n; \tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+m}; P) &= 0, \\ l_2(q_1, q_2, \dots, q_n; \tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+m}; P) &= 0, \\ \dots & \\ l_{n+m}(q_1, q_2, \dots, q_n; \tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+m}; P) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В краткой форме она может быть записана в виде обобщенного оператора

$$L(q_1, q_2, \dots, q_n; \tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+m}; P) = 0, \quad (3.2)$$

где  $\{L\} = [l_1, l_2, \dots, l_{n+m}]^T$ ;  $q_1, q_2, \dots, q_n$  — неизвестные параметры перемещений;  $\tilde{q}_{n+1}, \dots, \tilde{q}_{n+m}$  — неизвестные параметры усилий;  $P$  — параметр нагрузки.

#### 3.1. Метод последовательных приближений

Если известно достаточно хорошее начальное приближенное решение системы уравнений (3.1), то, придавая неизвестным параметрам  $q$  малые возможные приращения  $\Delta q$ , получим новую систему уравнений

$$L^*((q_1 + \Delta q_1), \dots, (q_n + \Delta q_n); (\tilde{q}_{n+1} + \Delta \tilde{q}_{n+1}), \dots, (\tilde{q}_{n+m} + \Delta \tilde{q}_{n+m}); P) = 0. \quad (3.3)$$

Эта система уравнений может быть записана в виде

$$L^*[(q + \Delta q); P] = L(q; P) + \Delta L(q, \Delta q; P) = 0. \quad (3.4)$$

Пренебрегая в (3.4) приращениями неизвестных  $q$  второго и более высоких порядков малости, получаем линеаризованную систему разрешающих уравнений (приближенных равенств) относительно приращений неизвестных  $\Delta q$ , которую для удобства дальнейших выкладок представим в матричной форме:

$$[D_1(q; P)] + [D_2(q; P)]\{\Delta q\} = 0. \quad (3.5)$$

Из этой системы уравнений находим

$$\{\Delta q\} = -[D_2(q; P)]^{-1}[D_1(q; P)]. \quad (3.6)$$

Полагая, что вектор неизвестных  $\{q\}$ , входящий в (3.5), является вектором, найденным на  $k$ -м шаге итерации, полученную систему уравнений (3.5) можно рассматривать как систему уравнений относительно приращений неизвестных  $\{\Delta q\}^{(k)}$  на  $(k+1)$ -м шаге итерации, а решение записать в виде

$$\{\Delta\}^{(k)} = -[D_2(q^{(k)}; P)]^{-1}[D_1(q^{(k)}; P)] \quad (3.7)$$

Суммируя векторы  $\{q\}^{(k)}$  и  $\{\Delta q\}^{(k)}$ , получим вектор  $\{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}^{(k)}$ .

Подставив этот вектор в систему уравнений (3.2), получим вектор невязки  $\{R\}^{(k+1)}$ . Если невязка превышает заданную степень точности решения, то следует переход к новой итерации, т. е. по полученному вектору  $\{q\}^{(k+1)}$  находится вектор приращений величин неизвестных  $\{\Delta q\}^{(k+1)}$ .

Циклы итераций продолжаются до тех пор, пока величина вектора невязки  $\{R\}^{(t)}$  не станет меньше заданной допустимой величины погрешности. Изложенный алгоритм является реализацией идеи метода последовательных приближений применительно к рассматриваемому классу задач.

Если возможно задание или получение достаточно хорошего начального приближения к решению системы уравнений (3.2), то этот метод является эффективным.

## 3.2. Метод итераций Ньютона

Изложенному выше алгоритму может быть дана другая трактовка.

В соответствии с ней запишем систему уравнений (3.4) в следующем виде:

$$L^*[(q + \Delta q); P] - L(q; P) = \Delta L(q, \Delta q; P). \quad (3.8)$$

Здесь линейный оператор  $\Delta L(q, \Delta q; P)$  является дискретным аналогом первой производной от оператора  $L(q; P)$ .

Так как для всей конструкции

$$\{q\} = [q_1, q_2, \dots, \tilde{q}_{n+m}]^T, \quad \{L\} = [l_1, l_2, \dots, l_{n+m}]^T,$$

то при  $\|\Delta q\| \rightarrow 0$  оператор  $\Delta L(q, \Delta q; P)$  является первой производной от  $L(q; P)$ :

$$\Delta l_k(q, \Delta q; P) = \sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial l_k(q_1, q_2, \dots, \tilde{q}_{n+m})}{\partial q_j} \Delta q_j + O(\|\Delta q\|^2). \quad (3.9)$$

Совокупность этих отношений можно переписать в виде (3.8):

$$L^*[(q + \Delta q); P] = L(q; P) + L'(q; P)\Delta q + O(\|\Delta q\|^2), \quad (3.10)$$

где

$$L'(q; P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial q_1} & \frac{\partial l_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial l_1}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \\ \frac{\partial l_2}{\partial q_1} & \frac{\partial l_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial l_2}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial l_{n+m}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{n+m}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial l_{n+m}}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Это матрица Якоби.

Пусть  $Q$  — решение системы уравнений (3.2), а  $q^{(k)}$  — некоторое приближение к  $Q$ . Тогда в соответствии с (3.10)

$$L(Q, P) - L(q^{(k)}, P) - L'(q^{(k)}, P)(Q - q^{(k)}) = O(\|Q - q^{(k)}\|). \quad (3.12)$$

Если величина  $\|Q - q^{(k)}\|$  мала, то можно написать приближенное равенство

$$L(q^{(k)}, P) + L'(q^{(k)}, P)(Q - q^{(k)}) = L(Q, P). \quad (3.13)$$

Так как для  $Q$  являющимся решением системы уравнений (3.2),  $L(Q, P) = 0$ , то

$$L(q^{(k)}, P) + L'(q^{(k)}, P)(Q - q^{(k)}) = 0. \quad (3.14)$$

В качестве следующего приближения возьмем решение уравнения

$$L(q^{(k)}, P) + L'(q^{(k)}, P)(q^{(k+1)} - q^{(k)}) = 0. \quad (3.15)$$

Из него следует, что

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - [L'(q^{(k)}, P)]^{-1} L(q^{(k)}, P). \quad (3.16)$$

Реккурентная формула (3.16) составляет *метод итераций Ньютона*.

Если в процессе итераций матрицы  $L$  и  $L'$  будут братья при одном и том же, принятом за начальное, приближении  $q^{(0)}$ , то такой прием называется *модифицированным методом Ньютона*.

При медленной сходимости итерационного процесса часто используется ускоряющая процесс сходимости процедура Ньютона — Рафсона. Пусть после получения  $k$ -го приближения получен вектор  $\{q^{(k)}\}$ . После постановки его в (3.2) получим невязку  $\{R^{(k)}\}$ .

$$L(q^{(k)}, P) = \{R(q^{(k)})\}, \quad \{R\} = [r_1, r_2, \dots, r_{n+m}]^T. \quad (3.17)$$

Придав неизвестным  $\{q^{(k)}\}$  малые приращения  $\{\Delta q^{(k+1)}\}$ , получим на следующей итерации вектор  $\{q^{(k)}\} + \{\Delta q^{(k+1)}\} = \{q^{(k+1)}\}$ .

Подставив этот вектор снова в (3.2), получим вектор невязки  $\{R(q + \Delta q)^{(k+1)}\}$ .

По аналогии с (3.9) и (3.10) подставим эту невязку в виде разложения в ряд Тейлора с удержанием первых двух членов ряда:

$$\{R(q + \Delta q)^{(k+1)}\} = \{R(q^{(k)})\} + [R'(q^{(k)})]\{\Delta q^{(k)}\} + O(\|\Delta q^{(k)}\|^2). \quad (3.18)$$

Полагая, что приращение  $\Delta q^{(k+1)}$  обращает невязку  $\{R(q^{(k)} + \Delta q^{(k+1)})^{(k+1)}\}$  в ноль, получаем

$$\{R(q^{(k)})\} + [R'(q^{(k)})]\{\Delta q^{(k)}\} = 0, \quad (3.19)$$

где

$$R'(q^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_{n+m}}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial r_{n+m}}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Это матрица Якоби.

По аналогии с (3.16) получаем

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} - [R'(q^{(k)})]^{-1} R(q^{(k)}). \quad (3.21)$$

### 3.3. Метод последовательных догрузений (приращений параметров)

При расчете геометрически нелинейных стержневых систем используются два положения.

Первое заключается в том, что при достаточно малом нагружении напряженно-деформированное состояние системы может быть описано в рамках линейной теории, то есть путем решения системы линейных алгебраических уравнений вида (3.1).

Второе заключается в предположении, что в процессе нагружения общий вектор воздействий изменяется пропорционально общему параметру воздействия  $\lambda$ , т. е.

$$\{q\} = \lambda \{q_0\}. \quad (3.22)$$

На этих положениях основан метод последовательных догрузений, называемый также методом пошагового нагружения или (в теории нелинейных уравнений) методом погружения по параметру (методом приращений параметров) [20, 21, 33].

Так как уравнения (2.11), (3.1) выполняются как для воздействий  $\{P\}$ , так и для воздействий  $\{P + \Delta P\}$ , то для любого  $k$ -го уравнения из системы уравнений (2.1) полный дифференциал по параметру  $P$  равен нулю:

$$\frac{\partial l_k(q, P)}{\partial P} dP = \left( \frac{\partial l_k}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial P} + \dots + \frac{\partial l_k}{\partial \tilde{q}_{n+m}} \cdot \frac{\partial \tilde{q}_{n+m}}{\partial P} + \frac{\partial l_k(P)}{\partial P} \right) dP = 0, \quad (3.23)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m).$$

Заменив дифференциал в этом выражении соответствующими малыми приращениями

$$dq_k = \frac{\partial q_k}{\partial P} dP \rightarrow \Delta q_k, \quad \frac{\partial l_k(P)}{\partial P} dP \rightarrow \Delta l_k(P), \quad (3.24)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора приращений переменных  $\{\Delta q\}$ :

$$[L'(q, P)]\{\Delta q\} + \{\Delta L(P)\} = 0, \quad (3.25)$$

где  $L'(q, P)$  — та же матрица Якоби, которая приведена выше.

Из (3.25) находим

$$\{\Delta q\} = -[L'(q, P)]^{-1} \{\Delta L(P)\}. \quad (3.26)$$

Последовательно увеличивая на каждом шаге догружения нагрузку на  $\lambda P_0$ , где  $\lambda = \frac{P}{P_0}$  — шаг догружения, находим  $\{\Delta q\}$  на каждом шаге, используя значение  $\{q^{(k)}\}$ , полученное на предыдущем шаге суммированием приращений на всех предыдущих шагах:

$$\{q^{(k)}\} = \sum_{t=1}^k \{\Delta q^{(t)}\}. \quad (3.27)$$

Величина шага  $\Delta P = \lambda P_0$  может изменяться в процессе решения в зависимости от типа задачи. В некоторых из них для того чтобы проследить весь процесс поведения конструкции на всей траектории нагружения, в том числе и в так называемых особых точках (точках бифуркации, точках ветвления решений и др.), необходима смена параметра шагового погружения.

Накапливающуюся невязку решения системы нелинейных уравнений (3.2) при использовании метода пошагового догружения устраняют на каждом шаге или после нескольких шагов по изложенному выше методу Ньютона или Ньютона — Рафсона.

## 4. РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

В данном разделе приведены примеры расчета стержневых систем, в которых перемещения их узлов являются большими, а деформации их конечных элементов, ансамблем которых они представлены, — малыми, то есть подчиняющимися закону Гука на каждом этапе пошагового нагружения. Для определения напряженно-деформированного состояния таких систем разрешающие уравнения для них необходимо составлять для деформированного состояния, соответствующего каждому шагу траектории нагружения, т. е. текущей конфигурации.

### 4.1. Ферма Мизеса

Исходная система представлена на рис. 4.1. Жесткость поперечного сечения  $EF = 1000 \text{ кН}$ ;  $b$  — начальная горизонтальная проекция стержней;  $h$  — вертикальная начальная проекция стержней. Решим задачу, считая потерю устойчивости прямым симметричной. Нагрузка  $P$  приложена в точке  $B$  и перемещается вместе с ней.

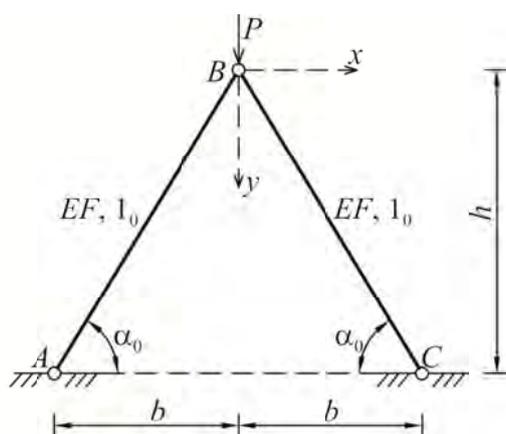


Рис. 4.1

При этом величина нагрузки  $P = kEF$  представляет собой дискретную величину и соответствует значению, обеспечивающему положение системы в равновесии на каждом шаге итерации. Решение задачи ведем с использова-

нием для определения усилий и перемещений МКЭ в форме классического смешанного метода. Основная система смешанного метода для фермы представлена на рис. 4.2.

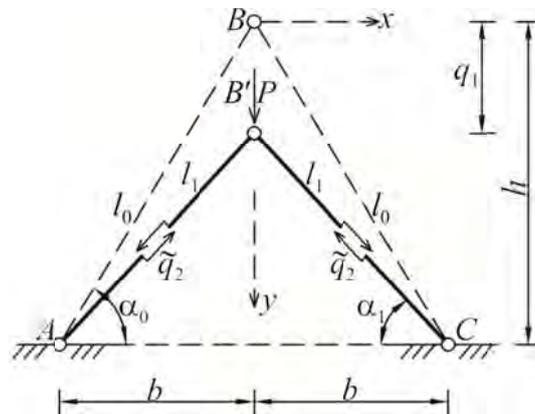


Рис. 4.2

Решение по изложенному выше алгоритму пошагового нагружения состоит в том, чтобы, последовательно увеличивая на каждом шаге величину нагрузки  $P$ , учитывая нелинейное поведение системы, получить соответствующие каждому шагу перемещения узла  $B$ .

Система уравнений смешанного метода для этой основной системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2\tilde{q}_2 \sin \alpha_1 + P = 0 & \text{— уравнение равновесия узла } B, \\ q_1 \sin \alpha_0 + \tilde{q}_2 \frac{l_0}{EF} = 0 & \text{— условие неразрывности в расчетном сечении.} \end{cases} \quad (4.1)$$

В данной системе  $\tilde{q}_2$  — неизвестное усилие в стержнях, возникающее от приложенной нагрузки  $P$ ;  $q_1$  — неизвестное вертикальное перемещение узла  $B$ .

Система уравнений (4.1) является нелинейной. Для решения данной системы воспользуемся методом простых итераций. На каждом шаге  $j$  по увеличению нагрузки будем задаваться начальными значениями  $q_1^{(0)}$  и  $\tilde{q}_2^{(0)}$ , получаемыми из линейного решения уравнений (4.1) в предположении малости деформаций, т. е. из расчета предыдущей  $j$ -й конфигурации фермы по недеформированной схеме:

$$\begin{cases} \tilde{q}_2^{(0)} = -\frac{P}{2 \sin \alpha_0}, \\ q_1^{(0)} = \frac{P}{2 \sin \alpha_0} \cdot \frac{l_0}{EF \sin \alpha_0}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Значения  $q_1^{(0)}$  и  $\tilde{q}_2^{(0)}$  отличаются от «точных» на величину  $\delta q_1^{(0)}$  и  $\delta \tilde{q}_2^{(0)}$  соответственно, т. е.  $q_1^{(1)} = q_1^{(0)} + \delta q_1^{(0)}$ ,  $\tilde{q}_2^{(1)} = \tilde{q}_2^{(0)} + \delta \tilde{q}_2^{(0)}$ , где  $q_1^{(1)}$  и  $\tilde{q}_2^{(1)}$  — первое приближение к искомым «точным» значениям  $q_1$  и  $\tilde{q}_2$ . Система уравнений

(4.1) может быть переписана следующим образом для первого шага по нагрузке и  $i$ -й итерации по определению величин невязки  $\delta q_1$  и  $\delta \tilde{q}_2$ :

$$\begin{cases} 2(\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)}) \sin \alpha_i + P = 0, \\ (q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)}) \sin \alpha_0 + (\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)}) \frac{l_0}{EF} = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Каждый  $j$ -й шаг догрузки увеличивает продольное усилие  $N = \sum_{j=1}^n \tilde{q}_2^{(j)}$

в стержнях и перемещение  $y = \sum_{j=1}^n q_1^{(j)}$  узла  $B$ . Поэтому в общем случае для  $j$ -го шага по нагрузке и  $i$ -й итерации для определения величин невязок  $\delta q_1$ ,  $\delta \tilde{q}_2$  имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2(N_{j-1} + \tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)}) \sin \alpha_i + P_j = 0, \\ (q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)}) \sin \alpha_{j-1} + (\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)}) \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Деформированная схема фермы для промежуточного состояния показана на рис. 4.3.

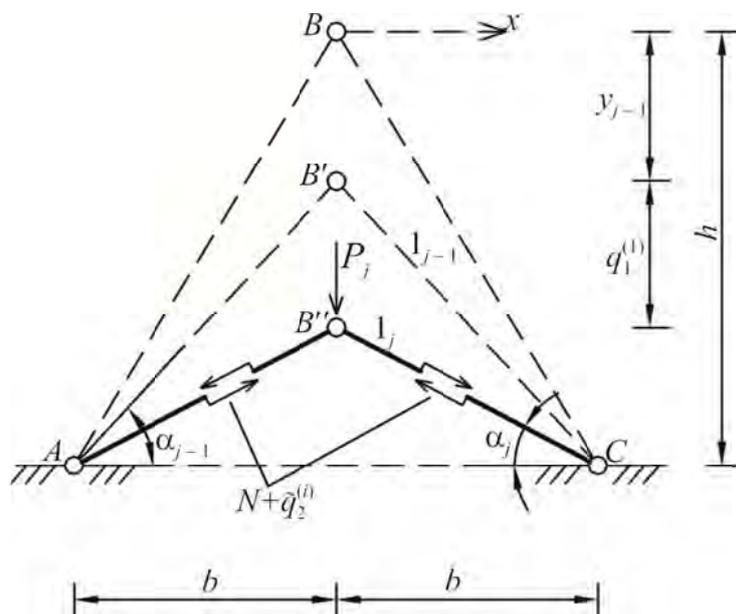


Рис. 4.3

Величину  $\sin \alpha_i$  в  $i$ -й итерации можно выразить следующим образом:

$$\sin \alpha_i = \frac{h - y_{j-1} - (q_1^{(i)} + \delta q_1^{(i)})}{l_{j-1} - (\tilde{q}_2^{(i)} + \delta \tilde{q}_2^{(i)}) \frac{l_{j-1}}{EF}}. \quad (4.5)$$

После подстановки (4.5) в (4.4) и алгебраических преобразований получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \delta q_1^{(i)} \left( -\tilde{q}_2^{(i)} - N_{j-1} \right) + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \left( h - y_{j-1} - q_1^{(i)} + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \right) + \\ & + \left( \tilde{q}_2^{(i)} + N_{j-1} \right) \left( h - y_{j-1} - q_1^{(i)} \right) + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \left( \tilde{q}_2^{(i)} + EF \right) = 0; \\ & \delta q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \delta \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} + q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{aligned}$$

Записав эту систему уравнений в виде  $[A] \left\{ \delta q_n^{(i)} \right\} + [C] = 0$  и решив ее как матричное уравнение, получим

$$\begin{Bmatrix} \delta q_1^{(i)} \\ \delta \tilde{q}_2^{(i)} \end{Bmatrix} = -[A]^{-1} [C],$$

где

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} \left( -\tilde{q}_2^{(i)} - N_{j-1} \right) & \left( h - y_{j-1} - q_1^{(i)} + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \right) \\ \left( \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} \right) & \left( \frac{l_{j-1}}{EF} \right) \end{bmatrix}; \\ [C] &= \begin{bmatrix} \left( \tilde{q}_2^{(i)} + N_{j-1} \right) \left( h - y_{j-1} - q_1^{(i)} \right) + \frac{P l_{j-1}}{2 EF} \left( \tilde{q}_2^{(i)} + EF \right) \\ q_1^{(i)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \tilde{q}_2^{(i)} \frac{l_{j-1}}{EF} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если величина нагрузки  $P$  достигает значения  $P_{кр}$ , то при превышении этого значения происходит «прощелкивание», и узел  $B$  сразу переместится на величину  $y > 2h$ . При этом дальнейшее решение системы нелинейных уравнений (4.4) методом простых итераций на участке  $y_{кр} < y \leq 2h$  не будет сходиться.

Чтобы определить дальнейшие равновесные состояния системы в закритическом положении, сменим параметр пошагового процесса, зададимся приращением перемещений  $\Delta u$ . Определяя усилия  $N$ , вызываемые этими перемещениями, найдем уравновешивающую их нагрузку  $P$ .

Исходным состоянием может являться любое докритическое напряженно-деформированное состояние с известными значениями  $y_{j-1}$  и соответствующим  $N_{j-1}$  (рис. 4.4).

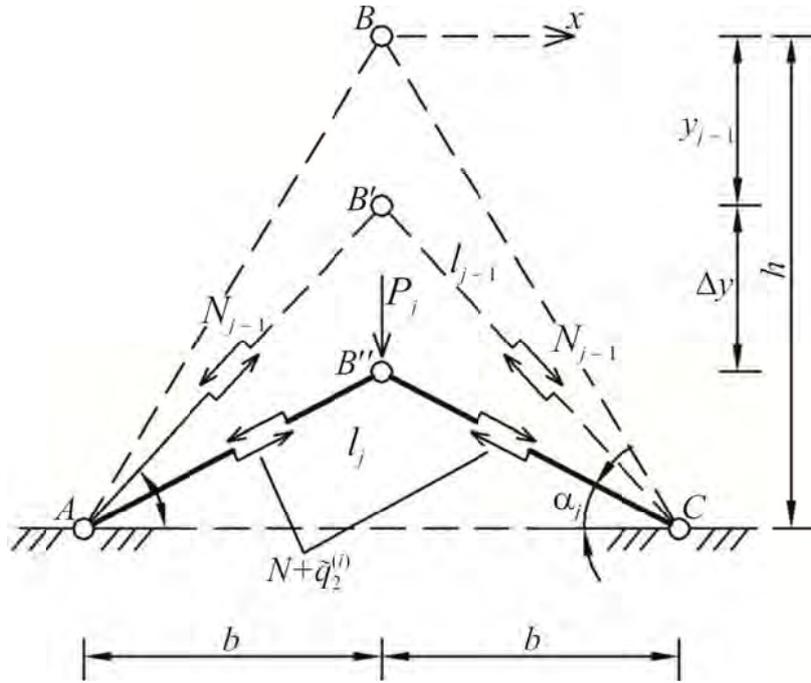


Рис. 4.4

Система уравнений (4.1) в этом случае принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 2(N_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)}) \sin \alpha_j + P_j = 0, \\ \Delta y \sin \alpha_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_{j-1}}{EF} = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) значения  $\sin \alpha_{j-1} = \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}}$ , найдем величины  $\tilde{q}_2^{(j)}$  и  $P_j$ :

$$\tilde{q}_2^{(j)} = -\frac{\Delta y EF (h - y_{j-1})}{l_{j-1}^2};$$

$$P_j = -2 \left( N - \frac{\Delta y EF (h - y_{j-1})}{l_{j-1}^2} \right) \frac{h - y_{j-1} - \Delta y}{l_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_{j-1}}{EF}}.$$

Для проверки получаемых значений воспользуемся решением, приведенным в [15]:

$$P(y) = 2EF \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{y}{l_0} \sin(\alpha_0) + \left(\frac{y}{l_0}\right)^2}} - 1 \right) \left( \sin(\alpha_0) - \frac{y}{l_0} \right). \quad (4.7)$$

Рассмотрим конкретный пример.  $EF = 1000$  кН;  $b = 5$  м;  $\alpha_0 = 30^\circ$ .

На рис. 4.5 и 4.6 представлены графики зависимости  $P(y)$ , полученные по методу МКЭ в смешанной форме и расчетом через деформации.  $P, N, y$  — соответственно значения силы, усилия и перемещения, получаемые по МКЭ в смешанной форме;  $P_{\Delta}(y_{\Delta}), N_{\Delta}(y_{\Delta}), y_{\Delta}$  — соответственно значения силы, усилия и перемещения, получаемые по (4.7) (считается точным решением).

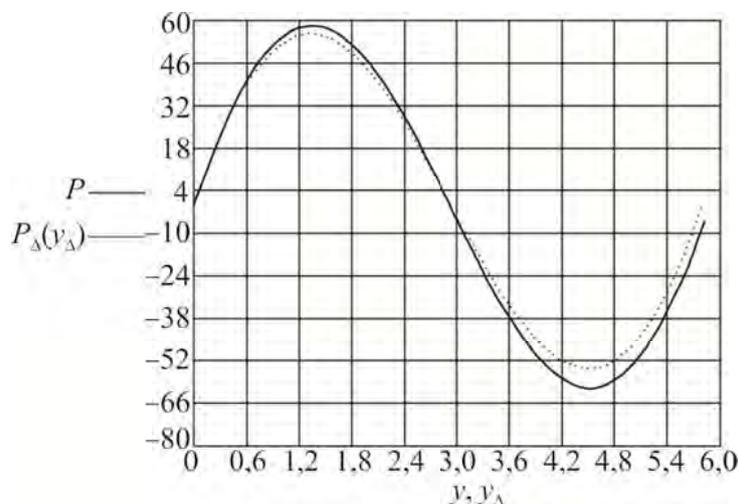


Рис. 4.5

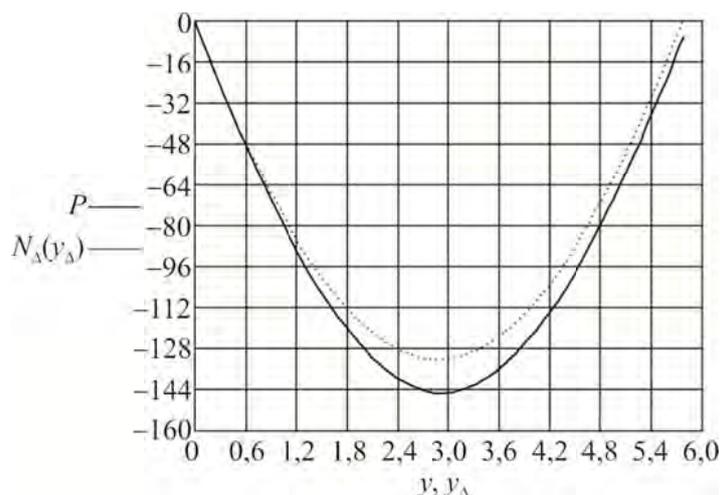


Рис. 4.6

В [15] приводится значение критической силы в момент «прошелкивания» —  $P_{\Delta\text{кр}} = 54,7$  кН. Значение критической силы, найденное по МКЭ, в СФ отличается и равно  $P_{\text{кр}} = 58,1$  кН. Эту разницу можно было бы отнести к погрешности вычислений и принятых упрощений: система уравнений (4.1) содержит допущения для уравнений неразрывности деформаций, связанные с предполагаемой малостью деформаций на каждом шаге:

$$\begin{aligned} \text{углы после деформирования равны углам до деформирования: } \alpha_1^{(0)} &\approx \alpha_1^{(1)}, \\ \alpha_2^{(0)} &\approx \alpha_2^{(1)}; \end{aligned}$$

удлинение стержня равно проекции соответствующего перемещения на ось стержня.

Однако анализ решения, приведенного в [15], показал, что в системе уравнений (4.1), как и в применяемом алгоритме вычисления, имеется неточность, которая приводит к расхождению с точным решением в значениях  $P_{кр}$ . Заменим в (4.6) изменяющуюся на каждом шаге длину стержня  $l_j$  на первоначальную длину  $l_0$ :

$$\begin{cases} 2\left(N_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)}\right) \frac{h - y_{j-1} - q_1^{(j)}}{l_{j-1} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_0}{EF}} + P_j = 0, \\ q_1^{(j)} \frac{h - y_{j-1}}{l_{j-1}} + \tilde{q}_2^{(j)} \frac{l_0}{EF} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

По результатам решения получаем графики  $P(y), P_{\Delta}(y_{\Delta})$  (рис. 4.7 и 4.8).

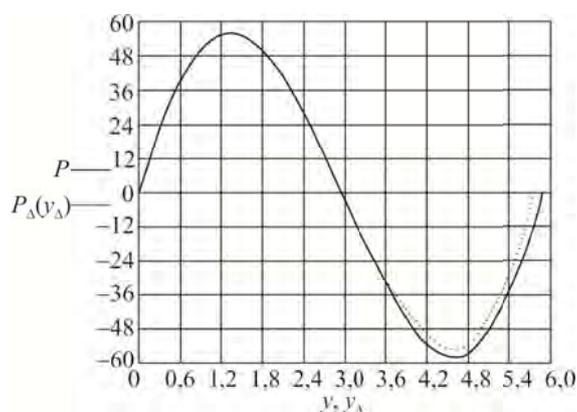


Рис. 4.7

Из графика на рис. 4.7 видно, что имеется расхождение на участке, где стержни перемещаются из достигнутого горизонтального положения вниз. Оно устраняется измельчением шага приращения перемещения  $\Delta y$ . Изменив шаг с  $\Delta y = 0,1$  на  $\Delta y = 0,001$ , получаем следующий график (рис. 4.8).

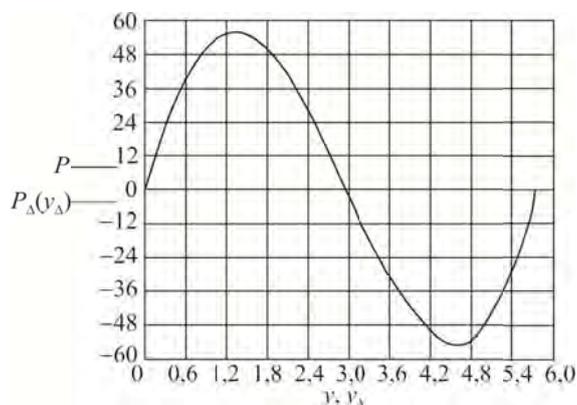


Рис. 4.8

Сравнение графиков, полученных на рис. 4.6 и рис. 4.8, показывает, что причина расхождения была определена верно.

## 4.2. Расчет преднапряженной нити

Рассмотрим предварительно напряженную гибкую нить (рис. 4.9), закрепленную в двух точках длиной  $2l = 10$  м, жесткостью поперечного сечения  $EJ = 1000$  т, имеющую начальное натяжение  $N_0 = 10$  т, к которой посередине пролета приложена сила  $P$ . Решаем задачу для двух значений силы  $P = 1$  т и  $P = 10$  т по методу конечных элементов в смешанной форме [8, 26, 27].

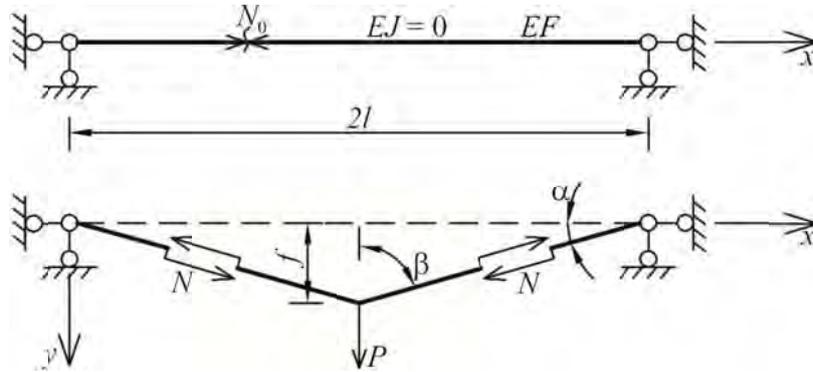


Рис. 4.9

Решение построим на основе процедуры пошагового догружения. Представим нагрузку в виде  $P_j = \lambda_j P$ ,  $P$  — окончательное значение нагрузки;

$\lambda_j = \sum_1^j j/n$ ,  $n$  — число шагов нагружения.

Основная система смешанного метода с учетом симметрии и геометрии на первом шаге нагружения для левой половины, принятой за один конечный элемент, показана на рис. 4.10.

Система разрешающих канонических уравнений смешанного метода на первом шаге нагружения нагрузкой  ${}^{(1)}P = \Delta P = \frac{P}{n}$  имеет следующий вид [13]:

$$\begin{cases} {}^{(1)}\delta_1 = {}^{(1)}(\delta_{1,1}\tilde{q}_1 + \tilde{\delta}_{1,2}q_2) = 0, \\ {}^{(1)}R_2 = {}^{(1)}(\tilde{r}_{2,1}\tilde{q}_1 + r_{2,2}q_2 + r_{2P} + N_0 \cos\beta) = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

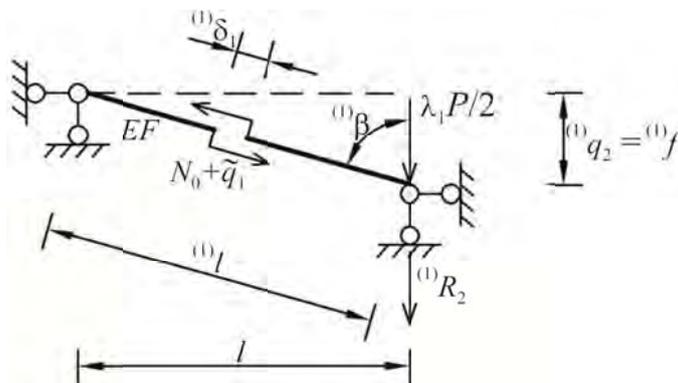


Рис. 4.10

Первое из этих уравнений представляет собой условие неразрывности деформации в месте приложения внутренних усилий  $N_0 + {}^{(1)}q_1$  в основной системе. В нем отражен тот факт, что деформированное состояние (см. рис. 4.9) возможно только за счет дополнительных деформаций от неизвестного дополнительного усилия  ${}^{(1)}\tilde{q}_1$ .

Второе уравнение является условием эквивалентности заданной (см. рис. 4.9) и основной (см. рис. 4.10) систем. В данном случае это условия равновесия основной системы и одновременно отсутствия реакции во введенной дополнительной вертикальной связи в основной системе.

В этих условиях неизвестные:  ${}^{(1)}\tilde{q}_1$  — неизвестное дополнительное усилие в нити, возникающее при ее прогибе от поперечной нагрузки  ${}^{(1)}P = \frac{P}{n}$ ;  ${}^{(1)}q_2$  — неизвестное вертикальное перемещение в точке приложения нагрузки.

Представим систему уравнений (4.9) в следующем виде:

$$\begin{cases} {}^{(1)}(\delta_{1,1}\tilde{q}_1 + \tilde{\delta}_{1,2}q_2) = 0, \\ {}^{(1)}(\tilde{r}_{2,1}\tilde{q}_1 + r_{2,2}q_2 + r_{2P} + N_0 \cos \beta) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Коэффициенты матрицы откликов при неизвестных в этих уравнениях системы определяются следующими выражениями:

$${}^{(1)}\delta_{1,1} = \frac{l}{EF}; \quad {}^{(1)}\tilde{\delta}_{1,2} = -\cos^{(1)}\beta; \quad \tilde{r}_{2,1} = \cos^{(1)}\beta; \quad {}^{(1)}r_{2,2} = 0; \quad {}^{(1)}r_{2P} = -\frac{\lambda_1 P}{2}.$$

Подставляя их в уравнения системы (4.10) получаем:

$$\begin{cases} {}^{(1)}\left(\tilde{q}_1 \frac{l}{EF} - q_2 \cos \beta\right) = 0, \\ {}^{(1)}\left(\tilde{q}_1 \cos \beta + 0 - \frac{\lambda_1 P}{2} + N_0 \cos \beta\right) = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Выразим  $\cos^{(1)}\beta$  через геометрию системы и подставим в уравнение (4.11):

$$\begin{cases} \tilde{q}_1 \frac{l}{EF} - q_2 \left( \frac{q_2}{l + \frac{\tilde{q}_1 l}{EF}} \right) = 0, \\ \tilde{q}_1 \left( \frac{q_2}{l + \frac{\tilde{q}_1 l}{EF}} \right) - \frac{\lambda_1 P}{2} + N_0 \left( \frac{q_2}{l + \frac{\tilde{q}_1 l}{EF}} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Преобразуя эту систему, получаем следующие нелинейные уравнения:

$$\begin{cases} {}^{(1)}\left(\tilde{q}_1 l^2 + \tilde{q}_1^2 \frac{l^2}{EF} - q_2^2 EF\right) = 0, \\ {}^{(1)}\left(\tilde{q}_1 q_2 + q_2 N_0 - \tilde{q}_1 \frac{\lambda_1 P}{2} \frac{l}{EF} - \frac{\lambda_1 P}{2} l\right) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Решение этой системы нелинейных уравнений выполним методом последовательных приближений (глава 3). Для этого зададимся приближенными значениями  $\tilde{q}_1^{(0)}$ ,  $q_2^{(0)}$  и подставим в уравнение (4.13). Приближенные усилия  $\tilde{q}_1^{(0)}$  и перемещения  $q_2^{(0)}$  будут отличаться от искомым на величины невязок  $\delta\tilde{q}_1^{(0)}$  и  $\delta q_2^{(0)}$  соответственно.

$$\begin{cases} \left(\tilde{q}_1^{(0)} + \delta\tilde{q}_1^{(0)}\right)l^2 + \left(\tilde{q}_1^{(0)} + \delta\tilde{q}_1^{(0)}\right)^2 \frac{l^2}{EF} - \left(q_2^{(0)} + \delta q_2^{(0)}\right)^2 EF = 0, \\ \left(\tilde{q}_1^{(0)} + \delta\tilde{q}_1^{(0)}\right)\left(q_2^{(0)} + \delta q_2^{(0)}\right) + \left(q_2^{(0)} + \delta q_2^{(0)}\right)N_0 - \\ - \left(\tilde{q}_1^{(0)} + \delta\tilde{q}_1^{(0)}\right)\frac{\lambda_1 P}{2} \frac{l}{EF} - \frac{\lambda_1 P}{2} l = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем после некоторых преобразований следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно величин невязок  $\delta\tilde{q}_1^{(0)}$  и  $\delta q_2^{(0)}$ :

$$\begin{cases} \delta\tilde{q}_1^{(0)}l^2 + \delta\tilde{q}_1^{(0)}2\tilde{q}_1^{(0)}\frac{l^2}{EF} - \delta q_2^{(0)}2q_2^{(0)}EF + \\ + \tilde{q}_1^{(0)}l^2 + \tilde{q}_1^{(0)2}\frac{l^2}{EF} - q_2^{(0)2}EF = 0, \\ \delta\tilde{q}_1^{(0)}q_2^{(0)} - \delta\tilde{q}_1^{(0)}\frac{\lambda_1 P}{2}\frac{l}{EF} + \delta q_2^{(0)}\tilde{q}_1^{(0)} + \delta q_2^{(0)}N_0 + \tilde{q}_1^{(0)}q_2^{(0)} + \\ + q_2^{(0)}N_0 - \tilde{q}_1^{(0)}\frac{\lambda_1 P}{2}\frac{l}{EF} - \frac{\lambda_1 P}{2}l = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Для вычисления значений  $\delta\tilde{q}_1^{(0)}$  и  $\delta q_2^{(0)}$  запишем уравнения (4.15) в матричном виде:

$$\left[A^{(0)}\right]\left\{\delta q_n^{(0)}\right\} + \left[C^{(0)}\right] = 0, \quad (4.16)$$

где

$$\left[A^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} \left(l^2 + 2\tilde{q}_1^{(0)}\frac{l^2}{EF}\right) & \left(-2q_2^{(0)}EF\right) \\ \left(q_2^{(0)} - \frac{\lambda_1 P}{2}\frac{l}{EF}\right) & \left(\tilde{q}_1^{(0)} + N_0\right) \end{bmatrix}, \quad \left\{\delta q_n^{(0)}\right\} = \begin{Bmatrix} \delta q_1^{(0)} \\ \delta q_2^{(0)} \end{Bmatrix},$$

$$[C^{(0)}] = \begin{bmatrix} \left( \tilde{q}_1^{(0)} l^2 + \tilde{q}_1^{(0)^2} \frac{l^2}{EF} - q_2^{(0)^2} EF \right) \\ \left( \tilde{q}_1^{(0)} q_2^{(0)} + q_2^{(0)} N_0 - \tilde{q}_1^{(0)} \frac{\lambda_1 P}{2} \frac{l}{EF} - \frac{\lambda_1 P}{2} l \right) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует:

$$\{\delta q_n^{(0)}\} = -[A^{(0)}]^{-1} [C^{(0)}].$$

Получив значения этих величин, уточняем значения усилий и перемещений в нити  $\tilde{q}_1^{(1)} = \tilde{q}_1^{(0)} + \delta \tilde{q}_1^{(0)}$  и  $q_2^{(1)} = q_2^{(0)} + \delta q_2^{(0)}$ , а затем снова подставляем их в уравнения (4.16) для новой итерации и поиска  $\tilde{q}_1$  и  $q_2$ , при которых значения величин невязок приближаются к нулю заданной степенью точности  $\epsilon$ .

По окончании расчета на нагрузку  $^{(1)}P$  первого шага нагружения получаем значения  $^{(1)}\tilde{q}_1$  и  $^{(1)}q_2$ , которые определяют новое напряженно-деформированное состояние (рис. 4.11) для следующего приближения — новое начальное значение напряжения  $^{(i)}N_1 = ^{(j)}N_0 + \tilde{q}_1$ , начальное значение прогиба нити  $f_1 = q_2$ , длину нити  $l_1 = \sqrt{l_0^2 + f_1^2}$  для следующей итерации по нагрузке.

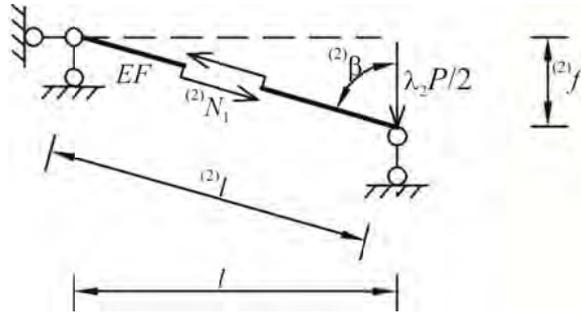


Рис. 4.11

Таким образом, шагая по нагрузке в конечном итоге достигается ее заданная величина  $P$  и соответствующие величины усилия и прогиба.

Для определения в  $i$ -й итерации усилий и перемещений на  $j$ -м шаге по нагрузке запишем уравнения (4.12) для случая, представленного на рис. 4.12:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1^{(i)} \frac{^{(j-1)}l}{EF} - q_2^{(i)} \left( \frac{^{(j-1)}f + q_2^{(i)}}{^{(j-1)}l + \frac{\tilde{q}_1^{(i)} ^{(j-1)}l}{EF}} \right) = 0, \\ \tilde{q}_1^{(i)} \left( \frac{^{(j-1)}f + q_2^{(i)}}{l_{j-1} + \frac{\tilde{q}_1^{(i)} ^{(j-1)}l}{EF}} \right) - \frac{\lambda_j P}{2} + ^{(j-1)}N \left( \frac{^{(j-1)}f + q_2^{(i)}}{^{(j-1)}l + \frac{\tilde{q}_1^{(i)} ^{(j-1)}l}{EF}} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

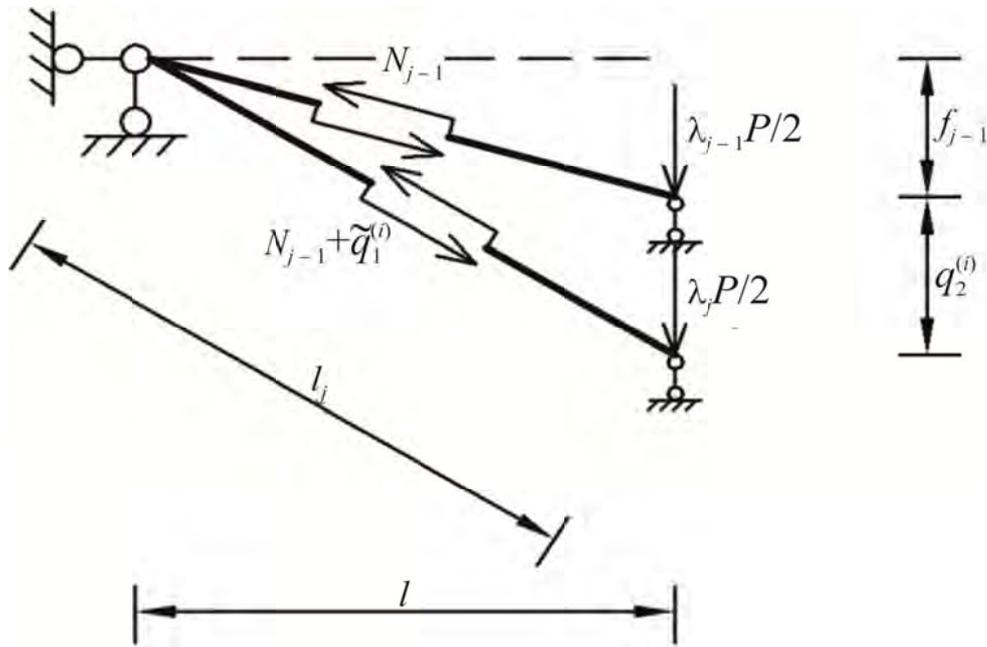


Рис. 4.12

Выразив ряд последовательных алгебраических преобразований системы уравнений (4.17), получим:

$$\begin{cases} \tilde{q}_1^{(i)} \frac{(j-1)l}{EF} \left( (j-1)l + \frac{\tilde{q}_1^{(i)(j-1)l}}{EF} \right) - q_2^{(i)(j-1)} f - q_2^{(i)^2} = 0, \\ \tilde{q}_1^{(i)} \left( (j-1) f + q_2^{(i)} \right) - \frac{\lambda_j P}{2} \left( (j-1)l + \frac{\tilde{q}_1^{(i)(j-1)l}}{EF} \right) + (j-1)N^{(j-1)} f + (j-1)Nq_2^{(i)} = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \tilde{q}_1^{(i)} \frac{(j-1)l^2}{EF} + \tilde{q}_1^{(i)^2} \frac{(j-1)l^2}{EF^2} - q_2^{(i)(j-1)} f - q_2^{(i)^2} = 0, \\ \tilde{q}_1^{(i)(j-1)} f + \tilde{q}_1^{(i)} q_2^{(i)} - \frac{\lambda_j P^{(j-1)}}{2} l - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{\tilde{q}_1^{(i)(j-1)l}}{EF} + (j-1)N^{(j-1)} f + (j-1)Nq_2^{(i)} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Заменяя, как и ранее,  $\tilde{q}_1^{(i)}$  на  $\tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)}$ , а  $q_2^{(i)}$  на  $q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)}$  и подставив в (4.19), получим:

$$\begin{cases} \left( \tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)} \right)^{(j-1)} l^2 + \left( \tilde{q}_1^{(i)^2} + 2\tilde{q}_1^{(i)}\delta\tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)^2} \right) \frac{(j-1)l^2}{EF} - \\ - \left( q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)} \right)^{(j-1)} f EF - \left( q_2^{(i)^2} + 2q_2^{(i)}\delta q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)^2} \right) EF = 0, \\ \left( \tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)} \right)^{(j-1)} f + \left( \tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)} \right) \left( q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)} \right) - \frac{\lambda_j P^{(j-1)}}{2} l - \\ - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{\left( \tilde{q}_1^{(i)} + \delta\tilde{q}_1^{(i)} \right)^{(j-1)l}}{EF} + (j-1)N^{(j-1)} f + (j-1)N \left( q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \delta \tilde{q}_1^{(i)} \left( {}^{(j-1)}l^2 + 2\tilde{q}_1^{(i)} \frac{{}^{(j-1)}l^2}{EF} \right) - \delta q_2^{(i)} \left( {}^{(j-1)}fEF + 2q_2^{(i)}EF \right) + \tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}l^2 + \\
& + \tilde{q}_1^{(i)2} \frac{{}^{(j-1)}l^2}{EF} - q_2^{(i){}^{(j-1)}fEF - q_2^{(i)2}EF = 0, \\
& \delta \tilde{q}_1^{(i)} \left( {}^{(j-1)}f + q_2^{(i)} - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{{}^{(j-1)}l}{EF} \right) + \delta q_2^{(i)} \left( \tilde{q}_1^{(i)} + {}^{(j-1)}N \right) + \\
& + \tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}f + \tilde{q}_1^{(i)}q_2^{(i)} - \frac{\lambda_j P}{2} {}^{(j-1)}l - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{\tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}l}{EF} + \\
& + {}^{(j-1)}Nq_2^{(i)} + {}^{(j-1)}N{}^{(j-1)}f = 0.
\end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

Эту систему уравнений запишем в виде (4.16), в которой

$$\begin{aligned}
[A^{(0)}] &= \begin{bmatrix} \left( {}^{(j-1)}l^2 + 2\tilde{q}_1^{(i)} \frac{{}^{(j-1)}l^2}{EF} \right) & \left( -{}^{(j-1)}fEF - 2q_2^{(i)}EF \right) \\ \left( {}^{(j-1)}f + q_2^{(i)} - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{{}^{(j-1)}l}{EF} \right) & \left( \tilde{q}_1^{(i)} + {}^{(j-1)}N \right) \end{bmatrix}, \\
\{\delta q_n^{(0)}\} &= \begin{Bmatrix} \delta q_1^{(0)} \\ \delta q_2^{(0)} \end{Bmatrix}, \\
[C^{(0)}] &= \begin{bmatrix} \left( \tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}l^2 + \tilde{q}_1^{(i)2} \frac{{}^{(j-1)}l^2}{EF} - q_2^{(i){}^{(j-1)}fEF - q_2^{(i)2}EF \right) \\ \left( \tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}f + \tilde{q}_1^{(i)}q_2^{(i)} - \frac{\lambda_j P}{2} {}^{(j-1)}l - \frac{\lambda_j P}{2} \frac{\tilde{q}_1^{(i){}^{(j-1)}f}{EF} + \right) \\ \left( + {}^{(j-1)}Nq_2^{(i)} + {}^{(j-1)}N{}^{(j-1)}f \right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Решая ее, получаем

$$\{\delta q_n^{(i)}\} = -[A^{(i)}]^{-1}[C^{(i)}].$$

Уточняем значения усилий  $\tilde{q}_1^{(i+1)} = \tilde{q}_1^{(i)} + \delta \tilde{q}_1^{(i)}$  и перемещений  $q_2^{(i+1)} = q_2^{(i)} + \delta q_2^{(i)}$  для дальнейших итераций и определения  $\tilde{q}_1$  и  $q_2$   $j$ -го приближения. Конечная геометрия системы в  $j$ -м приближении определяет начальные значения для последующего расчета:  ${}^{(j)}N = {}^{(j-1)}N + \tilde{q}_1$  — начальное натяжение;  ${}^{(j)}f = {}^{(j-1)}f + q_2$  — начальный прогиб;  ${}^{(j)}l = \sqrt{l^2 + {}^{(j)}f^2}$  — начальная длина.

Ниже приведен пример реализации данного алгоритма в программном комплексе Scilab:

```
function [N, f] = MPP1(EA, N, Ln, P, f, q10, q20, eps)
// EA - продольная жесткость нити
// N - начальное натяжение
// Ln - начальная длина нити
// P - нагрузка
// f - начальный прогиб
// q10 - начальное усилие
// q20 - начальное перемещение
// eps - заданная точность приближения нормы вектора невязки delta_q
    L = Ln;
    forlambd = 0.0001:0.0001:1
// 1-я итерация для каждого шага приближения
        pt = lambda*P;
        A(1,1)=L^2+2*q10*L^2/EA;
        A(1,2)=-f*EA-2*q20*EA;
        A(2,1)=f+q20-pt*L/(2*EA);
        A(2,2)=q10+N;
        C(1,1)=q10*L^2+q10^2*L^2/EA-q20*f*EA-q20^2*EA;
        C(2,1)=q10*f+q10*q20+q20*N+f*N-q10*pt*L/(2*EA)-pt*L/2;
    delta_q = inv(A)*(-C);
        q1 = q10+delta_q(1);
        q2 = q20+delta_q(2);
// проверка условия приближения к заданной точности eps
// и запуск, при необходимости, очередной итерации
        whilesqrt(delta_q(1)^2+delta_q(2)^2) >eps
            A(1,1)=L^2+2*q1*L^2/EA;
            A(1,2)=-f*EA-2*q2*EA;
            A(2,1)=f+q2-pt*L/(2*EA);
            A(2,2)=q1+N;
            C(1,1)=q1*L^2+q10^2*L^2/EA-q2*f*EA-q2^2*EA;
            C(2,1)=q1*f+q1*q2+q2*N+f*N-q1*pt*L/(2*EA)-pt*L/2;
            delta_q = inv(A)*(-C);
            q1 = q1+delta_q(1);
            q2 = q2+delta_q(2);
        end
// определение начальных параметров для очередного приближения
        N = N+q1;
        f = f+q2;
        L = sqrt(Ln^2+f^2);
    end
endfunction
```

Решим эту же задачу, приняв за изменяемый на каждом шаге параметр перемещение  $f$  точки приложения нагрузки, т.е. задавая приращение прогиба  $\Delta f$  и постепенно оттягивая нить вниз на величину приращения, определим на каждом шаге соответствующее усилие  $\tilde{q}_1$  и нагрузку  $P$  (рис. 4.13).

После приложения нагрузки  $P$  в результате прогиба нить удлиняется и возникает дополнительное усилие  $\tilde{q}_1$ , которое уравнивает соответствующую нагрузку  $P$ :

$$\tilde{q}_1 = \frac{\Delta l E F}{l_0}, \quad (4.22)$$

где  $\Delta l = l - l_0$  — удлинение нити;  $l = \sqrt{l_0^2 + f^2}$  — длина нити после нагружения.

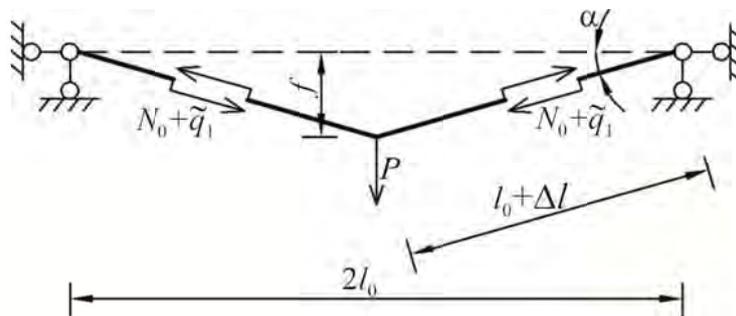


Рис. 4.13

Таким образом, получим прогиб  $f = \sum \Delta f$ , усилие  $\tilde{q}_1 = \frac{(l - l_0) E F}{l_0}$  и нагрузку  $P = (N_0 + \tilde{q}_1) 2 \sin \alpha$ , которая соответствует прогибу.

Следуя этому алгоритму, находим прогиб и усилия в нити, которые соответствуют заданной нагрузке.

Ниже приведен пример реализации данного алгоритма в программном комплексе Scilab:

```
function [N, f] = MPD(EA, N, Ln, P, df, eps)
// EA - продольная жесткость нити
// N - начальное натяжение
// Ln - начальная длина нити
// P - нагрузка
// df - приращение прогиба
// eps - заданная точность приближения
L = sqrt(Ln^2+df^2);
f = df;
sin_alpha = f/L;
q1=(L-Ln)*EA/Ln;
Pt=(N+q1)*2*sin_alpha;
```

```

// поиск значения прогиба, соответствующего нагрузке  $P$  в первом
приближении
while Pt < P
    f = f+df;
    L = sqrt(Ln^2+f^2);
    sin_alpha = f/L;
    q1=(L-Ln)*EA/Ln;
    Pt=(N+q1)*2*sin_alpha;
end
// уточнение значения прогиба до заданной точности eps
f1 = f-df;
f2 = f;
while f2-f1 >eps
    f = (f2+f1)/2;
    L1 = sqrt(Ln^2+f1^2);
    sin_alpha1 = f1/L1;
    q11=(L1-Ln)*EA/Ln;
    Pt1=(N+q11)*2*sin_alpha1;
    L = sqrt(Ln^2+f^2);
    sin_alpha = f/L;
    q1=(L-Ln)*EA/Ln;
    Pt=(N+q1)*2*sin_alpha;
    //
    if (Pt1-P)*(Pt-P) <= 0
        f2 = f;
    else
        f1 = f;
    end
end
f = (f2+f1)/2;
L = sqrt(Ln^2+f^2);
q1=(L-Ln)*EA/Ln;
N = N+q1;
endfunction

```

Результаты расчета по двум алгоритмам для нагрузки  $P = 1$  т и  $P = 10$  т приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Нагрузка $P$ , т	Воздействие	Изменяемый параметр		Абсолютная погрешность расчета	
		нагрузка $P$	перемещение $f$		
1	Усилие, т	11,0288	11,0292	0,0004	0,0040
	Прогиб, м	0,2269	0,2269	0,0000	0,0000
10	Усилие, т	27,1956	27,2591	0,0635	0,2300
	Прогиб, м	0,9352	0,9330	-0,0022	0,2400

Из таблицы видно, что при увеличении значения нагрузки  $P$  результаты расчета с пошаговым приращением нагрузки начинают отличаться от результатов расчета с пошаговым приращением прогиба, которые являются точными. Однако эти расхождения незначительны и могут быть устранены при уменьшении шага по нагрузке.

### 4.3. Преднапряженная контргрузом нерастяжимая нить

Рассмотрим нерастяжимую гибкую нить ( $EF = \infty, EJ = 0$ ), растянутую подвешенным через блок на правом конце пролета  $AB$  грузом  $Q$  (рис. 4.14, *a*). Предположим, что к этой нити приложены узловые нагрузки  $P_i$ , под действием которых связанные с ними жестко узлы  $i$  получают смещения по вертикали и горизонтали —  $\Delta x_i, \Delta y_i$  (рис. 4.14, *б*), а подвешенный напрягающий груз  $Q$  получает перемещение  $h$ .

Фрагмент основной системы смешанного метода для рассматриваемой задачи показан на рис. 4.14, *в*. За неизвестные принимаются перемещения узлов  $\Delta x_i, \Delta y_i$ , перемещение груза  $h$ , и усилия в нити между узлами  $(i-1), i$  ( $i = 0 \dots n$ ).

На рис. 4.14, *г* приведена конечно-элементная расчетная схема для данной задачи, на котором показан промежуточный узел  $i$  и примыкающие к нему конечные элементы.

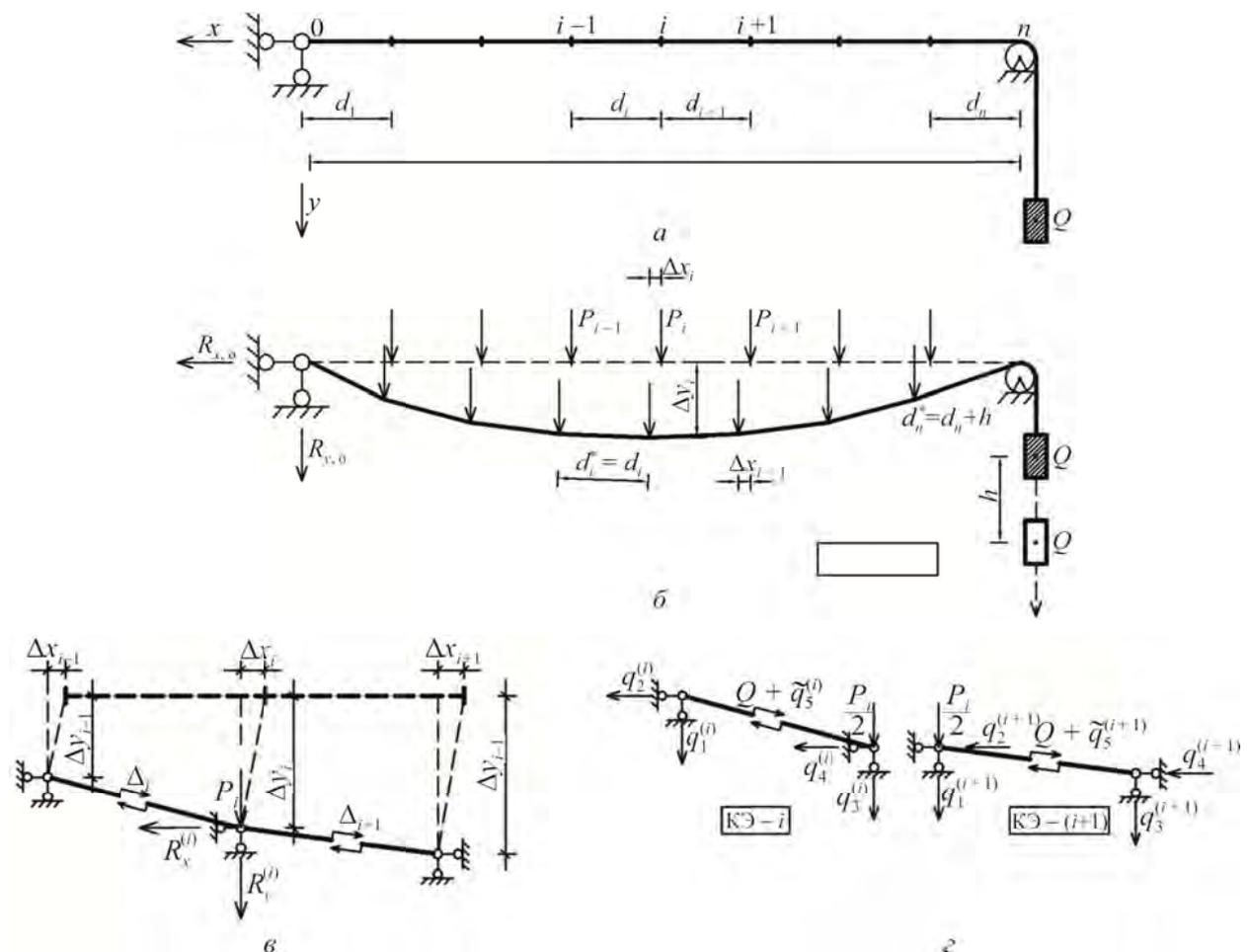


Рис. 4.14

Постановка граничных условий. Рассматриваемая система статически определимая (рис. 4.15).

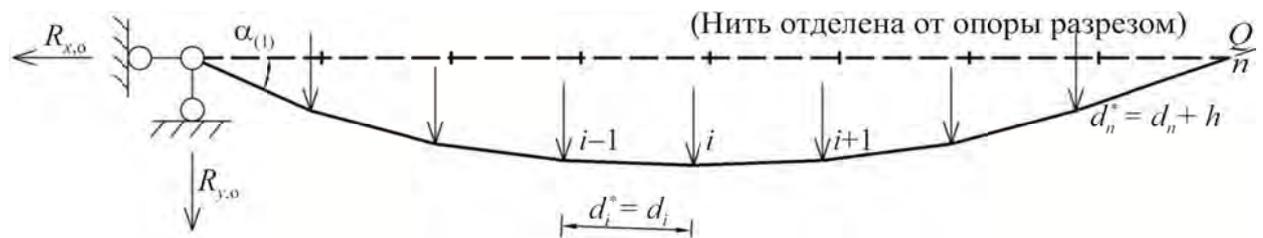


Рис. 4.15

Усилие в нити на последнем (правом) участке равно  $Q$  (силе натяжения, создаваемой контргрузом  $Q$ ). Длина этого участка после нагружения будет равна  $(d_n + h)$ , то есть увеличится по сравнению с исходным стоянием на величину подъема груза  $h$  (рис. 4.16),  $\alpha_n$  — угол наклона нити на участке  $(n - 1) - n$ .

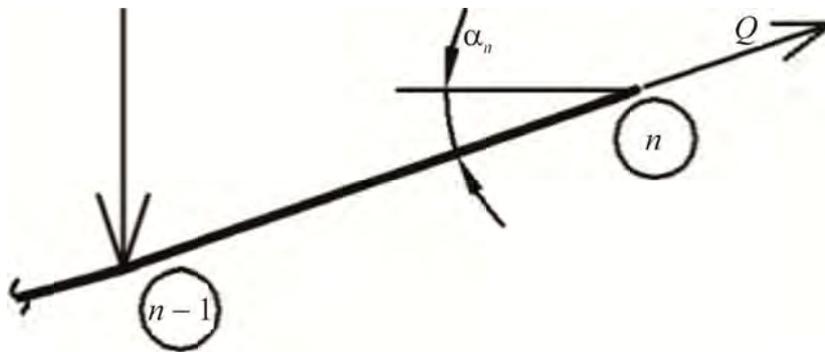


Рис. 4.16

Из условия равновесия системы (см. рис. 4.15) следует:

$$\begin{aligned} R_{x,0} &= Q \cos \alpha_n; \\ R_{y,0} &= Q \sin \alpha_n - \sum_{i=1}^{n-1} P_i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Из условий равновесия узла 0 КЭ-1 (рис. 4.17) получаем:

$$R_{x,0} - (Q + \tilde{q}_5^{(1)}) \cos \alpha_1 = 0$$

или

$$Q \cos \alpha_n - Q \cos \alpha_1 - \tilde{q}_5^{(1)} \cos \alpha_1 = 0.$$

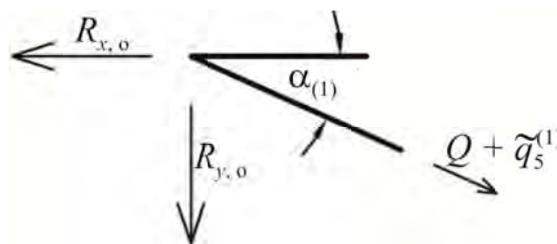


Рис. 4.17

Отсюда следует:

$$\tilde{q}_5^{(1)} = \frac{Q \cos \alpha_n - Q \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} = Q \left( \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_1} - 1 \right). \quad (4.24)$$

Из рис. 4.17 видно, что на участке  $(n-1) — n$  усилие растяжения равно  $Q$ , то есть

$$Q + \tilde{q}_5^{(n)} = Q, \quad \tilde{q}_5^{(n)} = 0.$$

Из геометрии системы (см. рис. 4.14, в) видно, что

$$\sin \alpha_i = \frac{\Delta y_i - \Delta y_{i-1}}{d_i}, \quad \cos \alpha_i = \frac{d_i + (\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)}{d_i}. \quad (4.25)$$

Для  $i$ -го КЭ (рис. 4.18) элементы матрицы откликов определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,1}^{(i)} = -\sin \alpha_i, & \tilde{r}_{2,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,2}^{(i)} = \cos \alpha_i, \\ \tilde{r}_{3,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,3}^{(i)} = \sin \alpha_i, & \tilde{r}_{4,5}^{(i)} &= -\tilde{\delta}_{5,4}^{(i)} = -\cos \alpha_i, \\ r_{1P}^{(i)} &= -\frac{1}{2} P_{i-1} - Q \sin \alpha_i, & r_{2P}^{(i)} &= Q \cos \alpha_i, \\ r_{3P}^{(i)} &= -\frac{1}{2} P_i + Q \sin \alpha_i, & r_{4P}^{(i)} &= -Q \cos \alpha_i, & \delta_{5,5} &= \frac{d_i}{EF_i}. \end{aligned}$$

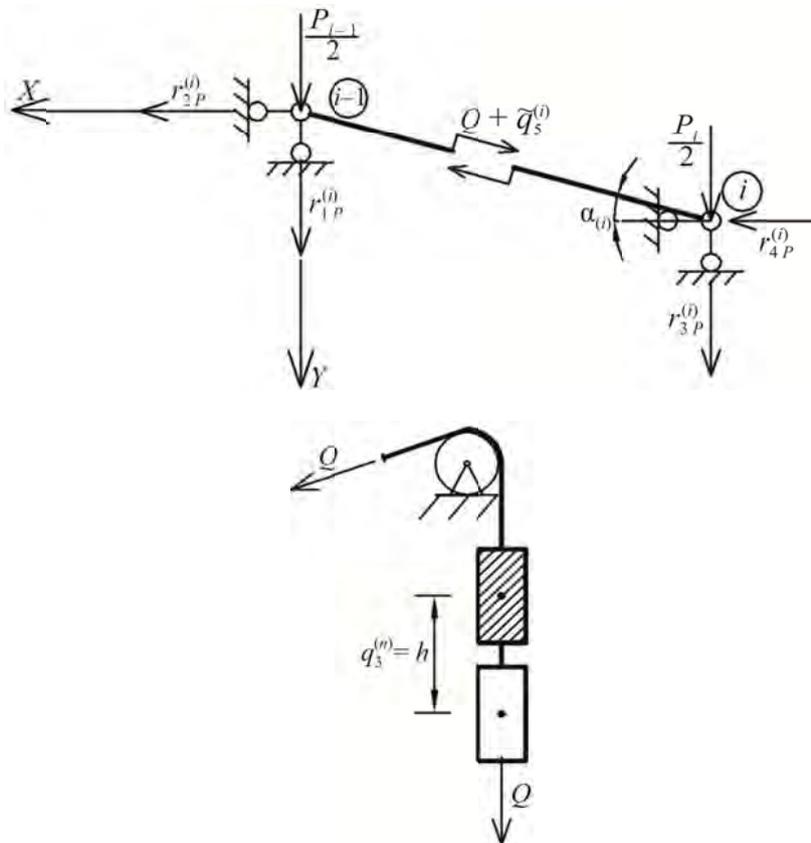


Рис. 4.18

Уравнения смешанного метода имеют в данной задаче следующий физический смысл (см. рис. 4.14):

$$R_x^{(1)} = 0, R_y^{(1)} = 0, \Delta_5^{(1)} = 0 \quad \text{— для узла 1 и КЭ-1 соответственно,}$$

.....

$$R_x^{(i)} = 0, R_y^{(i)} = 0, \Delta_5^{(i)} = 0 \quad \text{— для узла } i \text{ и КЭ-}i \text{ соответственно,} \quad (4.26)$$

$$R_x^{(n-1)} = 0, R_y^{(n-1)} = 0, \Delta_5^{(n-1)} = 0 \quad \text{— для узла } (n-1) \text{ и КЭ-}(n-1) \text{ соответственно,}$$

$$\Delta_5^{(n)} = 0 \quad \text{— для узла } n \text{ и КЭ-}n \text{ соответственно.}$$

Разрешающие уравнения получаются объединением КЭ, примыкающих к общему для них узлу.

Запишем уравнения в развернутом виде:

Для КЭ-1:

$$\begin{cases} R_x^{(1)} = \tilde{r}_{4,5}^{(1)} q_5^{(1)} + \tilde{r}_{2,5}^{(2)} q_5^{(2)} + r_{4P}^{(1)} + r_{2P}^{(2)} = 0, \\ R_y^{(1)} = \tilde{r}_{3,5}^{(1)} q_5^{(1)} + \tilde{r}_{1,5}^{(2)} q_5^{(2)} + r_{3P}^{(1)} + r_{1P}^{(2)} = 0, \\ \Delta_5^{(1)} = \tilde{\delta}_{5,3}^{(1)} q_3^{(1)} + \tilde{\delta}_{5,4}^{(1)} q_4^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Для  $i$ -го КЭ ( $i = 2, 3, \dots, n-2$ ):

$$\begin{aligned} R_x^{(i)} &= \tilde{r}_{4,5}^{(i)} q_5^{(i)} + \tilde{r}_{2,5}^{(i+1)} q_5^{(i+1)} + r_{4P}^{(i)} + r_{2P}^{(i+1)} = 0, \\ R_y^{(i)} &= \tilde{r}_{3,5}^{(i)} q_5^{(i)} + \tilde{r}_{1,5}^{(i+1)} q_5^{(i+1)} + r_{3P}^{(i)} + r_{1P}^{(i+1)} = 0, \\ \Delta_5^{(i)} &= \tilde{\delta}_{5,1}^{(i)} q_1^{(i)} + \tilde{\delta}_{5,2}^{(i)} q_2^{(i)} + \tilde{\delta}_{5,3}^{(i)} q_3^{(i)} + \tilde{\delta}_{5,4}^{(i)} q_4^{(i)} + \delta_{5,5}^{(i)} \tilde{q}_5^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Для  $(n-1)$ -го КЭ:

$$\begin{aligned} R_x^{(n-1)} &= \tilde{r}_{4,5}^{(n-1)} q_5^{(n-1)} + \tilde{r}_{2,5}^{(n)} q_5^{(n)} + r_{4P}^{(n-1)} + r_{2P}^{(n)} = 0, \\ R_y^{(n-1)} &= \tilde{r}_{3,5}^{(n-1)} q_5^{(n-1)} + \tilde{r}_{1,5}^{(n)} q_5^{(n)} + r_{3P}^{(n-1)} + r_{1P}^{(n)} = 0, \\ \Delta_5^{(n-1)} &= \tilde{\delta}_{5,1}^{(n-1)} q_1^{(n-1)} + \tilde{\delta}_{5,2}^{(n-1)} q_2^{(n-1)} + \tilde{\delta}_{5,3}^{(n-1)} q_3^{(n-1)} + \\ &\quad + \tilde{\delta}_{5,4}^{(n-1)} q_4^{(n-1)} + \delta_{5,5}^{(n-1)} \tilde{q}_5^{(n-1)} = 0. \end{aligned}$$

Для  $n$ -го КЭ:

$$\begin{aligned} \Delta_5^{(n)} &= \dot{\delta}_{5,1}^{(n)} q_1^{(n)} + \dot{\delta}_{5,2}^{(n)} q_2^{(n)} + \dot{\delta}_{5,3}^{(n)} q_3^{(n)} + \delta_{5,5}^{(n)} \tilde{q}_5^{(n)} = 0, \\ q_3^{(n)} &= h, \quad \tilde{\delta}_{5,3}^{(n)} = 1. \end{aligned}$$

Система нелинейных уравнений решается с учетом сформулированных выше граничных условий.

$$\tilde{q}_5^{(1)} = Q \left( \frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_1} - 1 \right), \quad \tilde{q}_5^{(n)} = 0, \quad \tilde{q}_3^{(n)} = h, \quad d_n^* = d_n + h. \quad (4.28)$$

Для иллюстрации алгоритма расчета и тестирования результатов рассмотрим случай, когда сосредоточенная нагрузка приложена только в середине пролета (рис. 4.19, а).

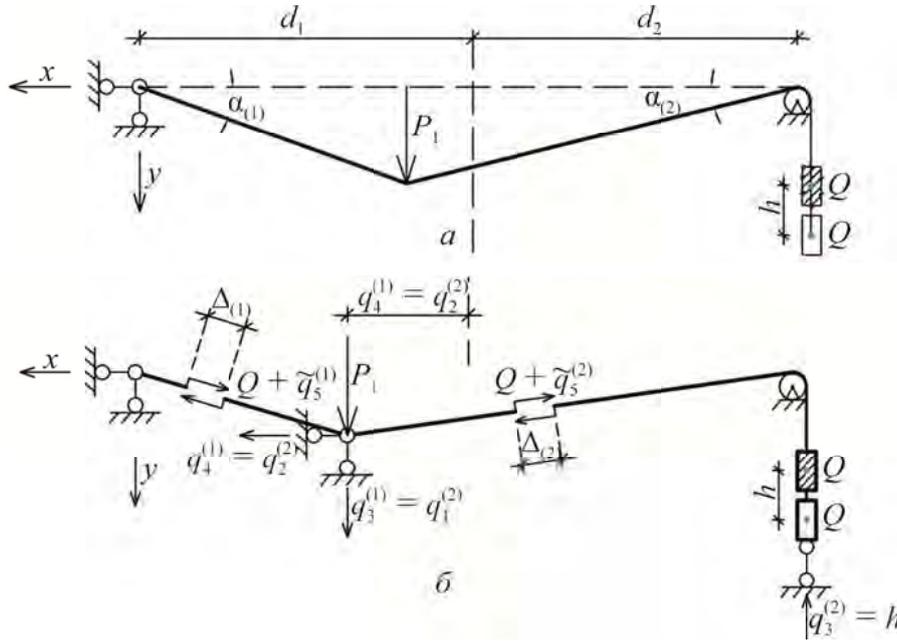


Рис. 4.19

Основная система изображена на рис. 4.19, б. Для четырех неизвестных в основной системе имеем четыре разрешающих уравнения:

$$\begin{aligned}
 R_x^{(1)} &= \tilde{r}_{4,5}^{(1)} q_5^{(1)} + \tilde{r}_{2,5}^{(2)} q_5^{(2)} + r_{4P}^{(1)} + r_{2P}^{(2)} = 0, \\
 R_y^{(1)} &= \tilde{r}_{3,5}^{(1)} q_5^{(1)} + \tilde{r}_{1,5}^{(2)} q_5^{(2)} + r_{3P}^{(1)} + r_{1P}^{(2)} = 0, \\
 \Delta_5^{(1)} &= \tilde{\delta}_{5,3}^{(1)} q_3^{(1)} + \tilde{\delta}_{5,4}^{(1)} q_4^{(1)} = 0, \\
 \Delta_5^{(2)} &= \tilde{\delta}_{5,1}^{(2)} q_1^{(2)} + \tilde{\delta}_{5,2}^{(2)} q_2^{(2)} + \tilde{\delta}_{5,3}^{(2)} q_3^{(2)} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
 \tilde{r}_{4,5}^{(1)} &= -\tilde{\delta}_{5,4}^{(1)} = -\cos \alpha_{(1)}, & \tilde{r}_{2,5}^{(2)} &= -\tilde{\delta}_{5,2}^{(2)} = \cos \alpha_{(2)}, & \tilde{r}_{3,5}^{(1)} &= -\tilde{\delta}_{5,3}^{(1)} = \sin \alpha_{(1)}, \\
 \tilde{r}_{1,5}^{(2)} &= -\tilde{\delta}_{5,1}^{(2)} = \sin \alpha_{(2)}, & \tilde{\delta}_{5,3}^{(2)} &= 1, & r_{4P}^{(1)} &= -Q \cos \alpha_{(1)}, & r_{2P}^{(2)} &= Q \cos \alpha_{(2)}, \\
 r_{3P}^{(1)} &= -\frac{P_1}{2} + Q \sin \alpha_{(1)}, & r_{1P}^{(2)} &= -\frac{P_1}{2} + Q \sin \alpha_{(2)}, & \sin \alpha_{(1)} &= \frac{q_3^{(1)}}{d_1}, \\
 \sin \alpha_{(2)} &= \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}}, & \cos \alpha_{(1)} &= \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1}, & \cos \alpha_{(2)} &= \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

После подстановки зависимостей (4.30) в систему уравнений (4.29), получаем систему четырех нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $q_3^{(1)}$ ,  $q_4^{(1)}$ ,  $\tilde{q}_5^{(1)}$ ,  $q_3^{(2)}$  (с учетом того, что  $q_4^{(1)} = q_2^{(2)}$ ,  $q_3^{(1)} = q_1^{(2)}$ ,  $\tilde{q}_5^{(2)} = 0$ ,  $q_3^{(2)} = h$ ).

$$\begin{aligned}
R_x^{(1)} &= -\frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} q_5^{(1)} + Q \left( \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} - \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} \right) = 0, \\
R_y^{(1)} &= \frac{q_3^{(1)}}{d_1} q_5^{(1)} - P + Q \left( \frac{q_3^{(1)}}{d_1} + \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} \right) = 0, \\
\Delta_5^{(1)} &= -\frac{q_3^{(1)}}{d_1} q_3^{(1)} + \frac{d_1 - q_4^{(1)}}{d_1} q_4^{(1)} = 0, \\
\Delta_5^{(2)} &= -\frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} q_3^{(1)} - \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} q_4^{(1)} + q_3^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Численное решение системы при  $d_1 = 5$  м;  $d_2 = 5$  м;  $Q = 10$  т;  $EF = \infty$ ;  $\frac{P}{Q} = 0 \dots 15$  выполнено методом последовательного догружения с уточнением  $Q$

на каждом шаге догружения результатов с помощью метода Ньютона.

Результат решения задачи методом конечных элементов в форме классического смешанного метода представлен ниже на диаграмме (рис. 4.20), а деформация системы при условии нерастяжимости нити — на рис. 4.21.

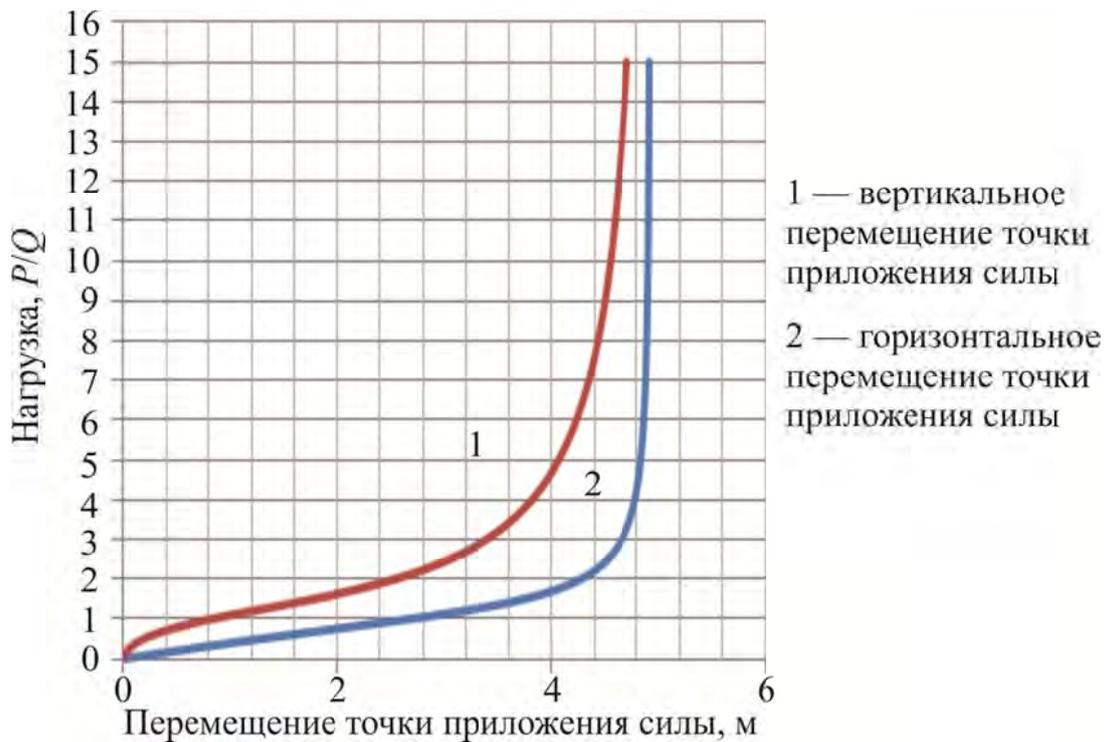


Рис. 4.20

Для оценки сходимости решения к точному выполним сравнение численного решения с аналитическим. Зададимся углом наклона левого элемента в  $30^\circ$ . С учетом того, что нить нерастяжима, вертикальное перемещение точки приложения силы будет равно

$$q_3^{(1)} = d_1 \sin 30^\circ = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ м.}$$

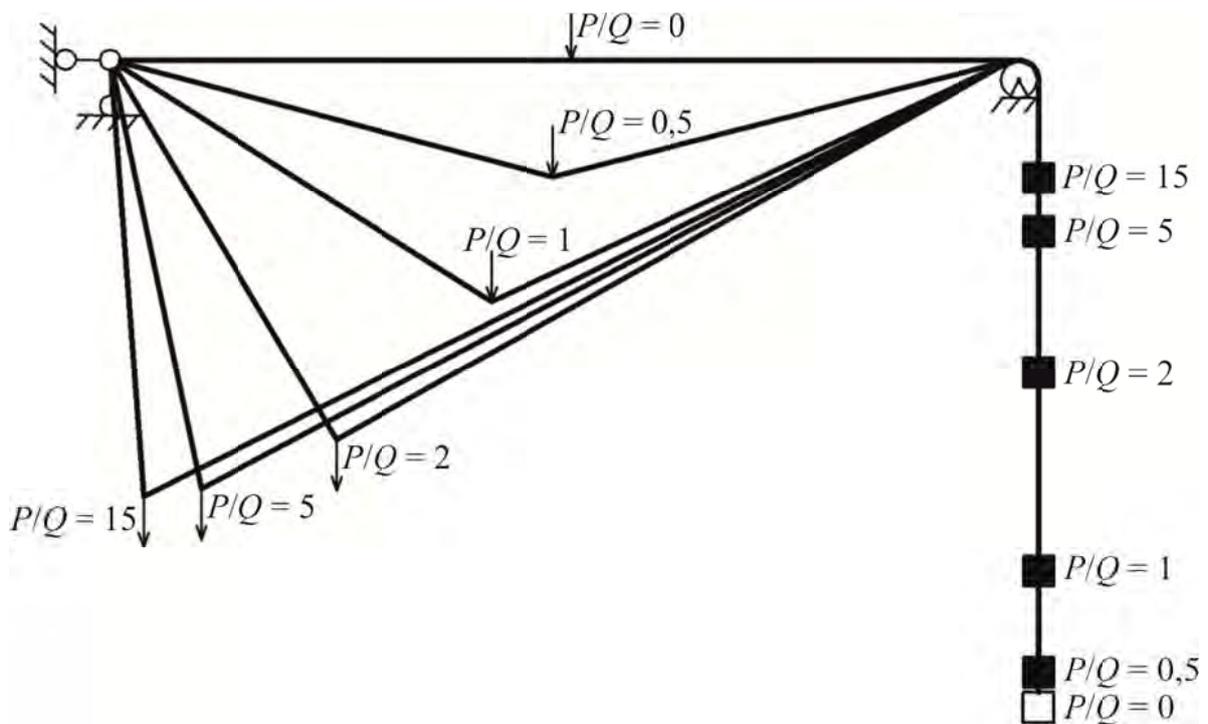


Рис. 4.21

Горизонтальное перемещение точки приложения силы будет равно

$$q_4^{(1)} = d_1 (1 - \cos 30^\circ) = 5(1 - 0,866) = 0,6699 \text{ м.}$$

Перемещение контргруза составит

$$q_3^{(2)} = \sqrt{(d_2 + q_4^{(1)})^2 + q_3^{(1)^2} - d_2} = \sqrt{(5 + 0,6699)^2 + 2,5^2} - 5 = 1,1966 \text{ м.}$$

Угол наклона правого элемента:

$$\sin \alpha_{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} = \frac{2,5}{5 + 1,1966} = 0,4034,$$

$$\cos \alpha_{(2)} = \frac{d_2 + q_4^{(1)}}{d_2 + q_3^{(2)}} = \frac{5 + 0,6699}{5 + 1,1966} = 0,9150.$$

Рассмотрим равновесие первого узла (левого):

$$(q_5^{(1)} + Q) \cos \alpha_{(1)} = Q \cos \alpha_{(2)}, \quad q_5^{(1)} \cos \alpha_{(1)} + Q \cos \alpha_{(1)} = Q \cos \alpha_{(2)},$$

$$q_5^{(1)} = Q \frac{\cos \alpha_{(2)}}{\cos \alpha_{(1)}} - Q, \quad P = (q_5^{(1)} + Q) \sin \alpha_{(1)} + Q \sin \alpha_{(2)},$$

$$P = \left( Q \frac{\cos \alpha_{(2)}}{\cos \alpha_{(1)}} - Q + Q \right) \sin \alpha_{(1)} + Q \sin \alpha_{(2)},$$

$$P = Q \cos \alpha_{(2)} \tan \alpha_{(1)} + Q \sin \alpha_{(2)}, \quad \frac{P}{Q} = \cos \alpha_{(2)} \tan \alpha_{(1)} + \sin \alpha_{(2)}.$$

После подстановки значений тригонометрических функций при заданном  $\alpha$ , получаем

$$\frac{P}{Q} = \cos \alpha_{(2)} \tan \alpha_{(1)} + \sin \alpha_{(2)} = 0,9150 \tan 30^\circ + 0,4034 = 0,9317.$$

При соотношении  $\frac{P}{Q} = 0,9317$  при расчете системы методом конечных элементов с шагом догружения  $\frac{P}{Q} = 0,05$ .

$$q_3^{(1)} = 2,49916 \text{ м}; q_4^{(1)} = 0,712074 \text{ м}; q_3^{(2)} = 1,255625 \text{ м}.$$

Относительная погрешность составляет

$$\Delta q_3^{(1)} = \frac{2,5 - 2,49916}{2,5} 100 = 0,0336 \text{ \%}; \Delta q_4^{(1)} = \frac{0,6699 - 0,712074}{0,6699} 100 = 6,29 \text{ \%};$$

$$\Delta q_3^{(2)} = \frac{1,1966 - 1,255625}{1,1966} 100 = 4,93 \text{ \%}.$$

Так как относительная погрешность при вычислении одного из неизвестных превышает 5 %, учащаем шаг нагружения в два раза.

При соотношении  $\frac{P}{Q} = 0,9317$  при расчете системы методом конечных элементов с шагом нагружения  $\frac{P}{Q} = 0,025$ .

$$q_3^{(1)} = 2,499757 \text{ м}; q_4^{(1)} = 0,699661 \text{ м}; q_3^{(2)} = 1,239058 \text{ м}.$$

Относительная погрешность составляет:

$$\Delta q_3^{(1)} = \frac{2,5 - 2,49916}{2,5} 100 = 0,0336 \text{ \%}; \Delta q_4^{(1)} = \frac{0,6699 - 0,712074}{0,6699} 100 = 6,29 \text{ \%};$$

$$\Delta q_3^{(2)} = \frac{1,1966 - 1,255625}{1,1966} 100 = 4,93 \text{ \%}.$$

Так как относительная погрешность при вычислении одного из неизвестных превышает 5 %, учащаем шаг нагружения в два раза.

При соотношении  $P/Q = 0,9317$  при расчете системы методом конечных элементов с шагом нагружения  $P/Q = 0,025$ .

$$q_3^{(1)} = 2,499757 \text{ м}; q_4^{(1)} = 0,699661 \text{ м}; q_3^{(2)} = 1,239058 \text{ м}.$$

Относительная погрешность составляет:

$$\Delta q_3^{(1)} = \frac{2,5 - 2,499757}{2,5} 100 = 0,00972 \text{ \%},$$

$$\Delta q_4^{(1)} = \frac{0,6699 - 0,699661}{0,6699} 100 = 4,44 \%,$$

$$\Delta q_3^{(2)} = \frac{1,1966 - 1,239058}{1,1966} 100 = 3,55 \%.$$

Проведенные расчеты тестовой системы показывают эффективность МКЭ в форме классического смешанного метода. Точность решения зависит от шага нагружения. Решение данной задачи по традиционному МКЭ в перемещениях невозможно в принципе.

#### 4.4. Нить переменной жесткости

Рассмотрим далее расчет нити переменной жесткости, представленной на рис. 4.22.

Исходные данные:  $EF^{(1)} = 1000 \text{ т}$ ;  $EF^{(2)} = \infty$ ;  $d^{(1)} = 5 \text{ м}$ ;  $d^{(2)} = 5 \text{ м}$ ;  $P = 0 \dots 10 \text{ т}$ ;  $N = 10 \text{ т}$ .

Система состоит из двух участков. Ввиду того, что система несимметрична по физическим характеристикам, то требуется рассмотрение обоих участков.

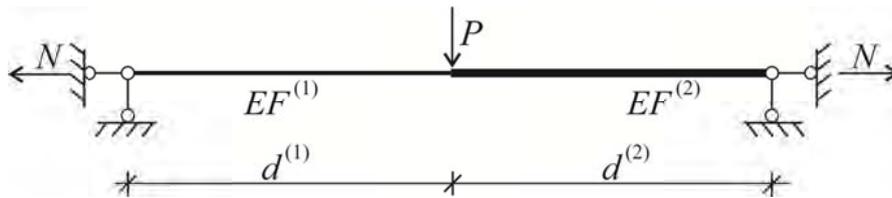


Рис. 4.22

Обозначения вводимых и устраненных связей для одного участка (КЭ-нить) показана на рис. 4.23.

Исходя из условий закрепления нити  $q_1^{(1)} = 0$ ;  $q_2^{(1)} = 0$ ;  $q_3^{(2)} = 0$ ;  $q_4^{(2)} = 0$ .

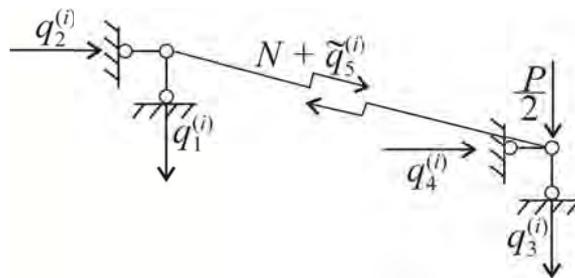


Рис. 4.23

Запишем разрешающие уравнения метода конечных элементов в форме классического смешанного метода.

Разрешающие уравнения для первого участка:

$$R_{1,y} = \sin \alpha^{(1)} (q_5^{(1)} + N) + \sin \alpha^{(2)} (q_5^{(2)} + N) - P^{(1)} = 0,$$

$$R_{1,x} = \cos \alpha^{(1)} (q_5^{(1)} + N) - \cos \alpha^{(2)} (q_5^{(2)} + N) = 0,$$

$$\Delta_1 = -\sin \alpha^{(1)} q_3^{(1)} - \cos \alpha^{(1)} q_4^{(1)} + \frac{l^{(1)}}{EF^{(1)}} q_5^{(1)} = 0.$$

Разрешающие уравнения для второго участка:

$$R_{2,y} = R_{1,y} = \sin \alpha^{(1)} (q_5^{(1)} + N) + \sin \alpha^{(2)} (q_5^{(2)} + N) - P^{(1)} = 0,$$

$$R_{2,x} = R_{1,x} = \cos \alpha^{(1)} (q_5^{(1)} + N) - \cos \alpha^{(2)} (q_5^{(2)} + N) = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

Из геометрии рассматриваемой системы в деформированном состоянии следует, что:

$$l^{(1)} = d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}; \quad \tan \alpha^{(1)} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(1)} + q_4^{(1)}}; \quad \sin \alpha^{(1)} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}};$$

$$\cos \alpha^{(1)} = \frac{d^{(1)} + q_4^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}}; \quad l^{(2)} = d^{(2)} + \frac{\tilde{q}_5^{(2)} d^{(2)}}{EF^{(2)}} = d^{(2)}; \quad \tan \alpha^{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(2)} - q_4^{(1)}};$$

$$\sin \alpha^{(2)} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(2)} + \frac{\tilde{q}_5^{(2)} d^{(2)}}{EF^{(2)}}} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(2)}}; \quad \cos \alpha^{(2)} = \frac{d^{(2)} - q_4^{(1)}}{d^{(2)} + \frac{\tilde{q}_5^{(2)} d^{(2)}}{EF^{(2)}}} = \frac{d^{(2)} - q_4^{(1)}}{d^{(2)}}.$$

Система разрешающих уравнений с учетом геометрии:

$$R_{1,y} = \frac{q_3^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}} (q_5^{(1)} + N) + \frac{q_3^{(1)}}{d^{(2)}} (q_5^{(2)} + N) - P^{(1)} = 0,$$

$$R_{1,x} = \frac{d^{(1)} + q_4^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}} (q_5^{(1)} + N) - \frac{d^{(2)} - q_4^{(1)}}{d^{(2)}} (q_5^{(2)} + N) = 0,$$

$$\Delta_1 = -\frac{q_3^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}} q_3^{(1)} - \frac{d^{(1)} + q_4^{(1)}}{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}} q_4^{(1)} + \frac{d^{(1)} + \frac{\tilde{q}_5^{(1)} d^{(1)}}{EF^{(1)}}}{EF^{(1)}} q_5^{(1)} = 0.$$

Система разрешающих уравнений после преобразования:

$$R_{1,y} = q_3^{(1)} EF^{(1)} (\tilde{q}_5^{(1)} + N) d^{(2)} + q_3^{(1)} (\tilde{q}_5^{(2)} + N) d^{(1)} (EF^{(1)} + \tilde{q}_5^{(1)}) - P^{(1)} d^{(2)} d^{(1)} (EF^{(1)} + \tilde{q}_5^{(1)}) = 0,$$

$$R_{1,x} = (d^{(1)} + q_4^{(1)}) EF^{(1)} (\tilde{q}_5^{(1)} + N) d^{(2)} - (d^{(2)} - q_4^{(1)}) (\tilde{q}_5^{(2)} + N) d^{(1)} (EF^{(1)} + \tilde{q}_5^{(1)}) = 0,$$

$$\Delta_1 = -q_3^{(1)2} EF^{(1)3} - (d^{(1)} + q_4^{(1)}) q_4^{(1)} \cdot EF^{(1)3} + d^{(1)2} (EF^{(1)} + \tilde{q}_5^{(1)})^2 \tilde{q}_5^{(1)} = 0.$$

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений выполняется методом Ньютона.

Результаты решения системы при нагружении нити в один этап (то есть, без учета постепенного нагружения системы) приведены на рис. 4.24, 4.25.

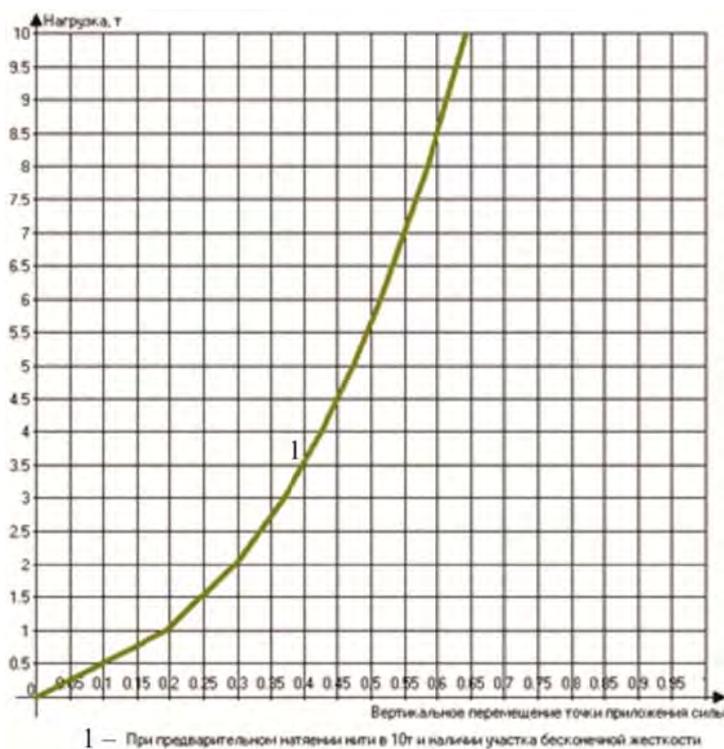


Рис. 4.24

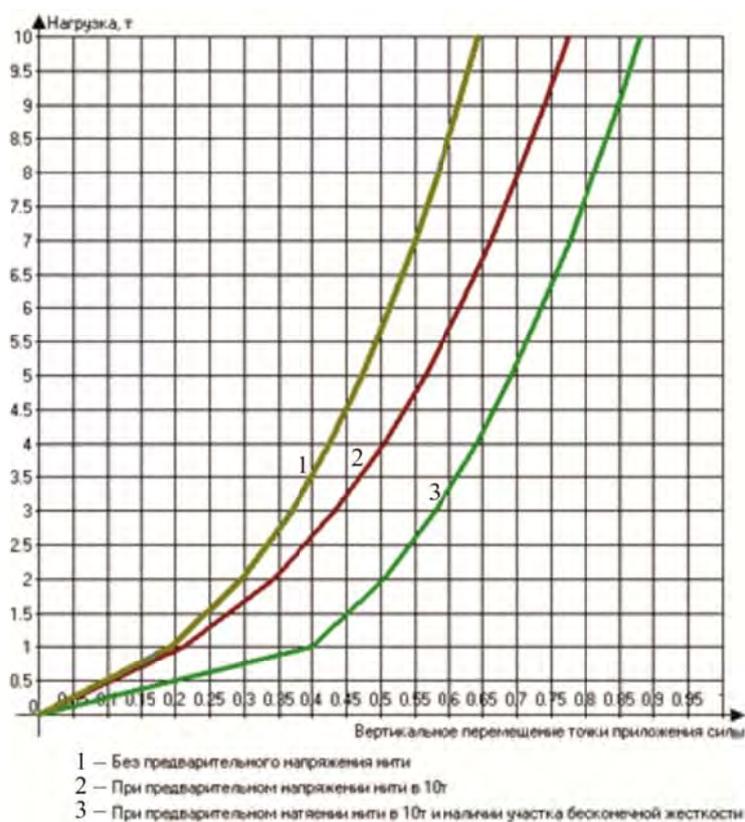


Рис. 4.25

## 5. ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

### 5.1. Нелинейно-упругий и упруго-пластический материал

Поведение большинства конструкционных материалов характеризуется отклонением от закона Гука, связанным с явлением пластичности и образованием остаточной (пластической) деформации после разгрузки (рис. 5.1, б).

Особенностью поведения конструкций из таких материалов является, во-первых, то, что рост нагрузок не обязательно вызывает рост напряжений во всех точках тела. А во-вторых, для них неприменим принцип независимости действия сил. Окончательный эффект действия комбинации нагрузок зависит не только от ее состава, но и от последовательности их приложения (истории нагружения) [18, 28, 30, 31].

Для упрощения решения задач с физической нелинейностью обычно используется гипотеза о нелинейно-упругом материале, в соответствии с которой связь между деформацией и напряжением определяется однозначно соотношением  $\sigma = f(\varepsilon)$  как при нагрузке, так и при разгрузке (закон разгрузки совпадает с законом нагрузки), как это показано на рис. 5.1, а.



Рис. 5.1

Эта гипотеза основана на теореме Л. М. Качанова [28. С. 12]: *поведение упруго-пластического тела при активной пластической деформации неотличимо от поведения нелинейно-упругого тела с такой же зависимостью между напряжениями и деформациями.* Это означает, что при простом нагружении законы деформации упруго-пластического тела (см. рис. 5.1, б) можно описать, используя законы деформации нелинейно-упругого тела с идентичной диаграммой растяжения.

Некоторые типы таких диаграмм показаны на рис. 5.2, 5.3.

На рис. 5.2 однозначное соотношение  $\sigma = f(\varepsilon)$  представлено в виде нелинейной диаграммы растяжения, аппроксимированной ломаной линией, удобной при решении задач численными методами.

В качестве исходных данных при реализации компьютерной программы вводятся количество и длины участков, т. е. их абсциссы и ординаты.

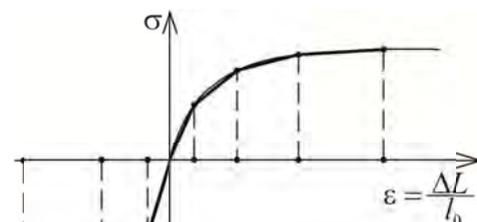


Рис. 5.2

При помощи нелинейно-упругих зависимостей можно решать разнообразные задачи. Так, используя диаграмму на рис. 5.3, а, получим выключающийся при сжатии стержень (проявление конструктивной нелинейности, которая будет рассмотрена в следующем разделе). Диаграмма на рис. 5.3, б соответствует хрупкому материалу, не воспринимающему растягивающее усилие.

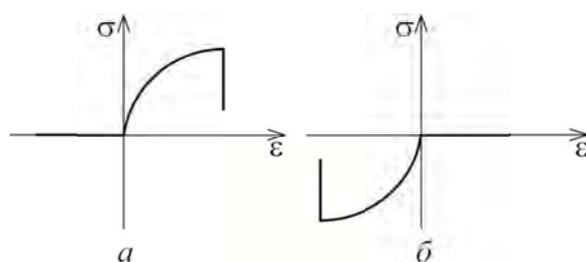


Рис. 5.3

Для иллюстрации упомянутых выше особенностей поведения конструкций из упруго-пластического материала приведем примеры из книги А. В. Перельмутера [18, С. 120—122, 125—127].

**Пример 1.** Рассмотрим систему, состоящую из четырех одинаковых по длине и площадям поперечного сечения  $F$  продольно деформируемых стержней, выполненных из идеально упруго-пластического материала и объединенных абсолютно жесткой недеформируемой балкой. Эта система нагружена независимо меняющимися силами  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 5.4).

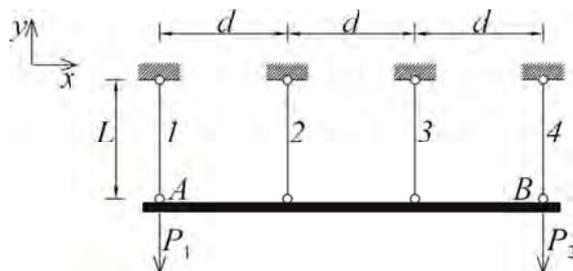


Рис. 5.4

Условия равновесия для нее имеют следующий вид:

$$\begin{cases} X = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)F - (P_1 + P_2) = 0; \\ M_A = d(\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4)F - 3P_2d = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Так как балка жесткая, то перемещения нижних концов стержней связаны геометрическими соотношениями

$$\begin{cases} 3\Delta_2 = 2\Delta_1 + \Delta_4, \\ 3\Delta_3 = \Delta_1 + 2\Delta_4. \end{cases} \quad (5.2)$$

Относительные удлинения стержней пропорциональны перемещениям:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta_i}{L} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5.3)$$

При этом физические зависимости имеют вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} + \varepsilon_{i,pl} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.4)$$

где  $E$  — модуль упругости материала, а через  $\varepsilon_{i,pl}$  обозначена пластическая часть деформации. Зависимости (5.1)—(5.4) справедливы не только для  $\sigma$ ,  $P$ ,  $\varepsilon_{pl}$ , но и для их приращений.

Решая систему уравнений (5.1)—(5.4) относительно напряжений  $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ , получаем

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ 0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 \\ -0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + E \begin{bmatrix} -0,3 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0,4 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & -0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1p,l} \\ \varepsilon_{2p,l} \\ \varepsilon_{3p,l} \\ \varepsilon_{4p,l} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Из уравнений (5.1) и (5.2) находим зависимости для перемещений концов жесткой балки АВ от сил и пластических деформаций:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1p,l} \\ \varepsilon_{2p,l} \\ \varepsilon_{3p,l} \\ \varepsilon_{4p,l} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Соотношения (5.5 и 5.6) позволяют проследить за процессом изменения пластических деформаций в стержнях и перемещений балки при заданной программе нагружения.

Рассмотрим случай последовательного приложения и снятия независимо действующих нагрузок, меняющихся в диапазоне  $0 \leq \alpha_1 = \frac{P_1}{A\sigma_T} \leq 1,2$

и  $0 \leq \alpha_2 = \frac{P_2}{A\sigma_T} \leq 1,62$ . Пусть сначала расчет только  $P_1$ , а  $P_2 = 0$ . Первым будет

течь стержень 1, и это начнется тогда, когда  $0,7\alpha_1 = 1$ , т. е. при  $\alpha_1 = 1,429$ . Зависимость пластической деформации в первом стержне при параметре нагружения  $\alpha_1 = 1,62$ , при котором, как нетрудно проверить, отсутствует текучесть других стержней, найдем из первого уравнения (5.5), положив  $\sigma_1 = \sigma_T$  и все пластические деформации стержней 2, 3 и 4 отсутствующими, будем иметь:

$$\sigma_T = 0,7 \cdot 1,62\sigma_T - 0,3 \cdot E\varepsilon_{1,p,l} = 1,134\sigma_T - 0,3 \cdot E\varepsilon_{1,p,l}$$

или

$$\varepsilon_{1,p,l} = 0,447 \frac{\sigma_T}{E}.$$

Если это равенство подставить в (5.1), то получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \sigma_T \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,648 \\ 0,162 \\ -0,413 \end{Bmatrix}.$$

Видно, что все стержни, кроме первого, работают упруго. Если теперь разгрузить конструкцию, то, вновь обращаясь к (5.1) и подставив туда нулевое значение нагрузки и  $\varepsilon_{1,p,l} = 0,447 \frac{\sigma_T}{E}$ , получим значения остаточных напряжений

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_4^0 \end{Bmatrix} = \sigma_T \begin{Bmatrix} -0,134 \\ 0,178 \\ 0,045 \\ -0,089 \end{Bmatrix}.$$

Если теперь догрузить систему полным значением второй нагрузки  $P_2 = 1,62A\sigma_T$ , то, предполагая, что система будет воспринимать эту нагрузку как упругую, с помощью (5.5) получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \sigma_T \begin{Bmatrix} 1,000 \\ 0,648 \\ 0,162 \\ -0,413 \end{Bmatrix} + \sigma_T \begin{Bmatrix} 1,62 \cdot (-0,2) \\ 1,62 \cdot 0,1 \\ 1,62 \cdot 0,4 \\ 1,62 \cdot 0,7 \end{Bmatrix} = \sigma_T \begin{Bmatrix} 0,676 \\ 0,810 \\ 0,810 \\ 0,721 \end{Bmatrix}.$$

Таким образом, предположение об упругом характере работы конструкции при догрузке подтвердилось, и приведенное выше решение можно полагать верным.

Однако следует обратить внимание на характерную особенность полученного решения: при совершенно симметричной конструкции и одинаковых по величине воздействиях  $P_1$  и  $P_2$  мы пришли к несимметричному результату за счет того, что несимметричной была последовательность нагружения конструкции — сперва  $P_1$  и затем лишь  $P_2$ .

Нетрудно показать, что при обратной последовательности нагружения (сперва  $P_2$  и затем  $P_1$ ) решение было бы

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \sigma_T \begin{Bmatrix} 0,721 \\ 0,810 \\ 0,810 \\ 0,676 \end{Bmatrix}.$$

Здесь следует заметить, что при использовании нелинейно-упругой (обратимой) модели материала вместо пластического материала, работающего различным способом при нагружении и разгрузке, эффект влияния последовательности нагружения исчезает.

**Пример 2.** Рассмотрим ту же конструкцию, что и в примере 1, но нагруженную силой  $P$ , расположенной под вторым стержнем (рис. 5.5).

Проследим за изменениями напряжений в стержнях и перемещением левого конца балки в процессе роста силы  $P$  вплоть до ее предельного значения.

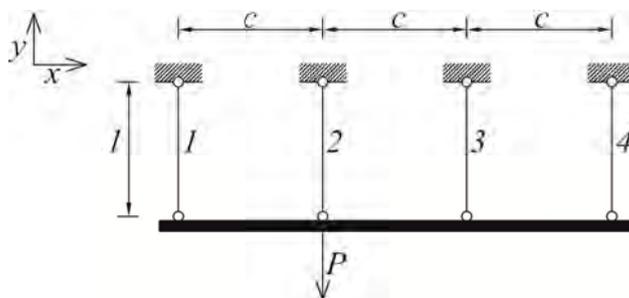


Рис. 5.5

Уравнения равновесия, записанные с помощью усилий в стержнях, имеют вид:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 &= P; \\ N_2c + 2N_3c + 2N_4c &= Pc. \end{aligned}$$

После сокращения на  $c$  и деления на  $F$  приходим к равенствам в напряжениях:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{P}{F}; \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 = \frac{P}{F}. \quad (5.7)$$

Условия совместности деформаций можно записать так:

$$\Delta_2 = \frac{2\Delta_1}{3} + \frac{\Delta_4}{3}; \quad \Delta_3 = \frac{\Delta_1}{3} + \frac{2\Delta_4}{3}.$$

После деления на  $\frac{l}{3}$  имеем:

$$3\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_4; \quad 3\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_4. \quad (5.8)$$

Заметим, что равенства (5.7) и (5.8) не зависят от наличия и степени развития пластических деформаций.

1. *Упругая стадия работы.* В начале нагружения все стержни работают упруго, справедлив закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}; \quad \varepsilon_4 = \frac{\sigma_4}{E}.$$

Из этого равенства и соотношений (5.6) следует:

$$3\sigma_2 = 2\sigma_1 + \sigma_4; \quad 3\sigma_3 = \sigma_1 + 2\sigma_4.$$

Добавляя эти равенства к уравнениям (5.3) и решая систему, получаем

$$\sigma_1 = \frac{0,4P}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{0,3P}{F}; \quad \sigma_3 = \frac{0,2P}{F}; \quad \sigma_4 = \frac{0,1P}{F}.$$

Перемещение левого конца балки будет равно

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l = \frac{0,4Pl}{EF}.$$

Из представленного решения видно, что наибольшие напряжения возникают в первом стержне. В нем будет раньше достигнут предел текучести. Как только это произойдет, конструкция перейдет в упруго-пластическую стадию работы. Предельную нагрузку  $P_{e1}$  найдем из условия:  $\sigma_1 = \sigma_T$ . Из него следует

$$P_{e1} = \frac{2,5\sigma_T F}{F}.$$

2. *Упруго-пластическая стадия* — в состоянии текучести находится первый стержень. Когда возрастающая сила  $P$  превысит предельное упругое значение, первый стержень потечет, напряжения в нем будут постоянными  $\sigma_1 = \sigma_T$ . Второй, третий и четвертый стержни еще будут работать упруго. Уравнения равновесия (5.1) после этого примут вид

$$\sigma_T + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = \frac{P}{F}, \quad \sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 = \frac{P}{F}. \quad (5.9)$$

По последнему равенству определяем

$$\Delta l_1 = \frac{(4P - 7\sigma_T F)l}{3EF}.$$

Сопоставляя величины напряжений (5.7), видим, что текучесть во втором стержне начнется раньше, чем в третьем или четвертом. Обозначим силу, соответствующую началу текучести второго стержня  $P_{e2}$ , и найдем ее значение:

$$\sigma_T = \sigma_2 = \frac{5P_{e2} - 8\sigma_T F}{6F} \Rightarrow P_{e2} = \frac{2,8\sigma_T F}{F}.$$

3. *Упруго-пластическая стадия* — в состоянии текучести находятся первый и второй стержни. Чтобы отразить работу конструкции на этом этапе, в уравнения равновесия (5.5) введем равенства  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T$ . В итоге получим:

$$\sigma_3 = \frac{2P - 5\sigma_T F}{F}; \quad \sigma_4 = \frac{3\sigma_T F - P}{F}. \quad (5.10)$$

Деформации стержней 3 и 4 найдем по закону Гука:

$$\varepsilon_3 = \frac{2P - 5\sigma_T F}{EF}; \quad \varepsilon_4 = \frac{3\sigma_T F - P}{EF}.$$

Подставляя этот результат во второе равенство (5.6), получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{8P - 21\sigma_T F}{EF},$$

откуда

$$\Delta l_1 = \frac{(8P - 21\sigma_T F)l}{EF}.$$

Если в состояние текучести перейдет стержень 3 или 4, конструкция станет геометрически изменяемой и разрушится. Найдем разрушающую нагрузку  $P_{и}$ . Третий стержень потечет, когда  $\sigma_3 = \frac{2P - 5\sigma_T F}{F} = \sigma_T$ , т. е. при  $P_{и} = 3\sigma_T F$ , а четвертый при  $\sigma_4 = \frac{3\sigma_T F - P}{F} = \sigma_T$ , что дает  $P_{и} = 4\sigma_T F$ . Из двух решений действительно меньшее —  $P_{и} = 3\sigma_T F$ .

Несмотря на простоту рассмотренной стержневой системы, в ее работе проявились такие особенности, которые свойственны и более сложным конструкциям.

Первая особенность (рис. 5.6, а) — *предельная упругая нагрузка  $P_e$  (предельная по упругому напряжению в опасной точке) меньше разрушающей  $P_{и}$  (предельной по несущей способности)*. Это свидетельствует о том, что методы расчетов, учитывающие пластические свойства материалов, полнее используют резервы прочности конструкций.

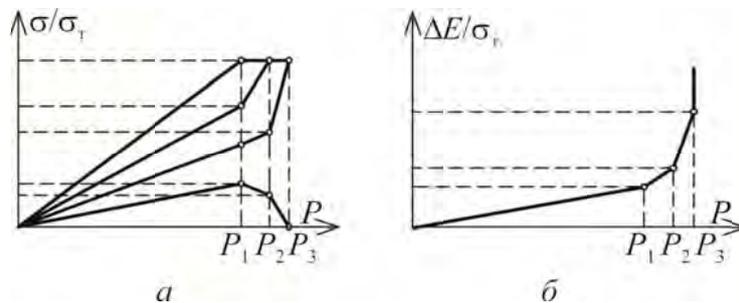


Рис. 5.6

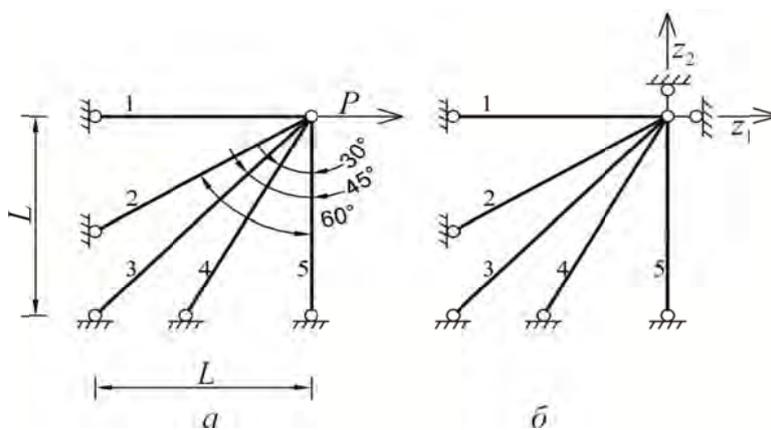
Вторая особенность — *перераспределение напряжений в упруго-пластической стадии*. Действительно, при упругой работе характеристики напряженно-деформированного состояния росли пропорционально росту нагрузки. Отношения между ними оставались постоянными. С появлением

пластических деформаций эти соотношения изменяются. Так, напряжение  $\sigma_1$ , достигнув предела текучести, расти перестало, но увеличились скорости роста напряжений  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Третья — несмотря на монотонный рост силы, возможна локальная разгрузка (см. уменьшение напряжения в четвертом стержне, см. рис. 5.6, а, б).

Рассмотрим далее возможность расчета шарнирно-стержневых систем из идеального упруго-пластического материала на основе классического метода перемещений.

Алгоритм расчета изложим на примере системы, состоящей из пяти стержней (рис. 5.7) с одинаковой продольной жесткостью сечения  $EF$ . Геометрия заданной системы, нагрузка и принятая для нее основная система метода перемещений показаны на рис. 5.7, а и рис. 5.7, б соответственно.



$$\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 60^\circ, \varphi_3 = 45^\circ, \varphi_4 = 30^\circ, \varphi_5 = 0^\circ$$

Рис. 5.7

Усилия в стержнях системы и реакции в концевых связях этих стержней при единичных смещениях связей основной системы (без множителя  $EF/L$ ) приведены на рис. 5.8, а, б.

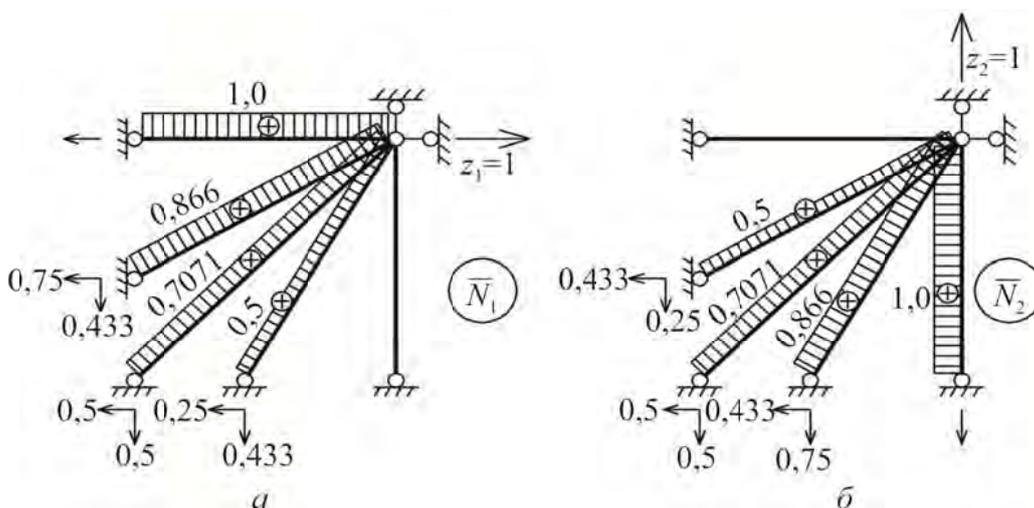


Рис. 5.8

По ним находятся коэффициенты при неизвестных канонических уравнений метода перемещений:

$$r_{1,1} = \frac{EF}{L} \left( 1 + \frac{0,75}{1,1547} + \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,25}{1,1547} \right) = 2,2196 \frac{EF}{L};$$

$$r_{1,2} = r_{2,1} = \frac{EF}{L} \left( \frac{0,433}{1,1547} + \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,433}{1,1547} \right) = 1,1035 \frac{EF}{L};$$

$$r_{2,2} = \frac{EF}{L} \left( \frac{0,25}{1,1547} + \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,75}{1,1547} + 1 \right) = 2,2196 \frac{EF}{L};$$

$$r_{1,P} = -P, \quad r_{2,P} = 0.$$

Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 2,2196Z_1 + 1,1035Z_2 - \frac{PL}{EF} = 0, \\ 1,1035Z_1 + 2,2196Z_2 = 0. \end{cases}$$

находим:

$$Z_1 = 0,5950 \frac{PL}{EF}; \quad Z_2 = -0,2975 \frac{PL}{EF}.$$

Соответствующие этим значениям  $Z$  эпюры усилий приведены на рис. 5.9, а, б, в (без множителя  $PL/EF$ ).

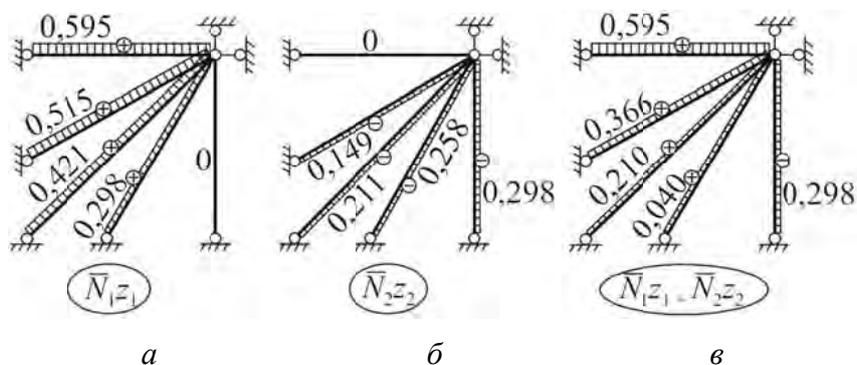


Рис. 5.9

На этом заканчивается *первый этап расчета* (упругая стадия работы материала стержней). Из него видно, что стержень  $I$  переходит в пластическую стадию работы его материала при условии, что усилия в нем

$$N_1 = 0,595P = N_T = \sigma_T F.$$

Отсюда следует, что нагрузка, при которой это состояние наступает, определяется выражением  $P_1 = 1,681N_T$ .

*Второй этап расчета* (упруго-пластическая стадия) начинается с учета того, что стержень  $I$  находится в пластическом состоянии, т. е.  $N_1 = N_T$ .

В этом случае коэффициенты системы канонических уравнений будут иметь следующий вид:

$$r_{1,1} = 1,2196 \frac{EF}{L}; \quad r_{1,2} = r_{2,1} = 1,1035 \frac{EF}{L}; \quad r_{2,2} = 2,2196 \frac{EF}{L}; \quad r_{1P} = -P + N_T; \quad r_{2P} = 0.$$

Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 1,2196Z_1 + 1,1035Z_2 = \frac{L}{EF}(P - N_T), \\ 1,1035Z_1 + 2,2196Z_2 = 0, \end{cases}$$

находим:

$$Z_1 = 1,490 \frac{L}{EF}(P - N_T), \quad Z_2 = -0,741 \frac{L}{EF}(P - N_T).$$

В соответствии с этими значениями  $Z_1$  и  $Z_2$  на рис. 5.10, *а, б, в* показаны эпюры  $\bar{N}_1 Z_1$ ,  $\bar{N}_2 Z_2$  и эпюра  $N = \bar{N}_1 Z_1 + \bar{N}_2 Z_2$ , на которой изображено уже достигнутое пластическое состояние стержня *1* с усилием в нем  $N_1 = N_T$ . Усилия во всех остальных стержнях показаны без множителя  $(P - N_T)$ , т. е.

$$\begin{aligned} N_2 &= 0,919(P - N_T); \quad N_3 = 0,529(P - N_T); \\ N_4 &= 0,103(P - N_T); \quad N_5 = -0,741(P - N_T). \end{aligned}$$

Рассматривая все варианты достижения в этих стержнях пластического состояния, получаем для них:

$$\begin{aligned} N_2 = N_T &\rightarrow P_2 = 2,088N_T; \quad N_3 = N_T \rightarrow P_3 = 2,89N_T; \\ N_4 = N_T &\rightarrow P_4 = 10,71N_T; \quad N_5 = N_T \rightarrow P_5 = 2,35N_T. \end{aligned}$$

Сравнение этих вариантов показывает, что минимальным является  $P_2 = 2,088N_T$ , т. е. следующим после стержня *1* в пластическое состояние перейдет стержень *2*.

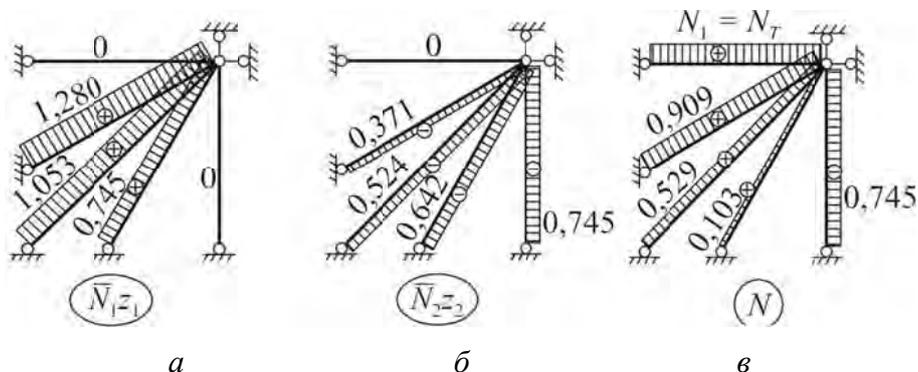


Рис. 5.10

*Третий этап* — упруго-пластическое состояние стержней *1* и *2* как исходное, т. е.  $N_1 = N_2 = N_T$ . Коэффициенты при неизвестных системы канони-

ческих уравнений метода перемещений (при заданных усилиях  $N_1 = N_2 = N_T$ ) имеют следующий вид:

$$r_{1,1} = \frac{EF}{L} \left( \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,25}{1,1547} \right) = \frac{EF}{L} (0,3536 + 0,2165) = 0,5701 \frac{EF}{L};$$

$$r_{1,2} = r_{2,1} = \frac{EF}{L} \left( \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,433}{1,1547} \right) = \frac{EF}{L} (0,3536 + 0,375) = 0,7286 \frac{EF}{L};$$

$$r_{2,2} = \frac{EF}{L} \left( \frac{0,5}{1,4142} + \frac{0,75}{1,1547} + 1 \right) = \frac{EF}{L} (0,3536 + 0,6495 + 1) = 2,005 \frac{EF}{L};$$

$$r_{1P} = -P + N_1 \sin \varphi_1 + N_2 \sin \varphi_2 = -P + N_T (1 + 0,866) = -P + 1,866 N_T;$$

$$r_{2P} = 0 + N_1 \cos \varphi_1 + N_2 \cos \varphi_2 = N_T (0 + 0,5) = 0,5 N_T.$$

Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 0,5701 Z_1 + 0,7286 Z_2 - \frac{L}{EF} (P - 1,866 N_T) = 0, \\ 0,7286 Z_1 + 2,005 Z_2 + \frac{L}{EF} 0,5 N_T = 0, \end{cases}$$

находим

$$Z_1 = 3,2768 P - 5,5187 N_T; \quad Z_2 = -1,1924 - P + 1,7585 N_T.$$

Соответствующие этим значениям  $Z_1$  и  $Z_2$  эпюры  $\bar{N}_1 Z_1$ ,  $\bar{N}_2 Z_2$  и эпюра  $N = \bar{N}_1 Z_1 + \bar{N}_2 Z_2$  показаны на рис. 5.11, а, б, в.

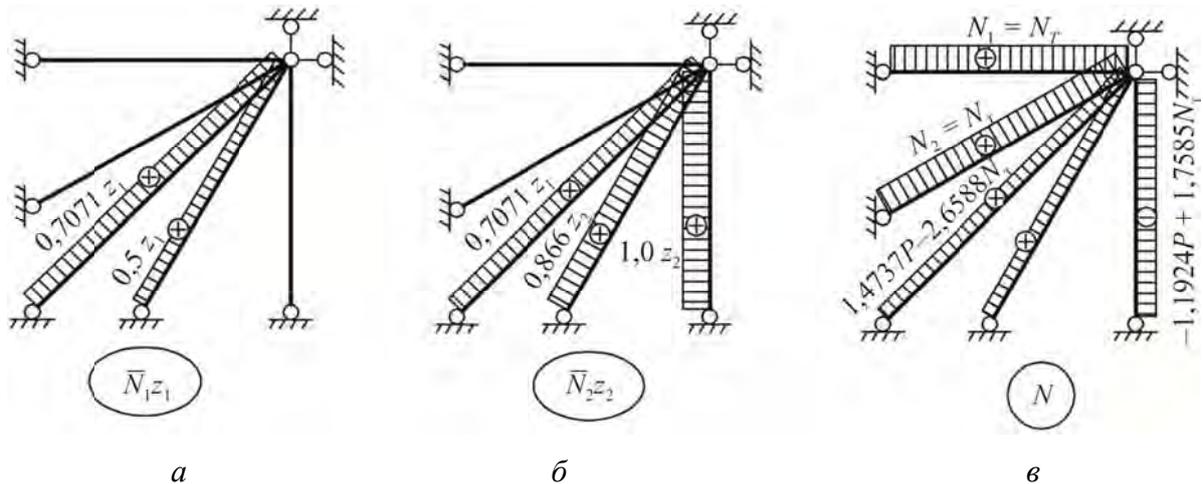


Рис. 5.11

В итоге получаем:

$$N_1 = N_2 = N_T;$$

$$\begin{aligned} N_3 &= 0,7071(33,2708 P - 5,5187 N_T) - 0,7071(-1,1924 P + 1,7585 N_T) = \\ &= 1,4937 P - 2,6588 N_T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4 &= 0,5(3,2768 - 5,5187N_T) + 0,866(-1,1924P + 1,7585N_T) = \\
&= 0,6058P + 2,2365N_T; \\
N_5 &= -1,1924P + 1,7585N_T.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем для сравнения следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_T; N_2 = N_T; \\
N_3 &= 1,4937P - 2,6588N_T = N_T \rightarrow P_3 = 2,4828N_T; \\
N_4 &= 0,6058P + 2,2365N_T = N_T \rightarrow P_4 = 5,3425N_T; \\
N_5 &= -1,1924P + 1,7585N_T = -N_T \rightarrow P_5 = 2,3134N_T.
\end{aligned}$$

Следовательно, стержень 5 переходит на данном этапе в пластическое состояние.

Переходим к четвертому этапу, учитывая, что стержни 1, 2, 5 уже находятся в пластическом состоянии. Тогда, повторяя выкладки, получаем

$$\begin{aligned}
r_{1,1} &= \frac{EF}{L}(0,2165 + 0,3536) = 0,5701 \frac{EF}{L}; \\
r_{1,2} &= r_{2,1} = \frac{EF}{L}(0,375 + 0,3536) = 0,7286 \frac{EF}{L}; \\
r_{2,2} &= \frac{EF}{L}(0,5536 + 0,6485) = 1,0031 \frac{EF}{L}; \\
r_{1P} &= -P + N_T(1 + 0,866) = -P + 1,866N_T; \\
r_{2P} &= 0,5N_T - N_T = -0,5N_T.
\end{aligned}$$

Решая систему канонических уравнений

$$\begin{cases} 0,5701Z_1 + 0,7286Z_2 = P - 1,866N_T, \\ 0,7286Z_1 + 1,0031Z_2 = 0,5N_T, \end{cases}$$

находим

$$Z_1 = 24,465P - 54,538N_T; \quad Z_2 = -17,7703P + 39,617N_T.$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
N_1 &= N_T; \\
N_2 &= N_T; \\
N_5 &= N_T; \\
N_3 &= 0,707(Z_1 + Z_2) = 4,7364P - 10,551N_T = N_T \rightarrow P_3 = 2,440N_T; \\
N_4 &= 0,5Z_1 + 0,866Z_2 = -3,1565P + 7,0393N_T = N_T \rightarrow P_4 = 2,547N_T.
\end{aligned}$$

Это означает, что стержень 3 переходит в пластическое состояние, а нагрузка  $P = 2,44N_T$  является предельной для рассматриваемой конструкции.

Необходимо отметить, что решение этой задачи возможно по методу предельного равновесия, если известна история нагружения, как это показано в предыдущих примерах.

Если же история нагружения неизвестна, то необходимо будет перебрать все возможные варианты потери несущей способности. Количество таких вариантов равно  $n$ , где  $n$  — число стержней в системе.

## 5.2. Упруго-пластический расчет стальных конструкций

Деформации и устойчивость стальных конструкций зависят от геометрической и физической нелинейностей их поведения. При больших перемещениях конструкций условия равновесия и зависимости «перемещения — деформации» нелинейны. Если материал в отдельных частях конструкции достигает предела текучести, то изменяются соотношения «напряжения — деформации», а также отношения жесткостей элементов конструкций, и в ней могут образовываться механизмы.

При малых перемещениях такие задачи традиционно решаются с помощью методов оптимизации. При их использовании рассматривается последовательность статически возможных состояний конструкции и определяется максимальный коэффициент нагружения, называемый коэффициентом надежности приспособляемости. Альтернативно может быть рассмотрена последовательность кинематически возможных перемещений конструкции и определен минимальный коэффициент нагружения

В прямом методе расчета, используемом в данной работе [30, 31], удовлетворяются как статические, так и кинематические условия, оптимизация не требуется. Прямой метод требует расчета последовательности конфигураций конструкции, так как при наступлении пластичности ее жесткость изменяется. Если, например, какой-то из стержней фермы достигает пластического состояния или, наоборот, стержень восстанавливает упругое состояние при разгрузке, то должно быть выполнено переформирование и разложение матрицы жесткости системы.

На начальных этапах развития теории предельного пластического равновесия и приспособляемости мощности компьютеров не соответствовали объему вычислений прямого метода. В связи с этим предпочтение отдавалось методам, основанным на теории оптимизации.

При современном уровне возможностей компьютеров преимущество непрямого оптимизационного метода становится спорным даже для задач с малыми перемещениями.

### 5.2.1. Свойства сталей

1. *Одноосное напряженное состояние.* Идеализированная диаграмма «напряжения — деформации» для цикла «одноосное нагружение — разгрузка образца» показана на рис. 5.12, а. Упругие нагружение и разгрузка происходят с модулем упругости  $E$ , а пластическая деформация происходит при

постоянном значении напряжения текучести  $\sigma_y$  при растяжении и  $-\sigma_y$  при сжатии. Знакопеременная пластичность, приведенная на рис. 5.12, б, происходит под действием циклической нагрузки. Пластическая деформация возрастает на величину  $\varepsilon_p$  при растяжении и уменьшается на величину  $\varepsilon_p$  при сжатии. После некоторого числа циклов нагружения образец может разрушиться от малоциклового усталости.

Прогрессирующая деформация, показанная на рис. 5.12, в, происходит от того, что нарастание пластической деформации под действием растягивающей нагрузки превосходит обратную деформацию под действием сжимающей нагрузки. Происходит недопустимое накопление пластических деформаций, препятствующее эксплуатации конструкции.

Также на рис. 5.12, г показана диаграмма приспособляемости образца. Начало диаграммы от точки А до точки В соответствует поведению образца при прогрессирующей деформации. В последующих циклах нагружения образец деформируется упруго. В следующих циклах нагружения образец деформируется упруго. На диаграмме упругая работа отображается отрезком CD.

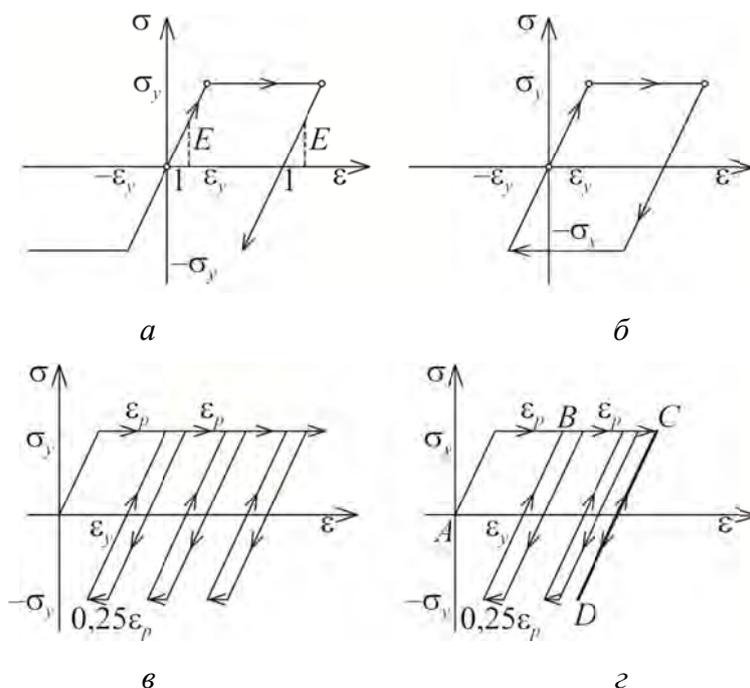


Рис. 5.12

2. Многоосные напряженные состояния. Текучесть и пластическое течение стального образца, подверженного многоосным напряженным состояниям, описывается при помощи поверхностей текучести и законов течения. Поверхности текучести формулируются через инварианты напряжений  $I_k$ , которые являются коэффициентами характеристического полинома тензора напряжений  $S$  с координатами  $\sigma_{i,m}$  и главными напряжениями  $p_i$ .

$$I_1 = \sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3} = p_1 + p_2 + p_3; \quad (5.11)$$

$$I_2 = \sigma_{1,1}\sigma_{2,2} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,3} + \sigma_{3,3}\sigma_{1,1} - \sigma_{1,2}^2 - \sigma_{2,3}^2 - \sigma_{3,1}^2 = p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1; \quad (5.12)$$

$$I_3 = \det S = p_1p_2p_3. \quad (5.13)$$

Эксперименты показывают, что текучесть стали не зависит от гидростатического давления  $p$ .

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3}) = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (5.14)$$

Таким образом, поверхность текучести стали описывается инвариантами напряжения  $J_k$  тензора-девиатора напряжений  $\bar{S} = S - pI$ :

$$J_1 = 0; \quad (5.15)$$

$$J_2 = 0,1667 \left( (\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2})^2 + (\sigma_{2,2} - \sigma_{3,3})^2 + (\sigma_{3,3} - \sigma_{1,1})^2 \right) + \sigma_{1,2}^2 + \sigma_{2,3}^2 + \sigma_{3,1}^2 = 0,1667 \left( (p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + (p_3 - p_1)^2 \right), \quad (5.16)$$

$$J_3 = \det \bar{S}. \quad (5.17)$$

Для различных материалов в литературе описано большое количество поверхностей текучести. Для стали чаще всего используется критерий текучести Мизеса, основанный на инварианте  $J_2$ . Этот критерий утверждает, что текучесть стали наступает, когда функция текучести  $f(\sigma)$  становится равной нулю, т. е.

$$f(\sigma) = (\sigma_{1,1} - \sigma_{2,2})^2 + (\sigma_{2,2} - \sigma_{3,3})^2 + (\sigma_{3,3} - \sigma_{1,1})^2 + 6(\sigma_{1,2}^2 + \sigma_{2,3}^2 + \sigma_{3,1}^2) - 2\sigma_y^2. \quad (5.18)$$

Область  $f(\sigma) \leq 0$  называется зоной текучести. Ее граница  $f(\sigma) = 0$  называется поверхностью текучести.

### 5.2.2. Упруго-пластическое поведение стального стержня

Каждый стержень фермы рассматривается как конечный элемент постоянного поперечного сечения, подверженного действию лишь осевого усилия. Стержни соединяются в узлах шарнирно. Упругая потеря устойчивости отдельных стержней не рассматривается. Если стержень достигает пластичности, то полагается, что он может нести осевую нагрузку, соответствующую напряжению текучести.

Считается, что каждый стержень фермы на шаге нагружения находится либо в упругом, либо в пластическом состоянии. Величина шага вычисляется в алгоритме решения таким образом, чтобы справедливость этого положения не нарушалась. Вклад каждого стержня в секущую матрицу жесткости фермы вычисляется при помощи выражений для геометрически нелинейного расчета ферм. Если стержень достиг пластичности, то его вклад в секущую матрицу жесткости фермы равен нулю.

На рис. 5.13 показаны возможные изменения состояния стержня как функция инкремента осевой деформации на шаге нагружения (зависимость осевого усилия в стержне от осевой деформации). В точках  $A$ ,  $D$  и  $G$  стержень остается упругим при положительных и отрицательных инкрементах деформации. В точках  $B$  и  $C$  стержень будет упругим при отрицательных инкрементах деформации и пластическим — при положительных инкрементах деформации. В точках  $E$  и  $F$  стержень будет упругим при положительных инкрементах деформации и пластическим — при отрицательных.

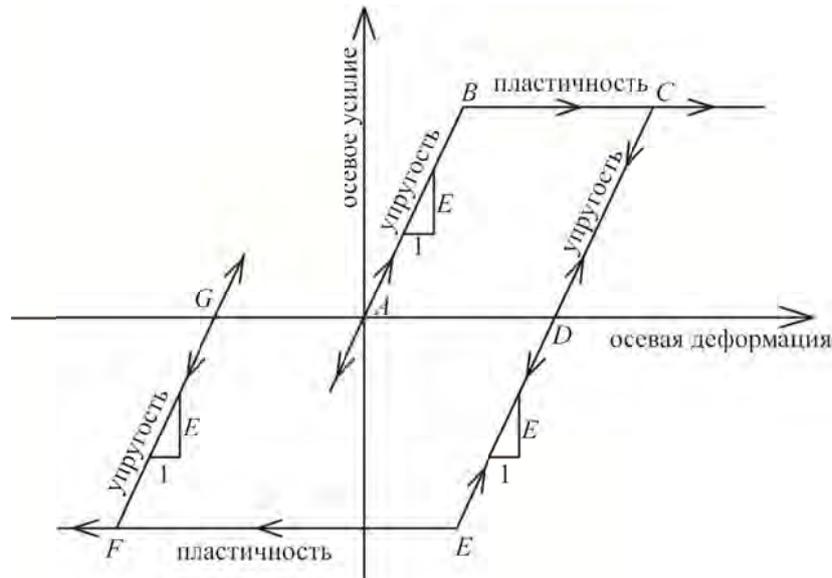


Рис. 5.13

Пусть  $\varepsilon_t, \varepsilon_e, \varepsilon_p$  — полные, упругие и пластические деформации в стержне соответственно. Верхним индексом ( $s$ ) будем обозначать значение переменной в начале шага, а индексом ( $t$ ) — ее значение в конце шага нагружения. Обозначим через  $v_k$  компоненты координат перемещения в исходной системе координат и  $v_{k,l}$  — их производные по осевой координате  $y_l$ . Полная осевая деформация в стержне задана следующим выражением:

$$\varepsilon_t = v_{1,1} + 0,5(v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2). \quad (5.19)$$

Если стержень на шаге нагружения остается упругим, то его деформация в пробном состоянии равна

$$\varepsilon_e^{(t)} = \varepsilon_t^{(t)} - \varepsilon_p^{(s)}, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_p^{(t)} = \varepsilon_p^{(s)}. \quad (5.21)$$

Пусть  $m$  — переходный коэффициент между координатами второго тензора Пиолы — Кирхгофа и координатами вектора технических напряжений:

$$m = \sqrt{(1 + v_{1,1})^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2}. \quad (5.22)$$

Тогда напряжение  $\sigma$  и осевое усилие  $f$  в стержне в пробном состоянии определяются из следующих уравнений:

$$\sigma^{(t)} = m^{(t)} E \varepsilon_e^{(t)}; \quad (5.23)$$

$$f^{(t)} = A \sigma^{(t)}. \quad (5.24)$$

Если стержень на шаге нагружения является пластичным, то его деформация в пробном состоянии определяется следующим образом:

$$\varepsilon_e^{(t)} = \varepsilon_e^{(s)}; \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_p^{(t)} = \varepsilon_p^{(s)} + \Delta \varepsilon_p, \quad \Delta \varepsilon_p = \varepsilon_t^{(t)} - \varepsilon_t^{(s)}. \quad (5.26)$$

Напряжение  $\sigma$  и осевое усилие  $f$  в стержне, достигшем пластичности, в пробном состоянии равны

$$\sigma^{(t)} = \sigma^{(s)}; \quad (5.27)$$

$$f^{(t)} = f^{(s)}. \quad (5.28)$$

### 5.2.3. Прямой метод расчета по предельному равновесию

В прямом методе расчета на пластическое предельное равновесие задается схема нагружения (модельная нагрузка), которая затем умножается на коэффициент нагружения  $\lambda$ , давая значение нагрузки на шаге нагружения. Определяется максимальное значение коэффициента нагружения, при котором конструкция сохраняет устойчивость. Так как предполагается, что конструкция испытывает большие перемещения, то заранее не известно, какое предельное состояние наступит раньше: потеря устойчивости формы конструкции или образование пластического механизма.

Структурная схема алгоритма расчета фермы на предельную нагрузку показана на рис. 5.14. Алгоритм учитывает геометрическую и физическую нелинейность и состоит из двух вложенных циклов. Во внешнем цикле выполняется пошаговый расчет до достижения заданного коэффициента нагружения или наступления предельного состояния фермы. Во внутреннем цикле производится итерационное вычисление текущей матрицы жесткости для шага нагружения в соответствии с инкрементами перемещения и изменениями состояния стержней.

Истинное состояние стержней на шаге нагружения определяется итерационно. В начале первого шага нагружения все стержни упруги и свободны от напряжений. В первом цикле итераций на всех последующих шагах нагружения полагается, что стержень пластичен, если он был пластичен в конце предыдущего шага нагружения. В противном случае стержень полагается упругим. Эти предположения могут оказаться некорректными и будут уточняться в конце каждого шага нагружения.

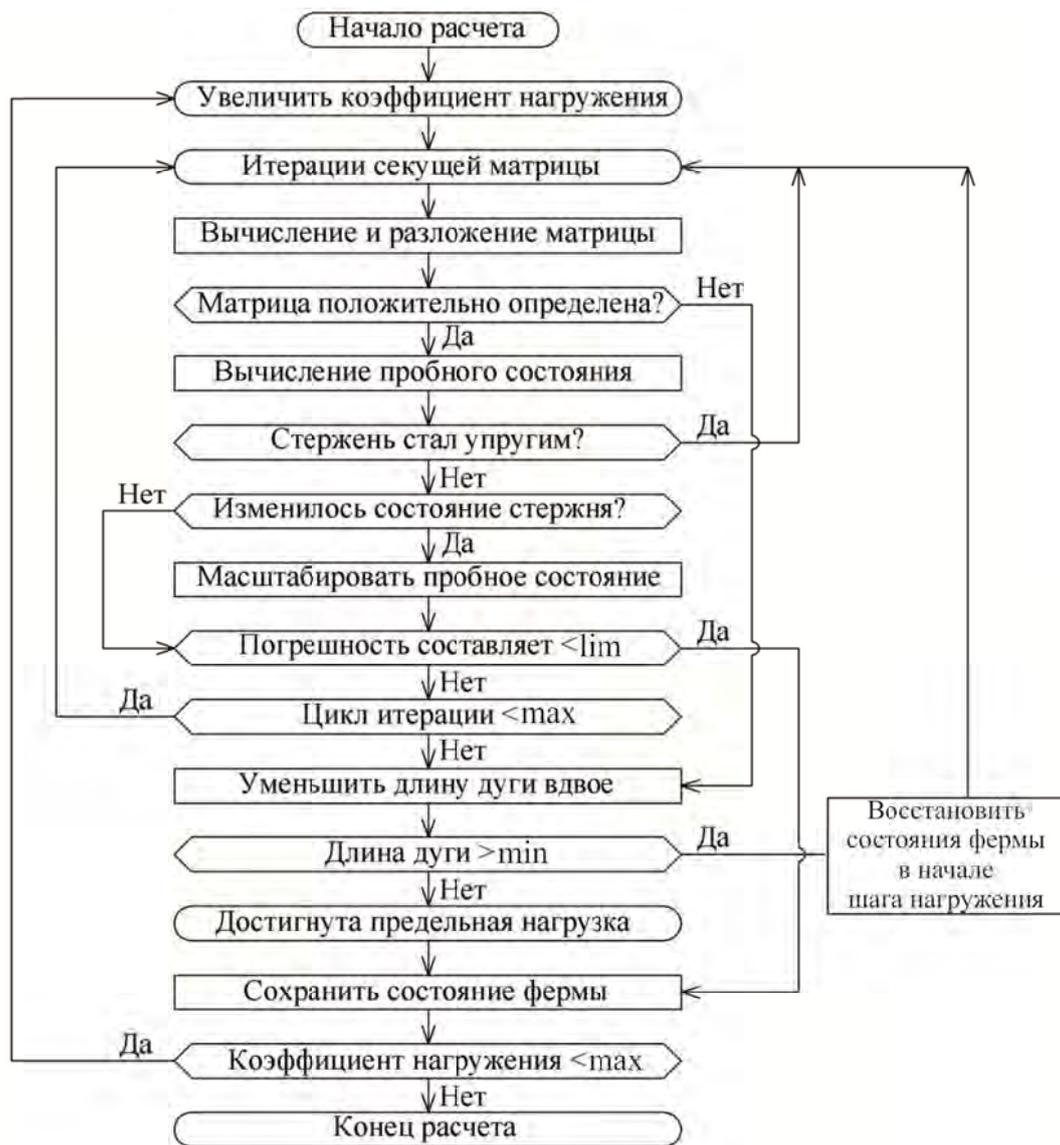


Рис. 5.14

В первом цикле итераций вычисляется матрица касательной жесткости фермы и выполняется ее разложение. Инкремент коэффициента нагружения на цикле, а также перемещения и реакции в пробном состоянии в конце цикла определяются по алгоритму геометрически нелинейного анализа. При этом выявляются изменения в состоянии стержней и отмечаются флажками, в которых значение true имеет следующие смыслы:

- $e_{start}$  — стержень является упругим в начале шага нагружения;
- $e_{end}$  — стержень является упругим в конце шага нагружения;
- $d_c$  — по крайней мере один из стержней фермы изменил состояние на шаге нагружения;
- $d_e$  — по крайней мере один из стержней фермы стал упругим на шаге нагружения;
- $d_p$  — по крайней мере один из стержней фермы претерпел пластическую деформацию во время нагружения.

На рис. 5.15. показан алгоритм проверки состояния стержней.

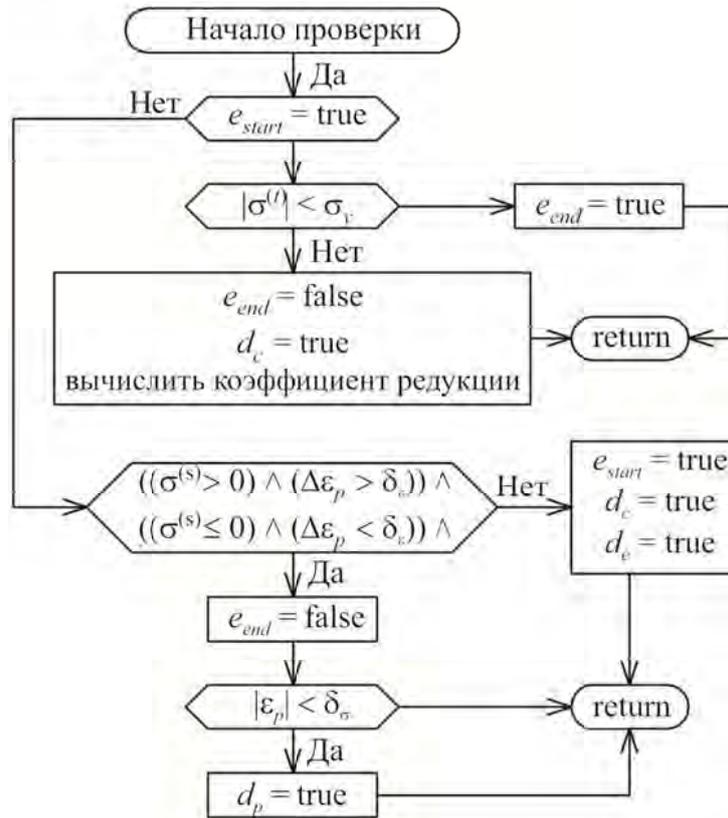


Рис. 5.15

Стержень, упругий в начале шага, остается упругим в конце шага нагружения, если абсолютное значение напряжения в нем меньше предела текучести. В противном случае стержень в конце шага считается достигшим текучести. Коэффициент снижения нагрузки вычисляется следующим образом:

$$\sigma^{(t)} \geq 0: \quad r = \frac{\sigma_y - \sigma^{(s)}}{\sigma^{(t)} - \sigma^{(s)}}; \quad (5.29)$$

$$\sigma^{(t)} < 0: \quad r = \frac{-\sigma_y - \sigma^{(s)}}{\sigma^{(t)} - \sigma^{(s)}}. \quad (5.30)$$

Рассмотрим стержень, состояние которого на шаге было принято пластическим. Для упругой и пластической деформаций задаются пределы погрешностей  $\delta_\varepsilon$  и  $\delta_p$ . Типичными значениями пределов погрешностей можно считать  $\delta_\varepsilon = 10^{-10}$  и  $\delta_p = 10^{-6}$ . Стержень испытывает на шаге пластическую деформацию, если значение абсолютной величины инкремента пластической деформации  $|\Delta\varepsilon_p|$  превосходит погрешность  $\delta_p$ . В противном случае стержень во время шага был упругим вопреки допущению, принятому в начале шага, и в программе устанавливаются соответствующие флажки.

Если проверка состояния стержней в конце первого цикла итераций показывает, что ни один из стержней не изменил состояния, то цикл считается завершенным. Если хотя бы один из стержней перешел в упругое состояние,

шаг нагружения повторяется с использованием новых состояний стержней. В противном случае, если хотя бы один из стержней перешел в пластическое состояние, то вычисляется наименьший коэффициент редуцирования  $r_{\min}$ . Пробное состояние масштабируется при помощи этого коэффициента, и цикл завершается.

В начале второго и всех последующих циклов итераций на шаге нагружения состояние стержня принимается равным его состоянию в конце предыдущего цикла. Вычисляется матрица секущей жесткости для текущих инкрементов перемещений и состояния стержней. Процедура продолжается так же, как и в предыдущем цикле. Итерации на шаге нагружения завершаются, когда норма погрешности пробного решения становится меньше заданного предельного значения. Пошаговое нагружение завершается, когда достигается предельная нагрузка или когда выполняется заданное число шагов нагружения. Предельная нагрузка считается достигнутой, когда максимальное число делений длины хорды в методе постоянных дуг не приводит к формированию положительно определенной матрицы секущей жесткости или к сходимости метода для пробного состояния фермы на шаге нагружения.

#### 5.2.4. Расчет двухпролетной фермы на предельную пластическую нагрузку

Данный пример демонстрирует применение прямого метода расчета на предельную пластическую нагрузку, описанного в разделе 5.2.2, к анализу двухпролетной фермы, аксонометрическая проекция которой показана на рис. 5.16.

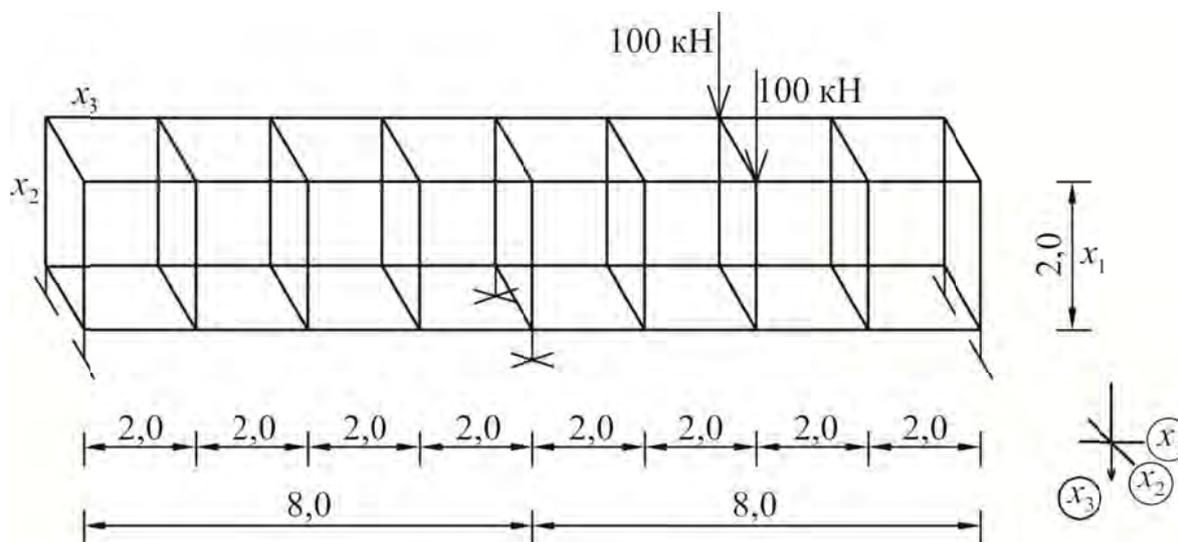


Рис. 5.16

Конструкция фермы состоит из четырех поясов, крестовой решетки и вертикальных связей-диафрагм, установленных в каждой панели длиной 2 м. Площади сечения элементов поясов и всех диагональных элементов равны  $0,0008 \text{ м}^2$ ; площади сечения вертикальных и горизонтальных элемен-

тов связей  $0,006 \text{ м}^2$ . Опоры в середине длины фермы представляют собой неподвижные шарниры (перемещения по трем направлениям координатных осей равны нулю), крайние опоры — подвижные шарниры (перемещения по направлениям осей  $x_2$  и  $x_3$  равны нулю, перемещение вдоль оси  $x_1$  — возможно). Все стержни имеют предел текучести  $2,4 \cdot 10^5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$  и модуль упругости  $2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ . Схема нагружения состоит из двух вертикальных сосредоточенных сил в  $100 \text{ кН}$  каждая, приложенных в средних узлах верхнего пояса правого пролета фермы (см. рис. 5.16).

Результаты расчета приведены на рис. 5.17 для грани фермы  $x_2 = 0$  с учетом симметрии задачи. Стержни, находящиеся на шаге нагружения в пластическом состоянии, показаны на рисунке сплошной жирной линией. Стержни, достигающие предела текучести на данном шаге, показаны жирным пунктиром. На рисунке показаны все изменения в состояниях стержней и нагрузки, при которых они происходят. При уровне нагрузки  $435,787 \text{ кН}$  наступает текучесть в поперечной связи между загруженными узлами, и формируется механизм разрушения конструкции. Предельный коэффициент нагружения равен  $4,542$ .

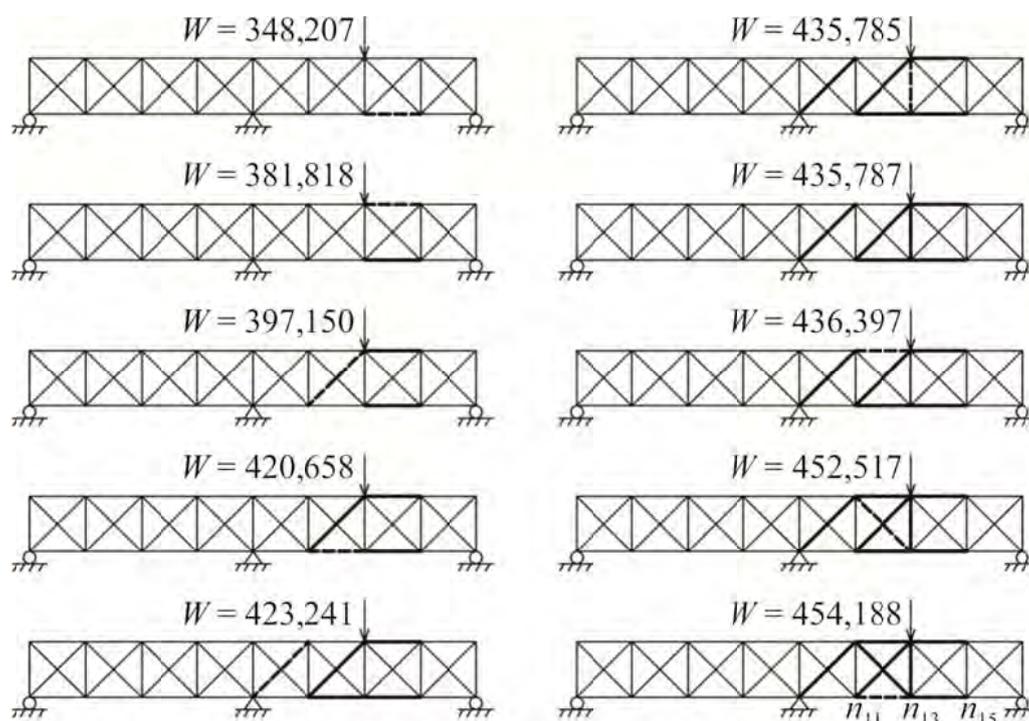


Рис. 5.17

На рис. 5.18 показаны графики зависимости вертикальных перемещений от нагрузки для трех свободных узлов нижнего пояса правого пролета фермы —  $n_{1,1}, n_{1,3}, n_{1,5}$  (см. рис. 5.17). Поведение фермы остается почти линейным до уровня нагрузки около  $370,0 \text{ кН}$ , что составляет  $81,5 \%$  от предельной.

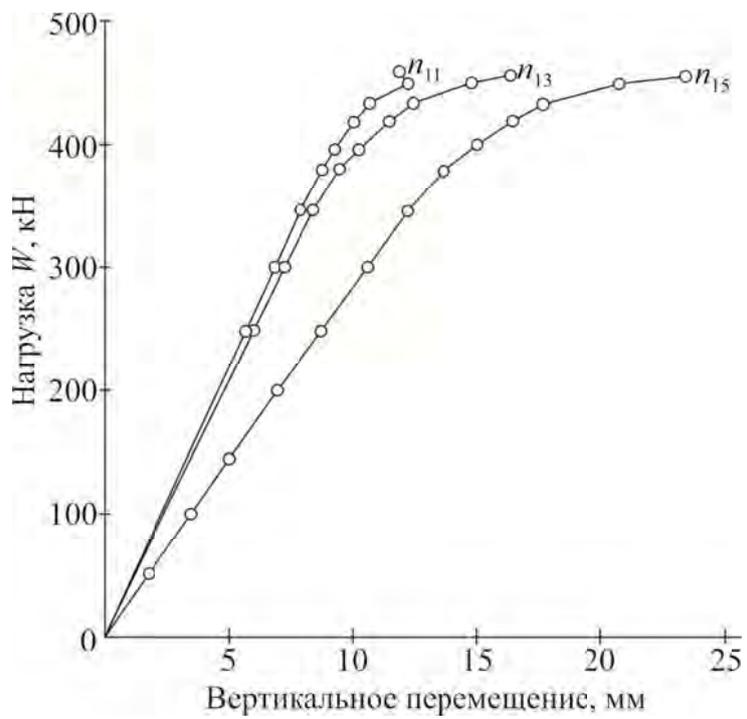


Рис. 5.18

Время, затраченное на выполнение прямого пошагового расчета 36-узловой фермы на предельную пластическую нагрузку, составляет долю секунды.

## 6. КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

К конструктивно-нелинейным относятся часто встречающиеся в инженерной практике системы с односторонними связями, создающими ограничения на перемещения в виде неравенств.

К таким конструкциям относятся, например, балки или плиты, лежащие на плоскости или на упругом одностороннем основании, фундамент сооружения или подстилающее его основание, многопролетные балки с жесткими или упругими односторонними опорами или зазорами между балкой и опорами и т. д. [3, 12, 29]

В настоящее время для расчета конструктивно-нелинейных систем с односторонними линейными и нелинейными связями применяются, чаще всего, методы линейного и нелинейного программирования. Эти методы практически не изучаются в большинстве технических и строительных вузах. Поэтому инженеры-конструкторы в своей практической работе их не применяют.

В докторской диссертации В. П. Аленина, выполненной под руководством профессора В. А. Игнатъева, и в учебном пособии В. П. Аленина [2] получил развитие и применение предложенный в работе [3] метод компенсирующих нагрузок для расчета стержневых систем с дискретными односторонними связями.

В данном учебном пособии расчет таких систем выполняется также на основе метода компенсирующих нагрузок. На приводимых ниже примерах показывается его высокая эффективность.

### 6.1. Основные типы дискретных связей в конструктивно-нелинейных системах и диаграммы работы

Для того чтобы выполнить расчет конструктивно-нелинейной системы, необходимо знать физические характеристики имеющихся в ней дискретных или континуальных связей.

Ниже на рис. 6.1, *а*, *б*, *в* представлены основные типы диаграмм работы дискретных связей в безразмерных координатах  $\bar{R}$ ,  $\bar{y}$  ( $\bar{R}$  — безразмерное силовое или моментное нагружение связи,  $\bar{y}$  — ее безразмерное линейное или угловое перемещение от этого нагружения).

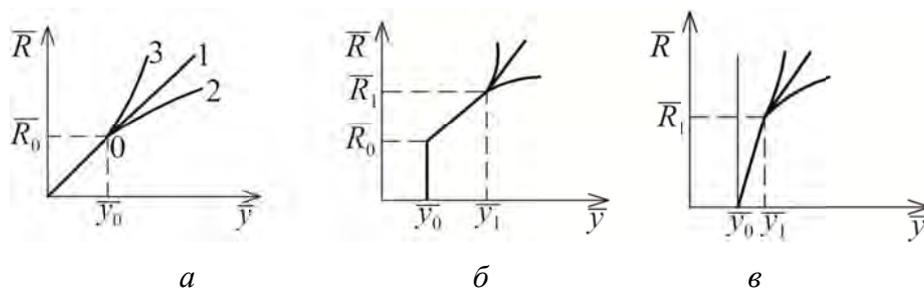


Рис. 6.1

На рис. 6.1, *а* участки диаграммы 0—0, 0—1 соответствуют линейно-упругой работе связи, участок 0—2 — разупрочняющейся связи, участок 0—3 — упрочняющейся односторонней связи.

На рис. 6.1, *б* вертикальная линия 00' соответствует закрывающейся односторонней связи, участок 0—1 для закрывающейся линейно-упругой связи с последующей линейно-упругой работой (1—2), нелинейно-упругой с разупрочнением (1—4) или нелинейно-упругой с упрочнением (1—3).

На рис. 6.1, *в* представлена диаграмма для закрывающейся под нагрузкой связью (0—0') с последующим линейным деформированием на участке 0'—1, нелинейным деформированием с разупрочнением на участке 1—4, нелинейным деформированием с упрочнением на участке 1—3.

Использование таких диаграмм в процессе расчета стирает по сути различие между физическими нелинейными и конструктивно нелинейными задачами.

## 6.2. Основные идеи и подходы к расчету систем с односторонними связями

Проблема расчета систем с односторонними связями вызывала значительный интерес, начиная с 50-х гг. голов XX в. Уже в работе И. М. Рабиновича [23, 24, 25] рассмотрены простейшие случаи, для которых возможно получение точного решения. В работе А. В. Перельмутера [19] проблема расчета системы с односторонними связями сведена к задаче квадратичного программирования. Однако класс рассматриваемых в [19] конструкций ограничен системами, которые после замены в них всех односторонних связей двухсторонними, становятся неизменяемыми. Ни одного конкретного примера расчета в данной работе не приведено.

В работе [3], посвященной расчету систем с односторонними связями, был предложен прямой метод последовательных приближений, названный авторами по его физическому смыслу методом компенсирующих нагрузок (МКН). МКН как универсальный метод линеаризации решений для каждого итерационного цикла приводит к сходящимся итерациям при условиях, когда односторонние связи закрываются, т. е. находятся в условиях работы нелинейных участков диаграмм.

В учебном пособии [2], также посвященном расчету стержневых систем с односторонними и (или) нелинейными дискретными связями, на конкретных примерах показаны возможности метода компенсирующих нагрузок как

универсального метода линеаризации для решения названных задач. В частности, рассмотрены решения задач с несколькими из перечисленных типов диаграмм: для линейно-упругих односторонних связей, для разупрочняющихся и упрочняющихся односторонних связей.

### 6.3. Сущность метода компенсирующих нагрузок для расчета конструктивно-нелинейных задач

Метод компенсирующих нагрузок для расчета конструктивно-нелинейных систем впервые был применен к расчету регулярных систем перекрестных балок (РСПБ), контактирующих с линейно-упругим односторонним винклеровским основанием, в работе [3]. Сущность МКН в названной работе показана достаточно четко. Повторим основные рассуждения работы [3], приводящие к идее МКН.

Пусть на линейно-упругом винклеровском основании находится балка, нагруженная дискретной нагрузкой  $P_1, P_2, \dots, P_k, P_n$  в узловых точках (рис. 6.2).

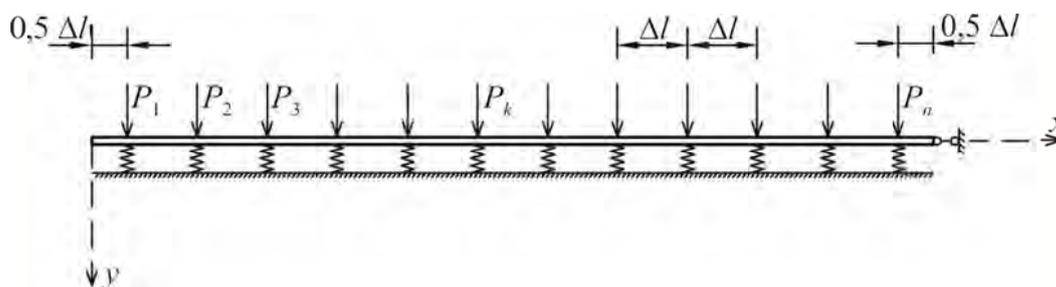


Рис. 6.2

Пусть реакция основания сведена к тем же дискретным узловым точкам. Предположим, что реакции дискретных опор такого основания во всех дискретных точках описываются следующим образом:

$$R(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ C_0 y, & 0 < y \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $C_0$  — коэффициент жесткости дискретного основания.

Дискретное основание при малом шаге  $\Delta l$  (см. рис. 6.2) является хорошим приближением континуального винклеровского основания.

После приложения заданной нагрузки к такой балке на дискретных двухсторонних винклеровских опорах (6.1) некоторые  $k$ -е связи могут оказаться растянутыми:

$$R_k^1(y) < 0, \quad (6.2)$$

что недопустимо по условиям их работы (6.1) как односторонних связей. Поэтому для «отлипающих» точек можно ввести компенсирующие нагрузки:

$$\Delta P_K^{(1)} = -C_0 y_k^{(1)}, \quad (6.3)$$

которыми исправятся заданные нагрузки для последующего  $i$ -го цикла ( $i = 1, 2, \dots$ ):

$$P_K^{(1)} = P_K^{(0)} + \Delta P_K^{(1)}; P_K^0 = P_K; K = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

Изложенная процедура для уточнения на каждом цикле компенсирующих нагрузок должна продолжаться до тех пор, пока не выполняться критерий прерывания циклов (итераций), который в работе [3] предлагается в следующем виде:

$$\delta_{pk}^{(i)} = \frac{\Delta P_K^{(i+1)} - \Delta P_K^{(i)}}{\Delta P_K^{(i+1)}} 100 \%, \quad \max |\delta_{pk}^{(i)}| \leq \varepsilon, \quad (6.5)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность расчета для наиболее «отлипшей» точки;  $i$  — номер цикла.

$$\Delta P_K^{(0)} = 0.$$

В изложенной схеме МКН нагрузки в пролете между опорами не учитывались (точнее, вся внешняя нагрузка считалась приведенной предварительно к узловой).

#### 6.4. Расчет балки на разупрочняющихся опорах по методу компенсирующих нагрузок

**Пример 1.** Пусть на линейно-упругих опорах 1 и 2 с одинаковыми характеристиками

$$R_1(y) = R_2(y) = R(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ C_0 y = 0,4 y, & 0 < y \leq y_0 = 0,002 \text{ м} \\ A_1 y + B_1 = \\ = 0,04 y + 0,00072 \text{ кН} & y_0 < y \end{cases} \quad (6.6)$$

находится защемленная на левом конце упругая балка (рис. 6.3) со следующими параметрами:  $l_1 = l_2 = l = 0,5$  м,  $i_1 = i_2 = i = 1$  кНм,  $E = 200$  ГПа,  $J = 0,25$  см<sup>4</sup>,  $q = 1$  кН/м (рис. 6.3).

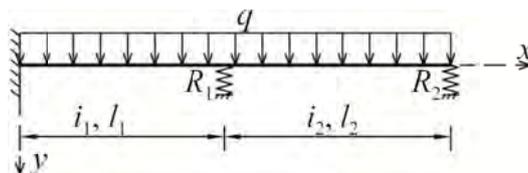


Рис. 6.3

Диаграммы работы связей 1 и 2, заданные соотношениями (6.6), относятся по положениям предыдущего параграфа к односторонним нелинейным связям с разупрочнением. Такого типа задача может быть решена как по ме-

тому компенсирующих нагрузок, так и по методу сил. Основная система метода сил дана на рис. 6.4. После учета исходных данных, коэффициенты канонических уравнений

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \Delta_{1,P} &= 0, \\ \delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \Delta_{2,P} &= 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= \frac{l}{3i} \left( 1 + \frac{3i}{l^2 C_0} \right); \quad \delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{3i} \left( 0,5 - \frac{6i}{l^2 C_0} \right); \\ \delta_{2,2} &= \frac{1}{3i} \left( 2 + \frac{15}{l^2 C_0} \right); \quad \Delta_{1P} = \frac{ql^2}{24i} \left( 1 + \frac{24i}{l^2 C_0} \right); \\ \Delta_{2P} &= \frac{ql^2}{24i} \left( 2 - \frac{36i}{l^2 C_0} \right). \end{aligned}$$

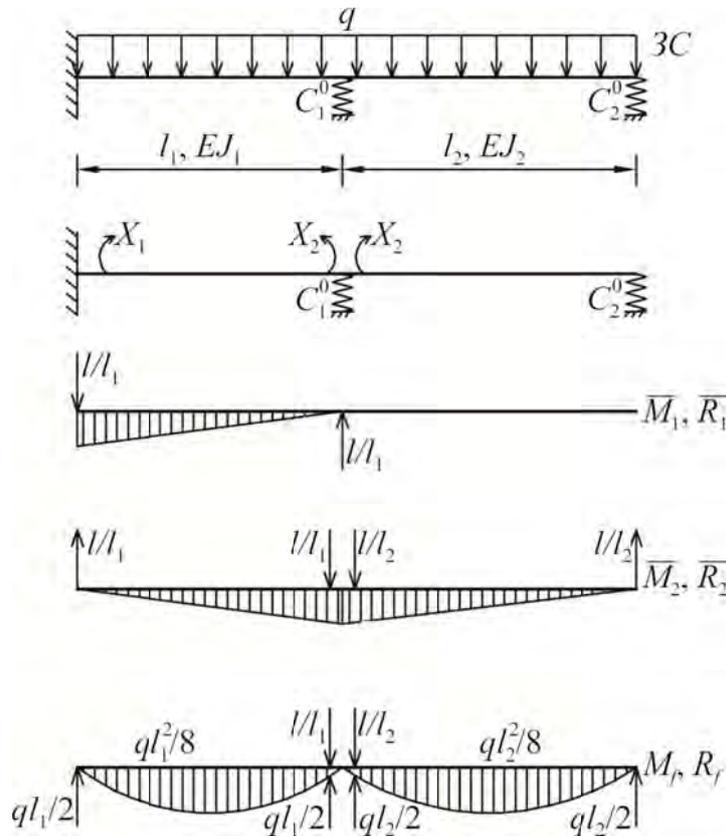


Рис. 6.4

Для решения поставленной задачи по МКН этих выражений недостаточно. Их необходимо дополнить в части грузовых коэффициентов слагаемыми, учитывающими дополнительные компенсирующие нагрузки  $\Delta P_1^{(j)}$  и  $\Delta P_2^{(j)}$ , где  $j=1,2,3\dots$  — номер цикла, причем компенсирующие нагрузки для  $j=1$ -го цикла всякий раз можно брать нулевыми.

Получим эти добавочные к грузовым слагаемые (6.7). Для этого необходимо грузовую эпюру моментов и реакций на рис. 6.4 дополнить эпюрой моментов и реакций от двух компенсирующих нагрузок (рис. 6.5).

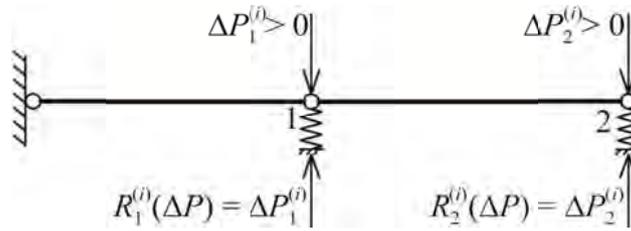


Рис. 6.5

В таком случае добавочные слагаемые в грузовых коэффициентах (6.7) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{1F}^{(j)}(\Delta P) &= \frac{1}{l_1} \Delta P_1^{(j)} \frac{1}{C_1^0}; \\ \Delta_{2F}^{(j)}(\Delta P) &= -\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \Delta P_1^{(j)} \frac{1}{C_1^0} + \frac{1}{l_2} \Delta P_2^{(j)} \frac{1}{C_2^0}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

При учете конкретных исходных данных рассматриваемого примера эти добавочные слагаемые (6.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta_{1F}^{(j)}(\Delta P) &= \frac{1}{lC_0} \Delta P_1^{(j)}; \\ \Delta_{2F}^{(j)}(\Delta P) &= -\frac{2}{lC_0} \Delta P_1^{(j)} + \frac{1}{lC_0} \Delta P_2^{(j)}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

так как  $l_1 = l_2 = l$ ,  $C_1^0 = C_2^0 = C_0$ .

Таким образом, после получения выражений для добавочных слагаемых для грузовых коэффициентов в форме (6.9), представленная задача расчета консольно-защемленной балки, опертой на две одинаковые нелинейные разупрочняющиеся под нагрузкой опоры с характеристиками в форме соотношений (6.6) и коэффициентами разупрочнения в обеих опорах

$$K_{p1} = K_{p2} = K_p = \frac{C_0}{A_1} = 10 \quad (6.10)$$

может быть решена на основе МКН.

В первом цикле принимаем  $\Delta P_1^{(1)} = \Delta P_2^{(1)} = 0$ .

Коэффициенты канонических уравнений метода сил при исходных данных примера 1, сохраняющиеся неизменными при всех циклах МКН, равны

$$\begin{aligned} \delta_{1,1} &= 10,33 \frac{1}{\text{кНм}}; \delta_{1,2} = \delta_{2,1} = -19,833 \frac{1}{\text{кНм}}; \delta_{2,2} = 50,66 \frac{1}{\text{кНм}}; \\ \Delta_{1P}(q) &= 2,10417; \Delta_{2P}(q) = -3,729167. \end{aligned}$$

Грузовые коэффициенты на каждом  $j$ -м цикле находятся по формулам:

$$\Delta_{1P}^{(j)} = \Delta_{1P}(q) + \Delta_{1P}^{(j)}(\Delta P); \quad \Delta_{2P}^{(j)} = \Delta_{2P}(q) + \Delta_{2P}^{(j)}(\Delta P). \quad (6.11)$$

Решение канонических уравнений с коэффициентами (6.7) дает значения надпорных моментов для 1-го приближения:

$$X_1^{(1)} = -0,408870 \text{ кНм}; \quad X_2^{(1)} = -0,086449 \text{ кНм}. \quad (6.12)$$

Это решение первого цикла по МКН для примера 1 является упругим решением задачи при условии, что обе связи работают как двухсторонние упруго-податливые. Поэтому необходимо построить результирующие эпюры усилий 1-го цикла (тем более, что их приходится строить и при любом другом цикле для определения реакций податливых опор). Для этого, во-первых, по значениям (6.12) строим эпюру опорных моментов  $M_{оп}^{(1)}$  (рис. 6.6, а).

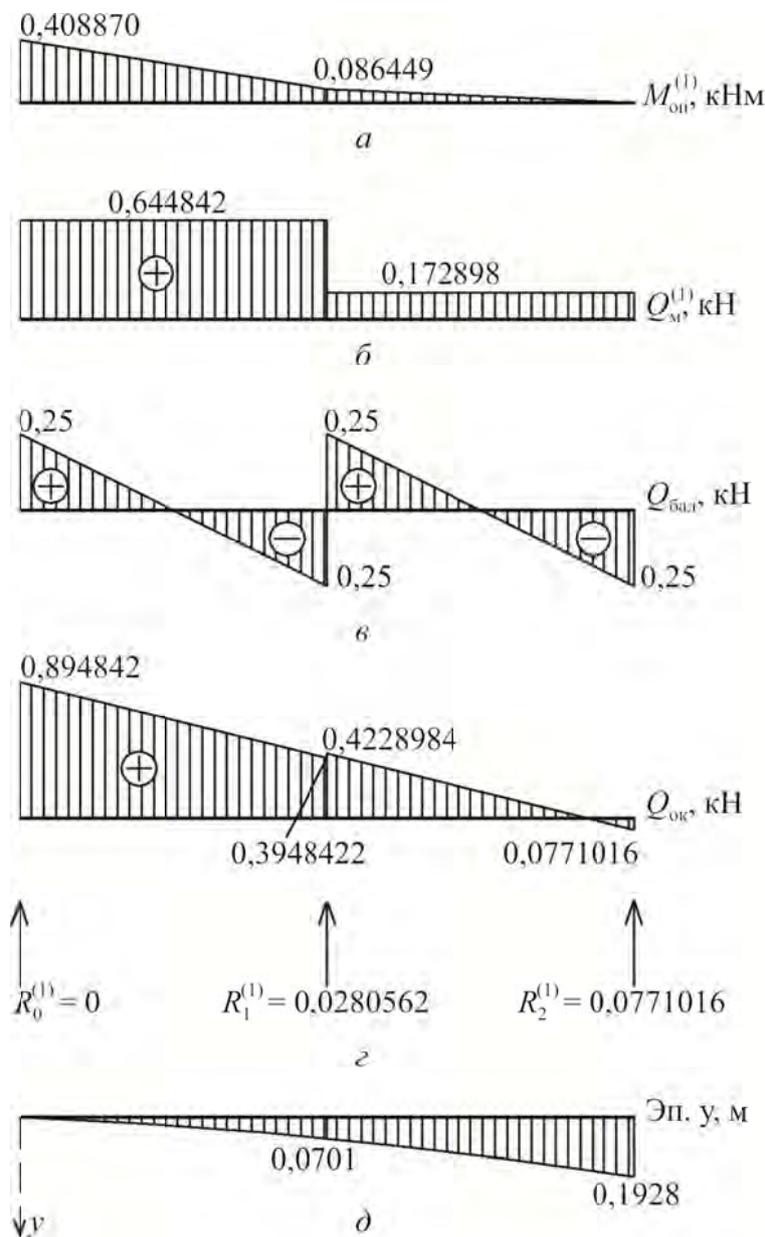


Рис. 6.6

Результирующая (окончательная) эпюра моментов отличается от  $M_{\text{оп}}$  тем, что  $M_{\text{оп}}$  суммируется с грузовой (балочной) эпюрой, поэтому ее не приводим. По значениям  $M_{\text{оп}}^{(1)}$  строим эпюру  $Q_M^{(1)}$  от опорных моментов (см. рис. 6.6, б).

$$Q_M^{(1)} = \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}}}{l} = \frac{0,664842}{0,172898} \text{ кН.}$$

Окончательная эпюра поперечных сил получается простым суммированием эпюр  $Q_M^{(1)}$  и  $Q_{\text{бал}}^{(1)}$ :

$$Q_{\text{ок}}^{(1)} = Q_M^{(1)} + Q_{\text{бал}}^{(1)}. \quad (6.13)$$

Если расчет начат с нулевыми компенсирующими нагрузками, то по значениям ординат эпюры  $Q_{\text{ок}}^{(1)}$  определяются реакции в опорах:

$$\begin{aligned} R_0^{(1)} &= Q_{\text{пр}}^0 - 0 = 0,8948422 \text{ кН;} \\ R_1^{(1)} &= Q_{\text{пр}}^1 - Q_{\text{лев}}^1 = 0,0280562 \text{ кН;} \\ R_2^{(1)} &= 0 - Q_{\text{лев}}^2 = 0,0771016 \text{ кН.} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для проверки при завершении первого цикла целесообразно выполнить статическую проверку.

$$\sum y = ql + ql - R_0^{(1)} - R_1^{(1)} - R_2^{(1)} = 0. \quad (6.15)$$

В данном случае условие равновесия (6.15) выполняется.

При известных реакциях опор (6.14) можно найти перемещения в двух точках (под 1-й и 2-й опорами).

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= \frac{R_1^{(1)}}{C_0} = 0,070140 \text{ м;} \\ y_2^{(1)} &= \frac{R_2^{(1)}}{C_0} = 0,192754 \text{ м.} \end{aligned} \quad (6.16)$$

По перемещениям строится эпюра перемещений (см. рис. 6.6, д).

Для более точного подсчета перемещений можно применить, например, известный метод начальных параметров.

Значения перемещений в опорных точках 1 и 2 (см. рис. 6.3) требуются далее для определения участков истинных (действительных) диаграмм (см. рис. 6.1) и подсчета по ним так называемых действительных реакций 1-го и последующих приближений. Итак, поскольку  $y_1^{(1)} > y_0 = 0,002 \text{ м}$  и  $y_2 > y_0$ , то действительные величины реакций в связях 1 и 2 (см. рис. 6.3) равны

$$\begin{aligned} R_{1\text{д}}^{(1)} &= 0,04y_1^{(1)} + 0,00072 = 0,0245306 \text{ кН;} \\ R_{2\text{д}}^{(1)} &= 0,04y_2^{(1)} + 0,00072 = 0,0084302 \text{ кН.} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Эти «действительные» реакции в связях 1 и 2 нужны для подсчета компенсирующих нагрузок во втором и дальнейших приближениях.

$$\begin{aligned}\Delta P_1^{(2)} &= R_1^{(1)} - R_{1Д}^{(1)} = 0,0245306 \text{ кН}, \\ \Delta P_2^{(2)} &= R_2^{(1)} - R_{2Д}^{(1)} = 0,0686714 \text{ кН}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

По формулам (6.18) найденным значениям компенсирующих нагрузок на 1-й и 2-й опорах для следующего второго цикла формируется критерий выхода из циклов в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta_{P_1}^{(1)} &= \frac{\Delta P_1^{(2)} - \Delta P_1^{(1)}}{\Delta P_1^{(2)}} 100 \% = 100 \%, \quad \left| \delta_{P_1}^{(1)} \right| < \delta; \\ \delta_{P_2}^{(1)} &= \frac{\Delta P_2^{(2)} - \Delta P_2^{(1)}}{\Delta P_2^{(2)}} 100 \% = 100 \%, \quad \left| \delta_{P_2}^{(1)} \right| < \delta.\end{aligned}\tag{6.19}$$

При  $\delta = 0,5 \%$  требуется продолжения итераций.

Исследования, проведенные в работе [4], показывают, что значение  $\delta$  в критериях выхода из циклов типа (6.19), проводимых на основе МКН, в ответственных ситуациях требуют увеличения его порядка малости до 0,01 % и иногда до 0,001 %. Для предварительных исследований его можно брать 0,5 %.

На втором цикле МКН пересчитываются только поправки к грузовым коэффициентам по формулам (6.9).

$$\begin{aligned}\Delta_{1P}^{(2)}(\Delta P) &= \frac{1}{0,5 \cdot 0,4} \Delta P_1^{(2)} = 5 \Delta P_1^{(2)} = 0,1226529; \\ \Delta_{2P}^{(2)}(\Delta P) &= -10 \Delta P_1^{(2)} + 5 \Delta P_2^{(2)} = 0,0980514.\end{aligned}\tag{6.20}$$

Грузовые коэффициенты второго цикла определяются по формулам (6.11).

$$\Delta_{1P}^{(2)} = 2,6330696, \quad \Delta_{2P}^{(2)} = -3,6311153.\tag{6.21}$$

Решение канонических уравнений (6.7) дает следующие значения надпорных моментов:

$$X_1^{(2)} = -0,4715389 \text{ кНм}; \quad X_2^{(2)} = -0,1129159 \text{ кНм}.$$

Для второго и последующих циклов расчета реакции в податливых связях 1 и 2 (см. рис. 6.3) отыскиваются несколько сложнее изложенного выше приема, поскольку при этом нужно учитывать ненулевые компенсирующие нагрузки. Для найденных надпорных моментов второго цикла эпюры поперечных сил от надпорных моментов и окончательные строятся стандартным изложенным выше образом и приведены на рис. 6.7, а.

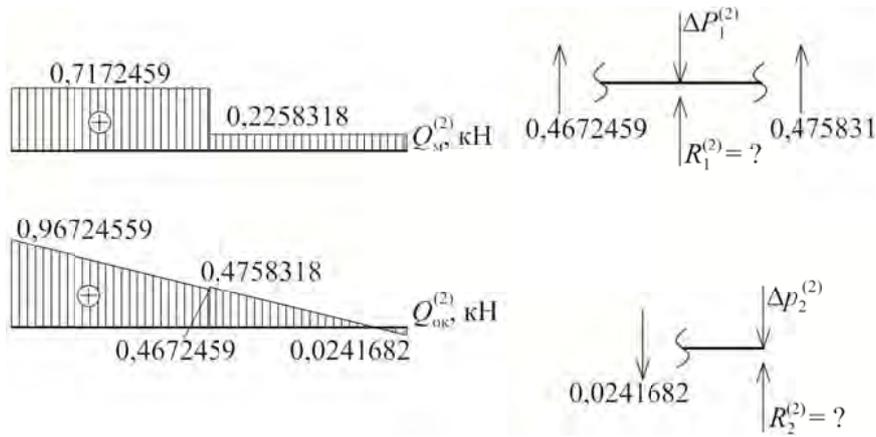


Рис. 6.7

На рис. 6.7, б показаны расчетные схемы для определения реакций в 1-й и 2-й связях на втором цикле, которые находятся из уравнения равновесия (проекции всех сил на вертикальную ось).

$$R_1^{(2)} = 0,0331165 \text{ кН}; \quad R_2^{(2)} = 0,0928396 \text{ кН}.$$

Опорная вертикальная реакция в жестком защемлении находится из аналогичного уравнения статики по эпюре  $Q_{ок}^{(2)}$  (см. рис. 6.7, а):

$$R_0^{(2)} = 0,9672459 \text{ кН}.$$

Проверочные уравнения статического равновесия  $\sum y = 0$  в данной второй и последующих итерациях составляются уже с учетом компенсирующих нагрузок.

$$\sum y = ql + ql + \Delta P_1^{(2)} + \Delta P_2^{(2)} - R_0^{(2)} - R_1^{(2)} - R_2^{(2)} = 0. \quad (6.22)$$

Все дальнейшие действия при продолжении второго цикла изложены при описании первого цикла. Они дают следующие значения

$$y_1^{(2)} = \frac{R_1^{(2)}}{C_0} = 0,0827912 \text{ м}; \quad y_2^{(2)} = 0,2320991 \text{ м};$$

$$R_{1Д}^{(2)} = 0,0040316 \text{ кН}; \quad R_{2Д}^{(2)} = 0,01000396 \text{ кН};$$

$$\Delta P_1^{(3)} = 0,0290848 \text{ кН}; \quad \Delta P_2^{(3)} = 0,0828359 \text{ кН};$$

$$\delta_{P_1}^{(2)} = 15,66 \%; \quad \delta_{P_2}^{(2)} = 17,10 \%.$$

Эти результаты показывают, что нужно переходить к следующему циклу и т. д. Однако в [4] показано, что критерии прерывания начатого циклического процесса последовательных приближений в форме (6.19) будут достигнуты существенно быстрее, если по найденным значениям компенсирующих нагрузок провести векторное ускорение по методу Эйткена — Лаузера или покомпонентное ускорение по каждой компоненте 2-х мерного вектора компенсирующих нагрузок для рассматриваемого примера 1 по так называемому 2-му алгоритму, предлагаемому в [4].

Векторное ускорение по методу Эйткена — Лаузера в [4] названо первым алгоритмом ускорения.

Составим таблицу компенсирующих нагрузок, полученных после двух первых циклов, представленных выше. В эту таблицу включим и нулевые компенсирующие нагрузки (табл. 6.1).

Таблица 6.1

$j$	0	1	2	3
$\Delta P_1^{(i)}$ , кН	0	0,0245306	0,0290848	0,0313172
$\Delta P_2^{(i)}$ , кН	0	0,0686714	0,0828357	0,0897787

Согласно алгоритму 1 параметр  $\lambda$  для ускоряющей процедуры вычисляется по формуле:

$$\lambda = \frac{(\Delta P_1^{(j+2)} - \Delta P_1^{(j+1)})(\Delta P_2^{(j+2)} - \Delta P_2^{(j+1)}) + (\Delta P_1^{(j+1)} - \Delta P_1^{(j)})(\Delta P_2^{(j+1)} - \Delta P_2^{(j)})}{(\Delta P_1^{(j+1)} - \Delta P_1^{(j)})^2 + (\Delta P_2^{(j+1)} - \Delta P_2^{(j)})^2}. \quad (6.23)$$

При  $j=0$  и данных из табл. 6.1 получим для ускоряющего параметра  $\lambda$  в алгоритме 1 значение

$$\lambda = 0,328924,$$

а значение комплекса

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)} = 0,490180.$$

Следовательно, ускоренные значения компенсирующих нагрузок для следующего  $j=3$  цикла вычисляются по формуле

$$\Delta P_i^{(j)} = \Delta P_i^{(j-1)} + \frac{\lambda}{1-\lambda} (\Delta P_i^{(j-1)} - \Delta P_i^{(j-2)}) \quad (6.24)$$

для  $i=1,2$ . Они включены в третий столбец табл. 6.1 и табл. 6.2.

Следующие два цикла (назовем их 4 и 5) выполняем в полном соответствии с вышеизложенными действиями. Краткое их описание можно выполнить по табл. 6.2, которая построена так же, как и табл. 6.1, но только дополнена двумя строками, где даны относительные погрешности для 1-й и 2-й компенсирующих нагрузок.

Таблица 6.2

$j$	3	4	5	6	7
$\Delta P_1^{(i)}$ , кН	0,031317	0,030466	0,030294	0,030218	0,030243
$\Delta P_2^{(i)}$ , кН	0,089789	0,087146	0,086608	0,086372	0,086450
$\delta_{P_1}^{(j)}$ , %	—	-2,792	-0,570	—	0,083
$\delta_{P_2}^{(j)}$ , %	—	-3,021	-0,621	—	0,090

По результатам циклов 3, 4, 5 (столбцы 3, 4, 5 табл. 6.2) и по алгоритму 1 для ускорения итераций получены компоненты вектора компенсирующих нагрузок для следующих итераций, представленные в табл. 6.2 (столбец б).

Затем, после указанного второго применения ускоряющего алгоритма 1, выполнен еще один полный цикл. Основные данные по нему представлены в столбце 7 табл. 6.2. Поскольку относительные погрешности этого приближения меньше граничных на 0,5 %, то итерации прекращены, и данное приближение принято за решение рассматриваемого примера 1 т. е.

$$X_1^{(7)} = -0,487424 \text{ кНм}; X_2^{(7)} = -0,119758 \text{ кНм}.$$

По данному 7-му приближению построены окончательные эпюры моментов, поперечных сил и перемещений, представленные на рис. 6.8.

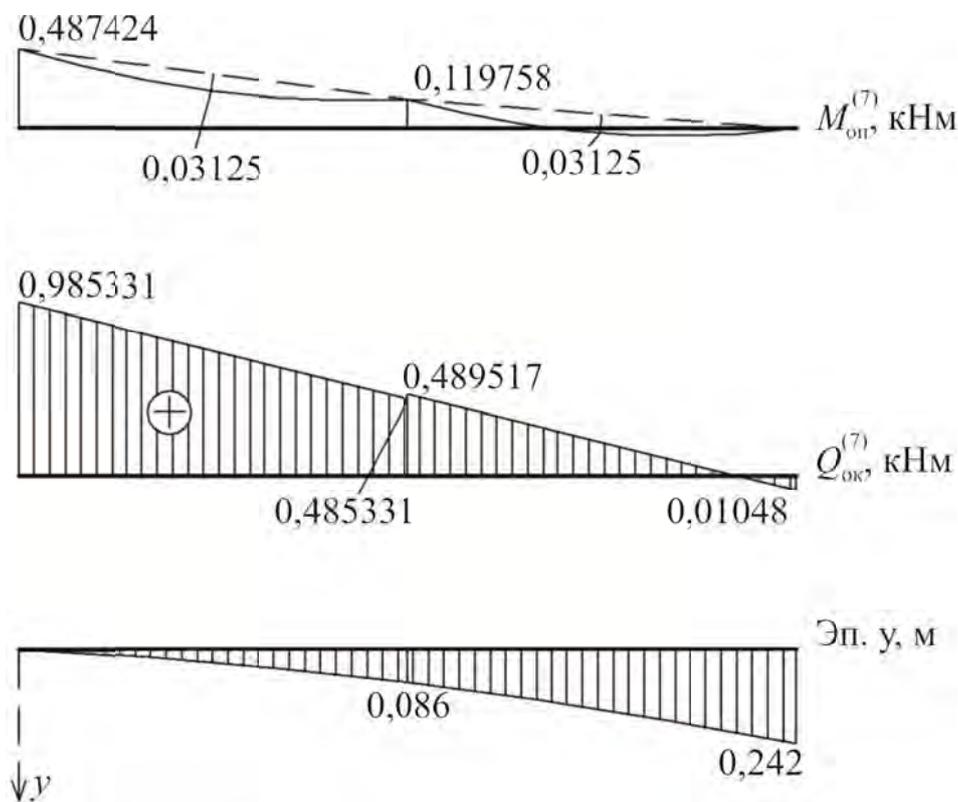


Рис. 6.8

В заключение отметим, что проведение покомпонентного ускорения итераций по второму алгоритму ускорения, в принципе, в данном примере несколько превосходит по скорости результаты ускорения по первому алгоритму. Однако наличие только одного примера с названными возможностями не гарантирует полной уверенности в том, что второй алгоритм ускорения лучше, чем первый.

**Пример 2.** Пусть консольно защемленная балка (рис. 6.9) под нагрузкой  $q = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$  перекрывает зазоры  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = y_0 = 0,002$  м над точками 1 и 2, которые являются нелинейно работающими опорами B и C (рис. 6.9).

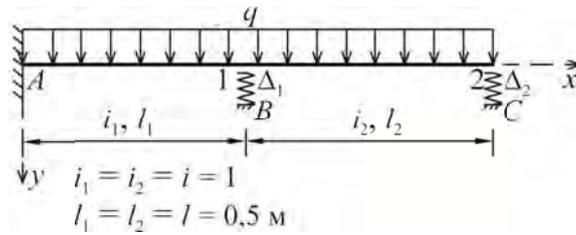


Рис. 6.9

Диаграммы работы опор  $B$  и  $C$  (1 и 2) принимаются одинаковыми билинейными и разупрочняющимися (рис. 6.10), аналитическое описание которых представляется зависимостями

$$R_1(y) = R_2(y) = R(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_0^{(0)} = 0,002 \text{ м}, \\ 50y, & y_0^{(0)} < y \leq y_1^{(0)} = 0,004 \text{ м}. \\ 5y + 0,08 \text{ кН} & y_1^{(0)} < y. \end{cases} \quad (6.25)$$

При условиях, что нагрузка  $q = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$  вызывает перемещения  $y_1$  и  $y_2$  в точках 1 и 2, не только перекрывающие зазоры  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = y_0 = 0,002 \text{ м}$  (см. рис. 6.9), но и превышающие величину  $y_1^{(0)} = 0,004 \text{ м}$ , т. е.

$$y_1^{(0)} < y_1; \quad y_1^{(0)} = y_2, \quad (6.26)$$

исходную диаграмму  $D—0—y_0^{(0)}—A—B$  (рис. 6.10) и ее аналитическую запись (5.25) можно заменить более условной диаграммой связей 1-го и 2-го вида  $D—0—A—B$  (рис. 6.10), при записи последней в следующем виде:

$$\tilde{R}_1(y) = \tilde{R}_2(y) = \tilde{R}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 25y, & 0 < y \leq y_1^{(0)} = 0,004 \text{ м}. \\ 5y + 0,08 \text{ кН} & y_1^{(0)} < y. \end{cases} \quad (6.27)$$

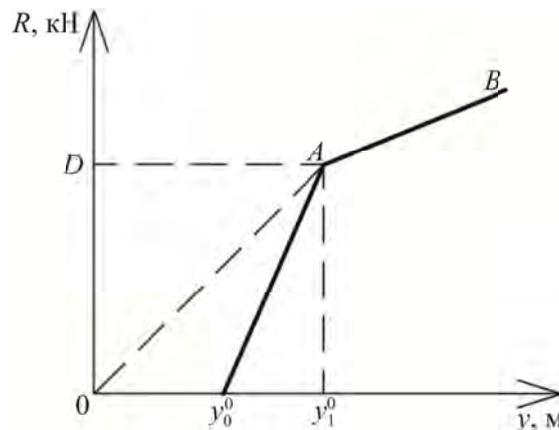


Рис. 6.10

Задача, поставленная выше, сводится к задаче расчета балки на разупрочняющихся опорах без начальных зазоров в надпорных сечениях.

Вначале убедимся в выполнении условия (6.26) для этого исходную задачу (см. рис. 6.9) заменим следующей, показанной на рис. 6.11 ( $j=1,2, \dots$  — номер цикла). Причем при  $j=1$  принимаем  $\Delta P_1^{(1)} = \Delta P_2^{(1)} = 0$ . При выборе основной системы для  $l_1 = l_2 = l = 0,5$  м,  $i_1 = i_2 = 1$  кНм коэффициенты канонических уравнений метода сил для первого цикла находим по формулам (6.7), где  $C_0 = \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 25$  кН/м:

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}^{(1)} &= 0,4933 \frac{1}{\text{кНм}}; \quad \delta_{1,2}^{(1)} = \delta_{2,1}^{(1)} = -0,1533 \frac{1}{\text{кНм}}; \\ \delta_{2,2}^{(1)} &= 1,466 \frac{1}{\text{кНм}}; \quad \Delta_{1P}^{(1)} = 0,0504166 + \Delta_{1P}^{(1)}(\Delta P); \\ \Delta_{2P}^{(1)} &= -0,039166 + \Delta_{2P}^{(1)}(\Delta P), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где  $\Delta_{1P}^{(1)}(\Delta P)$  и  $\Delta_{2P}^{(1)}(\Delta P)$ , согласно выражений (6.8) и (6.9), при нулевых компенсирующих нагрузках первого цикла равны нулю.

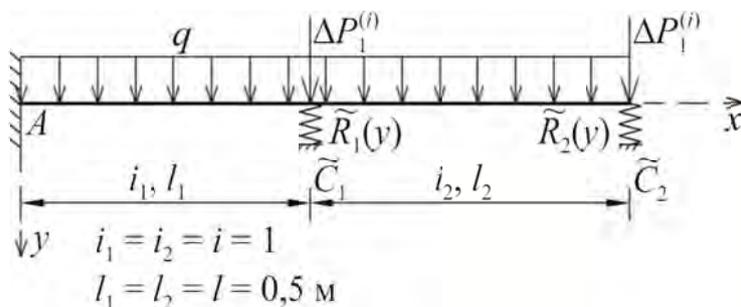


Рис. 6.11

Решение системы уравнений (6.7) при значениях коэффициентов (6.28) дает следующие значения неизвестных для первого цикла:

$$X_1^{(1)} = -0,0970494 \text{ кНм}; \quad X_2^{(1)} = 0,0165585 \text{ кНм}.$$

Окончательные эпюры моментов и поперечных сил для первого цикла представлены на рис. 6.12.

Перемещения в надпорных сечениях 1 и 2 определяются по формулам (6.16)

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= 0,0095867 \text{ м} > y_1^{(0)} = 0,004 \text{ м}; \\ y_2^{(1)} &= 0,0113247 \text{ м} > y_1^{(0)}. \end{aligned}$$

По перемещениям и аналитическим выражениям (6.27) устанавливаются «действительные» для первого цикла реакции в 1-й и 2-й связях, которые будут равны

$$\begin{aligned} R_{1Д}^{(1)} &= 0,1279335 \text{ кН}, \\ R_{2Д}^{(1)} &= 0,1366234 \text{ кН}. \end{aligned}$$

С их помощью и с помощью реакций первого цикла (рис. 6.12) устанавливаются компенсирующие нагрузки для второго цикла, а затем проводится проверка критериев выхода из циклов по обоим опорам.

$$\Delta P_1^{(2)} = R_1^{(1)} - R_{1Д}^{(1)} = 0,1113386 \text{ кН};$$

$$\Delta P_2^{(2)} = R_2^{(1)} - R_{2Д}^{(1)} = 0,1464936 \text{ кН}.$$

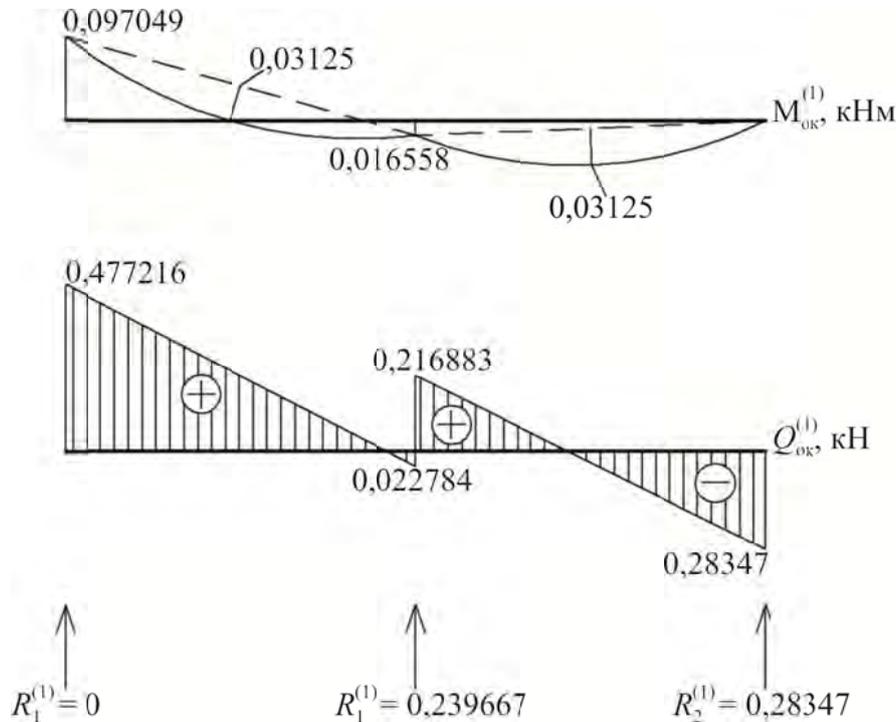


Рис. 6.12

По формулам (6.19) вычисляем  $\delta_{P_1}^{(1)} = 100 \%$ ;  $\delta_{P_2}^{(1)} = 100 \%$ .

Поскольку для первого цикла критерии прерывания циклов (6.19) не выполняются, проводится второй цикл и т. д. При выполнении второго и последующих циклов пересчитываются только грузовые коэффициенты.

Согласно выражений (6.28) и (6.9) их значения на втором цикле следующие:

$$\Delta_{1P}^{(2)} = 0,05935532; \Delta_{2P}^{(2)} = -0,04532461.$$

А решение уравнений (6.7) приводит на втором цикле к следующему результату:

$$X_1^{(2)} = -0,114428158 \text{ кНм}; X_2^{(2)} = -0,018940183 \text{ кНм}.$$

Реакции в опорах 1 и 2 (см. рис. 6.11) на втором цикле определяются, безусловно, с учетом ненулевых компенсирующих нагрузок  $\Delta P_1^{(2)}$ ,  $\Delta P_2^{(2)}$ , как это было показано выше на рис. 6.7, а, б. Их значения равны

$$R_0^{(2)} = 0,51673668 \text{ кН}; R_1^{(2)} = 0,30711682 \text{ кН}; R_2^{(2)} = 0,43437392 \text{ кН}.$$

Результаты дальнейших вычислений представлены в табл. 6.3 и рис. 6.13.

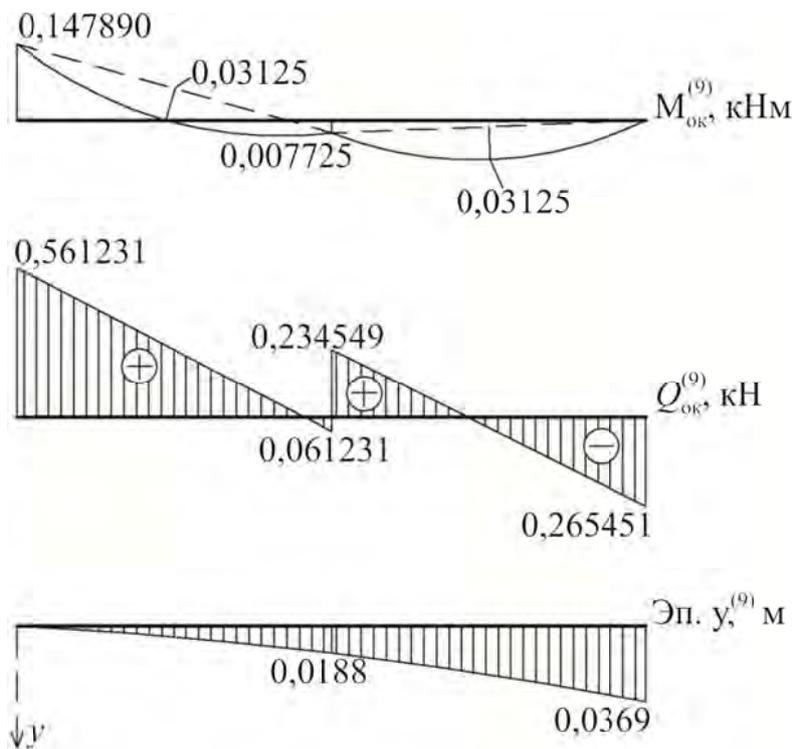


Рис. 6.13

Таблица 6.3

$j$	$\Delta P_1^{(j)}$ , кН	$\Delta P_2^{(j)}$ , кН	$\delta_{P_1}^{(j)}$ , %	$\delta_{P_2}^{(j)}$ , %
1	0	0	—	—
2	0,111734	0,146494	100	100
3	0,165693	0,267499	32,656	45,230
4	0,199410	0,361610	16,908	26,026
5	0,223297	0,433547	10,697	16,593
6	0,314953	0,649912	—	—
7	0,299943	0,655788	-5,004	0,896
8	0,296588	0,657672	-1,120	0,286
9	0,295925	0,658498	-0,224	0,125
	$X_1^{(9)} = -0,147890$ кНм	$X_1^{(9)} = 0,007725$ кНм	$y_1^{(9)} = 0,018796$ м	$y_2^{(2)} = 0,036925$ м

Количество циклов, проведенных без ускоряющих процедур, в данном примере составило  $j = 5$ . Из табл. 6.3 виден характер сходимости по относительным погрешностям для 1-й и 2-й компенсирующих нагрузок (последние две строки табл. 6.3). Из этого следует, что число циклов для достижения необходимой точности, например 0,5 %, может составить несколько десятков. Поэтому целесообразно проведение ускорений по 1-му и 2-му алгоритмам ускорения циклов (п. 6.4). Остановимся на 1-м алгоритме ускорения. Согласно формуле (6.23) при начале ускорения с  $j = 4$  цикла находим  $\lambda = 0,75390222$ .

По формуле (6.24) вычисляются компоненты вектора компенсирующих нагрузок, по сути дела, для пятого цикла. Но поскольку компоненты этого вектора вычислены в процессе простых ускоренных итераций, то компоненты вычисленного вектора в табл. 6.3 поименованы под индексом  $j = 6$ .

Результаты вычислений, выполненных после первого применения ускорения по алгоритму 1, представлены в табл. 6.3. А поскольку при  $j = 9$  критерии прерывания циклов в 0,5 % выполнены, то дальнейшие циклы и ускорение итераций не проводились. Кроме того, в табл. 6.3 приведены усилия в надпорных сечениях и перемещения в 1-й и 2-й точках (рис. 6.13) для девятого цикла.

В заключение отметим, что область эффективного применения МКН и подобные рекомендации по отдельным типам задач содержатся в работах [2, 3].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в данном учебном пособии примеры расчета поведения конструкций под нагрузкой с учетом различных типов нелинейности и методы расчета, естественно, не исчерпывают всего многообразия нелинейных задач и методов их решения.

В пособие не вошли, например, решения задач динамики, теплопередачи, ползучести, требующие в первую очередь знаний теории в соответствующих областях.

Однако пособие дает достаточно полное представление о сути проблемы учета нелинейности в расчетах широкого круга конструкций.

Другая сторона этой проблемы — возможность разработки и обоснования решений, более адекватных реальным конструкциям, их расчетных схем.

Именно некорректности в расчетных схемах служат, зачастую, причиной получения результатов расчета, не согласующихся с физическим смыслом и порождающих скептическое отношение к ним, даже если они получены с использованием современных мощных пакетов программ (COSMOS/M, ANSYS, NASTRAN и др.).

Поэтому подготовка специалистов, способных не только пользоваться пакетами программ, но и разрабатывать и обосновывать их расчетные схемы, различные по условиям приближения к реальным конструкциям, является важной задачей, решению которой должно способствовать и данное учебное пособие.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агапов В. П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. — М. : АСВ, 2004. — 248 с.
2. *Аленин В. П., Аленин П. В.* Прямые методы расчета конструктивно-нелинейных систем. Омск : Сфера, 2006. — 68 с.
3. *Аленин В. П., Игнатьев В. А.* Практический метод расчета плит на одностороннем основании типа Винклера. Исследования по теории расчета и проектирования сооружений. — Саратов : СПИ, 1984. 327 с.
4. *Аленин В. П.* Итерационные методы расчета систем с внешними и внутренними односторонними связями : дисс... д-ра техн. наук. — Волгоград, 2002. — 325 с.
5. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы / пер. с англ. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
6. *Ге А. Б., Песцов Д. Н.* Статический анализ шарнирно-стержневых систем при изменении в расчетной схеме // Проблемы теории расчета сооружений. — Томск : ТГАСУ, 1998. — С. 37—40.
7. *Ге А. Б., Шухов Н. Ю.* Одно из применений жордановых исключений в расчете стержневых систем // Проблемы расчета теории сооружений. — Томск : ТГАСУ, 1998. — С. 41—45.
8. *Гильман Г. Б., Любинский В. Ю.* Об алгоритмических особенностях автоматизации выбора шага при расчете геометрически нелинейных систем // Сборник научных трудов «Автоматизация проектирования объектов строительства». — Киев: ЗНИИЭП, 1984. — С. 16—22.
9. *Зылев В. Б.* Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. — М. : НИЦ «Инженер», 1999. — 281 с.
10. *Игнатьев В. А.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики. — Саратов : СПУ, 1980. — 87 с.
11. *Игнатьев В. А.* Методы супердискретизации в расчетах сложных стержневых систем. — Саратов : СПУ, 1981. — 108 с.
12. *Игнатьев В. А.* Расчет регулярных и квазирегулярных стержневых систем с двухсторонними и односторонними связями по методу обобщенных неизвестных // Исследования по строительной механике стержневых систем. — Саратов : СПУ, 1984. — С. 2—9.
13. *Игнатьев В. А., Игнатьев А. В.* Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2005. — 99 с.
14. *Игнатьев В. А.* Расчет стержневых пластинок и оболочек. Метод дискретных конечных элементов. — Саратов : СГУ, 1988. — 160 с.
15. *Лукаш П. А.* Основы нелинейной строительной механики. — М. : Стройиздат, 1978. — 204 с.
16. *Лукаш П. А.* О нелинейной строительной механике (Краткий обзор задач и методов) // Исследования по теории сооружений. Вып. 20. — М. : Стройиздат, 1974. — 186 с.
17. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. — М. : Гостехиздат, 2003. — 214 с.
18. *Перельмутер А. В.* Беседы о строительной механике. — М. : SCAD Soft; АСВ, 2014. — 250 с.

19. *Перельмутер А. В.* Основы расчета вантово-стержневых систем. — М. : Стойиздат, 1969. — 190 с.
20. *Петров В. В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. — М. : Инфра-Инженерия, 2014. — 480 с.
21. *Петров В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. — Саратов : СПУ, 1975. — 120 с.
22. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. — Л. : Судостроение, 1977. — 280 с.
23. *Рабинович И. М.* Основы расчета вантово-стержневых систем. — М. : Стройиздат, 1975. — 145 с.
24. *Рабинович И. М.* Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи // Инженерный сборник. Т. 6. — М., 1950.
25. *Рабинович И. М.* К задаче статически неопределимых систем с односторонними связями (доказательство единственности решения) // Исследования по теории сооружений. Вып. 10. — М. : Госстройиздат, 1961.
26. *Рекач В. Г.* Руководство к решению задач прикладной теории упругости. — М. : Высшая школа., 1973. — 223 с.
27. *Рекач Ф. В.* Методика расчета пространственных стержневых систем с учетом геометрической и физической нелинейностей. — М. : РУДН, 1988. — 14 с.
28. *Рудых О. Л., Соколов П. П., Пахомов В. А.* Введение в нелинейную строительную механику. — М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1998. — 103 с.
29. *Тихонов Е. М.* Расчет по методу обобщенных неизвестных балок с односторонними связями. — Саратов : СПУ, 1984. — С. 46—59.
30. *Хейдари А., Галишикова В. В.* Аналитический обзор теорем о предельной нагрузке и приспособляемости в упруго-пластическом расчете стальных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Вып. 3. — М. : РУДН, 2013. — С. 3—18.
31. *Хейдари А., Галишикова В. В.* Прямой упруго-пластический расчет стальных ферм с большими перемещениями на предельное равновесие и приспособляемость // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. Вып. 3. — М. : РУДН, 2013. — С. 51—64.
32. *Чувиковский В. С.* Численные методы расчетов в строительной механике корабля. (Общая теория. Одномерные и квазиодномерные процессы). — Л. : Судостроение, 1976. — 376 с.
33. *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М. : Эдиториал УРСС, 1999. — 224 с.
34. *Karamanlidis D., Knoihe K.* Geometrisch nichtlineare Berechnung Von ebenen-Stabwerken autder Grundluge eines gemischt — hybriden Finile-Elemente. — Verfahrens, Ingenieur — Archiv 50 (1981) 377—392.

Учебное электронное издание

**Игнатъев** Владимир Александрович  
**Игнатъев** Александр Владимирович  
**Галишникова** Вера Владимировна  
**Онищенко** Екатерина Валерьевна

**НЕЛИНЕЙНАЯ СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**  
Основы теории. Примеры расчета

Учебное пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*  
Редактор *И. Б. Чижикова*  
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Вишняков*

Минимальные систем. требования:  
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 27.12.2014.  
Гарнитура «Times New Roman». Уч.-изд. л. 5,0. Объем данных 4,0 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»  
Редакционно-издательский отдел  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)