Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Методические указания к контрольной и лабораторным работам

Составитель О. А. Богомолова

Волгоград
ВолгГАСУ
2013

УДК 69:51(075.8)
ББК 65.31я73
М545

М545 **Методы** оптимизации в решении инженерных задач [Электронный ресурс] : методические указания к контрольной и лабораторным работам / М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т ; сост. О. А. Богомолова. — Электронные текстовые и графические данные (0,57 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

Содержатся краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторной работы по дисциплине «Методы оптимизации в решении инженерных задач»; приведены варианты индивидуальных заданий, самостоятельной работы. Рассмотрены примеры выполнения практических заданий, сформулированы контрольные вопросы по изучаемой теме.

Для студентов инженерных специальностей 2—3-го курсов заочной формы обучения.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader.

УДК 69:51(075.8)
ББК 65.31я73

Трудно назвать такую область инженерной деятельности, где бы не возникали задачи оптимизационного характера. Это, например, задачи определения наиболее эффективного режима работы различных технических систем; составления смесей при наименьших затратах сырья; организации производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах, и др. Поэтому при решении прикладных задач исключительно важное значение приобретает изучение и использование методов оптимизации и средств их реализации. В связи с этим студентам технических специальностей необходимо, с одной стороны, знать возможности применяемых методов, а с другой — понимать те проблемы, которые возникают при их использовании.

Данные методические указания составлены в соответствии с программой курса «Методы оптимизации в решении инженерных задач», который рассчитан на аудиторию, подготовленную по математике в пределах программы технического вуза. Постановка каждой задачи оптимизации включает два объекта: множество допустимых решений и целевую функцию (функционал), которую следует минимизировать или максимизировать на указанном множестве. С этой точки зрения и рассматриваются различные классы экстремальных задач.

Контрольная работа
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы — знакомство с теорией по данной теме и применение ее в решении прикладных задач.

Теоретическое введение

Графический метод основан на геометрической интерпретации задач линейного программирования (ЗЛП) и применяется в основном при решении задач двумерного и только некоторых задач трехмерного пространства. Задачу пространства размерностью больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть ЗЛП задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные. Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{1.3}$$

Каждое неравенство системы (1.2) геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,$$

где $i = 1, 2, \dots, m$.

Условия $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Если система (1.2) при условии (1.3) совместна, то полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют выпуклое множество, точки которого являются решением данной системы.

Совокупность этих решений называется многоугольником решений. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, неограниченной многоугольной областью. Таким образом, геометрически ЗЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции минимальное (максимальное) значение, причем допустимыми решениями служат все точки многоугольника решений.

Допустим, что система (1.2) при условии (1.3) совместна и ее многоугольник решений ограничен.

Линейная функция (1.1) при фиксированном значении Z является уравнением прямой:

$$C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}.$$

Построим многоугольник решений системы (1.2), (1.3) и график линейной функции (1.1) при $Z = 0$ (рис. 1.1). Тогда поставленной ЗЛП можно дать следующую интерпретацию: найти точку многоугольника решений, в которой прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ является опорной и функция Z при этом достигает минимума.

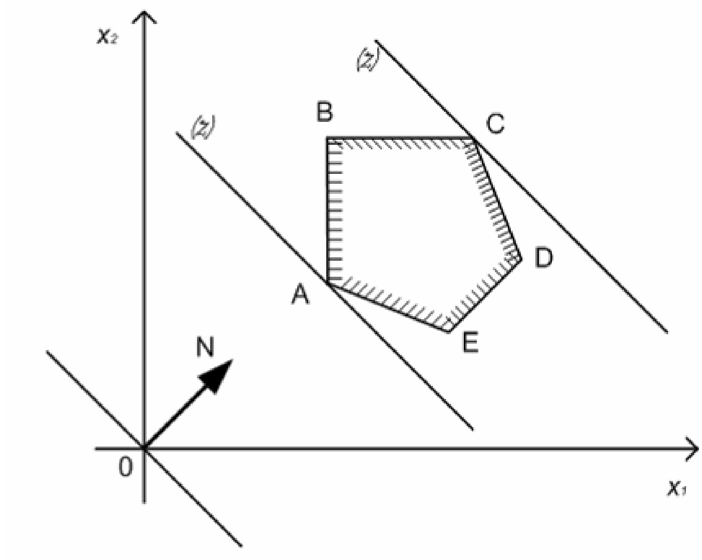


Рис. 1.1

Значения Z возрастают в направлении вектора $N = (C_1, C_2)$, поэтому прямую $Z = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении вектора N.

Из рис. 1.1 видно, что прямая $Z = \text{const}$ дважды становится опорной — в точках A и C, что соответствует минимуму в точке A и максимуму в точке C. Координаты точки A (x_1; x_2) находим, решая систему уравнений для прямых AB и AE. Если многоугольник решений представляет неограниченную многоугольную область, то возможны два случая:

1) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь в направлении N или противоположном ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной; значит, линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу (рис. 1.2, *а*);

2) прямая $Z = \text{const}$, передвигаясь, все же становится опорной. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограничена только сверху (рис. 1.2, *б*), только снизу (рис. 1.2, *в*) или сверху и снизу (рис. 1.2, *г*).

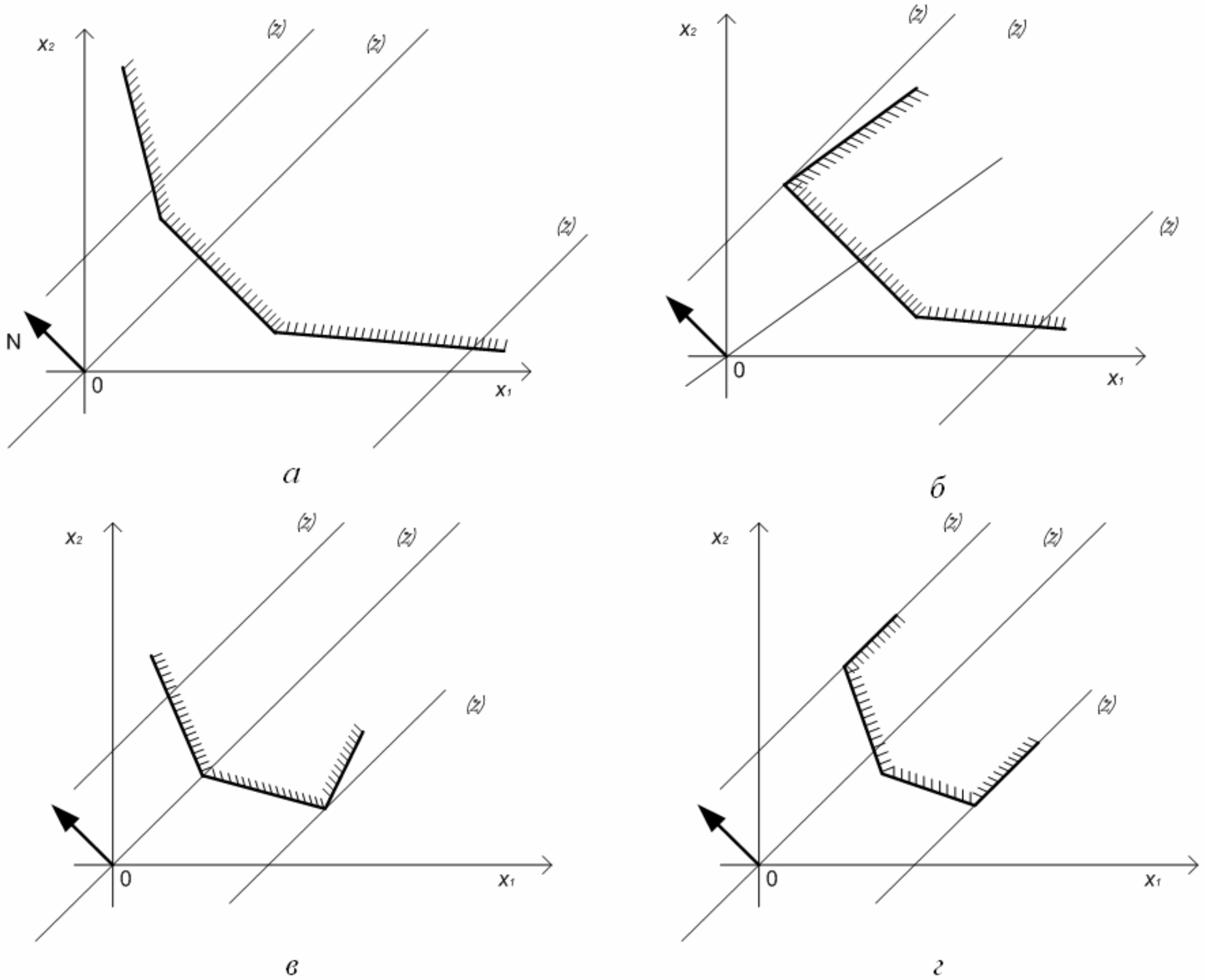


Рис. 1.2

В целом, с помощью графического метода может быть решена ЗЛП, система ограничений которой содержит n неизвестных и m независимых уравнений, если n и m связаны соотношением $n - m = 2$.

Порядок выполнения контрольной работы

1. Выбрать свой вариант контрольного задания (определяется по сумме двух последних цифр номера зачетной книжки; если две последние цифры равны 00, то следует выбрать вариант 20).
2. Построить математическую модель ЗЛП.
3. Построить многоугольник решений в системе координат x_1Ox_2.
4. Построить радиус-вектор N и перпендикулярно ему прямую $Z = 0$, проходящую через точку O (0; 0).
5. Провести прямые, параллельные прямой $Z = 0$, опорные по отношению к многоугольнику решений.
6. Найти оптимальные планы и значения Z_{min} и Z_{max}.

Примеры выполнения контрольной работы

Пример 1. Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья — S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, записаны в постановке ЗЛП:

x_1 — количество единиц продукции P_1;

x_2 — количество единиц продукции P_2;

Z — функции цели (максимальная прибыль).

1. Математическая модель задачи: найти максимум функции $Z = 50x_1 + 40x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые (рис. 1.3):

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20\,(L_1), \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40\,(L_2), \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30\,(L_3); \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Взяв какую-нибудь точку, например $O\,(0; 0)$, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство.

Многоугольником решений данной задачи является ограниченный пятиугольник $OABCD$ (рис. 1.3).

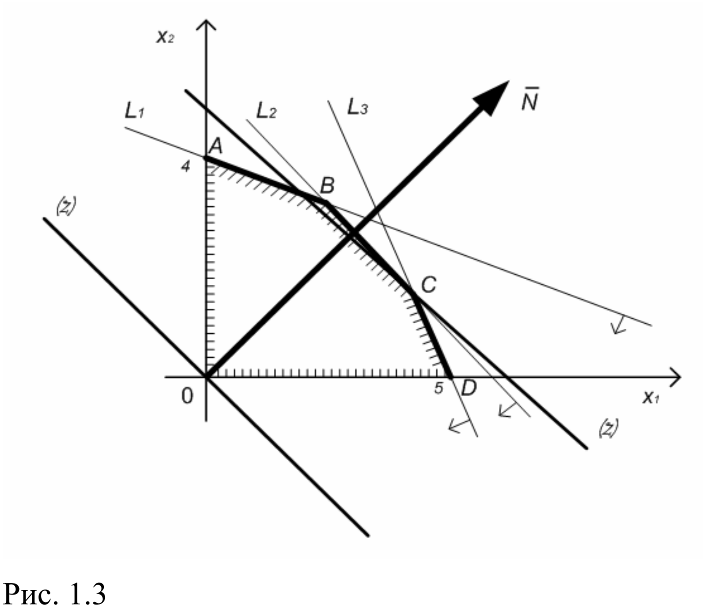


Рис. 1.3

3. Для построения прямой $50x_1 + 40x_2 = 0$ строим радиус-вектор $N(50; 40) = 10(5; 4)$ и через точку O проводим прямую, перпендикулярную N.

4. Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N. Из рис. 1.3 видно, что опорной прямая $Z = \text{const}$ становится в точке C, где Z принимает максимальное значение.

5. Точка C лежит на пересечении прямых L_2 и L_3. Для определения ее координат решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 40, \\ 5x_1 + 6x_2 = 30. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи: $x_1 \approx 3{,}9$; $x_2 \approx 1{,}7$.

Подставляя x_1 и x_2 в Z, получаем $Z_{\max} \approx 260{,}3$.

Таким образом, чтобы получить максимальную прибыль, необходимо запланировать производство 3,9 единиц продукции P_1 и 1,7 продукции P_2.

Пример 2. Графическим методом найти оптимальный план ЗЛП, в которой линейная функция $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ достигает максимального значения при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38; \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, где $j = 1, 2, ..., 5$.

Используя метод Жордана — Гаусса, произведем три полных исключения неизвестных x_1, x_2, x_3. В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases} \tag{1.4}$$

откуда $x_1 = 6 - x_4 + 3x_5$; $x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5$; $x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5$. (1.5)

Подставляя эти значения в линейную функцию и отбрасывая в системе (1.4) базисные переменные, получаем задачу, выраженную только через свободные неизвестные x_4 и x_5: найти максимальное значение функции $Z = 6x_4 + 15x_5 - 38$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20; \end{cases}$$

$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$

Построим многогранник решений и линейную функцию в системе координат x_4Ox_5 (рис. 1.4).

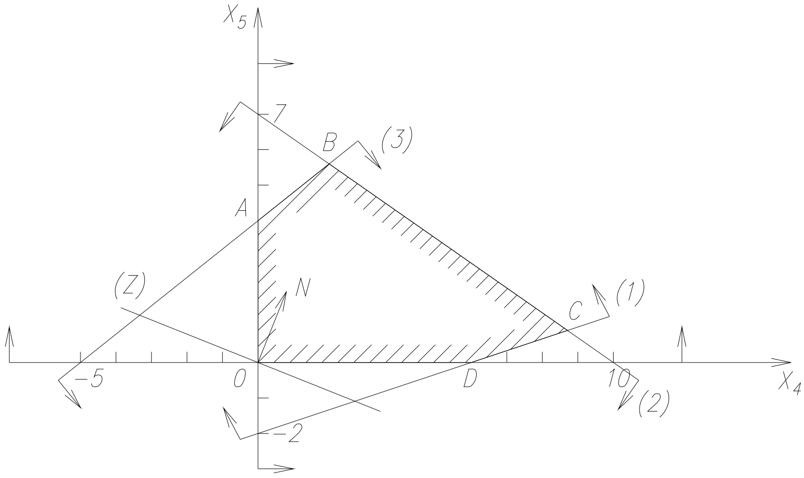


Рис. 1.4

Из рис. 1.4 заключаем, что линейная функция принимает максимальное значение в угловой точке *B*, которая лежит на пересечении прямых *2* и *3*. Решая систему

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases}$$

получаем, что $x_4 = 2$, $x_5 = 28 / 5$. Максимальное значение функции $Z_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58.$

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в (1.5) найденные значения x_4 и x_5. Окончательно получаем следующее: $x_1 = 104 / 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 28 / 5$.

Варианты индивидуальных заданий

Найти минимум и максимум целевой функции при заданных ограничениях.

Вариант 1

$$Z = x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 50, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 19; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 2

$$Z = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \ge 17, \\ x_1 + 2x_2 \le 34, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 17; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 3

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 4

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \ge 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 5

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + 2x_2 \leq 40; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 6

$$Z = 5x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 7

$$Z = 6x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ -x_1 + 4x_2 \geq 19; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 8

$$Z = x_1 + 7x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 53, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 71; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 9

$$Z = x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26, \\ x_1 + 4x_2 \geq 26; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 10

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 9x_1 - 10x_2 \leq 17, \\ 13x_1 + 2x_2 \geq 41, \\ x_1 + 3x_2 \geq 43; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 11

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 22x_3 \leq 22, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 6, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \leq 1; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \text{ где } j = 1, 2, 3.$$

Вариант 12

$$Z = 3x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29, \\ 3x_1 - x_2 \leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 13

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 17x_1 + x_2 \geq 53, \\ 2x_1 + x_2 \leq 23, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 14

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 3x_1 - x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + x_2 \geq 40; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 15

$$Z = x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -4x_1 + 9x_2 \geq 20; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 16

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 \geq 57, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 53, \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 15; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Вариант 17

$$Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48, \\ 2x_1 + x_2 \le 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 18

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -10x_1 + 9x_2 \le 17, \\ 2x_1 + 13x_2 \ge 41, \\ 3x_1 + x_2 \ge 43; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 19

$$Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 17x_2 \ge 53, \\ x_1 + 2x_2 \le 23, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Вариант 20

$$Z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 11x_2 \ge 48, \\ 2x_1 + x_2 \ge 28; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;
2) условие задачи;
3) чертеж с графической иллюстрацией решения задачи, пояснения к чертежу;
4) все промежуточные и окончательные вычисления;
5) вывод и анализ полученных результатов.

Контрольные вопросы

1. На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
3. Каким может быть многоугольник решений?
4. Что геометрически означает каждое неравенство в системе ограничений?

Лабораторная работа 1
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Цель работы — усвоение симплекс-метода и приобретение практических навыков его применения.

Программное обеспечение — табличный процессор MS Excel.

Теоретическое введение

Решение любой ЗЛП можно найти лишь симплексным методом или методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из методов, необходимо записать ЗЛП в канонической форме.

Симплексный метод основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает или убывает (при условии, что заданная ЗЛП имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Переход возможен, если известен какой-нибудь опорный план.

Количество опорных планов определяется числом C_n^m. При больших n и m найти оптимальный план, перебирая все опорные планы, трудно. Поэтому необходимо иметь схему, по которой осуществляется упорядоченный переход от одного опорного плана к другому. Такой схемой является симплексный метод решения ЗЛП.

Пусть дана ЗЛП. Найти минимальное значение функции

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \text{ где } j = \overline{1;\, n}, \tag{2.3}$$

Здесь a_{ij}, b_j и c_j $(i = \overline{1;\, m};\ j = \overline{1;\, n})$ — заданные постоянные числа ($m < n$ и $b_i > 0$).

Векторная форма данной задачи: найти максимум функции

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_i \tag{2.4}$$

при условиях

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m + \ldots + x_n A_n = A_0, \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0, \text{ где } j = \overline{1; n}. \tag{2.6}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ldots; \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \quad \ldots; \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_m A_m = A_0$, то по определению опорного плана $X = (b_1; b_2; \ldots; 0; \ldots; 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компоненты вектора X равны 0). Этот план определяется системой единичных векторов A_1, A_2, …, A_m, а также вектором A_0. Они могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса.

Пусть

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i,$$

где $j = \overline{1; n}$.

Положим,

$$Z = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij};$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j,$$

где $j = \overline{1; n}$

Так как векторы A_1, A_2, …, A_m единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и $Z_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} a_{ij}$, а также $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} a_{ij} - C$.

Теорема 2.1. Опорный план $X^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_m^*; 0; \ldots; 0)$ задачи (2.4—2.6) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j = \overline{1; n}$.

Теорема 2.2. Если $\Delta_k < 0$ для некоторого $j = k$ и среди чисел $a_{ik} \leq 0$ $(i = \overline{1;\ m})$ нет положительных $(a_{ik} \leq 0)$, то целевая функция (2.4) задачи (2.4—2.6) не ограничена на множестве ее планов.

Т е о р е м а 2.3. Если опорный план X задачи (2.4—2.6) не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \le 0$), то существует опорный план X', такой, что $Z(X') > Z(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать в симплексную таблицу.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Выбрать свой вариант задания (определяется по сумме двух последних цифр номера зачетной книжки; если две последние цифры равны 00, то следует выбрать вариант 20).
2. Построить математическую модель задачи.
3. Решить ЗЛП с помощью инструментального средства Solver (Решатель) MS Excel (Сервис/Поиск решения).

Пример выполнения работы

Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия, р.	9	10	16	—

Изделия *A*, *B* и *C* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* — через x_2, изделий *C* — через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$
\begin{cases}
18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\
6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\
5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180.
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \tag{2.8}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2 и x_3 могут принимать только неотрицательные значения: $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2.7) требуется найти такое, при котором функция (2.8) принимает максимальное значение.

Решим ЗЛП с помощью инструментального средства Solver (Решатель) MS Excel (Сервис/Поиск решения).

Введем необходимые данные и ограничения (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E
1	Переменные				
2	x1	x2	x3		
3					
4	Целевая функция			=9*A3+10*B3+16*C3	
5	=18*A3+15*B3+12*C3	360			
6	=6*A3+4*B3+8*C3	192			
7	=5*A3+3*B3+3*C3	180			
8					

Рис. 2.1

Выберем команды «Сервис/Поиск Решения». Заполним окно диалога «Поиск решения» (рис. 2.2).

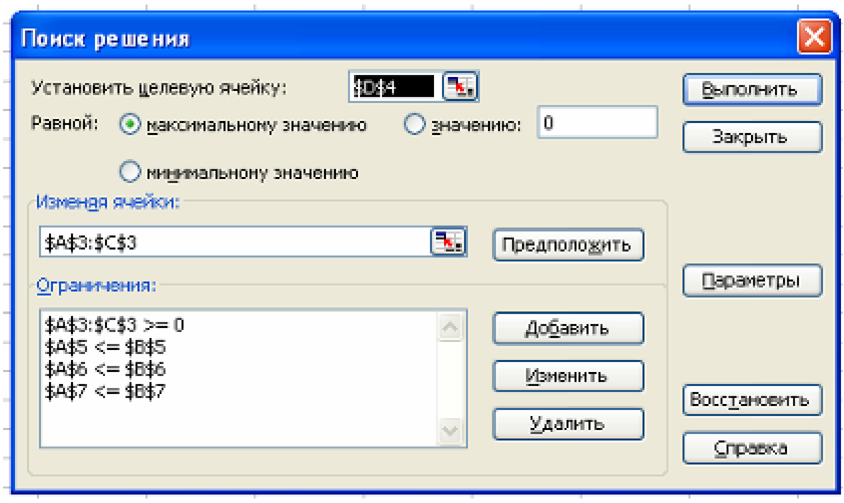


Рис. 2.2

Установим параметры в окне «Параметры поиска решения» (рис. 2.3).

После команды «Выполнить» откроется окно диалога «Результаты поиска решения», которое сообщит, что решение найдено (рис. 2.4).

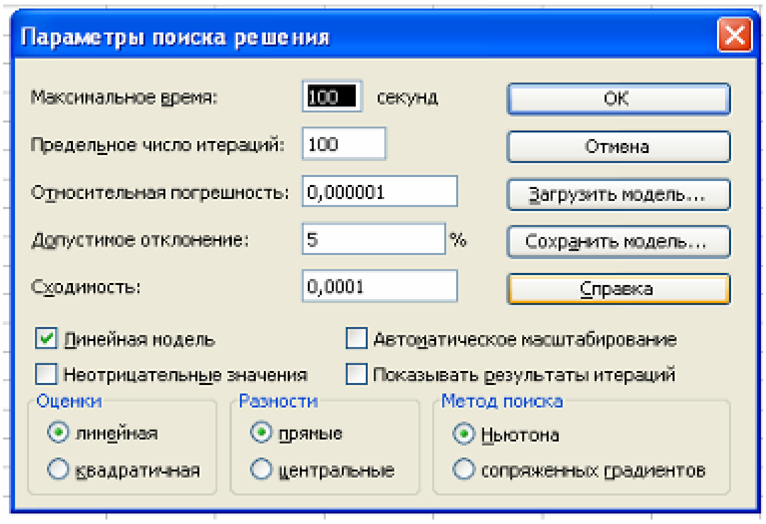


Рис. 2.3

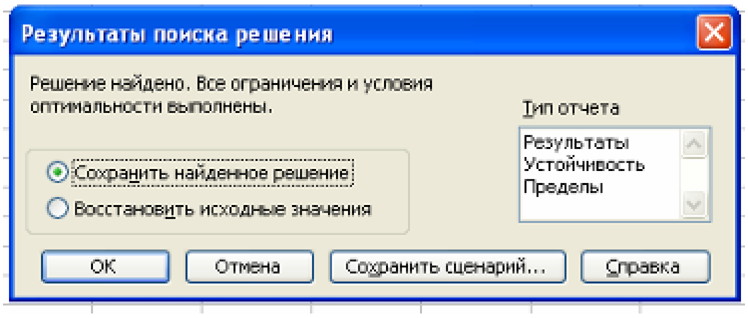


Рис. 2.4

Оптимальный план и максимальное значение целевой функции появятся в соответствующих ячейках таблицы (рис. 2.5).

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1	x2	x3	
3	0	8	20	
4	Целевая функция			400
5	360	360		
6	192	192		
7	84	180		

Рис. 2.5

Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1—10. Задача об использовании ресурсов. Для изготовления n видов продукции P_1, …, P_n предприятие использует m видов ресурсов S_1, …, S_m (сырье, топливо, материалы и т. д.). Запасы ресурсов каждого вида ограничены и равны b_1, …, b_m. На изготовление единицы продукции j-го вида ($j = 1, …, n$) расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса ($i = 1, …, n$). При реализации единицы j-й продукции предприятие получает C_j единиц прибыли. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль. Исходные данные представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Вариант	Виды ресурсов	Расход ресурсов на единицу продукции			Запасы ресурсов	Доходы от реализации единицы продукции		
		P_1	P_2	P_3		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}
1	S_1	2	1	1	25	6	5	5
	S_2	1	1	1	14			
	S_3	0	4	2	19			
	S_4	3	0	1	24			
2	S_1	2	5	—	300	5	8	—
	S_2	4	5	—	400			
	S_3	3	0	—	100			
	S_4	0	4		200			
3	S_1	2	5	—	20	50	40	—
	S_2	8	5	—	40			
	S_3	5	6	—	30			
4	S_1	2	3	—	19	7	5	—
	S_2	2	1	—	13			
	S_3	0	3	—	15			
	S_4	3	0	—	18			
5	S_1	4	2	1	150 000	100	150	200
	S_2	6	0	2	170 000			
	S_3	0	2	4	100 000			
	S_4	8	7	0	200 000			
6	S_1	2	5	7	60	32	13	61
	S_2	22	14	18	500			
	S_3	10	14	8	328			
7	S_1	0,6	0,4	0,6	800	20	15	25
	S_2	0,2	0,4	0,3	600			
	S_3	0,2	0,6	0,4	120			
8	S_1	0,6	0,5	0,4	700	20	15	25
	S_2	0,7	0,4	0,8	800			
	S_3	0,3	0,2	0,5	520			
9	S_1	4	5	2	300	800	400	300
	S_2	5	6	3	800			
	S_3	6	7	4	520			
10	S_1	12	9	10	3456	16	14	12
	S_2	0,3	0,2	0,3	432			
	S_3	6	4	5	2400			

Варианты 11—15. Задача о смесях. Имеется n продуктов $P_1, \ldots, P_n$, содержащих m видов питательных веществ $S_1, \ldots, S_m$ (сырье, топливо, материалы и т. д.). Пусть a_{ij} ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) — количество единиц j-го питательного вещества в единице i-го продукта; b_j — суточная потребность (минимальная норма) организма в j-м питательном веществе; C_i — стоимость единицы i-го продукта. Требуется выбрать такой суточный рацион питания (т. е. назначить количество продуктов $P_1, \ldots, P_n$, входящих в него), чтобы условия по питательным веществам были выполнены, а стоимость рациона была минимальной. Данные представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Вариант	Виды питательных веществ	Количество единиц питательных веществ в единице продукции				Минимальная норма питательных веществ	Стоимость единицы продукции			
		P_1	P_2	P_3	P_4		C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	C_{P_4}
11	S_1	3	1	—	—	9	4	6	—	—
	S_2	1	2	—	—	8				
	S_3	1	6	—	—	12				
12	S_1	1,2	1,4	0,8	—	1,6	3	4	5	—
	S_2	80	280	240	—	200				
	S_3	5	5	100	—	10				
13	S_1	26,5	7,8	0	0	21	14,4	16	12,8	10,5
	S_2	51	26	45,7	0	30				
	S_3	0	0	5	72,5	500				
14	S_1	1	5	—	—	10	2	3	—	—
	S_2	3	2	—	—	12				
	S_3	2	4	—	—	16				
	S_4	2	2	—	—	10				
	S_5	1	0	—	—	1				
15	S_1	0,18	0,24	1,2	—	12	1	1,1	7,5	—
	S_2	10	8	200	—	100				
	S_3	15	1	1,5	—	450				

Варианты 16—20. Задача о загрузке оборудования. Предприятие выпускает n видов изделий $P_1, \ldots, P_n$, каждое из которых проходит последовательную обработку на станках типов $T_1, \ldots, T_m$. Запас мощности станков, т. е. рабочее время станка, составляет соответственно $b_1, \ldots, b_m$ единиц времени. Изделие P_i обрабатывается первым станком (типа T_1) a_{i1} единиц времени, вторым станком — a_{i2} единиц времени и т. д. При реализации одно изделие P_i приносит C_i единиц прибыли ($i = 1, \ldots, n$). Составить такой план загрузки станков, при котором предприятие получит максимальную прибыль (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Вариант	Типы станков	Продолжительность обработки изделия на станке			Доход от реализации изделия			Запас мощности станков
		P_1	P_2	P_3	C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	
16	T_1	12	10	9	30	32	29	13 200
	T_2	15	18	20				24 000
	T_3	6	4	4				6000
17	T_1	2	5	—	1	1	—	50
	T_2	2	1	—				2
	T_3	5	6	—				60
	T_4	1	10	—				90
18	T_1	3	8	4	16	25	20	6048
	T_2	2	3	2				6048
	T_3	7	9	5				3932

Окончание табл. 2.4

Вариант	Типы станков	Продолжительность обработки изделия на станке			Доход от реализации изделия			Запас мощности станков
		P_1	P_2	P_3	C_{P_1}	C_{P_2}	C_{P_3}	
19	T_1	2	3	—	11	9	—	20
	T_2	3	1	—				37
	T_3	0	1	—				30
20	T_1	2	0	—	6	6	—	20
	T_2	1	2	—				37
	T_3	1	4	—				30

Решение ЗЛП симплексным методом в MS Excel

Алгоритм метода включает следующие этапы:

1) найти первоначальный опорный план;

2) составить симплекс-таблицу, используя для расчетов MS Excel;

3) выяснить, имеется ли хотя бы одно положительное (при минимуме) или отрицательное (при максимуме) число Δj; если нет, то найденный опорный план оптимален; если же среди чисел Δj имеются положительные (отрицательные), то либо установить неразрешимость задачи, либо перейти к новому опорному плану;

4) найти направляющие столбец и строку; направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине числом Δj, а направляющая строка — минимальным из отношений компонент столбца A_0 к положительным компонентам направляющего столбца;

5) используя метод исключения неизвестных Жордана — Гаусса, сделать новый базисный вектор A_j единичным; при этом определить компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов A_j по векторам нового базиса и числа Z' и Δ'_j; все эти числа записать в новой симплекс-таблице;

6) проверить найденный опорный план на оптимальность; если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то следует снова искать разрешающий элемент и далее действовать по алгоритму; в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения надо закончить.

Для решения запишем задачу (2.7—2.8) в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 — это неиспользуемое количество сырья 1-го вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где $P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$.

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0; 0; 0; 360; 192; 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для 1-й итерации (табл. 2.5), подсчитываем значения F_0, $Z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C, P_0) = 0; \quad z_1 = (C, P_1) = 0; \quad z_2 = (C, P_2); \quad z_3 = (C, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9; \quad z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10; \quad z_3 - c_3 = -16.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 2.5

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4	—	—	0	–9	–10	–16	0	0	0

Этот план не оптимален, так как в 4-й строке имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9$; $z_2 - c_2 = -10$; $z_3 - c_3 = -16$. На основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца P_3, в базис введем вектор P_3.

Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим

$$\theta_0 = \min(b_i / a_{i3})$$

для $a_{i3} > 0$, т. е.

$$\theta_0 = \min(360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8 = 24.$$

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса.

Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для 2-й итерации (табл. 2.6), используя вычислительные возможности MS Excel (ввод формульных данных с абсолютными и относительными адресами, копирование формул, форматирование числовых данных).

Таблица 2.6

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–1,50	0
2	P_3	16	24	0,75	0,5	1	0	0,125	0
3	P_6	0	108	2,75	1,50	0,00	0,00	–0,38	1
4	—	—	384	3	–2	0	0	2	0

Найденный на 2-й итерации план задачи не является оптимальным, поэтому и необходимо повторить все действия (табл. 2.7).

В 4-й оценочной строке табл. 2.7 все числа неотрицательные. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max} = 400$.

Таблица 2.7

i	Базис	C_b	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	0,111111	–0,16667	0
2	P_3	16	20	0,25	0	1	–0,05556	0,208333	0
3	P_6	0	96	1,25	0	0	–0,16667	–0,125	1
4	—	—	400	5	0	0	0,222222	1,666667	0

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) титульный лист;

2) описание всех этапов выполнения лабораторной работы с необходимыми формулами, таблицами, рисунками;

3) анализ полученных результатов и вывод.

Контрольные вопросы

1. Как построить первоначальный опорный план ЗЛП и проверить его на оптимальность?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана ЗЛП на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?
7. Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?
8. Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

Лабораторная работа 2
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Цель работы — приобретение навыков решения транспортной задачи с составлением первоначального плана распределения поставок различными методами.

Программное обеспечение — табличный процессор MS Excel.

Теоретическое введение

Транспортная задача в общем виде формулируется следующим образом.

Пусть имеется m пунктов отправления грузов (или пунктов производства) A_1, A_2, A_3, …, A_m и n пунктов назначения (или пунктов потребления) B_1, B_2, B_3, …, B_n. Обозначим запасы груза (или ресурсы производства) в i-м пункте отправления через a_i ($i = 1, 2, …, m$), а потребность каждого j-го пункта потребления через b_j ($j = 1, 2, …, n$).

Заданы стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого i-го пункта до каждого j-го пункта потребления, чтобы:

1) вывезти грузы всех поставщиков;
2) удовлетворить всех потребителей;
3) достичь минимального значения общей стоимости перевозок.

Условие задачи можно записать в виде таблицы, называемой матрицей планирования перевозок (табл. 3.1).

Строки таблицы соответствуют поставщикам, а столбцы — потребителям. В последней строке записаны заявки каждого потребителя, а в последнем столбце — запасы каждого поставщика.

В верхних правых углах внутренних клеток таблицы записываются истинные тарифы c_{ij}, а в нижних левых углах — планируемые перевозки x_{ij}.

Целью решения задачи является составление плана перевозок грузов, обеспечивающих минимальные транспортные расходы.

Модель транспортной задачи, для которой количество груза у всех поставщиков равно потребностям всех потребителей в данном грузе, называется закрытой, а сама транспортная задача — сбалансированной. Модели, для которых суммарные запасы не равны суммарным потребностям, называются открытыми, а задачи — несбалансированными. Разрешимыми являются только закрытая модель или сбалансированная транспортная задача. Чтобы решить любую транспортную задачу, надо свести ее к закрытой модели, а затем найти решение сбалансированной задачи. Отметим, что любую открытую модель можно свести к закрытой введением фиктивного потребителя или фиктивного поставщика.

Таблица 3.1

Поставщики	Потребители						Запасы груза
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{21} x_{21}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{nj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	...	b_j	...	b_m	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Математическая модель транспортной задачи имеет следующий вид. Найти минимальное значение функции цели

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \text{ где } i = 1, 2, ..., m; \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \text{ где } j = 1, 2, ..., n; \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ где } i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n. \tag{3.4}$$

В рассматриваемой модели предполагается, что суммарные запасы равны суммарным потребностям, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.5}$$

Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (3.2) и (3.3), определяемое матрицей $X = (x_{i,j})$, где $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$, называется планом транспортной задачи.

План $X^* = (x_{i,j}^{\ *})$, где $i = 1,\ 2,\ ...,\ m$ и $j = 1,\ 2,\ ...,\ n$, при котором функция (3.1) принимает минимальное значение, называется оптимальным планом.

Любое решение транспортной задачи называется распределением поставок.

При распределительном методе решения транспортной задачи последовательно используются расчетные таблицы, соответствующие тому или иному шагу решения. Каждая такая таблица включает определенное распределение поставок. Так как распределение поставок должно соответствовать базисному решению, то и клетки таблицы должны соответствовать основным (положительным) и неосновным (равным нулю) переменным. На практике в клетки, соответствующие основным переменным, записываются поставки, а клетки, которые соответствуют неосновным переменным, оставляют незаполненными (свободными). Решение транспортной задачи состоит в переходе от одного распределения поставок к другому — от одной таблицы к другой. Новое распределение поставок не должно увеличивать общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено их оптимальное распределение. Чтобы осуществлять переход от одного распределения поставок к другому, надо иметь исходное (первоначальное) распределение поставок.

Решение транспортной задачи обычно проводится в два этапа. На первом этапе находят какое-нибудь решение, удовлетворяющее системе линейных ограничений, или убеждаются, что такого решения не существует. Этот этап называется отысканием исходного опорного плана. На втором этапе проводится последовательное улучшение этого плана по определенным правилам, до тех пор пока не будет найдено оптимальное решение и дальнейшее улучшение не станет возможным. От того, каким будет исходный план, зависит время решения задачи на втором этапе.

Метод наименьшей стоимости учитывает при построении исходного плана стоимости перевозок, т. е. истинные тарифы c_{ij}.

Определение значений x_{ij} начинается с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки. Если таких клеток несколько, то выбирают любую из них. В выбранную клетку помещается поставка:

$$x_{ij} = \min\left\{a_i,\ b_j\right\}.$$

Строка или столбец, соответствующие наименьшему числу, исключаются из дальнейшего рассмотрения (вычеркиваются), а заявка потребителя или наличие запаса у поставщика уменьшается на соответствующую величину. Если для выбранной клетки $a_i = b_j$, то из дальнейшего рассмотрения исключается i-я строка и j-й столбец.

Из оставшейся таблицы вновь выбирают клетку с наименьшей стоимостью и повторяют аналогичные действия до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности — полностью удовлетворены.

Полученный план необходимо проверить на вырожденность. Если количество заполненных клеток равно $(m + n - 1)$, то план является невырожденным, если же меньше — вырожденным.

Если план вырожденный, то среди незаполненных клеток ищут те, у которых минимальные тарифы перевозок. Их заполняют нулевыми поставками так, чтобы общее количество заполненных клеток стало $(m + n - 1)$. При этом необходимо помнить, что в таблице не должно быть ни одного цикла, все вершины которого являются заполненными клетками.

Циклом в транспортной задаче называется замкнутый многоугольник, одна вершина которого совпадает с той клеткой, для которой он строится, а все остальные вершины совпадают с заполненными клетками. Вершины соединяются замкнутой ломаной линией, отрезки которой в каждой заполненной клетке образуют угол 90°.

Нахождение оптимального плана транспортной задачи. Построенный одним из методов исходный опорный план можно довести до оптимального путем последовательного улучшения. Существуют несколько таких методов: распределительный, метод потенциалов, венгерский метод и др. Рассмотрим метод потенциалов.

Основой вычислительного процесса при улучшении опорного плана является определение критерия оптимальности δ_{ij}:

$$\delta_{ij} = c_{ij}^{*} - c_{ij},$$

где c_{ij}^{*} — расчетные затраты или косвенные тарифы, связанные с доставкой одной единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, определяемые для тех клеток опорного плана, ресурсы в которых не распределены (для незаполненных клеток); c_{ij} — затраты (истинные тарифы), связанные с доставкой одной единицей груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Теорема 3.1. Если для всех свободных клеток таблицы перевозок значение критерия оптимальности $\delta_{ij} \leq 0$, то этот план перевозок является оптимальным.

Теорема 3.2. Если для всех свободных клеток таблицы перевозок значение критерия оптимальности $\delta_{ij} < 0$, то этот оптимальный план перевозок является единственным.

Теорема 3.3. Если для некоторых свободных клеток значение критерия оптимальности $\delta_{ij} = 0$, то этот оптимальный план перевозок не является единственным.

Теорема 3.4. Если имеются свободные клетки, для которых критерий оптимальности $\delta_{ij} > 0$, то полученный план перевозок не является оптимальным.

Алгоритм метода потенциалов:

1. Каждому поставщику A_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) ставится в соответствие некоторое число U_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), которое называется потенциалом A_i-го поставщика или i-й строки.

2. Каждому потребителю B_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) ставится в соответствие некоторое число V_j, которое называется потенциалом B_j-го потребителя или j-го столбца.

3. Для каждой заполненной клетки, т. е. каждой базисной переменной, строится соотношение

$U_i + V_j = c_{ij}$.

Получают систему с числом уравнений, равным количеству базисных переменных (количеству заполненных клеток). Из этой системы определяют неизвестные потенциалы строк U_i и столбцов V_j.

Поскольку число неизвестных ($n + m$) превышает на единицу число уравнений ($m + n - 1$), одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например $U_1 = 0$, и найти значения остальных неизвестных. Значения потенциалов записываются в ту же матрицу планирования перевозок.

4. Для каждой незаполненной клетки, т. е. каждой небазисной переменной, рассчитываются косвенные тарифы c_{ij}^* по формуле

$c_{ij}^* = U_i + V_j$.

5. Проверяют полученный план на оптимальность по критерию δ_{ij} оптимальности опорного плана транспортной задачи. Если для каждой незаполненной клетки выполняется условие

$\delta_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij} \le 0$,

то исходный план является оптимальным.

Если некоторое $\delta_{ij} > 0$, то необходимо перейти к новому базисному плану путем перемещения перевозки в клетку, отвечающую условию $\delta_{ij} = \max$. Если таких клеток несколько, то выбирают любую из них.

Построение цикла пересчета и перераспределение поставок. Порядок построения цикла следующий:

1. Для перераспределения поставок строят цикл, соединяющий выбранную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки.

Цикл строится следующим образом. Вычеркиваются все строки и столбцы, содержащие только одну заполненную клетку. При этом считается, что выбранная клетка без поставки является заполненной. Все оставшиеся после вычеркивания клетки составляют цикл и лежат в его углах. Они соединяются ломаной линией.

Можно доказать, что для любой незаполненной клетки матрицы перевозок существует цикл и он является единственным.

2. В каждую клетку цикла, начиная с незаполненной, поочередно вписываются знаки «+» и «–». Так как у цикла четное количество вершин, то знаки будут чередоваться по кругу.

3. В клетках с отрицательными знаками выбирается минимальная величина поставки, которая обозначается Δ.

4. В те вершины, которые имеют знак «+», прибавляется еще поставка Δ, а в вершинах со знаком «–» поставки уменьшают на величину Δ. При этом суммы поставок по строкам a_i и по столбцам b_j не изменятся.

5. В результате действия, описанного в пункте 4 и называемого пересчетом поставок по циклу, клетка, для которой строился цикл, станет занятой,

а в одной из бывших занятых окажется нулевая поставка — ее и надо объявить свободной. Общее количество заполненных клеток не изменится, следовательно, новый полученный план перевозок является невырожденным.

6. Если в результате пересчета одновременно в нескольких ранее занятых клетках поставки примут нулевые значения, то свободной объявляется лишь одна из них. Остальные считаются условно занятыми с нулевыми поставками.

7. Значения переменных, включенных в цикл, после пересчета переносятся в новую таблицу. Все остальные переменные записываются в новую таблицу без изменений.

8. Полученный новый базисный план проверяется на оптимальность.

9. Такое улучшение плана можно проводить до тех пор, пока все критерии для незаполненных клеток окажутся удовлетворяющими условию $\delta_{ij} \le 0$. Затем вычисляется оптимальная стоимость перевозок.

Последовательное применение метода потенциалов обеспечивает монотонное убывание значений целевой функции Z транспортной задачи (общей стоимости перевозок всего груза). Данный метод позволяет за конечное число шагов найти минимум Z.

Алгоритм нахождения оптимального плана перевозок в транспортной задаче. Оптимальный план перевозок находится по следующей схеме:

1. Строится исходный опорный план. Если он оказывается вырожденным, то вводятся условно занятые клетки с нулевыми поставками, число занятых клеток дополняется до $(m + n - 1)$.

2. Вычисляется значение целевой функции Z.

3. Строится система потенциалов, с помощью которой план проверяется на оптимальность. Если условие оптимальности выполнено, решение заканчивается, в противном случае осуществляется переход к следующему шагу.

4. Выполняется пересчет поставок по циклу, загружается клетка, для которой не выполняется критерий оптимальности. Строится новый опорный план с числом занятых клеток, равным $(m + n - 1)$.

5. Выполняется переход к пункту 3.

Следует иметь в виду, что при решении транспортной задачи возможны случаи вырождения, которые встречаются, если при построении плана перевозок число заполненных клеток окажется меньше, чем $(m + n - 1)$. В этом случае следует в свободные клетки ввести недостающее количество поставок, считая их нулевыми, но заполненными. Желательно вводить эти поставки в клетки с наименьшими тарифами. Однако если при выполнении дальнейших расчетов встречаются затруднения, например происходит зацикливание, надо поменять заполненную нулем клетку.

Порядок выполнения лабораторной работы

Решить транспортную задачу в соответствии с предложенным вариантом (вариант выбирается так же, как в предыдущих работах) с помощью инструментального средства Solver (Решатель) MS Excel (Сервис/Поиск решения).

Пример выполнения лабораторной работы

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков A_1, A_2, A_3 в количестве a_1, a_2, a_3 т соответственно, необходимо доставить потребителяя B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 т. Стоимость C_{ij} перевозки тонны груза от i-го поставщика j-му потребителю задана матрицей D. Составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребности. Исходные данные приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

a_i	b_i				
	130	180	100	140	220
150	8	9	15	12	18
270	13	25	12	15	5
350	5	11	6	4	12

На рис. 3.1 представлено решение данной задачи в MS Excel с помощью инструментального средства «Поиск решения».

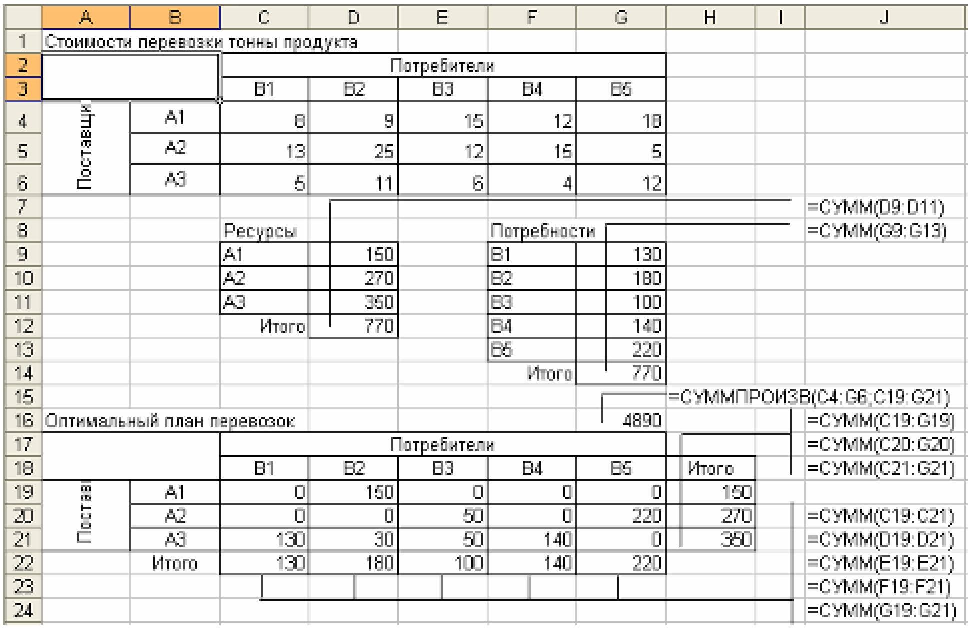


Рис. 3.1

Последовательность решения:

1) подготовить таблицы и заполнить их исходными данными: «Стоимости перевозки тонны продукта» (D), «Ресурсы» (A) и «Потребности» (B);

2) с помощью функции «СУММ» найти суммы ресурсов (ячейка D12) и потребностей (G14);

3) подготовить таблицу оптимальных перевозок; диапазон C19:G21 заполнить начальными значениями — нулями;

4) с помощью функции «СУММ» найти суммы перевозок по потребителям (C22:G22) и поставщиками (H19:H21);

5) в ячейку G16 ввести выражение стоимости оптимального плана перевозок;

6) запустить инструментальное средство «Поиск решения» (меню «Сервис/Поиск Решения») и ввести необходимые параметры: адрес целевой ячейки, изменяемые ячейки и ограничения (рис. 3.2).

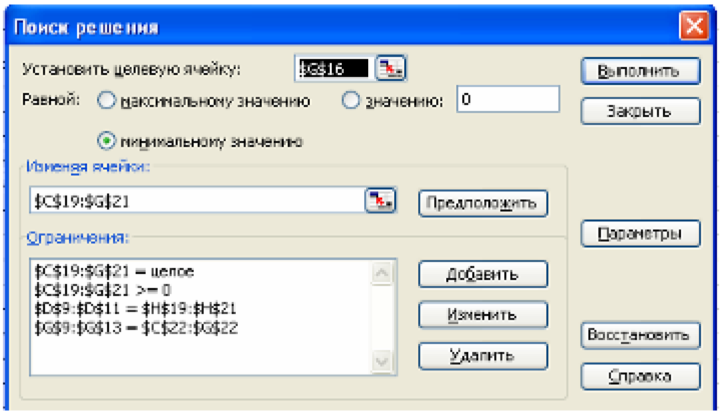


Рис. 3.2

Варианты индивидуальных заданий

Варианты 1—8. Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у трех поставщиков A_1, A_2, A_3 в количестве a_1, a_2, a_3 т соответственно, необходимо доставить потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 т. Стоимость C_{ij} перевозки тонны груза от i-го поставщика j-му потребителю задана матрицей D. Составить план перевозок, имеющий минимальную стоимость и позволяющий вывести все грузы и полностью удовлетворить потребности.

Примечание. Транспортная задача применяется при решении экономических задач, которые по своему характеру не имеют ничего общего с транспортировкой груза, поэтому величины C_{ij} могут иметь различный смысл — означать стоимость, расстояние, время, производительность и т. д.

Варианты 9—16. Пусть на предприятии имеется m видов станков, максимальное время работы которых соответственно равно a_i ($i = 1,2, \ldots, m$) ч. Каждый из станков может выполнять n видов операций. Суммарное время выполнения каждой операции соответственно равно b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Известна производительность C_{ij} i-го станка при выполнении j-й операции. Определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждому из станков, чтобы обработать максимальное количество деталей.

Для решения этой задачи линейную функцию умножить на (–1), т. е. считать в таблице все значения C_{ij} отрицательными.

Варианты 17—20. Пусть имеется m лиц A_i ($i = 1,2, \ldots, m$), которые могут выполнять B_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) различных работ. Известна производительность C_{ij} i-го лица на j-й работы. Необходимо определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждое лицо может быть назначено только на одну работу.

Умножая линейную функцию на (–1), приводим задачу к транспортной, в которой объемы запасов каждого поставщика и каждого потребителя равны единице.

Вариант 1

a_i \ b_j	150	50	200	150	150
100	2	10	8	8	5
250	9	17	15	14	11
350	10	20	15	20	13

Вариант 2

a_i \ b_j	300	200	50	150	100
250	5	3	15	1	10
250	10	10	20	6	15
300	13	10	22	8	7

Вариант 3

a_i \ b_j	150	50	250	50	200
150	5	10	13	23	13
200	2	2	4	15	3
350	4	11	11	22	10

Вариант 4

a_i \ b_j	100	250	100	150	200
250	13	17	2	14	5
250	15	16	2	15	7
300	4	7	1	4	2

Вариант 5

a_i \ b_j	250	50	150	50	200
150	3	9	4	8	4
200	9	13	10	13	12
350	5	10	6	10	6

Вариант 6

a_i \ b_j	200	100	50	400	100
400	7	11	4	4	3
200	11	13	7	6	5
250	13	18	10	10	9

Вариант 7

a_i \ b_j	100	200	200	50	300
350	3	3	2	4	5
300	7	7	6	8	10
200	4	4	3	5	6

Вариант 8

a_i \ b_j	50	250	100	150	50
150	4	2	2	3	2
200	6	3	3	4	4
250	6	4	4	6	4

Вариант 9

a_i \ b_j	200	50	200	50	100
50	3	1	1	1	2
200	5	3	3	3	6
350	17	16	15	16	16

Вариант 10

a_i \ b_j	350	200	100	50	50
100	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
300	6	6	8	6	8

Вариант 11

b_j / a_i	350	200	100	50	50
200	2	1	5	1	3
350	4	3	7	5	5
200	6	6	8	6	8

Вариант 12

b_j / a_i	90	100	70	130	110
200	12	15	21	14	17
150	14	8	15	11	21
150	19	6	26	12	20

Вариант 13

b_j / a_i	180	120	90	105	105
250	12	8	21	10	15
200	13	4	15	13	21
150	19	6	26	17	20

Вариант 14

b_j / a_i	200	170	230	225	175
400	13	9	5	11	17
250	14	5	12	14	22
350	20	17	13	18	21

Вариант 15

b_j / a_i	160	70	90	80	100
150	8	20	7	11	16
200	4	14	12	15	17
150	15	22	11	12	19

Вариант 16

b_j / a_i	170	120	190	140	180
280	28	12	7	18	7
300	35	14	12	15	3
220	30	16	11	25	15

Вариант 17

b_j / a_i	180	120	90	105	105
150	14	6	4	9	4
250	17	10	9	11	5
200	15	11	6	13	8

Вариант 18

b_j / a_i	300	160	220	180	140
250	9	15	35	20	7
400	15	35	12	11	6
350	16	19	40	15	25

Вариант 19

b_i / a_i	100	70	130	110	90
150	20	3	9	15	35
150	14	10	12	20	46
200	25	11	16	19	48

Вариант 20

b_i / a_i	190	140	180	120	170
280	7	3	9	15	35
220	3	10	12	20	46
300	15	11	16	19	48

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) название лабораторной работы;

2) ее цель;

3) задание;

4) результат решения в MS Excel;

5) исходный опорный план, найденный методом северо-западного угла или методом наименьшей стоимости;

6) последовательность шагов нахождения оптимального плана методом потенциала.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Общий вид матрицы планирования перевозок.
3. Какой вид имеет математическая модель транспортной задачи?
4. Какие модели транспортной задачи называются открытыми и закрытыми?
5. Когда транспортная задача является разрешимой?
6. Что называется планом транспортной задачи?
7. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?
8. Какой опорный план является вырожденным?
9. Как следует поступать, если план оказался вырожденным?
10. Что называется циклом в транспортной задаче? Какие возможны конфигурации циклов?
11. Охарактеризуйте метод наименьшей стоимости.
12. Какие существуют способы улучшения исходного опорного плана для транспортной задачи?
13. Что в транспортной задаче является критерием оптимальности?
14. Как с помощью критерия оптимальности узнать, является ли опорный план для транспортной задачи оптимальным?
15. Опишите алгоритм метода потенциалов.
16. Как строится цикл пересчета и перераспределения поставки в методе потенциалов?

14. Опишите алгоритм нахождения оптимального плана перевозок в транспортной задаче.

Лабораторная работа 3
НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель работы — знакомство с простейшей задачей нелинейного программирования (нахождением оптимального значения функции одной переменной) и одним из методов ее решения (методом «золотого сечения»). Приобретение навыков решения оптимальных задач встроенными средствами системы Mathcad.

Программное обеспечение — интегрированная математическая система Mathcad.

Теоретическое введение

Существуют численные методы решения задач минимизации нелинейной функции как при ограничениях, так и без ограничений.

Универсального метода, с помощью которого можно было бы успешно решать разнообразные задачи оптимизации с ограничениями, нет. Поэтому для решения каждого конкретного класса задач используют определленные численные методы.

Классический метод минимизации функций одной переменной. Рассмотрим задачу нахождения минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Классический метод подробно излагается в курсе математического анализа. Основным недостатком данного метода является узкая область его применения.

Если значения целевой функции определены из наблюдений или в результате проведения экспериментов, то получить аналитическое выражение для производной трудно. Но даже если функция $f'(x)$ найдена, то отыскание корней уравнения $f'(x) = 0$ может составить сложную вычислительную задачу. Поэтому разработаны методы минимизации, которые не требуют числового значения производных и в которых объем вычисления значений целевой функции является наименьшим.

Выделим класс функций, обладающих важным свойством.

Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a; b]$, если она имеет на этом отрезке единственную точку глобального минимума $x_{\min}$ и слева от этой точки является строго убывающей, а справа — строго возрастающей.

Другими словами, функция $f(x)$ унимодальна, если точка $x_{\min}$ существует и является единственной. На рис. 4.1 представлен пример графика унимодальной функции.

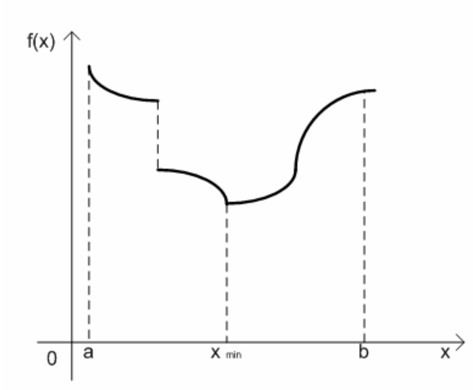
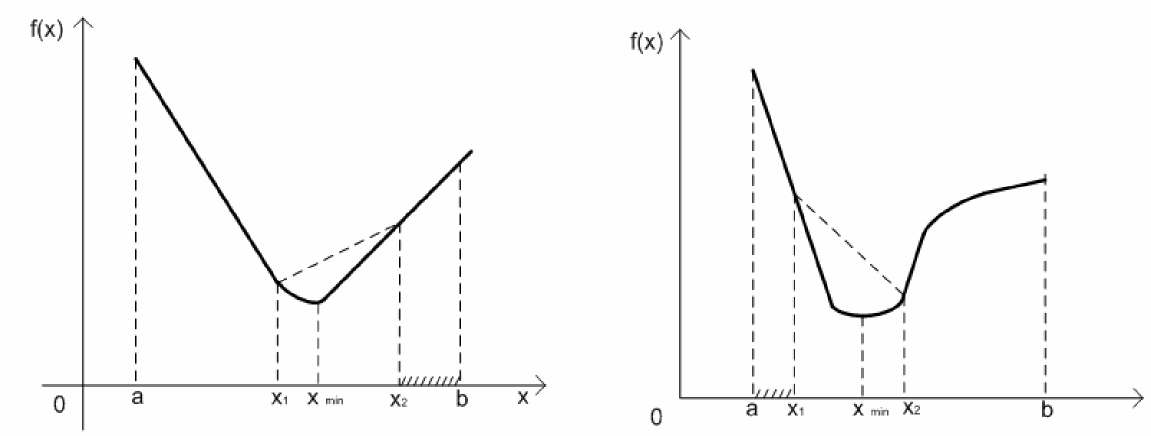


Рис. 4.1

Унимодальная функция обладает следующим свойством. Рассмотрим две произвольные точки: $x_1,\ x_2 \in [a, b]$ и $a < x_1 < x_2 < b$.

Если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_{\min} < x_2$ (рис. 4.2, *а*), если же $f(x_1) \ge f(x_2)$, то тогда $x_{\min} > x_1$ (рис. 4.2, *б*).



а *б*

Рис. 4.2

Метод золотого сечения. Будем искать точку глобального минимума унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ так, чтобы количество вычислений значений $f(x)$ для заданной точности было наименьшим.

Рассмотрим на исходном отрезке точку x_1 и вычислим $f(x)$. Зная значение $f(x)$ только в одной точке, невозможно сузить область поиска точки $x_{\min}$. Поэтому выбираем вторую точку x_2 так, чтобы $a < x_1 < x_2 < b$, и вычисляем $f(x_2)$.

Возможен один из двух случаев:

1) $f(x_1) \le f(x_2)$, поэтому согласно свойству унимодальной функции область поиска сужается до $[a; x_2]$;

2) $f(x_1) \ge f(x_2)$, тогда область поиска сужается до $[x_1; b]$.

В таком случае возникает вопрос: где на исходном отрезке целесообразнее брать точки x_1 и x_2? Так как первоначально ничего неизвестно о положении точки $x_{\min}$, то оба указанных выше случая равновозможны. Отсюда ясно, что точки x_1 и x_2 должны быть расположены симметрично относительно середины отрезка $[a; b]$.

Чтобы найти «золотую середину», рассмотрим для наглядности отрезок [1; 2] (рис. 4.3).

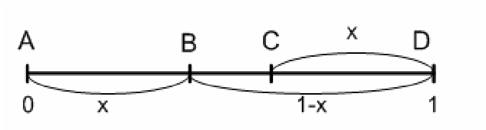


Рис. 4.3

Чтобы точка B была «выгодной» как на первом этапе, так и на следующем, она должна делить отрезок AD в таком же отношении, как и AC, т. е. $AB / AD = BC / AC$. При этом в силу симметрии аналогичным свойствам будет обладать и точка C.

В терминах координаты x пропорция примет вид $\frac{x}{1} = \frac{1-2x}{1-x}$. Это уравнение имеет корень меньше 1: $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382$.

О точке, которая расположена на расстоянии $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ % длины от одного из концов отрезка, говорят, что она выполняет «золотое сечение» данного отрезка. Очевидно, что каждый отрезок имеет две такие точки, расположенные симметрично относительно середины.

Итак, точки x_1 и x_2 должны осуществлять «золотое сечение» исходного отрезка $[a; b]$.

Вычисляем координаты точек, осуществляющих «золотое сечение» исходного отрезка:

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0),$$
$$z_0 = a_0 + b_0 - y_0.$$

Определяем значения $f(y_0)$ и $f(z_0)$.

Сравниваем значения $f(y_{k-1})$ и $f(z_{k-1})$, $(k \geq 1)$.

1. Если $f(y_{k-1}) \leq f(z_{k-1})$, то полагаем, что $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$, и вычисляем координату точки (слева от имеющейся) $y_k = a_k + b_k - z_k$ и значение $f(y_k)$.

2. Если $f(y_{k-1}) > f(z_{k-1})$, то полагаем, что $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$, и вычисляем координату точки (справа от имеющейся) $z_k = a_k + b_k - y_k$ и значение $f(z_k)$.

В любом из двух случаев вычисляется длина $(k+1)$-го отрезка: $\Delta_{k-1} = b_k - y_k$ или $\Delta_{k-1} = z_k - a_k$.

Работа выполняется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\Delta_{k-1} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданная точность вычислений.

3. Выбираем наименьшее из чисел $f(y_k)$ и $f(z_k)$ — приближенный минимум. Точка, которая ему соответствует, дает приближение $x_{\min}$.

Порядок выполнения работы

1. Решить задачу оптимизации своего варианта в системе Mathcad по следующему алгоритму:

1) задать начальные условия задачи оптимизации;

2) построить график функции $f(x)$;

3) оформить вычислительный блок Given с привлечением функции maximize или minimize;

4) получить значения $f(x)_{опт}$ и $x_{опт}$.

2. Проанализировать полученный результат.

Обратите внимание, что для поиска значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет максимальное или минимальное значение, используются функции maximize $(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и minimize $(f, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обе эти функции реализованы достаточно универсальными алгоритмами оптимизации и должны использоваться в составе вычислительного блока, открываемого директивой Given, и возвращать вектор неизвестных, при котором заданная функция имеет максимальное или минимальное значение. Внутри блока могут быть различные ограничительные условия в виде равенств или неравенств. Число условий ограничено только памятью ПК. Перед блоком решения нужно задать начальные значения искомых переменных.

Следует отметить, что результаты решения сильно зависят от выбора начальных значений и далеко не всегда имеют погрешность, устраивающую пользователя.

Пример выполнения лабораторной работы

Из круглой заготовки изготавливается пожарное ведро по простой технологии: вырезается сектор, затем полученная таким образом выкройка сворачивается в конус, а шов сваривается.

Длина дуги выкройки становится длиной окружности в основании конуса:

$$2\pi R - \frac{2\pi R\alpha}{360} = 2\pi r,$$

где R — радиус заготовки; α — значение угла вырезки; r — радиус основания конуса. Высота конуса h, радиус его основания r и радиус заготовки R связаны теоремой Пифагора.

Пусть радиус заготовки равен одному метру: $R = 1$. Длина окружности основания конуса составляет

$$r(\alpha) = R\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right);$$

высота конуса

$$h(\alpha) = R\sqrt{\left(1 - r(\alpha)^2\right)};$$

объем конуса

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} r(\alpha)^2 h(\alpha).$$

Математически задача сформулирована следующим образом (рис. 4.4): требуется рассчитать значение угла вырезки α, при котором объем $V(\alpha)$ будет максимальным (угол α задается в радианной мере).

При решении задачи воспользуемся встроенной функцией интегрированной математической системы Mathcad maximize(f, var1, var2, …), возвращающей значения переменных var1, var2, …, которые доставляют функции f максимальное значение.

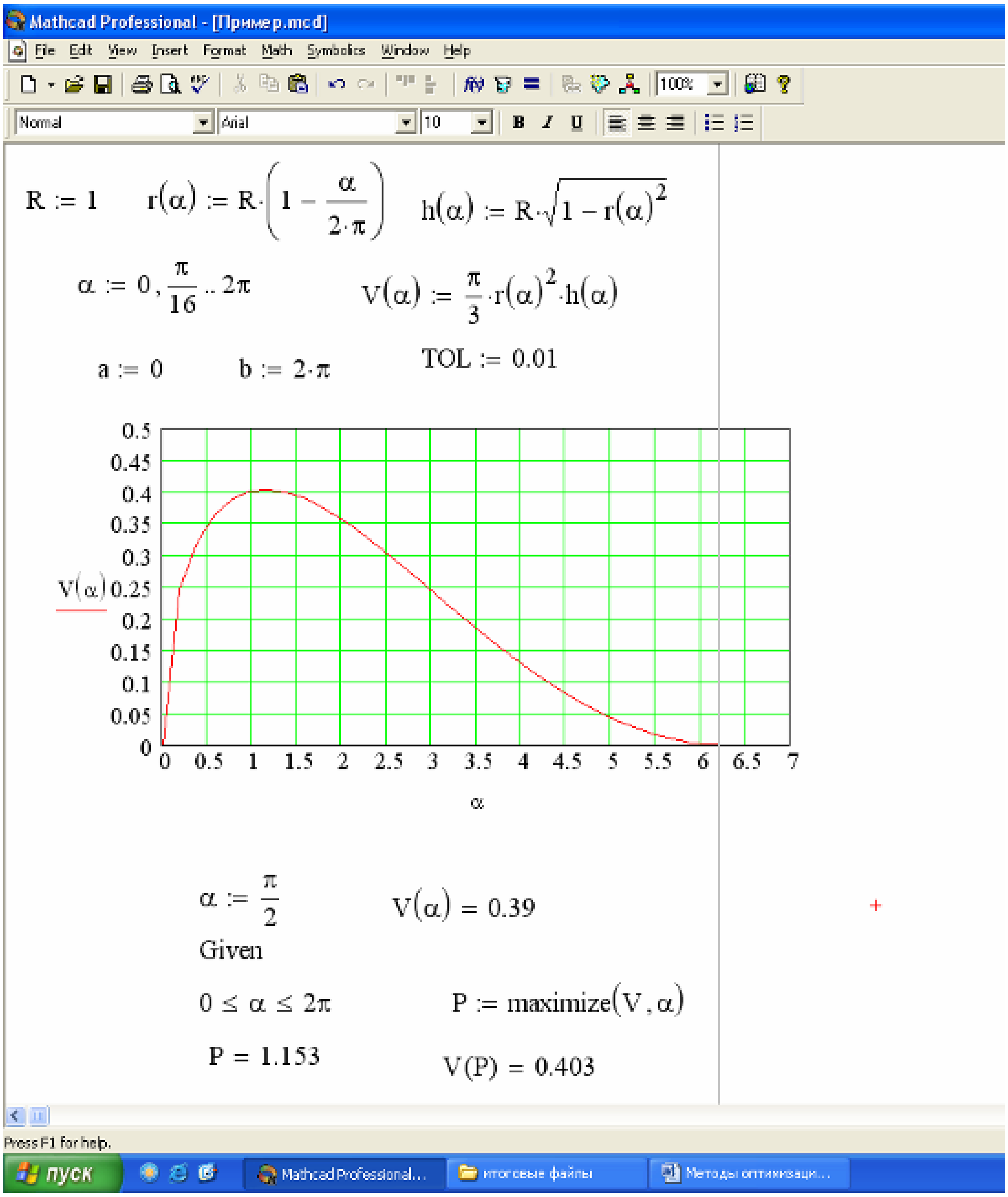


Рис. 4.4

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1 Вычислить максимальное значение функции $f(x)=72x+6x^2-8x^3-x^4$ на отрезке [1,5; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.	***Вариант 2*** Вычислить максимальное значение функции $f(x)=2x-x^2-e^x$ на отрезке [1; 1,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.
Вариант 3 Вычислить максимальное значение функции $f(x)=2\sin x-\operatorname{tg} x$ на отрезке [0; π/2,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,05.	***Вариант 4*** Вычислить минимальное значение функции $f(x)=1-32x+4x^2+x^4$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 5 Вычислить минимальное значение функции $f(x)=1+4x+2x^2+x^4$ на отрезке [–1; 0]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	***Вариант 6*** Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2+5x-10x^2+5x^3-x^5$ на отрезке [–3; –2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 7 Вычислить максимальное значение функции $f(x)=3+120x-4x^2-x^4$ на отрезке [–20; –10]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	***Вариант 8*** Вычислить максимальное значение функции $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+2x^3-\frac{1}{7}x^7$ на отрезке [1,2; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 9 Вычислить максимальное значение функции $f(x)=5x+x^2-\frac{1}{4}x^4$ на отрезке [1; 3]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	***Вариант 10*** Вычислить максимальное значение функции $f(x)=1+x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4$ на отрезке [0; 1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 11 Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4$ на отрезке [–1; 0,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	***Вариант 12*** Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+(x+1)^4$ на отрезке [–3; –1]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 13 Вычислить минимальное значение функции $f(x)=2x+x^2-\frac{1}{5}x^5$ на отрезке [–1; –0,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	***Вариант 14*** Вычислить максимальное значение функции $f(x)=x-2x^2+\frac{1}{5}x^5$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Вариант 15	Вариант 16
Вычислить максимальное значение функции $f(x) = 1 - 6x - 3x^2 - x^6$ на отрезке [–1;0]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	Вычислить минимальное значение функции $f(x) = 2x^2 + 3(5 - x)^{4/3}$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 17	**Вариант 18**
Вычислить максимальное значение функции $f(x) = 20x - 5x^2 + 8x^{5/4}$ на отрезке [3; 3,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	Вычислить максимальное значение функции $f(x) = 80x - 30x^2 - \frac{1}{4}x^4$ на отрезке [1; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.
Вариант 19	**Вариант 20**
Вычислить максимальное значение функции $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6$ на отрезке [1; 1,5]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.	Вычислить минимальное значение функции $f(x) = 10x\lg\left(\frac{x}{e}\right) - \frac{x^2}{2}$ на отрезке [0,5; 2]. Точку x^* определить с точностью до 0,01.

Требования к отчету

Отчет должен содержать:

1) копию документа, созданного в Mathcad;
2) поясняющие записи из теории по теме лабораторной работы.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит классический метод оптимизации функции одной переменной?
2. Какие функции называются унимодальными?
3. Каково основное свойство унимодальной функции?
4. В чем состоит суть метода «золотого сечения»?
5. Какая точка выполняет «золотое сечение» отрезка?

Список рекомендуемой литературы

1. *Акулич, И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. — М. : Высшая школа, 1986.

2. *Кузнецов, Ю. Н.* Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. — М. : Высшая школа, 1980.

3. *Ногин, В. Д.* Основы теории оптимизации / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. — М. : Высшая школа, 1986.

4. *Фурунжиев, Р. И.* Применение математических методов и ЭВМ. Практикум : учебное пособие для вузов / Р. И. Фурунжиев, Ф. М. Бабушкин, В. В. Варавко. — М. : Высшая школа, 1988. — 191 с.

5. *Потапова, Н. Н.* Решение транспортной задачи: методические указания к лабораторным работам по дисциплинам «Методы оптимизации при решении инженерных задач», «Математическое обеспечение технологических прорцессов» / Н. Н. Потапова, Т. В. Ерещенко, А. В. Жиделев. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2006. — 27 с.

6. *Забродина, О. М.* Лабораторный практикум «Методы оптимизации в решении инженерных задач» [Электронный ресурс] / О. М. Забродина, Н. А. Михайлова, А. Д. Скороходова. — Волгоград : ВолгГАСУ, 2011.

План выпуска учеб.-метод. документ. 2013 г., поз. 42

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *О. А. Шипунова*
Редактор *Н. Э. Фотина*
Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Подписано в свет 20.12.2013.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,5. Объем данных 0,57 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru