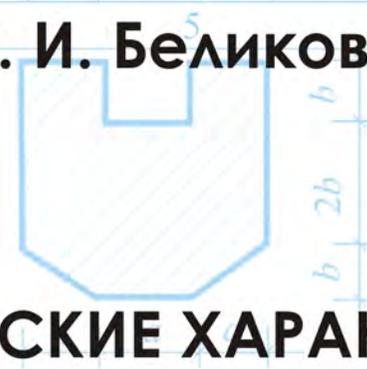
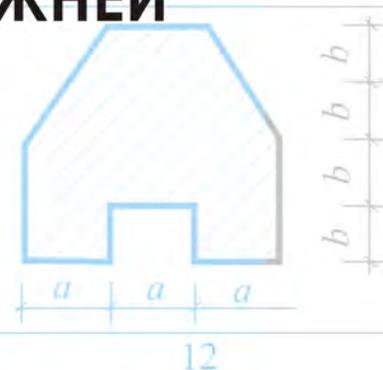
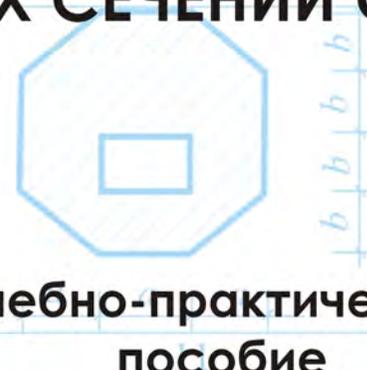
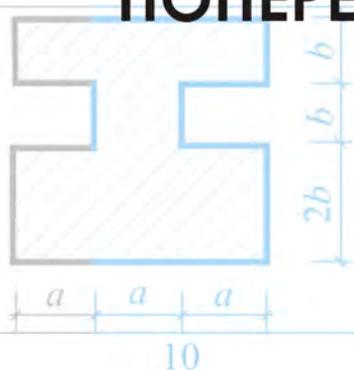


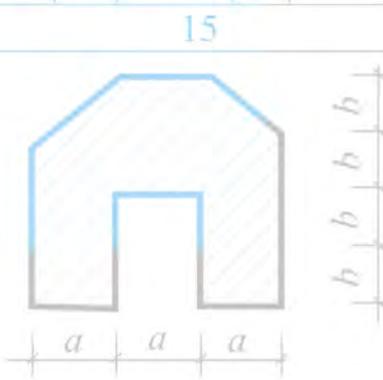
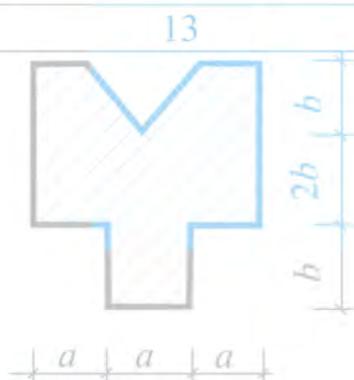
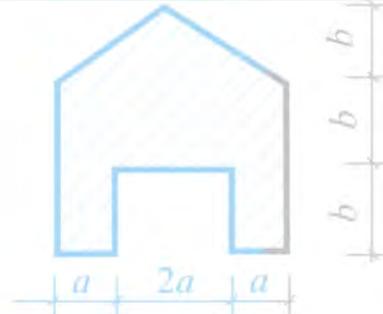
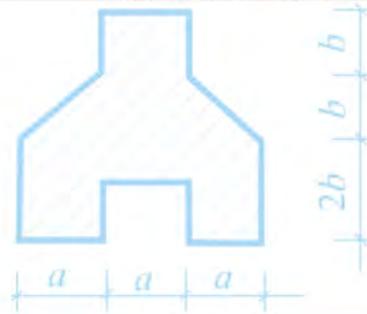
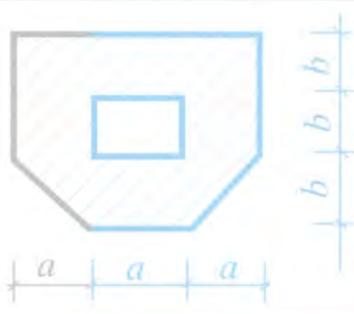
**Г. И. Беликов**



# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ



**Учебно-практическое  
пособие**



Волгоград. ВолГАСУ. 2015



УДК 530.431(076)  
ББК 0.131я73  
Б432

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор технических наук *А. П. Николаев*, профессор кафедры лесного и водного хозяйства Волгоградского государственного аграрного университета;  
доктор технических наук *Н. Г. Бандурин*, профессор Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

*Утверждено редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебно-практического пособия*

**Беликов, Г. И.**

Б432 Геометрические характеристики поперечных сечений стержней [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие / Г. И. Беликов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электронные текстовые и графические данные (6,7 Мбайт). — Волгоград : ВолГАСУ, 2015. — Учебное электронное издание сетевого распространения. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: <http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/> — Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-5-98276-752-3

Приводятся правила и способы вычисления основных геометрических характеристик поперечных сечений стержней: статических моментов, центров тяжести, моментов инерции, радиусов инерции и моментов сопротивления, необходимых для определения напряжений и перемещений при изгибе, кручении и других воздействиях. Дан справочный материал по геометрическим характеристикам различных форм поперечных сечений стержней и изложены подробные решения задач. Приведены тестовые задания, контрольные вопросы, задания по расчетно-графическим работам и примеры их выполнения.

Для студентов, обучающихся по программам подготовки бакалавров и специалистов строительных специальностей, а также преподавателей высших технических учебных заведений.

Для удобства работы с изданием рекомендуется пользоваться функцией Bookmarks (Закладки) в боковом меню программы Adobe Reader и системой ссылок.

Имеется печатный аналог (Беликов, Г. И. Геометрические характеристики поперечных сечений стержней : учебно-практическое пособие / Г. И. Беликов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Волгоград : ВолГАСУ, 2015. — 55, [2] с.).

**УДК 530.431(076)  
ББК 0.131я73**

ISBN 978-5-98276-752-3



© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет», 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ ....	5
1.1. Общие положения .....	5
1.2. Определение статических моментов и моментов инерции .....	5
1.3. Определение центра тяжести сечения .....	6
1.4. Примеры определения статических моментов и центра тяжести сечения .....	7
1.5. Моменты инерции плоских сечений простой формы. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе или повороте осей. Главные оси и главные моменты инерции .....	11
1.5.1. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей	12
1.5.2. Зависимости между моментами инерции при повороте осей .....	13
1.6. Примеры определения моментов инерции .....	15
1.7. Радиусы инерции и моменты сопротивления сечения .....	20
1.8. Примеры определения радиусов инерции и моментов сопротивления .....	21
2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ .....	25
2.1. Общие положения .....	25
2.2. Задание к расчетно-графической работе 1 «Определение геометрических характеристик составного поперечного сечения» .....	25
2.3. Пример выполнения расчетно-графической работы 1 .....	28
2.4. Задание к расчетно-графической работе 2 «Определение геометрических характеристик сложного поперечного сечения» .....	33
2.5. Пример выполнения расчетно-графической работы 2 .....	36
3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ .....	40
3.1. Определение статических моментов площади сечения и центра тяжести .....	40
3.2. Определение моментов инерции .....	41
3.3. Определение радиусов инерции и моментов сопротивления сечения .....	42
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	43
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	44
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	45

## ВВЕДЕНИЕ

При расчете деревянных, металлических, сборных и монолитных конструкций и их элементов используются стержни с различной формой и размерами поперечного сечения. Для определения напряжений и перемещений при изгибе, кручении и других воздействиях необходимо знать правила и способы вычисления геометрических характеристик поперечных сечений стержней. Геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, но и от положения сечения по отношению к действующим нагрузкам.

Для успешного решения задач, связанных с расчетами на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и сооружений того или иного типа, студенты должны освоить основы прочностных расчетов и способы вычисления геометрических характеристик поперечных сечений стержней.

Цель настоящего пособия — оказать помощь студентам в освоении теоретических и практических основ по теме «Геометрические характеристики поперечных сечений стержней» и способствовать организации самостоятельной работы над материалом по программе. Использование пособия предполагает предварительное изучение темы по учебнику, хотя в пособии даются краткие теоретические сведения, вполне достаточные для решения задач.

Приведены примеры решения задач, расчетные и тестовые задания, а также примеры выполнения расчетно-графических работ и контрольные вопросы. В приложении дается справочный материал.

# 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

## 1.1. Общие положения

Основными геометрическими характеристиками сечений являются площадь, статические моменты плоских сечений, положение центра тяжести, моменты инерции, радиусы инерции и моменты сопротивления.

## 1.2. Определение статических моментов и моментов инерции

Рассмотрим произвольное поперечное сечение стержня (рис. 1.1), площадь которого равна  $A$ . Выделим элементарную площадку  $dA$ , центр которой имеет координаты  $x, y$ .

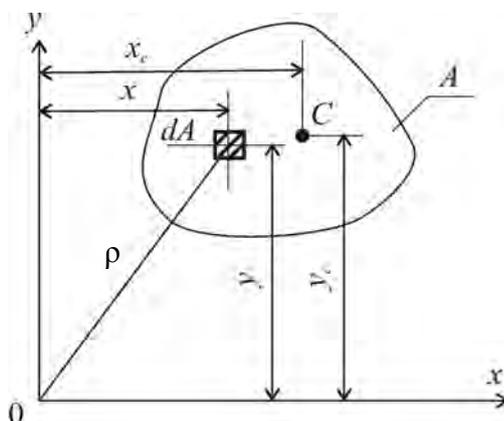


Рис. 1.1

Геометрическими характеристиками сечения являются следующие интегралы:

1. Площадь сечения ( $\text{см}^2, \text{м}^2$ ):

$$A = \int_A dA. \quad (1.1)$$

2. Статические моменты площади сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно ( $\text{см}^3, \text{м}^3$ ):

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA; \quad (1.2)$$

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c,$$

где  $x_c, y_c$  — расстояния от центра тяжести плоского сечения соответственно до осей  $y$  и  $x$ .

3. Осевые моменты инерции сечения относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  ( $\text{см}^4, \text{м}^4$ ):

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (1.3)$$

4. Центробежный момент инерции сечения относительно осей  $xOy$  ( $\text{см}^4, \text{м}^4$ ):

$$J_{xy} = \int_A xy dA. \quad (1.4)$$

5. Полярный момент инерции относительно полюса  $O$  ( $\text{см}^4, \text{м}^4$ ):

$$J_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (1.5)$$

Имеет место равенство  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , поэтому

$$J_p = J_x + J_y. \quad (1.6)$$

*Примечания:*

1. Осевые  $J_x, J_y$  и полярные  $J_p$  моменты инерции всегда положительные, так как координаты  $x$  и  $y$  в формулах (1.3), (1.5) находятся во второй степени.

2. Центробежный момент инерции  $J_{xy}$  в зависимости от знака координат (положения оси) может принимать положительные и отрицательные значения. Центробежный момент инерции  $J_{xy} = 0$ , если хотя бы одна из осей  $Ox$  или  $Oy$  является осью симметрии. В сортаменте прокатной стали для уголков приводятся значения  $J_{xy}$ , взятые по модулю. В расчетах необходимо учитывать знак центробежного момента.

### 1.3. Определение центра тяжести сечения

С помощью статических моментов и площади сечения определяют координаты центра тяжести (1.2):

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (1.7)$$

При определении центра тяжести сложной плоской фигуры, если ее можно разбить на простейшие составные части, для которых известны пло-

щади и положения центров тяжести, определение координат центра тяжести можно производить по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum A_i x_{c_i}}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_x^{(i)}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum A_i y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (1.8)$$

Для симметричных сечений определение центра тяжести значительно упрощается.

При наличии двух и более осей симметрии центром тяжести является точка пересечения этих осей (двуглав, прямоугольник, круг и т. п.).

При наличии одной оси симметрии центр тяжести располагается на этой оси и для определения его положения надо найти только одну координату — вдоль оси симметрии.

#### 1.4. Примеры определения статических моментов и центра тяжести сечения

Следует учитывать:

1) что изменение положительного направления оси  $x$  или  $y$  вызывает изменение знака статических моментов сечения;

2) статический момент сечения равен нулю относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения;

3) если сечение имеет одну ось симметрии, то центр тяжести располагается на этой оси, т. е. достаточно найти одну координату;

4) если сечение имеет две оси симметрии, то центр тяжести располагается на пересечении этих осей;

5) если сечение не имеет осей симметрии, то для определения центра тяжести необходимо найти две координаты  $x_c$  и  $y_c$ .

##### Пример 1.1.

Требуется: Определить положение центра тяжести сечения, изображенного на рис. 1.2, имеющего размеры, приведенные на рис.

Решение:

1. Разобьем сечение на два прямоугольника.

2. Площадь первого прямоугольника:

$$A_1 = b_1 h_1 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ см}^2;$$

второго:

$$A_2 = b_2 h_2 = 20 \cdot 4 = 80 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения равна  $A = A_1 + A_2 = 48 + 80 = 128 \text{ см}^2$ .

3. Предварительно задаемся начальной системой координат. Примем за начальные оси  $x_2 0 y_1$ .

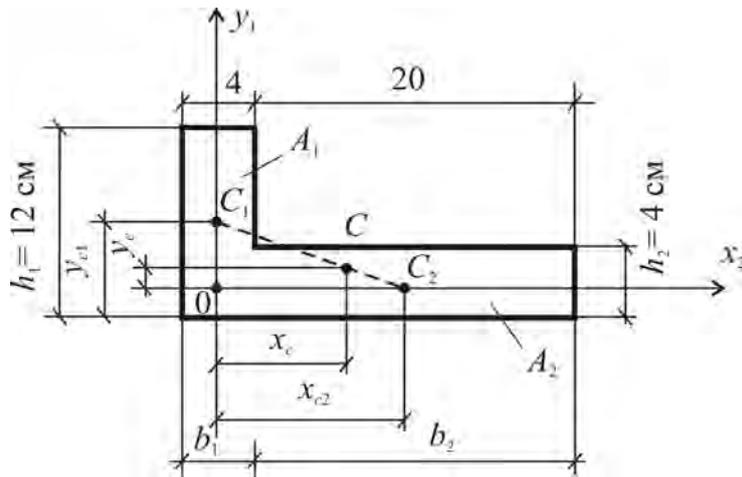


Рис. 1.2

4. Определим статические моменты площади сечения относительно этих осей. Координаты центров тяжести прямоугольников в начальной системе координат будут равны

$$x_{c_1} = 0, \quad y_{c_1} = 4 \text{ см}; \quad x_{c_2} = 12 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 0.$$

Тогда

$$S_{x_2} = S_{x_2}^{(1)} + S_{x_2}^{(2)} = A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} = 48 \cdot 4 + 0 = 192 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_1} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = A_1 x_{c_1} + A_2 x_{c_2} = 0 + 80 \cdot 12 = 960 \text{ см}^3.$$

5. Координаты центра тяжести всего сечения находим по формулам (1.8):

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{960}{128} = 7,5 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{x_2}}{A} = \frac{192}{128} = 1,5 \text{ см}.$$

На рис. 1.2 показано положение центра тяжести сечения  $C$ . Центр тяжести лежит на линии, соединяющей центры тяжести прямоугольников.

### Пример 1.2.

Требуется: определить положение центра тяжести прямоугольного сечения  $b = 24$  см и высотой  $h = 12$  см, ослабленного круговым отверстием диаметром  $d = 8$  см (рис. 1.3).

Решение:

Сечение симметрично относительно оси  $x$ , поэтому центр тяжести будет находиться на оси  $x$ , т. е.  $y_c = 0$  и достаточно найти лишь координату  $x_c$ .

1. Разобьем сечение на составные части: 1 — прямоугольник и 2 — круг.

2. Площадь прямоугольника равна  $A_1 = bh = 24 \cdot 12 = 288 \text{ см}^2$ , а круга

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 50,24 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения равна  $A = A_1 - A_2 = 288 - 50,24 = 237,76 \text{ см}^2$ .

3. Примем за начальные (исходные) оси координат  $x_1 C_1 y_1$ .

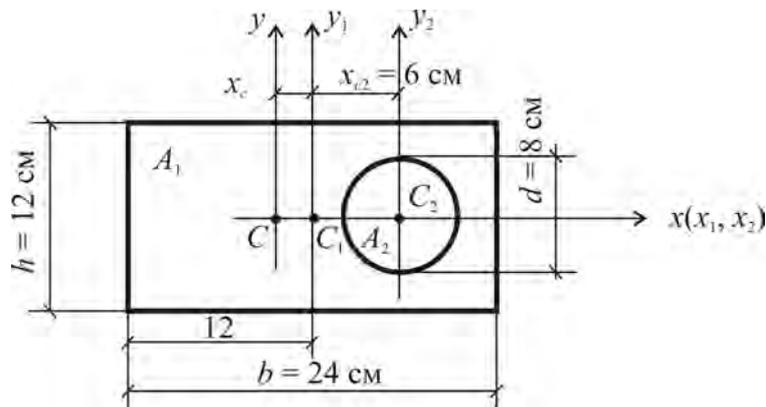


Рис. 1.3

4. Определим статические моменты площади сечения.

Координаты центров тяжести прямоугольника и круга в начальной системе координат  $x_1 C_1 y_1$  равны

$$x_{c_1} = 0; \quad y_{c_1} = 0; \quad x_{c_2} = 6 \text{ см}; \quad y_{c_2} = 0.$$

Тогда

$$S_{x_2} = 0; \quad S_{y_1} = S_{y_1}^{(1)} - S_{y_1}^{(2)} = A_1 x_{c_1} - A_2 x_{c_2} = 0 - 50,24 \cdot 6 = -301,44 \text{ см}^3.$$

5. Координаты центра тяжести всего сечения находим согласно формулам (1.8):

$$x_c = \frac{S_{y_1}}{A} = -\frac{301,44}{237,76} = -1,27 \text{ см}; \quad y_c = \frac{S_{x_2}}{A} = 0.$$

На рис. 1.3 показываем положение центра тяжести сечения  $C$ . Знак минус свидетельствует, что центр тяжести сечения лежит левее центра тяжести  $C_1$ .

### Пример 1.3.

Требуется: для составного стержня, из прокатных профилей двутавра № 30 и швеллера № 20 определить положение центра тяжести (рис. 1.4).

Решение:

Сечение симметрично относительно оси  $y$ , поэтому центр тяжести будет находиться на оси  $y$ , т. е.  $x_c = 0$  и достаточно найти лишь координату  $y_c$ .

1. Разобьем сечение на составные части: 1 — двутавр и 2 — швеллер.

2. Пользуясь сортаментом прокатных двутавров и швеллеров (прил., табл. П.1, П.2), найдем:

площадь двутавра равна  $A_1 = 46,5 \text{ см}^2$ ; высота  $h_1 = 300 \text{ мм} = 30 \text{ см}$ ;  $b_1 = 135 \text{ мм} = 13,5 \text{ см}$ ;

площадь швеллера  $A_2 = 23,40 \text{ см}^2$ ; высота  $h = 200 \text{ мм} = 20 \text{ см}$ ;  $b = 76 \text{ мм} = 7,6 \text{ см}$ ;  $z_0 = 2,07 \text{ см}$ ;

площадь сечения равна  $A = A_1 + A_2 = 46,5 + 23,40 = 69,90 \text{ см}^2$ .

3. Примем за начальные оси центральные оси двутавра  $x_1 C_1 y_1$ .

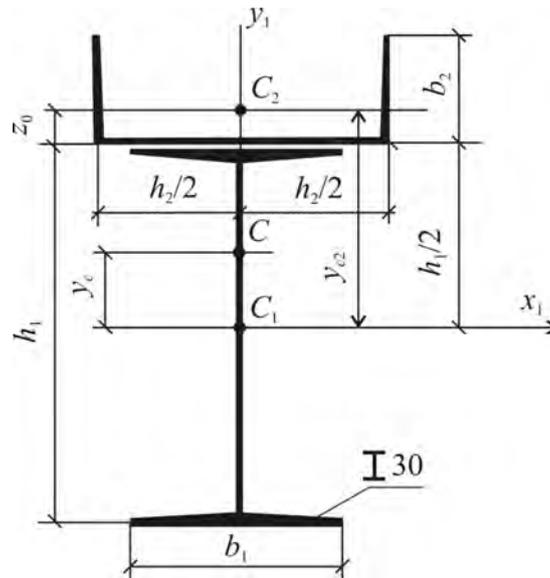


Рис. 1.4

4. Координаты центров тяжести двутавра и швеллера в начальной системе координат равны

$$x_{c_1} = 0; \quad y_{c_1} = 0; \quad x_{c_2} = 0; \quad y_{c_2} = \frac{h_1}{2} + z_0 = 15 + 2,07 = 17,07 \text{ см.}$$

Статические моменты площади сечения относительно осей  $y$  и  $x_1$  равны

$$S_y = 0;$$

$$S_{x_1} = S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)} = A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} = 0 + 23,40 \cdot 17,07 = 399,44 \text{ см}^3.$$

5. Координаты центра тяжести всего сечения находим согласно формулам (1.8):

$$y_c = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{399,44}{69,90} = 5,71 \text{ см}; \quad x_c = 0.$$

На рис. 1.4 показываем положение центра тяжести сечения  $C$ . Центр тяжести лежит на линии  $C_1C_2$ , соединяющей центры тяжести двутавра и швеллера.

#### Пример 1.4

Дано: неоднородное поперечное сечение стержня имеет форму прямоугольника ( $b = 6 \text{ см}$ ;  $h = 24 \text{ см}$ ).

Требуется: найти центр тяжести сечения стержня. Коэффициент приведения материала второй части к первой равен 1; принятый за основной, равен  $n = \frac{E_2}{E_1} = 3$  (рис. 1.5). Соединение считать абсолютно жестким.

Решение:

1. Примем в качестве основного материал с модулем упругости  $E_1$ . Приведем материал 2 к материалу 1, т. е. неоднородное сечение заменяем услов-

но однородным сечением. В результате стержень с приведенным однородным сечением по упругим свойствам не будет отличаться от неоднородного стержня.

2. Определим площадь приведенного сечения:

$$A_1 = A_2 = 6 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{пр}} = A_1 + nA_2 = 72 + 3 \cdot 72 = 288 \text{ см}^2.$$

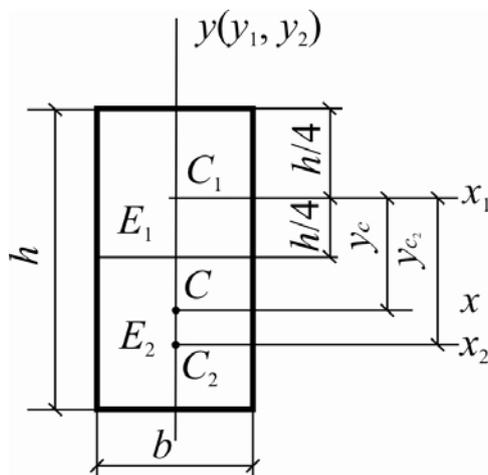


Рис. 1.5

3. Определим положение центра тяжести сечения. Сечение имеет одну ось симметрии  $y$ , центр тяжести будет находиться на оси  $y$ , т. е.  $x_c = 0$  и достаточно найти лишь координату  $y_c$ .

Задаемся начальными осями  $x_1Oy_1$ . Положительное направление оси  $y$  направим вверх, тогда  $y_{c_2} = -12$  см. Координата центра тяжести приведенного сечения равна

$$y_c = \frac{S_{x_{\text{пр}}}}{A_{\text{пр}}} = \frac{nS_{x_1}^{(1)}}{A_{\text{пр}}} = \frac{nA_2 y_{c_2}}{A_{\text{пр}}} = \frac{3 \cdot 72(-12)}{288} = -9 \text{ см.}$$

На рис. 1.5 показано положение центра тяжести неоднородного сечения.

## 1.5. Моменты инерции плоских сечений простой формы. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей. Главные оси и главные моменты инерции

Моменты инерции плоских сечений простой формы определяются по формулам (1.3)—(1.6). В прил., табл. П.3, приводятся формулы для вычисления моментов инерции простейших фигур — прямоугольника, квадрата, треугольника, трапеции, круга, полукруга и т. д. Из этих фигур могут быть образованы более сложные сечения.

### 1.5.1. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей

Пусть известны осевые моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$  и центробежный момент инерции сечения  $J_{xy}$  относительно осей  $xOy$ . Необходимо определить моменты инерции относительно осей  $XO_1Y_1$ , параллельных осям  $xOy$  и отстоящих от них на расстояния  $a$  и  $b$ .

На рис. 1.6. показано, что оси  $xOy$  не проходят через центр тяжести сечения, а на рис. 1.7 — проходят.

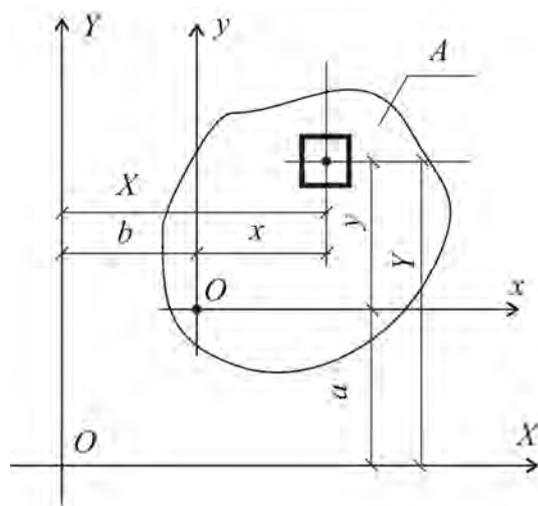


Рис. 1.6

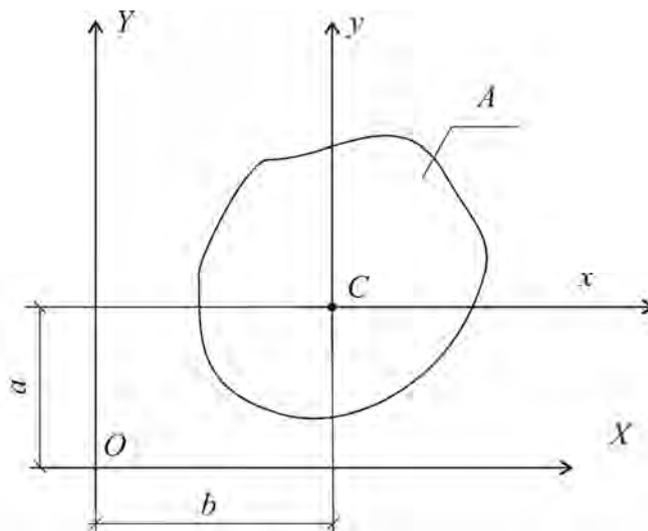


Рис. 1.7

Формулы для вычисления моментов инерции  $J_X$ ,  $J_Y$  и  $J_{XY}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} J_X &= J_x + 2aS_x + a^2A; \\ J_Y &= J_y + 2bS_y + b^2A; \\ J_{XY} &= J_{xy} + bS_x + aS_y + abA, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения;  $a$  — расстояние между параллельными осями  $x$  и  $X$ ;  $b$  — расстояние между параллельными осями  $y$  и  $Y$ .

Если точка  $O$  пересечения осей  $xy$  совпадает с точкой  $C$  — центром тяжести сечения (см. рис. 1.7), формулы (1.9) значительно упрощаются, так как относительно центральных осей  $S_x = 0$ ;  $S_y = 0$ .

$$\begin{aligned} J_X &= J_x + a^2A; \\ J_Y &= J_y + b^2A; \\ J_{XY} &= J_{xy} + abA. \end{aligned} \tag{1.10}$$

### 1.5.2. Зависимости между моментами инерции при повороте осей

Пусть известны осевые моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$  и центробежный момент инерции сечения  $J_{xy}$  относительно осей  $xOy$ . Необходимо определить моменты инерции относительно осей  $x_1Oy_1$  повернутых к осям  $xOy$  на угол  $\alpha$  (рис. 1.8).

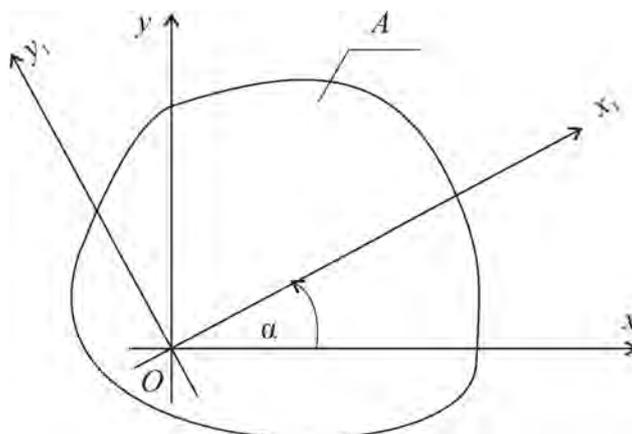


Рис. 1.8

Формулы для вычисления моментов инерции  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  и  $J_{x_1y_1}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При этом положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $Ox$  против хода часовой стрелки.

Практический интерес представляет поворот осей вокруг центра тяжести сечения. При повороте центральных осей  $xOy$  значения моментов относительно этих осей меняются. При этом их сумма после сложения остается постоянной

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_\rho = \text{const}. \quad (1.12)$$

При расчете стержней на изгиб, устойчивость и т. п. нас интересуют главные центральные оси, проходящие через центр тяжести сечения.

Положение главных центральных осей в сечении по формуле

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (1.13)$$

Эта формула дает два значения угла:  $\alpha_0$ ;  $\alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ$ . Если  $\alpha_0 > 0$ , то главные центральные оси относительно осей  $Ox$  будут повернуты на угол  $\alpha_0$  против хода часовой стрелки. В этом случае ось, составляющая с осью  $x$  угол  $\alpha_0$ , при  $J_x > J_y$  является главной центральной осью, относительно которой момент инерции максимальный  $J_1 = J_v = J_{\max}$ , в противном случае ( $J_y > J_x$ )  $J_2 = J_u = J_{\min}$ .

*Примечания:*

1. Относительно главных осей сечения центробежный момент инерции равен нулю.
2. Относительно главных центральных осей осевые моменты инерции принимают максимальные и минимальные значения, а центробежный момент инерции равен нулю.
3. Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей ( $x$  или  $y$ ), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение.

Значения главных моментов инерции сечения определяются по формуле

$$J_{1,2} = J_{v,u} = J_{\max, \min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (1.14)$$

В формуле (1.14) знак «+» соответствует максимальному моменту инерции сечения  $J_1 = J_v = J_{\max}$ , а знак «-» — минимальному  $J_2 = J_u = J_{\min}$ .

Очевидно, что сумма моментов инерции остается неизменной:  $J_x + J_y = J_{\max} + J_{\min} = J_p = \text{const}$ .

При любом повороте взаимно перпендикулярных осей сумма моментов инерции остается постоянной.

Более удобными оказываются формулы, которые однозначно определяют положение главных осей 1 и 2. Положительный угол отсчитывается от оси  $x$  против хода часовой стрелки.

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}; \quad \text{tg}\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}. \quad (1.15)$$

$$\alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{J_{xy}}{J_y - J_1}\right); \quad \alpha_2 = \text{arctg}\left(\frac{J_{xy}}{J_y - J_2}\right).$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pm 90^\circ.$$

*Примечания:*

1. Ось симметрии сечения всегда является главной центральной осью. Для симметричных профилей (прямоугольник, квадрат, двутавр, швеллер и т. п.) главными центральными осями инерции будут оси симметрии.
2. Для равнополочного уголка в сортаменте показаны максимальные и минимальные главные центральные оси инерции, а также даны значения главных моментов инерции.
3. Для неравнополочного уголка в сортаменте показана минимальная главная центральная ось инерции, а также значение минимального момента инерции.

## 1.6. Примеры определения моментов инерции

### Пример 1.5

Требуется: определить главные центральные моменты инерции прямоугольника, ослабленного вырезом в виде круга, изображенного на рис. 1.9. Вычислить момент инерции сечения относительно оси  $v$ , совпадающей с диагональю. Размеры сечения:  $b = 12$  см,  $h = 24$  см;  $d = 6$  см.

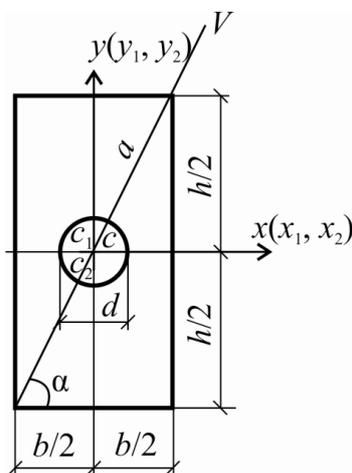


Рис. 1.9

Решение

1. Разобьем сечение на составные части: 1 — прямоугольник, 2 — круг. Центры тяжести этих фигур совпадают.

2. Главные центральные оси прямоугольника  $x_1Cy_1$  и круга  $x_2Cy_2$  совпадают с осями  $xCy$ . Оси сечения  $xCy$  являются главными центральными осями сечения,  $J_{xy} = 0$ .

3. Определим главные моменты инерции сечения  $J_x$  и  $J_y$ :

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)}; \quad J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)}.$$

Используем формулы, приведенные в прил. табл. П.3 для вычисления осевых моментов инерции прямоугольника и круга.

*Прямоугольник:*

$$J_x^{(1)} = J_{x_1}^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13\,824 \text{ см}^4;$$

$$J_y^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^4.$$

*Круг:*

$$J_x^{(2)} = J_y^{(2)} = J_{x_2}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 63,59 \text{ см}^4,$$

Тогда главные центральные моменты инерции сечения равны

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = 13\,824 - 63,59 \text{ см}^4 = 13\,760,41 \text{ см}^4 = J_{\max};$$

$$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} = 3456 - 63,59 = 3392,41 \text{ см}^4 = J_{\min}.$$

4. Момент инерции относительно оси, совпадающей с диагональю прямоугольника, определяется по формуле (1.7):

$$J_v = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Здесь  $J_{xy} = 0$ , так как оси  $x$  и  $y$  являются главными осями.

Определим диагональ прямоугольника:

$$a = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 24^2} = 26,83 \text{ см}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{h}{a} = \frac{24}{26,83} = 0,8946; \quad \cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{12}{26,83} = 0,4473.$$

$$J_v = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha = 13\,760,41 \cdot 0,4473^2 + 3392,41 \cdot 0,8946^2 = 5468,12 \text{ см}^4.$$

### Пример 1.6.

Требуется: определить главные центральные моменты относительно главных осей  $x, y$  для двухканальной трубы прямоугольного сечения  $48 \times 24$  см с двумя круглыми отверстиями диаметром каждого  $d = 10$  см (рис. 1.10).

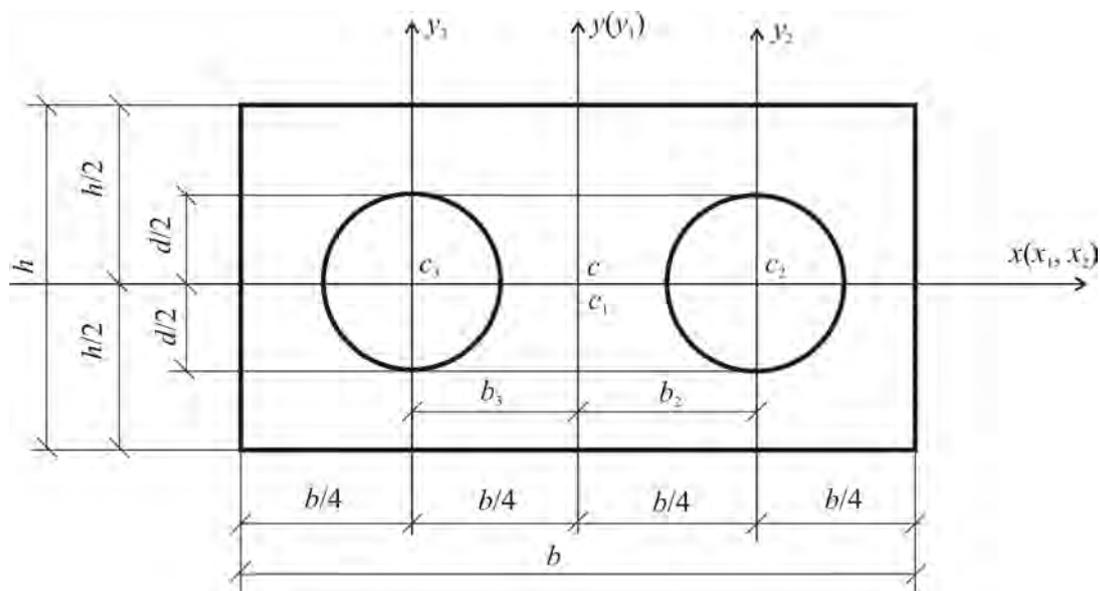


Рис. 1.10

Решение:

1. Сечение разобьем на составные части: 1 — прямоугольник, 2 и 3 — круги. На рисунке показаны главные центральные оси этих частей  $x_1 C_1 y_1$ ,  $x_2 C_2 y_2$ ,  $x_3 C_3 y_3$ .

2. Оси  $x$  и  $y$  являются главными центральными осями сечения. Центры тяжести этих фигур  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  расположены на оси  $x$ .

3. Определим главные моменты инерции прямоугольника и кругов относительно собственных главных центральных осей.

*Прямоугольник:*

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{48 \cdot 24^3}{12} = 9216 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{24 \cdot 48^3}{12} = 221184 \text{ см}^4.$$

*Круг:*

$$A_2 = A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} = 78,5 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} = J_{x_3}^{(3)} = J_{y_3}^{(3)} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{64} = 490,625 \text{ см}^4.$$

4. Определим значения главных моментов инерции, используя формулы перехода к параллельным осям:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0;$$

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)} - J_x^{(3)} = J_{x_1}^{(1)} - J_{x_2}^{(2)} - J_{x_3}^{(3)} = 9216 - 2 \cdot 490,625 = 8234,75 \text{ см}^4 = J_{\min};$$

$$b_1 = 0; \quad b_2 = 12 \text{ см}; \quad b_3 = -12 \text{ см}.$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_y^{(1)} - J_y^{(2)} - J_y^{(3)} = J_{y_1}^{(1)} - (J_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A_2) - (J_{y_3}^{(3)} + b_3^2 A_3) = \\ &= 221184 - 2 \cdot (490,625 + 12^2 \cdot 78,5) = 197594,75 \text{ см}^4 = J_{\max}. \end{aligned}$$

### Пример 1.7

Требуется: определить величины главных центральных моментов сечения из двух швеллеров № 20, изображенного на рис. 1.11.

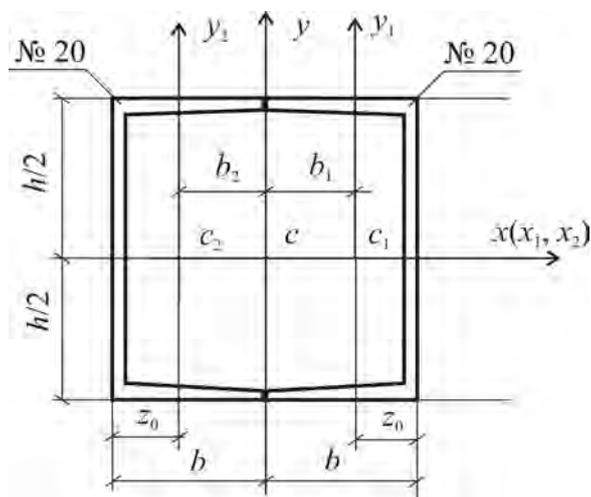


Рис. 1.11

Решение:

Сечение разбиваем на составные части: 1 — швеллер № 20, 2 — швеллер № 20. На рисунке показаны главные центральные оси этих частей  $x_1C_1y_1$  и  $x_2C_2y_2$ .

2. Оси  $xCy$  являются главными центральными осями сечения. Центры тяжести этих фигур  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C$  расположены на оси  $x$ .

3. Из прил., табл. П.2 для швеллера № 20 выписываем геометрические характеристики: площадь  $A_1 = A_2 = 23,40 \text{ см}^2$ ;  $h = 20 \text{ см}$ ;  $z_0 = 2,07 \text{ см}$ ,  $b = 76 \text{ мм} = 7,6 \text{ см}$ .

Моменты инерции относительно собственных центральных осей:

$$J_{x_1}^{(1)} = J_{x_2}^{(2)} = 1520 \text{ см}^4; J_{y_1}^{(1)} = J_{y_2}^{(2)} = 113 \text{ см}^4.$$

4. Определяем главные центральные моменты инерции сечения, используя формулы перехода к параллельным осям.

$$a_1 = a_2 = b_1 = b - z_0 = 7,8 - 2,07 = 5,53 \text{ см}; b_2 = -5,53 \text{ см}.$$

$$J_x = J_{x_1}^{(1)} + J_{x_2}^{(2)} = 1520 + 1520 = 3040 \text{ см}^4 = J_{\max}.$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = J_{y_1}^{(1)} + A_1 b_1^2 + J_{y_2}^{(2)} + A_2 b_2^2 = 2(113 + 23,40 \cdot 5,53^2) = 1657,19 \text{ см}^4 = J_{\min}.$$

### Пример 1.8

Требуется: определить величины главных центральных моментов инерции трубчатого прямоугольного сечения, изображенного на рис. 1.12.  $b = 24 \text{ см}$ ,  $h = 48 \text{ см}$  с квадратным отверстием  $a = 12 \text{ см}$ .

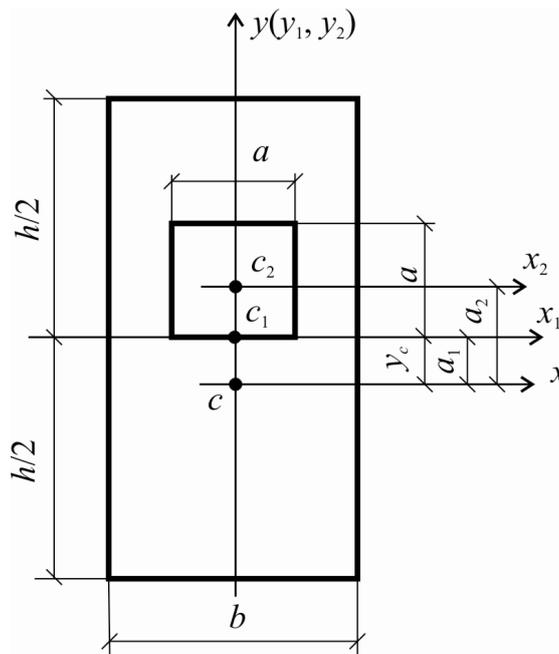


Рис. 1.12

Решение:

1. Сечение разобьем на составные части: 1 — прямоугольник, 2 — квадрат. На рисунке показаны главные центральные оси этих частей  $x_1C_1y_1$ ,  $x_2C_2y_2$ .

2. Задаемся начальными (вспомогательными) осями  $x_1C_1y_1$ . Определяем положение центра тяжести сечения  $C$  в этой системе.

Центры тяжести частей сечения  $C_1$ ,  $C_2$  расположены на оси  $y$ , поэтому

$$x_{c_1} = 0; x_{c_2} = 0; y_{c_1} = 0; y_{c_2} = \frac{a}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ см.}$$

Площади частей и сечения равны

$$A_1 = 24 \cdot 48 = 1152 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 12 \cdot 12 = 144 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 - A_2 = 1152 - 144 = 1008 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$x_c = 0; y_c = \frac{S_{x_1}^{(1)} - S_{x_2}^{(2)}}{A} = \frac{A_1 y_{c_1} - A_2 y_{c_2}}{A} = \frac{0 - 144 \cdot 6}{1008} = -0,857 \text{ см.}$$

На рисунке показано положение центра тяжести сечения  $C$ . Оси  $xCy$  являются главными центральными осями сечения.

2. Определяем моменты инерции прямоугольника и квадрата относительно собственных центральных осей, используя формулы, приведенные в прил., табл. П.3.

*Прямоугольник:*

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{24 \cdot 48^3}{12} = 221\,184 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{48 \cdot 24^3}{12} = 55\,296 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} = \frac{a^4}{12} = \frac{12^4}{12} = 1728 \text{ см}^4.$$

3. Используя формулы перехода к параллельным осям, определяем значения главных центральных моментов инерции относительно осей  $Cxy$ ,

Оси  $y_1$ ,  $y_2$  совпадают с осью  $y$ , поэтому  $b_1 = b_2 = 0$ .

$$J_y = J_{y_1}^{(1)} - J_{y_2}^{(2)} = J_{y_1}^{(1)} - J_{y_2}^{(2)} = 55\,296 - 1728 = 53\,568 \text{ см}^4 = J_{\min}.$$

Оси  $x_1$ ,  $x_2$  не совпадают с осью  $x$ , при этом координаты центров тяжести для каждой части в системе центральных осей соответственно равны

$$a_1 = 0,857 \text{ см}; a_2 = 0,857 + \frac{12}{6} = 6,857 \text{ см};$$

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^{(1)} - J_x^{(2)} = J_{x_1}^{(1)} + A_1 a_1^2 - (J_{x_2}^{(2)} + A_2 a_2^2) = \\ &= 221184 + 1152 \cdot 0,857^2 - (1728 + 144 \cdot 6,857^2) = 213531,43 \text{ см}^4 = J_{\max}. \end{aligned}$$

## 1.7. Радиусы инерции и моменты сопротивления сечения

В некоторых разделах дисциплин «Сопротивление материалов» и «Техническая механика» встречаются геометрические характеристики, которые называются радиусами инерции и моментами сопротивления сечения.

Величины

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} \quad (1.16)$$

называются радиусами инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ , и имеют размерность длины в первой степени (м, см).

Радиусы инерции относительно главных осей называются главными радиусами инерции:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}}; i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}. \quad (1.17)$$

Величины

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} \quad (1.18)$$

называются моментами сопротивления сечения относительно осей  $x$  и  $y$  и имеют размерность длины в третьей степени (м<sup>3</sup>, см<sup>3</sup>).

В формуле (1.18)  $y_{\max}$  — расстояние от оси  $x$  до наиболее удаленной точки сечения,  $x_{\max}$  — расстояние от оси  $y$  до наиболее удаленной точки сечения.

При расчете балок на прочность используются моменты сопротивления сечения. Моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон относительно оси (рис. 1.13) будут определяться по формулам

$$W_x^H = \frac{J_x}{y_H}; W_x^B = \frac{J_x}{y_B}, \quad (1.19)$$

где  $J_x$  — осевой момент инерции сечения относительно оси  $x$ ;  $y_H$  — расстояние от оси  $x$  до наиболее удаленного нижнего волокна (до нижней точки сечения);  $y_B$  — расстояние от оси  $x$  до наиболее удаленного верхнего волокна (до верхней точки сечения).

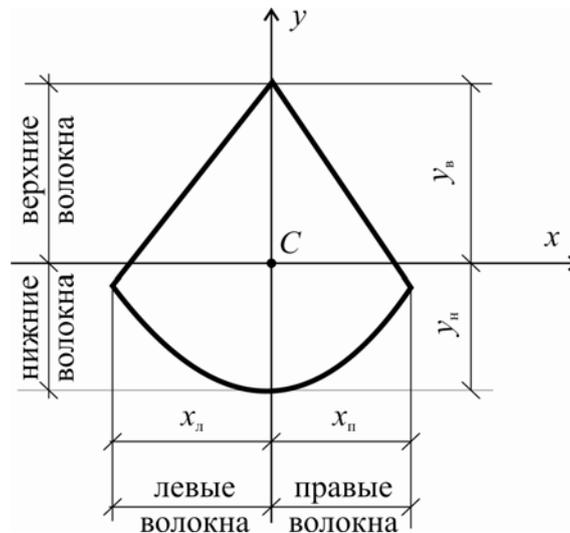


Рис. 1.13

*Примечания:*

1. Для симметричных сечений относительно оси  $x$  расстояния  $y_n = y_b = y_{\max} = h/2$  и  $W_x^H = W_x^B = W_x$ .

2. В таблицах приложения геометрических характеристик плоских фигур и в сортаменте для двутавра и швеллера в соответствующих колонках даны моменты сопротивления.

Вычисление момента сопротивления сложного сечения нельзя производить сложением и вычитанием  $W = \sum W$ , это будет ошибкой.

## 1.8. Примеры определения радиусов инерции и моментов сопротивления

### Пример 1.9

Требуется: определить радиусы инерции относительно осей  $x$ ,  $y$  и момент сопротивления относительно оси  $x$  для плоского поперечного сечения, изображенного на рис. 1.14 ( $b = 6$  см,  $h = 12$  см).

Решение:

1. Найдем осевые моменты инерции и площадь для прямоугольного сечения:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4; \quad A = bh = 6 \cdot 12 \text{ см}^2.$$

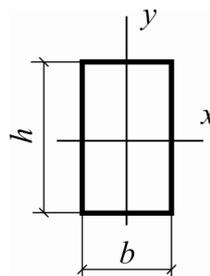


Рис. 1.14

2. Определяем радиусы инерции прямоугольного сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 3,46 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = 1,73 \text{ см}.$$

3. Определяем момент сопротивления прямоугольного сечения.:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ см}^3.$$

### Пример 1.10

Требуется: определить момент сопротивления относительно оси  $x$  для сечения из двух двутавров № 20 (рис. 1.15).

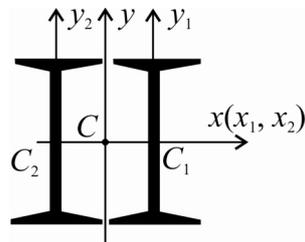


Рис. 1.15

Решение:

1. Выпишем геометрические характеристики для двутавра № 20 из прил., табл. П.1.

$$A = 26,8 \text{ см}^2; J_x = 1840 \text{ см}^4; W_x = 184 \text{ см}^3; h = 20 \text{ см}.$$

2. Определяем момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{2J_x}{h/2} = \frac{2 \cdot 1840}{10} = 368 \text{ см}^3.$$

### Пример 1.11

Требуется: определить радиус инерции и момент сопротивления сечения, изображенного на рис. 1.16, относительно центральных осей.  $d = 20 \text{ см}$ ,  $a = 6 \text{ см}$ .

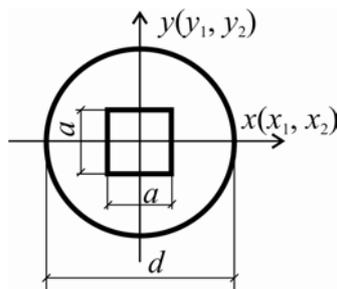


Рис. 1.16

Решение:

Используем формулы из прил., табл. П.3.

1. Определяем осевой момент инерции сечения:

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{a^4}{12} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} - \frac{6^4}{12} = 7742 \text{ см}^4.$$

2. Определяем осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = W_y = \frac{J_x}{d/2} = \frac{7742}{10} = 774,2 \text{ см}^3.$$

*Примечание.* Вычисление осевого момента сопротивления сечения как разности моментов сопротивления круга и квадрата будет ошибкой.

### Пример 1.12

Требуется: определить осевые момент инерции и моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон относительно главной центральной оси  $x$  поперечного сечения в виде равнобокой трапеции, изображенного на рис. 1.17.  $h = 48$  см,  $b = 24$  см,  $b_1 = 12$  см.

Решение:

Используем формулы из прил., табл. П.3.

1. Найдем положение центра тяжести сечения  $C$ :

$$a = \frac{h(2b_1 + b)}{3(b + b_1)} = \frac{48(2 \cdot 12 + 24)}{3(24 + 12)} = 21,33 \text{ см}.$$

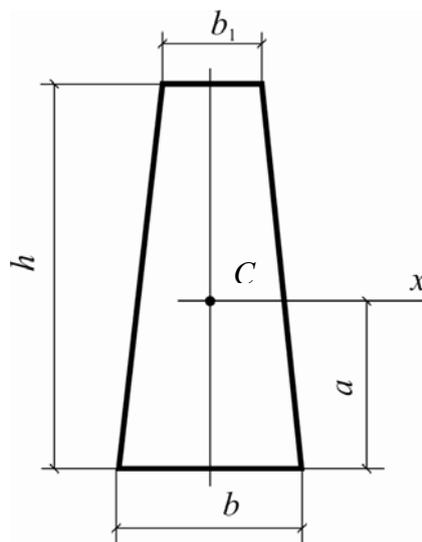


Рис. 1.17

2. Определяем осевой момент инерции сечения:

$$J_x = \frac{h^3 K}{36(b + b_1)}; \quad K = b^2 + 4bb_1 + b_1^2.$$

$$K = 24^2 + 4 \cdot 24 \cdot 12 + 12^2 = 1872 \text{ см}^2.$$

$$J_x = \frac{48^3 \cdot 1872}{36(24 + 12)} = 159\,744 \text{ см}^4.$$

3. Определяем моменты сопротивления нижних и верхних волокон относительно главной центральной оси  $x$ :

$$W_x^B = \frac{J_x}{y_B} = \frac{J_x}{h - a} = \frac{159744}{48 - 21,33} = 5989,65 \text{ см}^3.$$

$$W_x^H = \frac{J_x}{y_H} = \frac{J_x}{a} = \frac{159744}{21,33} = 7489,17 \text{ см}^3.$$

## 2. РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

### 2.1. Общие положения

Результаты расчетно-графической работы (РГР) оформляются в виде пояснительной записки, включающей расчеты и графический материал. Все сечение вычерчивается в масштабе 1 : 2 или 1 : 5.

Выполнение и отчет за РГР осуществляется в строго установленные сроки. При отчете студенту могут быть заданы вопросы по РГР и разделу дисциплины, предложено решить задачу по теме.

Работа считается завершенной лишь в том случае, если она зачтена преподавателем и об этом объявлено студенту.

### 2.2. Задание к расчетно-графической работе 1 «Определение геометрических характеристик составного поперечного сечения»

Для составного сечения по схеме сечения №\_\_\_ табл. 2.1 при размерах, указанных в строке №\_\_\_ табл. 2.2, требуется: определить положение центра тяжести сечения, найти положение главных центральных осей инерции, вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции относительно этих осей. Все размеры на рисунке даны в см.

#### Порядок расчета:

1. Составное сечение разбить на части, у которых положение центров тяжести известны.

2. Каждой части сечения присвоить порядковый номер. Поперечное сечение вычертить в масштабе 1 : 5 либо 1 : 2 с нанесением центральных осей  $x_i$ ,  $y_i$  для каждой части и размеров сечения.

3. Для прокатных профилей из таблиц приложения выписать геометрические характеристики, а для листа — вычислить. Из табл. 2.2 взять лишь те прокатные профили, которые входят в заданную схему.

4. Определить положение центра тяжести сечения  $C$  в принятой начальной системе координат  $x_n O y_n$ . Выполнить проверку правильности определения положения центра тяжести.

5. Через найденный центр тяжести провести центральные оси сечения  $x C y$ .

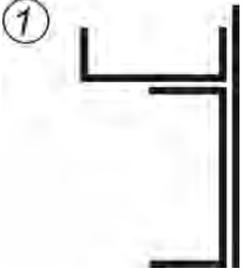
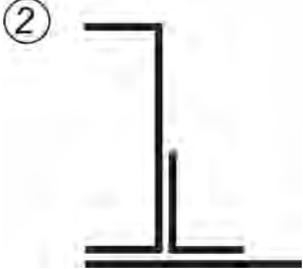
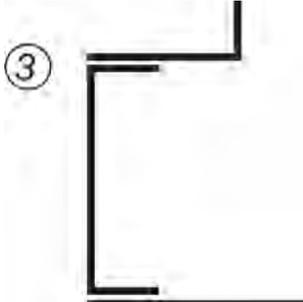
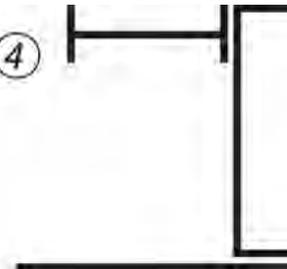
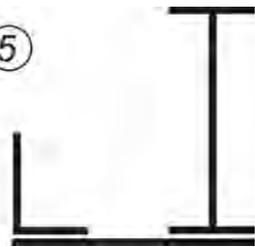
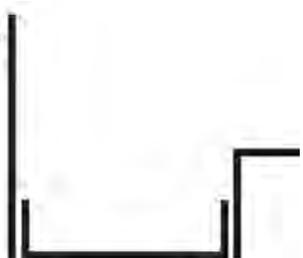
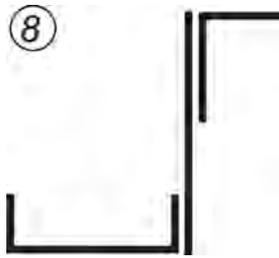
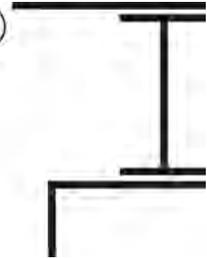
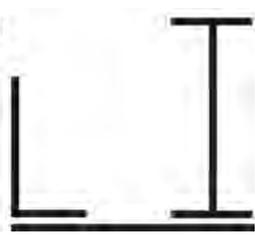
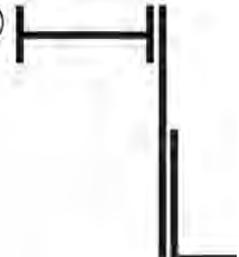
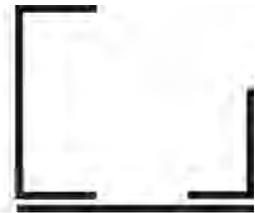
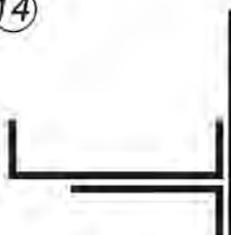
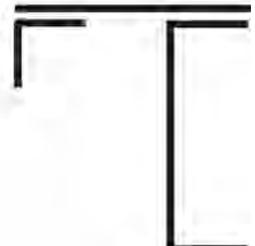
6. Определить моменты инерции сечения относительно центральных осей  $x$  и  $y$ .

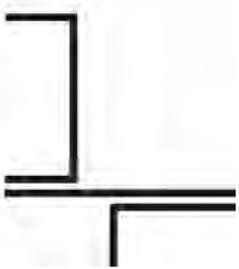
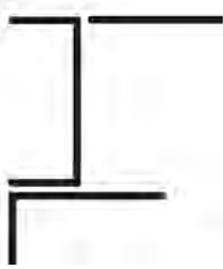
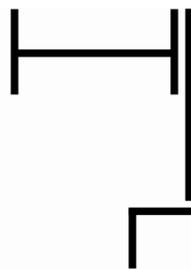
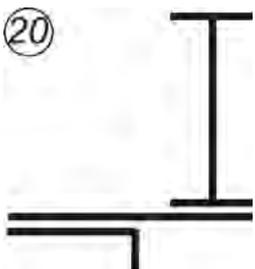
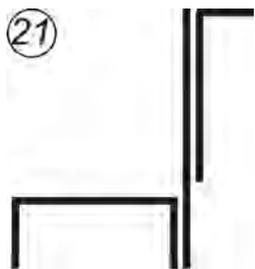
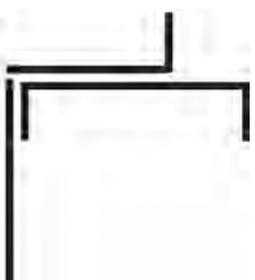
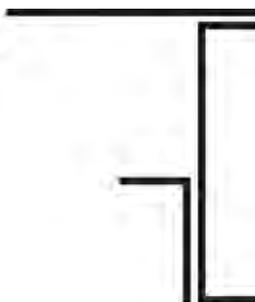
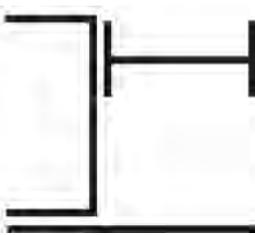
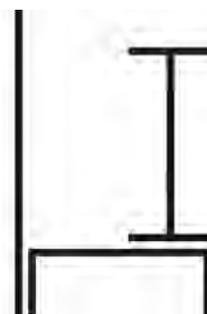
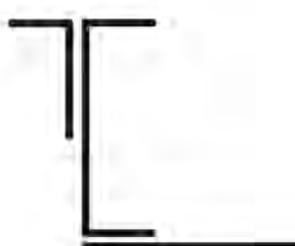
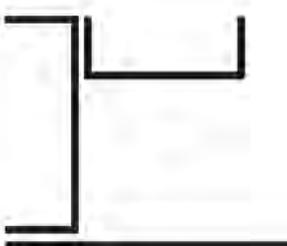
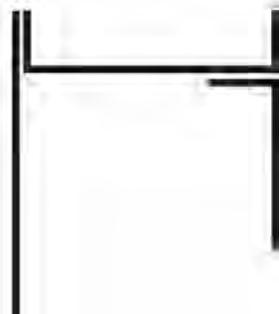
7. Вычислить главные моменты инерции и положение главных центральных осей инерции. Показать на рисунке положение главных центральных осей.

8. Определить квадраты главных радиусов инерции.

Таблица 2.1

Схемы сечений

<p>①</p> 	<p>②</p> 	<p>③</p> 
<p>④</p> 	<p>⑤</p> 	<p>⑥</p> 
<p>⑦</p> 	<p>⑧</p> 	<p>⑨</p> 
<p>⑩</p> 	<p>⑪</p> 	<p>⑫</p> 
<p>⑬</p> 	<p>⑭</p> 	<p>⑮</p> 

16 	17 	18 
19 	20 	21 
22 	23 	24 
25 	26 	27 
28 	29 	30 

## Числовые данные

Номер задания	Лист (мм)		Двутавр, табл.	Швеллер, табл.	Равнополочный уголок, мм, табл.	Неравнополочный уголок, мм, табл.
	<i>b</i>	<i>h</i>				
1	18	300	22	16	90 × 90 × 9	100 × 63 × 8
2	20	200	24	18	100 × 100 × 10	100 × 63 × 10
3	14	400	22	20	100 × 100 × 12	110 × 70 × 8
4	16	260	24	22	110 × 110 × 8	125 × 80 × 10
5	18	400	27	24	125 × 125 × 12	140 × 90 × 8
6	20	300	30	27	140 × 140 × 10	140 × 90 × 10
7	24	400	36	30	140 × 140 × 12	160 × 100 × 10
8	30	380	40	33	160 × 160 × 12	160 × 100 × 12
9	26	480	22	36	180 × 180 × 12	180 × 110 × 10
10	36	180	24	40	200 × 200 × 12	100 × 63 × 8
11	18	180	22	16	160 × 160 × 14	100 × 63 × 10
12	20	180	24	18	100 × 100 × 10	110 × 70 × 8
13	20	240	27	20	100 × 100 × 12	125 × 80 × 10
14	22	260	30	22	110 × 110 × 8	140 × 90 × 8
15	24	280	36	24	125 × 125 × 12	140 × 90 × 10
16	26	220	40	27	140 × 140 × 10	160 × 100 × 10
17	28	280	18	30	140 × 140 × 12	160 × 100 × 12
18	20	270	16	33	160 × 160 × 12	180 × 110 × 10
19	30	320	22	36	180 × 180 × 12	100 × 63 × 8
20	32	420	24	40	200 × 200 × 12	100 × 63 × 10
21	34	520	22	16	160 × 160 × 14	110 × 70 × 8
22	26	220	24	18	160 × 160 × 12	125 × 80 × 10
23	28	320	27	20	180 × 180 × 12	140 × 90 × 8
24	20	220	30	22	200 × 200 × 12	140 × 90 × 10
25	50	240	36	24	160 × 160 × 14	160 × 100 × 10
26	42	260	40	27	100 × 100 × 10	160 × 100 × 12
27	30	280	24	30	100 × 100 × 12	180 × 110 × 10
28	16	340	22	33	110 × 110 × 8	100 × 63 × 10
29	38	300	24	36	125 × 125 × 12	110 × 70 × 8
30	20	440	27	40	140 × 140 × 10	160 × 100 × 10

## 2.3. Пример выполнения расчетно-графической работы 1

На рис. 2.1 изображено составное сечение: лист  $600 \times 20$  мм, неравнополочный уголок  $100 \times 65 \times 10$  мм, швеллер № 30.

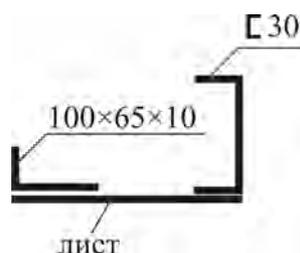


Рис. 2.1

Решение:

1. Представленное сечение разобьем на три части, каждой из которых присвоим порядковый номер:

1 — прямоугольник,  $b_1 = 60$  см,  $h_1 = 2$  см;

2 — равнополочный уголок № 10/6,5, ( $100 \times 65 \times 10$  мм);

3 — швеллер № 30.

2. Поперечное сечение вычерчиваем в принятом масштабе 1:5 с нанесением местных осей  $x_1C_1y_1$ ,  $x_2C_2y_2$ ,  $x_3C_3y_3$ , проходящих через центры тяжести каждой части, а также размеры сечения.

3. Выпишем из прил., табл. П.2, П.5 геометрические характеристики равнополочного уголка и швеллера, а для прямоугольника их вычисляем.

*Прямоугольник:*

$b_1 = 60$  см,  $h_1 = 2$  см (центр тяжести в точке  $C_1$ ):

$$A_1 = 60 \cdot 2 = 120 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{60 \cdot 2^3}{12} = 40 \text{ см}^4; \quad J_{y_1}^{(1)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 60^3}{12} = 36\,000 \text{ см}^4; \quad J_{x_1 y_1}^{(1)} = 0.$$

*Равнополочный уголок:*

$100 \times 65 \times 10$  мм (центр тяжести в точке  $C_2$ ):  $B = 100$  мм = 10 см;  $b = 65$  мм = 6,5 см;  $t = 10$  мм = 1 см;  $A_2 = 15,67$  см<sup>2</sup>;  $J_y = 51,68$  см<sup>4</sup>;  $J_x = 155,52$  см<sup>4</sup>;  $J_{xy} = 51,18$  см<sup>4</sup>;  $x_0 = 1,64$  см,  $y_0 = 3,37$  см,  $J_{\min}^{(2)} = J_u^{(2)} = J_u = 30,60$  см<sup>4</sup>;  $\text{tg}\alpha = 0,410$ .

Отметим, что в рассматриваемом сечении уголок расположен не так, как в сортаменте (более длинная сторона расположена не вертикально, а горизонтально), поэтому у осевых моментов инерции индексы  $x$  и  $y$  следует поменять местами. Это же замечание относится и к координатам центра тяжести уголка.

В сортаменте прокатной стали для уголков приводятся значения центробежных моментов инерции, взятые по модулю. В расчет следует вводить их значения с учетом знака. Если ось минимум  $u$  —  $u$  проходит через первую и третью четверти координат — знак положительный, если через вторую и четвертую четверти координат — знак центробежного момента отрицательный. В рассматриваемой задаче ось  $u$  —  $u$  проходит через вторую и четвертую четверти координат, поэтому вводится знак минус.

Учитывая вышесказанное, запишем:

$$J_{x_2}^{(2)} = J_y = 51,68 \text{ см}^4; \quad J_{y_2}^{(2)} = J_x = 155,52 \text{ см}^4,$$

$$x_{0_2} = y_0 = 3,37 \text{ см}, \quad y_{0_2} = x_0 = 1,64 \text{ см};$$

$$J_{x_2 y_2}^{(2)} = J_{xy} = -51,18 \text{ см}^4.$$

Швеллер № 30:

$$h = 300 \text{ мм} = 30 \text{ см}; \quad b = 100 \text{ мм} = 10 \text{ см}; \quad s = 6,5 \text{ мм} = 0,65 \text{ см};$$

$$t = 11 \text{ мм} = 1,1 \text{ см}; \quad A_3 = 40,50 \text{ см}^2; \quad J_{x_3}^{(3)} = 5830 \text{ см}^4; \quad J_{y_3}^{(3)} = 393 \text{ см}^4; \quad J_{x_3 y_3}^{(3)} = 0;$$

$$z_{03} = z_0 = 2,52 \text{ см}.$$

Далее поперечное сечение вычерчиваем в масштабе 1 : 5 либо 1 : 2 с нанесением центральных осей для каждой части  $x_i, y_i$  и размеров сечения (рис. 2.2).

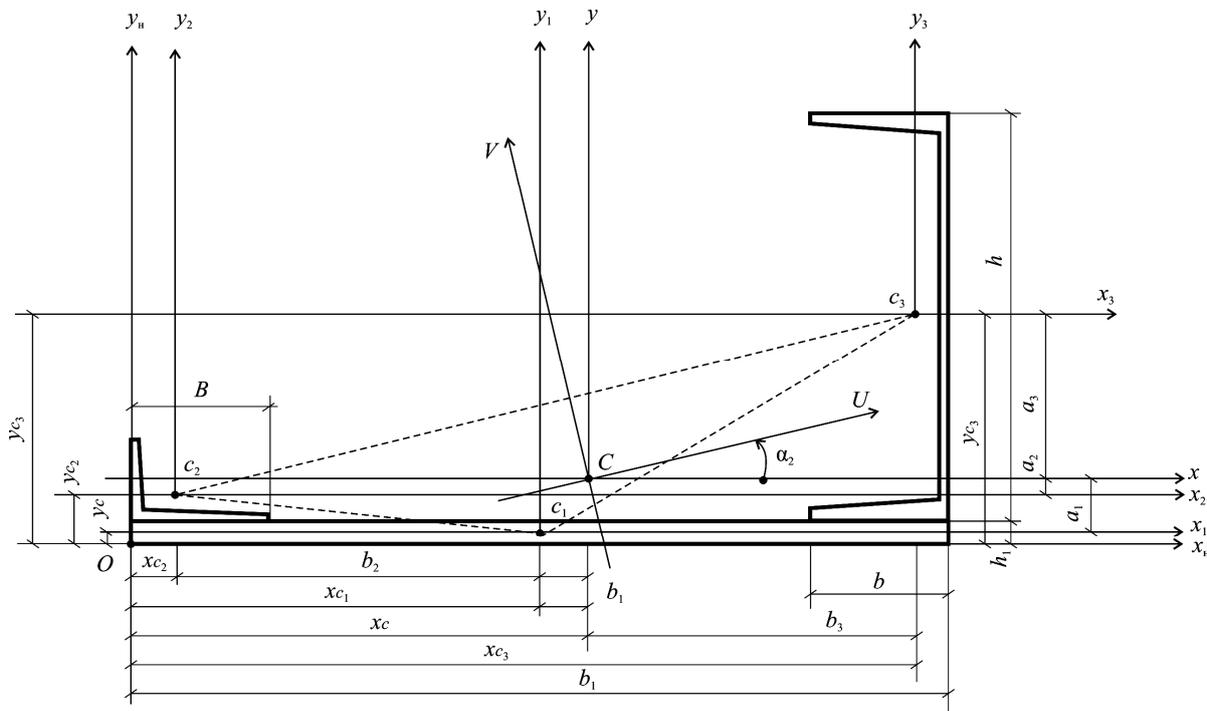


Рис. 2.2

4. Определим положение центра тяжести. Задаем начальные оси  $x_H 0 y_H$ , и находим координаты  $x_c$  и  $y_c$  по (1.8).

Координаты центров тяжести частей в начальной системе координат равны

$$C_1: x_{c_1} = \frac{b_1}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ см}, \quad y_{c_1} = \frac{h_1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$C_2: x_{c_2} = x_{0_2} = 3,37 \text{ см}; \quad y_{c_2} = h_1 + y_{0_2} = 2 + 1,64 = 3,64 \text{ см};$$

$$C_3: x_{c_3} = b_1 - z_0 = 60 - 2,52 = 57,48 \text{ см}, \quad y_{c_3} = h_1 + \frac{h}{2} = 2 + \frac{30}{2} = 17 \text{ см}.$$

Применяя (1.8), получим:

$$x_c = \frac{S_{y_H}}{A} = \frac{A_1 x_{c_1} + A_2 x_{c_2} + A_3 x_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{120 \cdot 30 + 15,67 \cdot 3,37 + 40,50 \cdot 57,48}{176,17} = 33,95 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_{x_H}}{A} = \frac{A_1 y_{c_1} + A_2 y_{c_2} + A_3 y_{c_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{120 \cdot 1 + 15,67 \cdot 3,64 + 40,50 \cdot 17}{176,17} = 4,91 \text{ см}.$$

Здесь площадь сечения равна

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 120 + 15,67 + 40,50 = 176,17 \text{ см}^2.$$

На рис. 2.2 показываем центр тяжести сечения  $C$  и центральные оси  $xCy$ , проходящие через центр  $C$  и параллельные исходным осям.

Проверка. Статические моменты площади всего сечения относительно центральных осей должны равняться нулю:

$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0;$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 0,$$

где  $a_i$  — расстояние между осями  $x$  и  $x_i$ ;  $b_i$  — расстояние между осями  $y$  и  $y_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

Расстояние между параллельными осями определяем по формулам

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 1 - 4,91 = -3,91 \text{ см}; \quad b_1 = x_{c_1} - x_c = 30 - 33,95 = -3,95 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 3,64 - 4,91 = -1,27 \text{ см}; \quad b_2 = x_{c_2} - x_c = 3,37 - 33,95 = -30,58 \text{ см};$$

$$a_3 = y_{c_3} - y_c = 17 - 4,91 = 12,09 \text{ см}; \quad b_3 = x_{c_3} - x_c = 57,48 - 33,95 = 23,53 \text{ см}.$$

$$S_x = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 120 \cdot (-3,91) + 15,67 \cdot (-1,27) + 40,50 \cdot 12,09 = 0,54 \text{ см}^3;$$

$$S_y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 120 \cdot (-3,95) + 15,67 \cdot (-30,58) + 40,50 \cdot 23,53 = 0,22 \text{ см}^3.$$

Погрешность определения центра тяжести:

$$\Delta\%(S_x) = \frac{0,54}{489,64} 100\% = 0,11\% < 3\%;$$

$$\Delta\%(S_y) = \frac{0,22}{953,19} 100\% = 0,023\% < 3\%,$$

что считается допустимой величиной.

5. Применяя формулы (1.10) к каждой части, определим моменты инерции сечения относительно центральных осей  $xCy$ :

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^3 (J_{x_i}^{(i)} + a_i^2 A_i) = J_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + J_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 + J_{x_3}^{(3)} + a_3^2 A_3 = \\ &= 40 + (-3,91)^2 \cdot 120 + 51,68 + (-1,27)^2 \cdot 15,67 + 5830 + 12,09^2 \cdot 40,50 = \\ &= 13\,701 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= \sum_{i=1}^3 (J_{y_i}^{(i)} + b_i^2 A_i); = J_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 + J_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 + J_{y_3}^{(3)} + b_3^2 A_3 = 36\,000 + \\ &+ (-3,95)^2 \cdot 120 + 155,52 + (-30,58)^2 \cdot 15,67 + 393 + (23,53)^2 \cdot 40,50 = \\ &= 75\,497,68 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{xy} &= \sum_{i=1}^3 (J_{x_i y_i}^{(i)} + a_i b_i A_i) = J_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 + J_{x_3 y_3}^{(3)} + a_3 b_3 A_3 = \\
&= (-3,91) \cdot (-3,95) \cdot 120 - 51,18 + (-1,27) \cdot (-30,58) \cdot 15,67 + \\
&+ 12,09 \cdot 23,53 \cdot 40,50 = 13\,932,08 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Здесь  $J_{x_1 y_1}^{(1)} = 0$  и  $J_{x_3 y_3}^{(3)} = 0$ , так как известно, что если сечения имеют хотя бы одну ось симметрии, то относительно этой оси и любой ей перпендикулярной центробежный момент инерции равен нулю.

6. Определим положение главных центральных осей сечения (1.13):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2 \cdot 13\,932,08}{13\,701,33 - 75\,497,68} = 0,4509.$$

Тогда  $2\alpha_0 = \operatorname{arctg}(0,4509)$  и  $\alpha_0 = \frac{24,27^\circ}{2} = 12,14^\circ$ , так как  $\alpha_0 > 0$ , то главные центральные оси  $u$  и  $v$  относительно осей  $x$  и  $y$  будут повернуты на угол  $\alpha_0$  против хода часовой стрелки (см. рис. 2.2). При этом ось  $u$ , составляющая с осью  $x$  угол  $\alpha_0$ , является минимальной, поскольку  $J_y > J_x$ , (в противном случае — при  $J_x > J_y$  ось была бы максимальной). Вторая максимальная ось  $v$  проходит через центр тяжести и перпендикулярна оси  $u$ .

7. Определим главные моменты инерции по (1.14).

Во втором случае получим:

$$\begin{aligned}
J_{1,2} = J_{v,u} = J_{\max, \min} &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{13\,701,33 + 75\,497,68}{2} \pm \\
&\pm \sqrt{\left(\frac{13\,701,33 - 75\,497,68}{2}\right)^2 + 13\,932,08^2} = 44\,599,51 \pm 33\,893,95.
\end{aligned}$$

$$J_1 = J_v = J_{\max} = 78\,493,46 \text{ см}^4; \quad J_2 = J_u = J_{\min} = 10\,705,56 \text{ см}^4.$$

В формуле знак «+» соответствует максимальному моменту инерции, а знак «-» — минимальному.

Положение главных центральных осей можно найти по (1.15), которые однозначно положение их определяют. При этом положительный угол отсчитывается от оси  $x$  против хода часовой стрелки.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{13\,932,08}{75\,497,68 - 78\,493,46} = -4,65;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{13\,932,08}{75\,497,68 - 10\,705,56} = 0,215;$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(-4,65) = -77,86^\circ; \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg}(0,215) = 12,14^\circ.$$

Проверка:

1.  $J_v = J_{\max} > J_y = 75\,497,68 \text{ см}^4$ ;  $J_u = J_{\min} < J_x = 13\,701,33 \text{ см}^4$ .

2.  $J_x + J_y = J_v + J_u = 81\,199,01 \text{ см}^4$ ;

3.  $\alpha_2 - \alpha_1 = 12,14^\circ - (-77,86^\circ) = 90^\circ$ .

4. Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен нулю (1.11).

$$J_{1,2} = J_{u,v} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{xy} \cos 2\alpha_0 = \frac{13\,701,33 - 75\,497,68}{2} \sin 24,28^\circ + 13\,932,08 \cos 24,28^\circ = -12\,705,21 + 12\,699,73 = -5,48 \text{ см}^4.$$

Процент расхождения:

$$\Delta(J_{12}) \% = -\frac{5,48}{12\,699,73} 100 \% = -0,043 \% < 3 \%,$$

что является допустимой величиной.

5. Определяем квадраты главных радиусов инерции сечения:

$$i_v^2 = \frac{J_v}{A} = \frac{75\,497,68}{176,17} = 428,55 \text{ см}^2; \quad i_u^2 = \frac{J_u}{A} = \frac{10\,705,56}{176,17} = 60,77 \text{ см}^2.$$

## 2.4. Задание к расчетно-графической работе 2 «Определение геометрических характеристик сложного поперечного сечения»

Для сечения по схеме сечения №\_\_\_ табл. 2.3, имеющего ось симметрии, при размерах, указанных в строке №\_\_\_ табл. 2.4, требуется определить положение центра тяжести сечения, найти положение главных центральных осей инерции, вычислить главные моменты инерции и относительно этих осей, найти квадраты главных радиусов инерции и моменты сопротивления сечения.

**Порядок расчета:**

1. Сложное сечение разбить на простые части, у которых положение центров тяжести известны.

2. Каждой части сечения присвоить порядковый номер. Поперечное сечение вычертить в масштабе 1 : 5 либо 1 : 2 с нанесением местных осей  $x_i, y_i$ , проходящих через центры тяжести каждой части  $C_i$  с указанием размеров.

3. Вычислить геометрические характеристики каждой части.

4. Определить положение центра тяжести сечения  $C$  в принятой начальной системе координат  $x_n 0 y_n$ . Выполнить проверку правильности определения положения центра тяжести.

5. Провести через найденный центр тяжести центральные оси сечения  $xCy$ .

6. Определить моменты инерции сечения относительно центральных осей  $xCy$ .

7. Вычислить главные моменты инерции и положение главных центральных осей инерции. Показать на рисунке положение главных центральных осей.

8. Определить квадраты главных радиусов инерции.

9. Определить моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон сечения.

Таблица 2.3

Схемы сечений

<p>1</p>	<p>2</p>	<p>3</p>
<p>4</p>	<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>	<p>9</p>
<p>10</p>	<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>	<p>15</p>

16	17	18
19	20	21
22	23	24
25	26	27
28	29	30

Таблица 2.4

Числовые данные

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a$ , см	30	34	30	34	24	36	40	50	36	32	34	24	38	40	42	44	46	48	50	30
$b$ , см	18	16	14	12	20	18	16	18	14	15	20	16	14	12	20	18	16	18	14	16

## 2.5. Пример выполнения расчетно-графической работы 2

Дано:  $a = 30$  см;  $b = 12$  см (рис. 2.3).

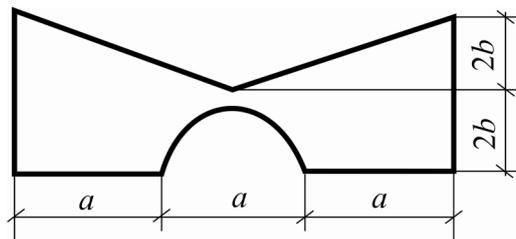


Рис. 2.3

Решение:

1. Сечение разобьем на три части (рис. 2.4):

1 — прямоугольник,  $b_1 = 90$  см,  $h_1 = 48$  см;

2 — равнобедренный треугольник,  $b_2 = 90$  см,  $h_2 = 24$  см;

3 — полукруг,  $d = 30$  см).

2. Вычерчиваем сечение в масштабе 1:5 с нанесением местных центральных осей  $x_1C_1y_1$ ,  $x_2C_2y_2$ ,  $x_3C_3y_3$  (рис. 2.4).

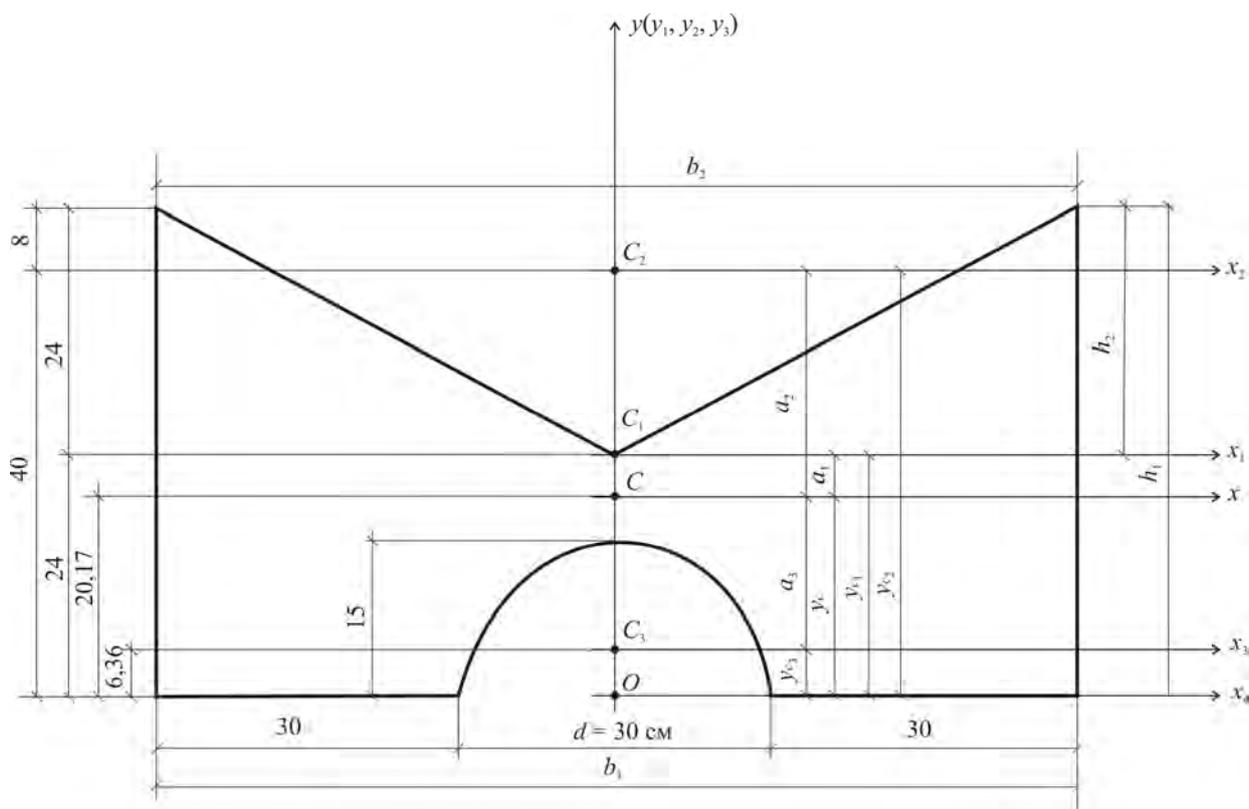


Рис. 2.4

3. Вычисляем геометрические характеристики каждой части: площадь, моменты инерции относительно местных центральных осей.

Формулы для вычисления приведены в прил., табл. П.3.

1. Прямоугольник:

$b_1 = 90$  см,  $h_1 = 48$  см (центр тяжести в точке  $C_1$ ):

$$A_1 = b_1 h_1 = 90 \cdot 48 = 4320 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{90 \cdot 48^3}{12} = 829\,440 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{48 \cdot 90^3}{12} = 2\,916\,000 \text{ см}^4; \quad J_{x_1 y_1}^{(1)} = 0.$$

2. Равнобедренный треугольник:

$b_2 = 90$  см,  $h_2 = 24$  см (центр тяжести в точке  $C_2$ ):

$$A_2 = \frac{1}{2} b_2 h_2 = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 24 = 1080 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{90 \cdot 24^3}{36} = 34\,560 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_2}^{(2)} = \frac{h_2 b_2^3}{48} = \frac{24 \cdot 90^3}{48} = 364\,500 \text{ см}^4; \quad J_{x_2 y_2}^{(2)} = 0.$$

3. Полукруг:

$d = 30$  см (центр тяжести в точке  $C_3$ ):

$$A_3 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot 30^2}{8} = 353,25 \text{ см}^2;$$

$$J_{x_3}^{(3)} = 0,00686 d^4 = 0,00686 \cdot 30^4 = 5556,60 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_3}^{(3)} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{3,14 \cdot 30^4}{128} = 19\,870,31 \text{ см}^4; \quad J_{x_3 y_3}^{(3)} = 0.$$

4. Определяем положение центра тяжести сечения. Очевидно, что он лежит на оси симметрии. За начальную ось отсчета примем ось симметрии, т. е. центральную ось  $y$  сечения. Тогда статический момент площади  $S_y = 0$ .

Вторую начальную ось  $x_n$  проводим через основание сечения.

Находим координаты центров тяжести частей сечения в начальной системе координат  $x_n O y$ :

$$C_1: x_{c_1} = 0; y_{c_1} = 24 \text{ см};$$

$$C_2: x_{c_2} = 0; y_{c_2} = 48 - 8 = 40 \text{ см};$$

$$C_3: x_{c_3} = 0; y_{c_3} = 0,212 d = 0,212 \cdot 30 = 6,36 \text{ см}.$$

По формулам (1.8) находим координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = 0; A = A_1 - A_2 - A_3 = 4320 - 1080 - 353,25 = 2886,75 \text{ см}^2;$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i y_{c_i}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{A_1 y_{c_1} - A_2 y_{c_2} - A_3 y_{c_3}}{A} =$$

$$= \frac{4320 \cdot 24 - 1080 \cdot 40 - 353,25 \cdot 6,36}{2886,75} = \frac{58233,33}{2886,75} = 20,17 \text{ см.}$$

Показываем центр тяжести сечения  $C$  на рис. 2.4 и проводим центральные оси сечения  $xSy$ .

Найдем новые координаты центров тяжести отдельных частей сечения в системе центральных осей  $xSy$ :

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 24 - 20,17 = 3,83 \text{ см}; a_2 = y_{c_2} - y_c = 40 - 20,17 = 19,83 \text{ см};$$

$$a_3 = y_{c_3} - y_c = 6,36 - 20,17 = -13,81 \text{ см.}$$

Выполним проверку положения центра тяжести:

$$S_x = S_x^{(1)} - S_x^{(2)} - S_x^{(3)} = A_1 a_1 - A_2 a_2 - A_3 a_3 =$$

$$= 4320 \cdot 3,83 - 1080 \cdot 19,83 - 353,25(-13,81) =$$

$$= 21\,423,98 - 21\,416,40 = 7,58 \text{ см}^3.$$

$S_y = 0$ , так как ось  $y$  — центральная ось сечения.

Статический момент площади всего сечения относительно центральных осей должен быть равен нулю. Погрешность определения центра тяжести

$$\text{равна } \Delta\%(S_x) = \frac{7,58}{21\,416,40} 100\% = 0,035\% < 3\%, \text{ что считается допустимой}$$

величиной.

5. Вычислим главные моменты инерции сечения и найдем положение главных центральных осей. Так как сечение имеет ось симметрии  $y$ , то она является главной центральной осью инерции. Ось  $x$  является другой главной центральной осью.

В этом случае, чтобы найти величины главных моментов инерции, надо просто выбрать из двух найденных осевых моментов инерции — наибольший  $J_{\max}$  и наименьший  $J_{\min}$ .

Согласно зависимостям (1.9) моменты инерции равны

$$J_x = \sum_{i=1}^3 (J_{x_i}^{(i)} + a_i^2 A_i) = J_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A_1 + J_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A_2 + J_{x_3}^{(3)} + a_3^2 A_3 =$$

$$= 829\,440 + 3,83^2 \cdot 4320 - (34\,560 + 19,83^2 \cdot 1080) - (5556,60 +$$

$$+ (-13,81)^2 \cdot 353,25) = 360\,635,37 \text{ см}^4 = J_{\min} = J_2;$$

$$J_y = \sum_{i=1}^3 (J_{y_i}^{(i)} + b_i^2 A_i) = J_{y_1}^{(1)} - J_{y_2}^{(2)} - J_{y_3}^{(3)} = 2\,916\,000 - 364\,500 - 19\,870,31 = \\ = 2\,531\,629,70 \text{ см}^4 = J_{\max} = J_1.$$

Здесь  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ , так как центры тяжести частей сечения  $C_1, C_2, C_3$  расположены на оси симметрии  $y$ , т. е. на главной центральной оси.

Центробежный момент инерции сечения относительно главных центральных осей всегда равен нулю.

$$J_{xy} = J_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 + J_{x_3 y_3}^{(3)} + a_3 b_3 A_3 = 0.$$

6. Найдем квадраты главных радиусов инерции:

$$i_1^2 = \frac{J_1}{A} = \frac{2\,531\,629,70}{2886,75} = 876,98 \text{ см}^2; \quad i_2^2 = \frac{J_2}{A} = \frac{360635,37}{2886,75} = 124,93 \text{ см}^2.$$

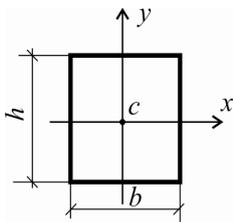
7. Определим моменты сопротивления сечения для нижних и верхних волокон,  $y_n = 20,17 \text{ см}$ ;  $y_b = 27,83 \text{ см}$ :

$$W_x^n = \frac{J_x}{y_n} = \frac{360\,635,37}{20,17} = 17\,879,79 \text{ см}^3;$$

$$W_x^b = \frac{J_x}{y_b} = \frac{360\,635,37}{27,83} = 12\,958,51 \text{ см}^3.$$

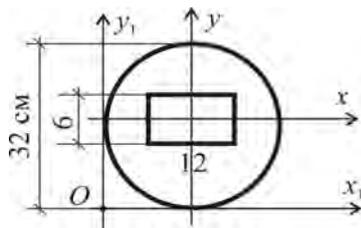
### 3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

#### 3.1. Определение статических моментов площади сечения и центра тяжести



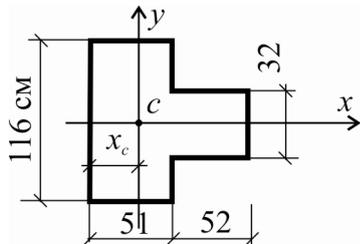
1. Определить статический момент прямоугольного поперечного сечения относительно оси  $x$ .

Ответ:  $S_x = 0$



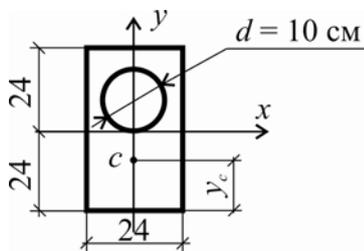
2. Определить статический момент поперечного сечения относительно оси.

Ответ:  $S_{x_1} = 11\,709,44 \text{ см}^3$



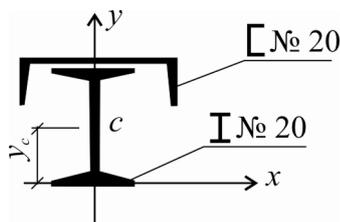
3. Найти положение центра тяжести  $C$  поперечного сечения участка стены таврового сечения.

Ответ:  $x_c = 36,81 \text{ см}$



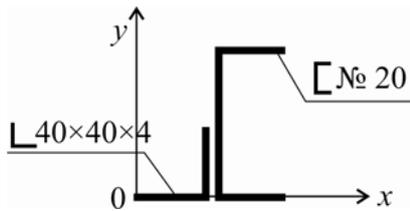
4. Найти расстояние от центра тяжести поперечного сечения до основания прямоугольника.

Ответ:  $y_c = 23,63 \text{ см}$



5. Найти расстояние от центра тяжести составного сечения, состоящего из швеллера и двутавра, до основания двутавра.

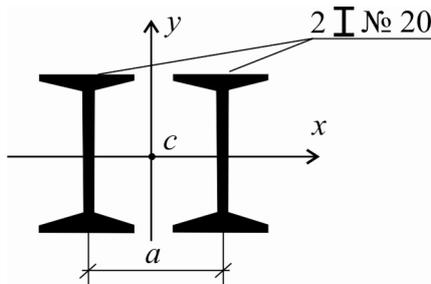
Ответ:  $y_c = 13,94 \text{ см}$



6. Найти положение центра тяжести  $C$  составного сечения в начальной системе координат  $xOy$ .

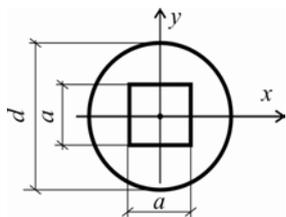
Ответ:  $x_c = 5,70$  см;  $y_c = 8,97$  см

### 3.2. Определение моментов инерции



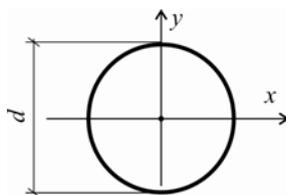
7. Определите на какое расстояние  $a$  следует удалить друг от друга два двутавра № 20, чтобы главные центральные моменты инерции сечения были равны,  $J_x = J_y$ .

Ответ:  $a = 16,04$  см



8. Определите значение момента инерции поперечного сечения стержня относительно главной центральной оси  $x$ ,  $a = 4$  см,  $d = 12$  см.

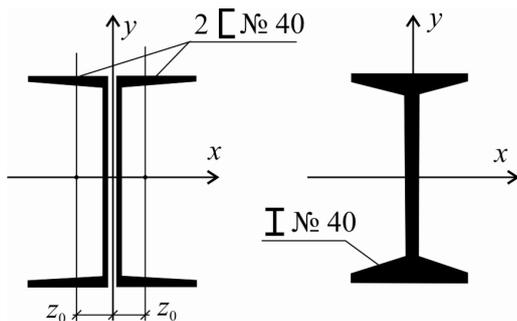
Ответ:  $J_x = 996,03$  см<sup>4</sup>



9. Найти осевой и полярный моменты инерции для круга, если  $d = 16$  см.

Ответ:  $J_x = 3125,36$  см<sup>4</sup>,

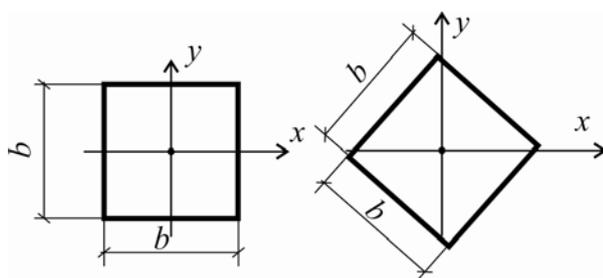
$J_p = 6250,72$  см<sup>4</sup>.



10. Вычислите главный центральный момент инерции  $J_x$  сечения из двух швеллеров № 40 и сравните их с соответствующим моментом инерции двутавра той же высоты.

Ответ:

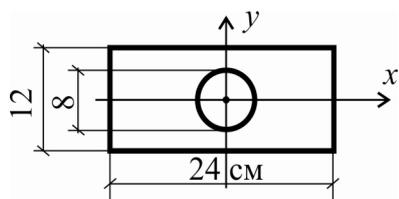
$J_x = 31\,370,19$  см<sup>4</sup> >  $19\,062$  см<sup>4</sup>.



11. Докажите, что осевой момент инерции квадратного сечения, относительно оси  $x$  не изменится, если сечение повернуть на  $90^\circ$  вокруг ее оси.

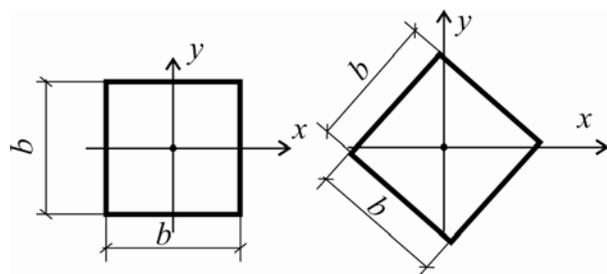
Ответ:  $J_x = \frac{b^4}{12}$

### 3.3. Определение радиусов инерции и моментов сопротивления сечения



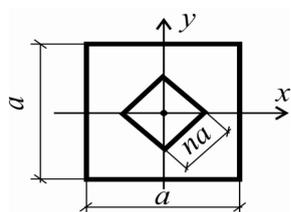
12. Найдите квадрат радиуса инерции поперечного сечения относительно оси  $x$ .

Ответ:  $i_x^2 = 13,69 \text{ см}^2$



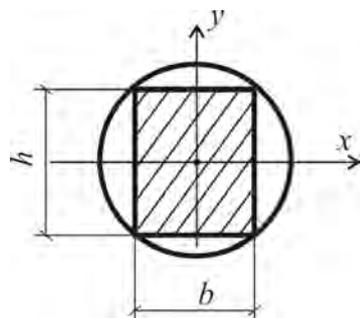
13. Определите, как изменится момент сопротивления квадратного сечения относительно оси  $x$ , если сечение повернуть на  $90^\circ$ .

Ответ:  $W_x = \frac{b^3}{6}$ ;  $W_x = \frac{b^3}{8,49}$



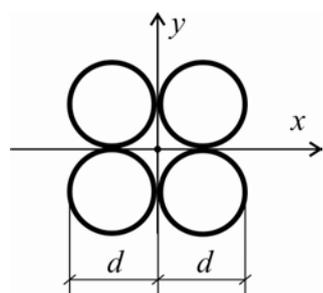
14. Определите значение момента инерции сечения относительно оси  $x$ , если  $n = 0,4$ .

Ответ:  $J_x = 0,0812 a^4$



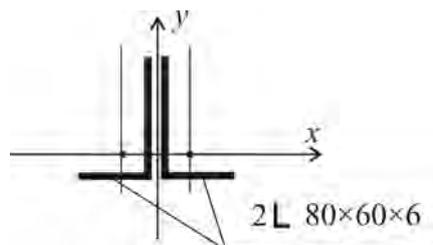
15. Задача Парана. Найдите соотношение  $h/b$  для выпиленного из круглого бревна диаметром  $d$  прямоугольного сечения с наибольшим моментом сопротивления.

Ответ:  $h/b = \sqrt{2} \approx 1,4 \approx 7/5$



16. Определите момент сопротивления поперечного сечения стержня из четырех жестко соединенных между собой бревен  $d = 30 \text{ см}$  относительно главной центральной оси  $x$ .

Ответ:  $W_x = 26\,493,75 \text{ см}^3$



17. Определите радиус инерции и наибольший момент сопротивления поперечного сечения стержня, изображенного на рисунке, относительно оси  $x$ .

Ответ:  $i_x = 2,53 \text{ см}$ ,  $W_x^{\text{нб}} = 42,15 \text{ см}^3$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

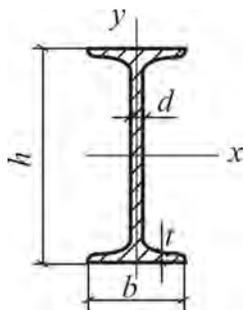
1. Что называется статическим моментом площади сечения относительно некоторой оси? Чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
2. Запишите формулы для определения координат центра тяжести сечений.
3. По каким формулам вычисляются осевые и центробежные моменты инерции сечения? Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
4. Запишите формулы для осевых моментов инерции прямоугольника и круга относительно осей симметрии, проходящих через их центры тяжести.
5. Какова зависимость между осевыми моментами инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр тяжести сечения?
6. Запишите формулы, выражающие изменение осевых и центробежного моментов инерции сечения при повороте осей.
7. Какие оси называются главными и главными центральными осями?
8. Запишите формулу для определения положения главных осей сечения.
9. Запишите формулу для определения величин главных моментов инерции.
10. Как определяются квадраты радиусов и моменты сопротивления сечения?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреев, В. И.* Техническая механика (для строительных вузов и факультетов) : учебник / В. И. Андреев, А. Г. Паушкин, А. Н. Леонтьев. — М. : АСВ, 2012. — 256 с.
2. *Варданян, Г. С.* Сопротивление материалов с основами строительной механики : учебник / Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков. — М. : Инфра-М, 2011. — 480 с.
3. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Е. П. Державин ; под редакцией А. В. Александрова. — М. : Высшая школа, 2008. — 559 с.
4. *Михайлов, А. М.* Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. М. Михайлов. — М. : Академия, 2009. — 446 с.
5. *Копнов, В. А.* Сопротивление материалов : руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ / В. А. Копнов, С. Н. Кривошапко. — М. : Высшая школа, 2005. — 351 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент по ГОСТ8239—89

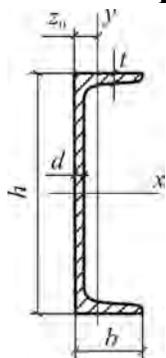


$h$  — высота двутавра;  $b$  — ширина полки;  $d$  — толщина стенки;  $t$  — средняя толщина полки;  $J$  — момент инерции;  $W$  — момент сопротивления;  $S$  — статический момент полусечения;  $i$  — радиус инерции.

Таблица П.1

Номер двутавра	Размеры				Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	$h$	$b$	$d$	$t$			$x - x$			$y - y$			
							$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
	мм												
10	100	55	4,5	7,2	12	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,0	2550	232,0	9,13	131,0	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,5	5010	371,0	11,2	210,0	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,5	7080	472,0	12,3	268,0	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,2	9840	597,0	13,5	339,0	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,6	13 380	743,0	14,7	423,0	510	71,1	2,79
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,0	19 062	953,0	16,2	545,0	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,5	27 696	1231,0	18,1	708,0	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100,0	78,5	39 727	1589,0	19,9	919,0	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118,0	92,6	55 962	2035,0	21,8	1181,0	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138,0	108,0	76 806	2560,0	23,6	1491,0	1725	182	3,54

## Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент по ГОСТ 8240 — 97 (с уклоном внутренних граней полок)

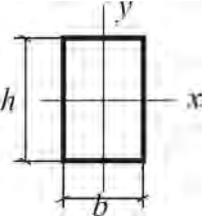
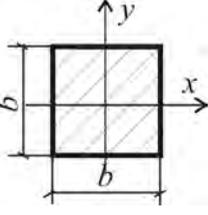
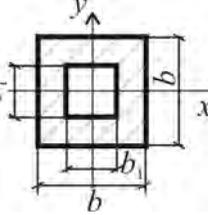
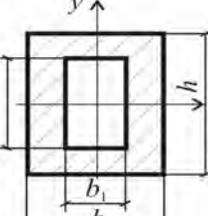


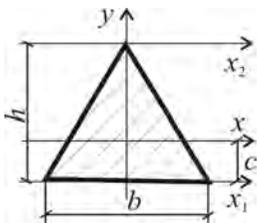
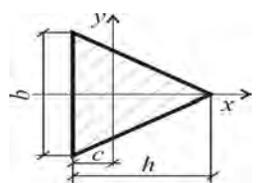
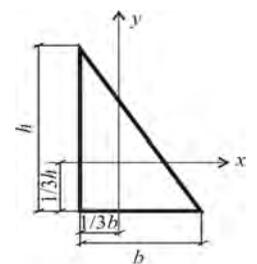
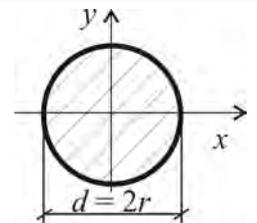
$h$  — высота швеллера;  $b$  — ширина полки;  $d$  — толщина стенки;  $t$  — средняя толщина полки;  $J$  — момент инерции;  $W$  — момент сопротивления;  $S$  — статический момент полусечения;  $i$  — радиус инерции;  $z_0$  — расстояние от оси  $y — y$  до наружной грани стенки

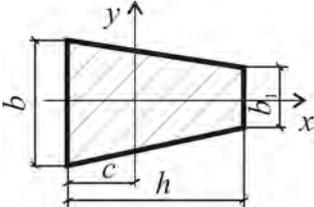
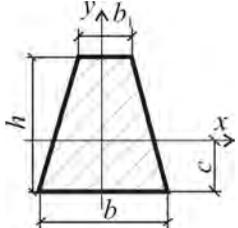
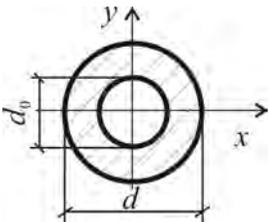
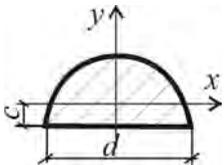
Таблица П.2

Номер швеллера	Размеры				Площадь поперечного сечения, $\text{см}^2$	Масса 1 м, кг	$z_0$ , см	Справочные значения для осей						
	$h$	$b$	$d$	$t$				$x — x$				$y — y$		
	мм							$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
5	59	32	4,4	7,0	6,16	4,84	1,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	5,90	1,24	48,6	15,0	2,54	9,0	8,70	3,68	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	7,05	1,31	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,31
19	100	46	4,5	7,6	10,90	8,59	1,44	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,30	10,40	1,54	304,0	50,6	4,78	29,6	31,20	8,52	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,60	12,30	1,67	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,0	1,67
16	160	64	5,0	8,4	18,10	14,20	1,80	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,8	1,80
16а	160	68	5,0	9,0	19,50	15,30	2,00	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,4	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,70	16,30	1,94	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,0	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	22,20	17,40	2,13	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,0	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,40	18,40	2,07	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,5	2,07
22	220	82	5,4	9,5	26,70	21,00	2,21	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,00	25,1	2,21
24	240	90	5,6	10	30,60	24,00	2,42	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,00	31,6	2,42
27	270	95	6,0	10,5	35,20	27,70	2,47	4160,0	308,0	10,9	178,0	262,00	37,3	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,50	31,80	2,52	5810,0	387,0	12,0	224,0	327,00	43,6	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,50	36,50	2,59	7980,0	484,0	13,1	281,0	410,00	51,8	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,40	41,90	2,68	10 820	601,0	14,2	350,0	513,00	61,7	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,50	48,30	2,75	15 220	761,0	15,7	444,0	642,00	73,4	2,75

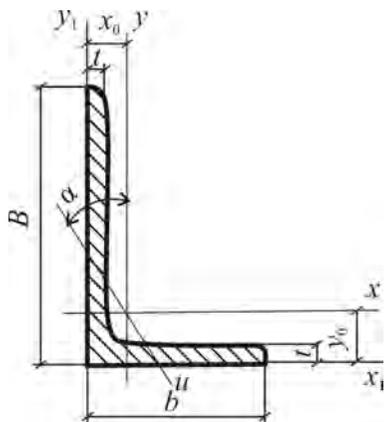
## Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

Сечение	Площадь, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Центробежный момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
1	2	3	4	5	6
	$A = bh$	$J_x = \frac{bh^3}{12},$ $J_y = \frac{hb^3}{12}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = \frac{bh^2}{6},$ $W_y = \frac{hb^2}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}},$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$A = b^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4}{12}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$A = b^2 - b_1^2$	$J_x = J_y = \frac{b^4}{12} - \frac{b_1^4}{12}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{b^4 - b_1^4}{12A}}$
	$A = bh - b_1h_1$	$J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1h_1^3}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1b_1^3}{12}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}$ $W_y = \frac{hb^3 - h_1b_1^3}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12A}}$ $i_y = \sqrt{\frac{hb^3 - h_1b_1^3}{12A}}$

Сечение	Площадь, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Центробежный момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
	$A = \frac{1}{2}bh$ $c = \frac{h}{3} = y_H$	$J_x = \frac{bh^3}{36}$ $J_y = \frac{hb^3}{48}$	$I_{xy} = 0$	$W_x^B = \frac{J_x}{y_B} = \frac{bh^2}{24}$ $W_x^H = \frac{J_x}{y_H} = \frac{bh^2}{12}$	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}}$
	$A = \frac{1}{2}bh$ $c = h/3$	$J_x = hb^3/48,$ $J_y = bh^3/36$	$I_{xy} = 0$	$W_x = \frac{J_x}{b/2} = \frac{hb^2}{24}$	$i_x = \frac{b}{\sqrt{24}}$
	$A = \frac{1}{2}bh$	$J_x = bh^3/36$ $J_y = hb^3/36$	$I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$	$W_x^H = \frac{J_x}{h/3} = \frac{bh^2}{12}$ $W_x^b = \frac{J_x}{2h/3} = \frac{bh^2}{24}$	$i_x = \frac{h}{2\sqrt{3}}$
	$A = \frac{\pi d^2}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$	$i_x = i_y = \frac{d}{4}$

Сечение	Площадь, см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	Центробежный момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Радиус инерции, см
	$A = \frac{b+b_1}{2}h$ $c = \frac{h(2b_1+b)}{3(b+b_1)}$	$J_x = \frac{h(b^4-b_1^4)}{48(b-b_1)}$ $J_y = \frac{h^3K}{36(b+b_1)},$ $K = b^2 + 4bb_1 + b_1^2.$	$J_{xy} = 0$	$W_x = \frac{J_x}{b/2} = \frac{h(b^4-b_1^4)}{24(b^2-bb_1)}$	$i_x = \sqrt{\frac{b^2-b_1^2}{24}}$
	$A = \frac{b+b_1}{2}h$ $c = \frac{h(2b_1+b)}{3(b+b_1)}$	$J_x = \frac{h^3K}{36(b+b_1)},$ $K = b^2 + 4bb_1 + b_1^2.$ $J_y = \frac{h(b^4-b_1^4)}{48(b-b_1)}$	$I_{xy} = 0$	$W_x^B = \frac{J_x}{y_B} = \frac{J_x}{h-c}$ $W_x^H = \frac{J_x}{y_H} = \frac{J_x}{c}$	$i_x = \frac{h\sqrt{2K}}{6(b+b_1)}$ $i_y = \sqrt{\frac{b^2+b_1^2}{24}}$
	$A = \frac{\pi(d^2-d_1^2)}{4}$	$J_x = J_y = \frac{\pi(d^4-d_1^4)}{64}$	$J_{xy} = 0$	$W_x = W_y = \frac{\pi(d^4-d_1^4)}{32d}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{d^2+d_1^2}{4}}$
	$A = \frac{\pi d^2}{8}$ $c = \frac{2d}{3\pi} = 0,212d$	$J_x = 0,00686d^4$ $J_y = \frac{\pi d^4}{128} = 0,025d^4$	$J_{xy} = 0$	$W_x^B = \frac{J_x}{d/2-c}$ $W_x^H = \frac{J_x}{c}$ $W_y = \frac{J_y}{d/2} = \frac{\pi d^3}{64}$	$i_x = 0,132d$ $i_y = d/4$

### Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент



$B$  — ширина большой полки;  $b$  — ширина малой полки;  $t$  — толщина полки;  $J$  — момент инерции;  $i$  — радиус инерции;  $x_0, y_0$  — расстояние от центра тяжести до наружных граней полок

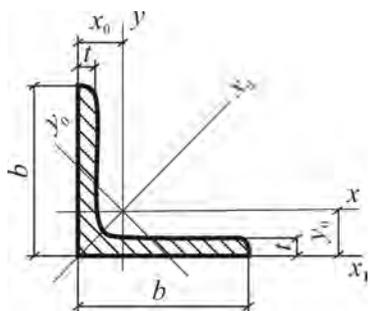
Таблица П.4

Номер уголка	Размеры			Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	$x_0,$ см	$y_0,$ см	Справочные характеристики относительно осей							
	$B$	$b$	$t$					$x$ и $y$					$u$		tg $\alpha$
	мм							$J_x,$ см <sup>4</sup>	$i_x,$ см	$J_y,$ см <sup>4</sup>	$i_y,$ см	$J_{xy},$ см <sup>4</sup>	$J_u = J_{\min},$ см <sup>4</sup>	$i_{u \min},$ см	
2,5/1,6	25	16	3	1,16	0,91	0,42	0,86	0,70	0,78	0,22	0,44	0,22	0,13	0,34	0,392
3/2	30	20	3	1,43	1,12	0,51	1,00	1,27	0,94	0,45	0,56	0,43	0,26	0,43	0,427
			4	1,86	1,46	0,54	1,04	1,61	0,93	0,56	0,55	0,54	0,34	0,43	0,421
3,2/2	32	20	3	1,49	1,17	0,49	1,08	1,52	1,01	0,46	0,55	0,47	0,28	0,43	0,382
			4	1,94	1,52	0,53	1,12	1,93	1,00	0,57	0,54	0,59	0,35	0,43	0,374
4/2,5	40	25	3	1,89	1,48	0,59	1,32	3,06	1,27	0,93	0,70	0,96	0,56	0,54	0,385
			4	2,47	1,94	0,63	1,37	3,93	1,26	1,18	0,69	1,22	0,71	0,54	0,281
			5	3,03	2,37	0,66	1,41	4,73	1,25	1,41	0,68	1,44	0,86	0,53	0,374
4/3	40	30	4	2,67	2,26	0,78	1,28	4,18	1,25	2,01	0,87	1,68	1,09	0,64	0,544
			5	3,28	2,46	0,82	1,32	5,04	1,24	2,41	0,86	2,00	1,33	0,64	0,539
4,5/2,8	45	28	3	2,14	1,68	0,64	1,47	4,41	1,48	1,32	0,79	1,38	0,79	0,61	0,382
			4	2,80	2,20	0,68	1,51	5,68	1,42	1,69	0,78	1,77	1,02	0,60	0,379
5/3,2	50	32	3	2,42	1,90	0,72	1,60	6,18	1,60	1,99	0,91	2,01	1,18	0,70	0,403
			4	3,17	2,24	0,76	1,65	7,98	1,59	2,56	0,90	2,59	1,52	0,69	0,401

Номер уголка	Размеры			Площадь поперечного сечения см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	Справочные характеристики относительно осей							
	B	b	t					x и y					u		tg α
	мм							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u</sub> = J <sub>min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	
5,6/3,6	56	36	4	3,58	2,81	0,84	1,82	11,37	1,78	3,70	1,02	3,74	2,19	0,78	0,406
			5	4,41	3,46	0,88	1,87	13,82	1,77	4,48	1,01	4,50	2,65	0,78	0,401
6,3/4,0	63	40	4	4,04	3,17	0,91	2,03	16,33	2,01	5,16	1,13	5,25	3,07	0,87	0,397
			5	4,98	3,91	0,95	2,08	19,91	2,00	6,26	1,12	6,41	3,73	0,86	0,396
			6	5,90	4,63	0,99	2,12	23,31	1,99	7,29	1,11	7,44	4,36	0,86	0,393
			8	7,68	6,03	1,07	2,20	29,60	1,96	9,15	1,09	9,27	5,58	0,85	0,386
6,5/5	65	50	5	5,56	4,36	1,26	2,00	23,41	2,05	12,08	1,47	9,77	6,41	1,07	0,576
			6	6,60	5,18	1,30	2,04	27,46	2,04	14,12	1,46	11,16	7,52	1,07	0,575
			7	7,62	5,98	1,34	2,08	31,32	2,03	16,05	1,45	12,94	8,60	1,06	0,571
			8	8,62	6,77	1,37	2,12	35,00	2,02	18,88	1,44	13,61	9,65	1,06	0,570
7/4,5	70	45	5	5,59	4,39	1,05	2,28	27,76	2,23	9,05	1,27	9,12	5,34	0,98	0,406
7,5/5	75	50	5	6,11	4,79	1,17	2,39	34,81	2,39	12,47	1,43	12,00	7,24	1,09	0,436
			6	7,25	5,69	1,21	2,44	40,92	2,38	14,60	1,42	14,10	8,48	1,08	0,435
			7	8,37	6,57	1,25	2,48	46,77	2,36	16,61	1,41	16,18	9,69	1,09	0,435
			8	9,47	7,43	1,29	2,52	52,38	2,35	18,52	1,40	17,18	10,87	1,07	0,430
8/5	80	50	5	6,36	4,49	1,13	2,60	41,64	2,56	12,68	1,41	13,20	7,57	1,00	0,387
			6	7,55	5,92	1,17	2,65	48,98	2,55	14,85	1,40	15,50	3,24	1,08	0,386
8/6	80	60	6	8,15	6,39	1,49	2,47	52,06	2,53	23,18	1,76	20,98	13,61	1,29	0,547
			7	9,42	7,39	1,53	2,52	59,61	2,52	28,74	1,75	21,01	15,58	1,29	0,546
			8	10,67	8,37	1,57	2,56	66,88	2,50	32,15	1,74	26,83	17,49	1,28	0,544
9/5,6	95	56	5,5	7,86	6,17	1,26	2,92	65,28	2,88	19,67	1,58	20,54	11,77	1,22	0,384
			6	8,54	6,70	1,28	2,95	70,58	2,88	21,22	1,58	22,23	12,70	1,22	0,384
			8	11,18	8,77	1,36	3,04	90,87	2,85	27,08	1,56	28,33	16,29	1,21	0,380

Номер уголка	Размеры			Площадь поперечного сечения см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	x <sub>0</sub> , см	y <sub>0</sub> , см	Справочные характеристики относительно осей							
	B	b	t					x и y					u		tg α
	мм							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y</sub> , см	J <sub>xy</sub> , см <sup>4</sup>	J <sub>u</sub> = J <sub>min</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>u min</sub> , см	
10/6,3	100	63	6	9,58	7,53	1,42	3,23	98,29	3,20	30,58	1,79	31,50	18,20	1,38	0,393
			7	11,09	8,70	1,46	3,28	112,86	3,19	34,99	1,78	36,10	20,83	1,37	0,392
			8	12,57	9,87	1,50	3,32	126,96	3,18	39,21	1,77	40,50	23,38	1,36	0,391
			10	15,47	12,14	1,58	3,40	153,95	3,15	47,18	1,75	48,60	28,34	1,35	0,387
10/6,5	100	65	7	11,23	8,81	1,52	3,24	114,05	3,19	38,32	1,85	38,00	22,77	1,41	0,415
			8	12,73	9,99	1,56	3,28	128,31	3,18	42,96	1,84	42,64	25,24	1,41	0,414
			10	15,67	12,30	1,64	3,37	155,52	3,15	51,68	1,82	51,18	30,60	1,40	0,410
11/7	110	70	6,5	11,45	8,98	1,53	3,55	142,42	3,53	45,61	2,00	46,80	26,94	1,53	0,402
			8	13,93	10,93	1,64	3,61	171,54	3,51	54,64	1,98	55,90	32,31	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	14,06	11,04	1,80	4,01	226,53	4,01	73,73	2,29	74,70	43,40	1,76	0,407
			8	15,98	12,58	1,84	4,05	225,62	4,00	80,95	2,28	84,10	48,82	1,75	0,406
			10	19,70	15,47	1,92	4,14	311,61	3,98	100,47	2,26	102,0	59,33	1,74	0,404
			12	23,36	18,34	2,00	4,22	364,79	3,95	116,84	2,24	118,0	69,47	1,72	0,400
14/9	140	90	8	18,00	14,13	2,03	4,49	363,68	4,49	119,79	2,58	121,0	70,27	1,58	0,411
			10	22,24	17,46	2,12	4,58	444,45	4,47	145,54	2,58	147,0	85,51	1,96	0,409
16/10	160	100	9	22,87	17,96	2,24	5,19	605,97	5,15	186,03	2,85	194,0	110,40	2,20	0,391
			10	25,28	19,85	2,28	5,23	666,59	5,13	204,09	2,84	218,0	121,16	2,19	0,390
			12	30,04	23,59	2,36	5,32	784,22	5,11	238,75	2,82	249,0	142,14	2,18	0,388
			14	34,72	27,26	2,43	5,40	897,19	5,08	271,60	2,80	282,0	162,49	2,16	0,385
18/11	180	110	10	28,33	22,20	2,44	5,88	952,28	5,80	276,37	3,12	295,0	163,44	2,42	0,376
			12	33,69	26,40	2,52	5,97	1122,56	5,77	324,09	3,10	348,0	194,28	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	34,87	27,37	2,79	6,50	1449,02	6,45	446,36	3,58	465,0	263,84	2,75	0,392
			12	37,89	29,74	2,83	6,54	1568,19	6,43	481,93	3,57	503,0	285,04	2,74	0,392
			14	43,87	34,43	2,91	6,62	1800,83	6,41	550,77	3,54	565,0	326,54	2,73	0,390
			16	49,77	39,07	2,99	6,71	2926,08	6,38	616,66	3,52	643,0	366,99	2,72	0,388

## Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент



$b$  — ширина полки;  $t$  — толщина полки;  $J$  — момент инерции;  $i$  — радиус инерции;  $x_0, y_0$  — расстояние от центра тяжести до наружных граней стенки

Таблица П.5

Номер уголка	Размеры		Площадь поперечного сечения см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	$x_0 = y_0,$ см	Справочные характеристики относительно осей						
	$b$	$t$				$x$ и $y$			$x_0$		$y_0$	
	мм					$J_x = J_y, \text{см}^4$	$i_x = i_y,$ см	$J_{xy}, \text{см}^4$	$J_{x0 \text{ max}},$ см <sup>4</sup>	$i_{x0 \text{ max}},$ см	$J_{y0 \text{ min}},$ см <sup>4</sup>	$i_{y0 \text{ min}},$ см
2	20	3	1,13	0,89	0,60	0,40	0,59	0,23	0,63	0,75	0,17	0,39
		4	1,46	1,15	0,64	0,50	0,58	0,28	0,78	0,73	0,22	0,38
2,5	25	3	1,43	1,12	0,73	0,81	0,75	9,47	1,29	0,95	0,34	0,49
		4	1,86	1,46	0,76	1,03	0,74	0,59	1,62	0,93	0,44	0,48
2,8	28	3	1,62	1,27	0,80	1,16	0,85	0,68	1,64	1,07	0,48	0,55
3	30	3	1,74	1,36	0,85	1,45	0,91	0,85	2,30	1,15	0,60	0,59
		4	2,27	1,78	0,89	1,84	0,90	1,08	2,92	1,13	0,77	0,58
3,2	32	3	1,86	1,46	0,89	1,77	0,97	1,03	2,80	1,23	0,74	0,63
		4	2,43	1,91	0,94	2,26	0,96	1,32	3,58	1,21	0,94	0,62
3,5	35	3	2,04	1,60	0,97	2,35	1,07	1,37	3,72	1,35	0,97	0,69
		4	2,67	2,10	1,01	3,01	1,06	1,75	4,76	1,33	1,25	0,68
		5	3,28	2,58	1,05	3,61	1,05	2,10	5,71	1,32	1,52	0,68
4	40	3	2,35	1,88	1,08	3,55	1,23	2,08	5,63	1,55	1,47	0,79
		4	3,08	2,42	1,13	4,58	1,22	2,68	7,26	1,53	1,90	0,78
		5	3,79	2,98	1,17	5,53	1,21	3,22	8,75	1,52	2,30	0,78
4,5	45	3	2,65	2,08	1,21	5,13	1,39	3,00	8,13	1,75	2,12	0,89
		4	3,48	2,73	1,26	6,63	1,38	3,89	10,52	1,74	2,74	0,89
		5	4,29	3,37	1,30	8,03	1,37	4,71	12,74	1,72	3,33	0,88

Номер уголка	Размеры		Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	$x_0 = y_0$ , см	Справочные характеристики относительно осей						
	$b$	$t$				$x$ и $y$			$x_0$		$y_0$	
	мм					$J_x = J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_x = i_y$ , см	$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$J_{x_0 \max}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_0 \max}$ , см	$J_{y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \min}$ , см
5	50	3	2,96	2,32	1,33	7,11	1,55	4,16	11,27	1,95	2,95	1,00
		4	3,89	3,05	1,38	9,21	1,54	5,42	14,63	1,84	3,80	0,99
		5	4,80	3,77	1,42	11,20	1,53	6,57	17,77	1,92	4,63	0,98
		6	5,69	4,47	1,46	13,07	1,52	7,65	20,72	1,91	5,43	0,98
5,6	56	4	4,38	3,44	1,52	13,10	1,73	7,69	20,79	2,18	5,41	1,11
		5	5,41	4,25	1,57	16,00	1,72	9,41	25,36	2,16	6,59	1,10
6,3	63	4	3,90	4,96	1,69	18,90	1,95	11,00	29,90	2,45	7,81	1,25
		5	6,13	4,81	1,74	23,10	1,94	13,70	36,80	2,44	9,52	1,25
		6	7,28	5,72	1,78	27,10	1,93	15,90	42,91	2,43	11,16	1,24
7	70	4,5	6,20	4,87	1,88	29,04	2,16	17,00	46,03	2,72	12,04	1,39
		5	6,86	5,38	1,90	31,90	2,16	18,70	50,67	2,72	13,22	1,39
		6	8,15	6,39	1,94	37,58	2,15	22,10	59,64	2,71	15,52	1,38
		7	9,42	7,39	1,99	42,98	2,14	25,20	68,19	2,69	17,77	1,37
		8	10,67	8,37	2,02	48,16	2,12	28,20	76,35	2,68	19,97	1,37
7,5	75	5	7,39	5,80	2,02	39,53	2,31	23,10	62,65	2,91	16,41	1,49
		6	8,78	6,89	2,06	46,57	2,30	27,30	73,87	2,90	19,28	1,48
		7	10,15	7,96	2,10	53,34	2,29	31,20	84,61	2,89	22,07	1,47
		8	11,50	9,02	2,15	59,84	2,28	35,00	94,89	2,87	24,80	1,47
		9	12,83	10,07	2,18	66,10	2,27	38,60	104,72	2,86	27,48	1,46
8	80	5,5	8,63	6,78	2,17	52,68	2,47	30,90	83,56	3,11	21,80	1,59
		6	9,38	7,36	2,19	56,97	2,47	33,40	90,40	3,11	23,54	1,58
		7	10,85	8,51	2,23	65,31	2,45	38,30	103,60	3,09	26,97	1,58
		8	12,30	9,65	2,27	73,36	2,44	43,00	116,39	3,08	30,32	1,57
9	90	6	10,61	8,33	2,43	82,10	2,78	48,10	130,00	3,50	33,97	1,79
		7	12,28	9,64	2,47	94,30	2,77	55,40	149,67	3,49	38,94	1,78
		8	13,93	10,93	2,51	106,11	2,76	62,30	168,42	3,48	43,80	1,77
		9	15,60	12,20	2,55	118,00	2,75	68,00	186,00	3,46	48,60	1,77

Номер уголка	Размеры		Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	$x_0 = y_0$ , см	Справочные характеристики относительно осей						
	$b$	$t$				$x$ и $y$			$x_0$		$y_0$	
	мм					$J_x = J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_x = i_y$ , см	$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$J_{x_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0 \max}$ , см	$J_{y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \min}$ , см
10	100	6,5	12,82	10,06	2,68	122,10	3,09	71,40	193,46	3,89	50,73	1,99
		7	13,75	10,79	2,71	130,59	3,08	76,40	207,01	3,88	54,16	1,98
		8	16,60	12,25	2,75	147,19	3,07	86,30	233,46	3,87	60,92	1,98
		10	19,24	15,10	2,83	178,95	3,05	110,00	283,83	3,84	74,08	1,96
		12	22,80	17,90	2,91	208,90	3,03	122,00	330,95	3,81	86,04	1,95
		14	26,28	20,63	2,99	237,15	3,00	138,00	374,98	3,78	99,32	1,94
11	110	7	15,15	11,89	2,96	175,61	3,40	106,00	278,54	4,29	72,68	2,19
		8	17,20	13,50	3,00	198,17	3,39	116,00	314,51	4,28	81,83	2,18
12,5	125	8	19,69	15,60	3,36	294,36	3,87	172,00	466,76	4,87	121,98	2,49
		9	22,00	17,30	3,40	327,48	3,86	192,00	520,00	4,86	135,88	2,48
		10	24,33	19,10	3,45	359,82	3,85	211,00	571,04	4,84	148,59	2,47
		12	28,89	22,68	3,53	422,23	3,82	248,00	670,02	4,82	174,43	2,46
		14	33,37	26,20	3,61	481,76	3,80	382,00	763,90	4,78	199,62	2,45
		16	37,77	29,65	3,68	538,56	3,78	315,00	852,84	4,75	224,29	2,44
14	140	9	24,72	19,41	3,76	465,72	4,34	274,00	739,42	5,47	192,03	2,79
		10	27,33	21,45	3,82	512,29	4,33	301,00	823,62	5,46	210,96	2,76
		12	32,49	25,50	3,90	602,49	4,31	354,00	956,98	5,43	248,01	2,76
16	160	10	31,43	24,67	4,30	774,24	4,96	455,00	1229,10	6,25	319,38	3,19
		11	34,42	27,02	4,35	844,21	4,95	486,00	1340,06	6,24	347,77	3,18
		12	37,39	28,35	4,39	912,89	4,94	537,00	1450,00	6,23	375,78	3,17
		14	43,57	33,97	4,47	1046,47	4,92	615,00	1662,13	6,20	430,81	3,16
		16	49,07	38,52	4,55	1175,19	4,89	690,00	1865,73	6,17	484,64	3,14
		18	54,79	43,01	4,63	1290,24	4,87	771,00	2061,03	6,13	537,46	3,13
		20	60,40	47,44	4,70	1418,85	4,85	830,00	2248,26	6,10	589,43	3,12

Номер уголка	Размеры		Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	$x_0 = y_0$ , см	Справочные характеристики относительно осей						
	$b$	$t$				$x$ и $y$			$x_0$		$y_0$	
	мм					$J_x = J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_x = i_y$ , см	$J_{xy}$ , см <sup>4</sup>	$J_{x_0 \max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_0 \max}$ , см	$J_{y_0 \min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_0 \min}$ , см
18	180	11	38,80	30,47	4,85	1216,44	5,60	716,00	1933,10	7,06	499,78	3,59
		12	42,19	33,12	4,89	1316,62	5,59	776,00	2092,78	7,04	540,65	3,58
20	200	12	47,10	36,97	5,37	1822,78	6,22	1073,00	2896,16	7,84	749,40	3,99
		13	50,85	39,92	5,42	1960,77	6,21	1156,00	3116,16	7,83	805,35	3,98
		14	54,60	42,80	5,46	2097,00	6,20	1236,00	3333,00	7,81	861,00	3,97
		16	61,98	48,65	5,54	2362,57	6,17	1393,00	3755,39	7,78	969,74	3,96
		20	76,54	60,08	5,70	2871,47	6,12	1689,00	4560,42	7,72	1181,92	3,93
		25	94,29	74,02	5,89	3466,21	6,06	2028,00	5494,04	7,63	1438,38	3,92
22	220	30	111,54	87,56	6,07	4019,66	6,00	2332,00	6351,05	7,55	1698,16	3,89
		14	60,38	47,40	5,81	2814,36	6,83	1655,00	4470,15	8,60	1158,56	4,38
22	220	16	68,58	53,83	6,02	3175,44	6,89	1869,00	5045,37	8,58	1305,52	4,36
		16	78,40	61,55	6,75	4117,10	7,76	2775,00	7492,10	9,78	1942,09	4,98
25	250	18	87,72	68,86	6,83	5247,24	7,73	3089,00	8336,69	9,75	2157,78	4,96
		20	96,96	76,11	6,91	5764,87	7,71	3395,00	9159,73	9,72	2370,01	4,94
		22	106,12	83,31	7,00	6270,32	7,09	3691,00	9961,60	9,69	2579,04	4,93
		25	119,71	953,97	7,11	7006,39	7,65	4119,00	11 125,52	9,64	2887,26	4,91
		28	133,12	104,50	7,23	7716,86	7,61	4527,00	12 243,84	9,59	3189,89	4,90
		30	141,96	111,44	7,31	8176,52	7,59	4788,00	12 964,66	9,56	3388,98	4,89
		35	163,71	128,51	7,53	9281,05	7,53	5401,68	14 682,73	9,47	3879,37	4,87

Учебное электронное издание

**Беликов** Георгий Иванович

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ**

Учебно-практическое пособие

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*

Редактор *И. Б. Чижикова*

Компьютерная правка и верстка *А. Г. Сиволобова*

Минимальные систем. требования:

PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Internet Explorer 6.0; Adobe Reader 6.0.

Подписано в свет 30.06.2015.

Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 2,8. Объем данных 6,7 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»

Редакционно-издательский отдел  
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1  
<http://www.vgasu.ru>, [info@vgasu.ru](mailto:info@vgasu.ru)