Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет

Н. А. Болотина, Л. П. Харитонова, И. П. Руденок

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-практическое пособие

2-е издание, переработанное и дополненное

Волгоград 2012

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73
Б 795

Р е ц е н з е н т ы:
доктор технических наук *В. В. Яцышен;*
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и математического моделирования Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета *О. В. Игнатьев*

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-практического пособия

Болотина, Н. А.
Б 795 Высшая математика [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. / Н. А. Болотина, Л. П. Харитонова, И. П. Руденок ; М-во образования и науки Росс. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электрон. текстовые дан. (3,6 Мб). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 DVD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод DVD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-5-98276-487-4

Приведен лекционный материал, соответствующий курсу высшей математики Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения для бакалавров строительных и технических специальностей. Материал может быть использован также для подготовки специалистов строительных и технических специальностей. Подробно рассмотрены примеры решения задач по всем темам, а также даны задачи для самостоятельного решения.
Для студентов строительных и инженерных специальностей.

1-е изд. вышло печатным тиражом в 2008 г. под названием «Высшая математика. Курс лекций и практические задания». Авторский коллектив 1-го издания: И. П. Руденок, Н. А. Болотина, Н. Н. Агишева.

Для удобства работы с изданием рекомендуем пользоваться электронным оглавлением, которое открывается с помощью пункта «Закладки» («Bookmarks») бокового вертикального меню.

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-98276-487-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Основными целями преподавания математических дисциплин для студентов инженерных специальностей являются следующие: ознакомление студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; выработка умения самостоятельно изучать учебную литературу по математике; развитие логического мышления и повышение общего уровня математической культуры. Все это имеет очень важное значение как для успешного обучения, так и для последующей практической работы инженера.

Число аудиторных часов, отводимое программой для изложения курса, ограничено. Поэтому лекции и практические занятия носят в ряде случаев обзорный характер. В связи с этим основной формой обучения является самостоятельная работа над учебным материалом.

Данная книга призвана служить основным пособием по курсу математики для студентов строительных и инженерных специальностей — бакалавров.

В то же время материал может использоваться для подготовки специалистов строительных и инженерных специальностей. Он охватывает следующие разделы: аналитическую геометрию на плоскости и в пространстве, элементы векторной и линейной алгебры, введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, неопределенные и определенные интегралы, приложения определенных интегралов, кратные интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения 1 и 2 порядков, ряды, дифференциальные уравнения в частных производных, элементы теории функций комплексного переменного.

Издание поможет студентам более глубоко изучить материал, излагаемый на лекциях. Также пособие содержит теоретический материал, который не дается на лекциях (из-за малого количества часов, предусмотренного программой), но является обязательным для изучения.

Известно, что новый учебный материал усваивается студентами значительно легче, если он сопровождается достаточно большим числом иллюстрирующих его примеров. Поэтому авторами сделана попытка соединить в одной книге теорию и краткое руководство к решению задач.

Теоретический материал пособия содержит определения основных понятий, формулы, уравнения. Приводятся доказательства теорем, вывод основных формул курса. Наиболее трудные вопросы теории для лучшего усвоения сопровождаются раскрытием их содержания (без доказательств). Наличие рисунков поможет студентам лучше разобраться в материале, более основательно усвоить соответствующие темы и разделы курса. Решения примеров и задач, приведенные в конце каждой главы, рассчитаны на прочное закрепление изучаемого материала и предназначены для самостоятельной работы студентов. Приведен библиографический список, в приложении содержатся вопросы для самопроверки и подготовки к зачетам и экзаменам.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ. КВАНТОРЫ

N — множество всех натуральных чисел

Z — множество всех целых чисел

Q — множество всех рациональных чисел

R — множество всех действительных чисел

C — множество всех комплексных чисел

$\underline{\underline{def}}$ — равенство по определению

$\in$ — знак принадлежности. Запись $x \in M$ читается как «элемент x принадлежит множеству M»

$\notin$ — знак отрицания принадлежности

$\forall$ — квантор общности, читается как «любой», «всякий», «каждый»

$\forall x$ — читается как «для всех x...», «для любого x...»

$\exists$ — квантор существования, читается как «существует», «найдется»

$\exists x$ — читается как «найдется такое x, что...»

$\Rightarrow, \rightarrow$ — символ логического следования, означает «следует», «вытекает»

$\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности, означает равносильность утверждений, расположенных по разные стороны от него, и читается как «тогда и только тогда, когда...», «равносильно...», «необходимо и достаточно»

Δx — приращение аргумента x

$\Delta f(x_0)$ — приращение функции f в точке x_0

$D(f)$ — область определения функции f

$[a;b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с концами a и b, $a < b$

$(a; b)$ — открытый промежуток (интервал) с концами a и b, $a < b$

$(a;b], [a;b)$ — полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a < b$

$(-\infty;+\infty)$ — числовая прямая, множество всех действительных чисел

$\max\limits_{[a;b]} f$ — наибольшее значение функции f на отрезке $[a;b]$

$\min\limits_{[a;b]} f$ — наименьшее значение функции f на отрезке $[a;b]$

ВВЕДЕНИЕ

Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. Ее содержание и характер изменялись на протяжении всей истории и продолжают изменяться сейчас. От первичных предметных представлений о целом положительном числе, а также от представления об отрезке прямой как кратчайшем расстоянии между двумя точками математика прошла длительный путь развития, прежде чем стала абстрактной наукой со специфическими методами исследования.

Современное понимание пространственных форм весьма широко. Оно включает в себя наряду с геометрическими объектами трехмерного пространства (прямая, круг, треугольник, конус, цилиндр, шар и пр.) также многочисленные обобщения, в том числе понятия многомерного и бесконечномерного пространства, а также понятия о геометрических объектах в них и др. Точно также количественные отношения выражаются теперь не только целыми положительными или рациональными числами, но и при помощи векторов, функций, комплексных чисел и пр. Развитие науки и техники заставляет математику непрерывно расширять представления о пространственных формах и количественных отношениях.

Понятия математики отвлечены от конкретных явлений и предметов, они получены в результате абстрагирования от качественных особенностей, специфических для данного круга явлений и предметов. Это обстоятельство чрезвычайно существенно для приложений математики. Число 2 не связано неразрывно с каким-либо определенным предметным содержанием. Оно может относиться и к двум яблокам, и к двум книгам, и к двум мыслям. Оно одинаково хорошо относится ко всем этим и бесчисленному множеству других объектов. Точно так же геометрические свойства шара не меняются от того, что он сделан из стекла или стали. Конечно, отвлечение от конкретных свойств данного предмета обедняет наши знания о нем, о его характерных материальных особенностях. В то же время это отвлечение от особых свойств индивидуальных объектов придает общность понятиям, делает возможным применение математики к самым разнообразным по материальной природе явлениям. Таким образом, одни и те же закономерности математики, один и тот же математический аппарат могут достаточно удовлетворительно применяться к описанию явлений природы, технического, экономического и социальных процессов.

Абстрактность понятий не является исключительной особенностью математики. Для математики является характерным также способ получения ее результатов. Если в других науках для доказательства своих рассуждений исследователи постоянно обращаются к опыту, то в математике справедливость рассматриваемого факта доказывается не проверкой его на примерах, не проведением экспериментов, а чисто логическим путем, теоремы доказываются только путем рассуждений и выкладок. В математике ни один результат не может считаться доказанным, пока ему не дано логическое доказательство, и это даже в том случае, если специальные эксперименты давали подтверждение этого результата.

Сказанное не означает, что в предлагаемом курсе высшей математики мы должны использовать только «строгие» доказательства. Такая задача не ставилась потому, что это не только невозможно в рамках вузовского курса, но часто и нецелесообразно с методической точки зрения, так как в процессе изучения дисциплины в ограниченные сроки необходимо уделять большое внимание разъяснению математических понятий (в том числе и на интуитивном уровне), их геометрическому, техническому и физическому смыслу; решению практических задач.

Математика играет важную роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного специалиста.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Понятие матрицы и ее виды. Основные определения

Определение 1.1. Прямоугольная таблица из $m \times n$ действительных чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей типа* $m \times n$. Числа a_{ij}, входящие в состав данной матрицы, называются ее элементами; первый индекс i — номер строки, второй индекс j — номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Обозначают матрицы большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д. и ограничивают справа и слева либо круглыми скобками $(\ )$, либо двойными вертикальными чертами $\|\ \|$, либо квадратными скобками $[\ ]$.

Употребляются и более краткие обозначения матрицы: $(a_{ij})_{mn}$, $\|a_{ij}\|_{mn}$, $[a_{ij}]_{mn}$. Если необходимо указать только размеры матрицы A, то пишут $A_{m\times n}$ или A_{mn}.

Определение 1.2. Матрица, у которой $m \neq n$, называется *прямоугольной*.

Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Определение 1.3. Матрица, у которой $m = n$, называется *квадратной* матрицей n-го порядка.

Например, матрицы (a_1), $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и т.д. являются квадратными матрицами соответственно первого, второго и т.д. порядков.

Определение 1.4. Матрица размера $1 \times n$ называется *матрицей-строкой*. При записи матрицы-строки первый индекс не пишут:

$$(a_1,\ \ a_2,\ \ \dots,\ \ a_n).$$

Определение 1.5. Матрица размера $m \times 1$ называется *матрицей-столбцом*. При записи матрицы-столбца второй индекс не пишут:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

В случае квадратной матрицы вводятся понятия главной и побочной (дополнительной) диагоналей.

Определение 1.6. Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} ($i = j$), стоящие на диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний угол, т.е. $\left(\diagdown\right)$, образуют *главную диагональ* матрицы. Элементы a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1}, стоящие на диагонали, идущей из правого верхнего угла в левый нижний угол $\left(\diagup\right)$, образуют *побочную* или *дополнительную* диагональ.

Определение 1.7. Если в матрице элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю, а по другую отличны от нуля, то матрица называется *треугольной.*

Например, $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ или $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.8. Если в квадратной матрице все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

Например, $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определение 1.9. Если в диагональной матрице все элементы главной диагонали равны единице, то она называется *единичной* и обозначается E.

Например, $E_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 1.10. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нуль-матрицей*.

Единичная матрица и нуль-матрица в линейной алгебре играют ту же роль, что 0 и 1 в арифметике.

Определение 1.11. Матрицы A и B называются *равными,* если они имеют одинаковую размерность и соответствующие элементы этих матриц равны, т.е. $A = B$, если $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ и $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$).

Определение 1.12. Пусть $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Если заменить в матрице A строки соответственно столбцами, а столбцы строками, то полученная матрица $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ называется *транспонированной* к данной, а процесс ее получения транспонированием.

Например, $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad A_{32}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2. Линейные действия над матрицами. Умножение матриц

Определение 1.13. *Линейными действиями* над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число.

Действия сложения и вычитания возможны только над матрицами одной и той же размерности.

Определение 1.14. *Суммой* (*разностью*) двух матриц $A = (a_{ij})_{mn}$ и $B = (b_{ij})_{mn}$ называется третья матрица $C = (c_{ij})_{mn}$, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B, т.е.

$$C = A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{mn}.$$

Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + 0 = A$.
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. $A + (-A) = 0$.
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Определение 1.15. Чтобы *умножить матрицу на число* $\alpha \neq 0$, нужно умножить на это число каждый элемент матрицы A, т.е.

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}.$$

Произведение матрицы на число обладает следующими свойствами:

1. $\alpha A = A\alpha$.
2. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Определение 1.16. *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})_{mn}$ *на матрицу* $B = (b_{jk})_{np}$ называется такая матрица $C = (c_{ik})_{mp}$, каждый элемент которой c_{ik} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ij}b_{jk} + \ldots + a_{in}b_{nk}.$$

Из определения следует, что матрица-произведение содержит строк столько, сколько их в матрице A, а столбцов — сколько в матрице B.

Умножение матрицы на матрицу не всегда выполнимо. Две матрицы можно перемножить только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Схематически это можно записать так $A_{mn}B_{np} = C_{mp}$.

Произведение двух матриц A и B обозначается символом AB.

Например,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$.

Действие умножения матриц обладает следующими свойствами:

1. $ABC = (AB)C = A(BC)$.

2. $(A + B)C = AC + BC$.

3. $AE = EA = A$.

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Определение 1.17. Матрицы, для которых выполняется условие $AB = BA$, называются *перестановочными* (*коммутативными*).

1.3. Определители второго и третьего порядков

Любая квадратная матрица A имеет свой определитель. Прямоугольная, неквадратная матрица определителя не имеет.

Определение 1.18. *Определителем* или *детерминантом второго порядка*, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

называется число, обозначаемое

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу

$$\Delta = |A| = \det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

То есть определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов дополнительной диагонали.

Определение 1.19. *Определителем* (или детерминантом) *третьего порядка*, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

называется число, обозначаемое

$$\Delta = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по правилу Саррюса:

$$\Delta = |A| = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для того чтобы запомнить формулу вычисления определителя третьего порядка, проиллюстрируем правило Саррюса, которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение 1.20. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} (i — номер строки, j — номер столбца) данного определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21}$ — минор элемента a_{12} определителя второго порядка;

$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ — минор элемента a_{23} определителя третьего порядка.

Определение 1.21. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} данного определителя называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} — минор элемента a_{ij}.

Например, $A_{12} = -a_{21}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{12} определителя второго порядка.

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$ — алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя третьего порядка.

1.4. Свойства определителей

Свойство 1 (*о разложении определителя по элементам строки или столбца*). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (или любого столбца) на их алгебраические дополнения.

Например, разложим определитель третьего порядка по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Сравнивая с результатом применения правила Саррюса, видим их полное совпадение.

Свойство 2. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется, т.е.

$$\det A = \det A^T.$$

Свойство 3. Общий множитель элементов какого-либо столбца или какой-либо строки можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Другими словами, если определитель умножается на число, то умножаются на это число все элементы какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца.

Свойство 4. Определитель, у которого все элементы какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца равны нулю, равен нулю.

Свойство 5. Если в определителе поменять местами две любые строки (столбца), то знак определителя изменится.

Свойство 6. Если в определителе элементы какой-либо строки (столбца) равны или пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то он равен нулю.

Свойство 7. Если в определителе элементы какой-нибудь строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то он может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11}+\overset{*}{a}_{11} & a_{12}+\overset{*}{a}_{12} & a_{13}+\overset{*}{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{*}{a}_{11} & \overset{*}{a}_{12} & \overset{*}{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Свойство 8. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Свойство 9. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

Например, $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0$.

Свойство 10. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, т.е. если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Аналогично можно ввести понятия определителей четвертого, пятого, …, n-го порядков, их миноры и алгебраические дополнения и показать, что они обладают рассмотренными выше свойствами.

1.5. Сводная таблица основных методов решения определителей

Определители	Методы вычисления
Определители второго порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Определители третьего порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	а) по формуле Саррюса: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

	б) методом треугольников: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$ $-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
	в) разложение по строке или столбцу. Например, разложим определитель по первой строке $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$ $+a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$ $= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} - - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$
Определители четвертого порядка: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$	а) разложение по строке или столбцу. Например, разложим определитель по первому столбцу $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$ $+a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$ $+a_{41} \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} +$ $+ a_{24}a_{32}a_{43} + a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{33}a_{42} - a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{32}a_{44}) -$ $-a_{21}(a_{12}a_{33}a_{44} + a_{14}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{34}a_{42} - a_{14}a_{33}a_{42} -$ $-a_{13}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{34}a_{43}) + a_{31}(a_{12}a_{23}a_{44} + a_{14}a_{22}a_{43} +$ $+a_{13}a_{24}a_{42} - a_{14}a_{23}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{44}) -$ $-a_{41}(a_{12}a_{23}a_{34} + a_{14}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{24}a_{32} - a_{14}a_{23}a_{32} -$ $-a_{12}a_{24}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{34})$
	б) сведение к треугольному виду с использованием свойств 1—9 определителя

1.6. Элементарные преобразования матрицы

Определение 1.22. *Элементарными преобразованиями* строк матрицы A называются преобразования следующих трех типов:

1) перестановка двух строк;

2) умножение элементов какой-либо строки на одно и то же число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на число, отличное от нуля.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов матрицы.

Определение 1.23. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1k_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{2k_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{rk_n} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

называется *ступенчатой*.

Определение 1.24. Матрица B называется *эквивалентной* матрице A, если она получена из матрицы A путем конечного числа элементарных преобразований матрицы A. При этом пишут $A \sim B$.

Теорема 1.1. Любую матрицу можно привести к ступенчатой матрице при помощи конечного числа элементарных преобразований строк.

1.7. Обратная матрица. Матричные уравнения

Определение 1.25. *Обратной матрицей* для квадратной матрицы A называется такая матрица A^{-1}, которая при умножении как слева, так и справа на матрицу A, дает в произведении единичную матрицу E:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Определение 1.26. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю. В противном случае матрица называется вырожденной.

Теорема 1.2. Для того чтобы матрица была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Свойства обратной матрицы:

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы, $|A|$ — определитель матрицы A, причем $|A| \neq 0$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом:

$$AX = B, \tag{1.2}$$

$$XA = B. \tag{1.3}$$

В этих уравнениях A, B, X — матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в уравнениях (1.2) и (1.3) матрица A невырожденная, то их решения соответственно записываются следующим образом:

$$X = A^{-1}B;\ X = BA^{-1}.$$

1.8. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Определение СЛАУ

Определение 1.27. Системы уравнений, содержащие неизвестные только в первой степени, называются *линейными*.

Рассмотрим систему уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ &\dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные; $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ — коэффициенты (заданные числа); $b_1, b_2, \dots, b_n$ — свободные члены (заданные числа).

Если в (1.4) все свободные члены равны нулю, то система, имеющая вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ &\dots\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

называется *однородной*.

Система (1.4), в которой хотя бы один из свободных членов не равен нулю, называется *неоднородной*.

Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \; \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

где Δ — главный определитель системы (1.4); Δ_1, Δ_2, Δ_3, …, Δ_n — дополнительные определители, которые получаются из Δ путем замены столбцом свободных членов элементов соответственно первого, второго, …, n-го столбцов.

Тогда формулы Крамера имеют вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{1.6}$$

Теорема 1.3 (*о решении неоднородной системы*).

Если:

а) главный определитель системы (1.4) $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение;

б) $\Delta = 0$ и все дополнительные определители равны нулю, то система (1.4) имеет бесчисленное множество решений;

в) $\Delta = 0$ и хотя бы один из дополнительных определителей не равен нулю, то система (1.4) решений не имеет и называется несовместной.

Теорема 1.4 (*о решении однородной системы*).

Если:

а) главный определитель однородной системы (1.5) не равен нулю, то эта система имеет единственное решение

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,$$

называемое *тривиальным*;

б) определитель однородной системы равен нулю, то эта система имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Замечание. Теоремы 1.3, 1.4 играют очень важную роль как в различных разделах математики, так и во многих практических приложениях.

Матричная запись СЛАУ и ее решение с помощью обратной матрицы

Система уравнений (1.4) может быть записана в матричном виде следующим образом:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Решение этой системы имеет вид

$$X = A^{-1} B \ (\det A \neq 0).$$

Итак, для того чтобы решить систему линейных неоднородных уравнений с помощью обратной матрицы, надо:

1) записать эту систему в виде матричного уравнения;

2) найти обратную матрицу A^{-1};

3) выполнить операцию умножения найденной обратной матрицы на матрицу, состоящую из свободных членов системы.

Ранг матрицы и его свойства

Определение 1.28. *Минором* i-го порядка матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо i строк и i столбцов.

Определение 1.29. *Рангом матрицы* A называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Ранг матрицы обозначается $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Ранг матрицы обладает следующими свойствами:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

4. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

5. Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

6. Для квадратной матрицы n-го порядка ранг равен n тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

Подсчет ранга матрицы очень громоздкий. Поэтому его находят с помощью элементарных преобразований строк матрицы, т.е. матрицу приводят к ступенчатому виду и количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг данной матрицы.

Определение 1.30. Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором* этой матрицы.

Исследование систем линейных алгебраических уравнений

Определение 1.31. *Расширенной матрицей* системы называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов. Такая матрица обозначается $\overline{A} = (A|B)$.

Пусть дана система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Теорема 1.5. (*Кронекера — Капелли*). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы: $r(\overline{A}) = r(A)$.

Теорема 1.6. Если ранг матрицы совместной системы $r(A)$ равен числу неизвестных этой системы, то система имеет единственное решение.

Теорема 1.7. Если ранг матрицы совместной системы $r(A)$ меньше числа неизвестных этой системы, то система имеет бесчисленное множество решений.

Для исследования однородной системы линейных уравнений пользуются следующими теоремами:

Теорема 1.8. Однородная система уравнений всегда совместна.

Теорема 1.9. Если ранг матрицы $r(A)$ равен числу неизвестных n, то $x_i = 0$ — единственное решение.

Теорема 1.10. Если ранг матрицы $r(A)$ меньше числа неизвестных системы n, то система имеет множество решений.

Для того чтобы решить произвольную систему линейных уравнений, надо:

1) найти ранг основной и расширенной матриц системы. Если $r(\overline{A}) \neq r(A)$, то система несовместна. Если $r(\overline{A}) = r(A)$, то система совместна.

2) в случае если система совместна, найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить);

3) главные неизвестные оставить слева, а свободные неизвестные перенести в правую часть уравнений (неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называются *главными*, а остальные $(n - r)$ неизвестные называются *свободными*);

4) по правилу Крамера найти выражения главных неизвестных через свободные неизвестные и получить общее решение системы;

5) придавая свободным неизвестным произвольные значения, получить соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом можно найти частные решения исходной системы уравнений.

Сводная таблица для исследования систем линейных алгебраических уравнений

Тип системы уравнений	Исследование системы уравнений	Решения системы уравнений
Однородная система с n неизвестными с n уравнениями. Например, $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$	Находим значение основного определителя Δ системы	$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
	Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение	$x = y = z = 0$, т.е. тривиальное решение.
	Если $\Delta = 0$, то система имеет множество решений	а) найти базисный минор порядка r (приведя матрицу к ступенчатому виду). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить); б) по правилу Крамера найти выражения главных неизвестных через свободные неизвестные и получить общее решение системы; в) придавая свободным неизвестным произвольные значения, получить соответствующие значения главных неизвестных
Произвольная неоднородная система уравнений. Например, $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$	Находим ранги основной и расширенной матриц	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$
	Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна	Нет решений
	Если $r(A) = r(\bar{A}) = n$, где n — количество неизвестных системы, то система совместна и имеет единственное решение	Решить систему можно с помощью обратной матрицы или по формулам Крамера $\left(x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ \ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ \ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} \right)$
	Если $r(A) = r(\bar{A}) < n$, то система совместна и имеет бесчисленное множество решений	Смотри решение для однородной системы уравнений при $\Delta = 0$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Линейные действия над матрицами

Пример 1.1. Найти матрицу $A + B$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Чтобы выполнить линейную операцию сложения над матрицами, необходимо сложить соответствующие элементы этих матриц, т.е. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & 2+2\\ 3+1 & 4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$.

Пример 1.2. Найти матрицу $A – B$, если $A=\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix}4\\ 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2\\ 3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$.

Пример 1.3. Найти матрицу $5A$, если $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Чтобы умножить матрицу на число, необходимо умножить все элементы матрицы на это число, т.е. $5\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 0 & 5\cdot 1\\ 5\cdot 3 & 5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 15 & 10\end{pmatrix}$.

Пример 1.4. Найти AB, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Решение. $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1\\ 3\cdot 2+4\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 14\end{pmatrix}$.

Определители второго и третьего порядков

Пример 1.5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1\end{array}\right.=1\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1\cdot 2+1\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 0\cdot 0=1$

$+\quad +\quad +$

или

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 0+2\cdot 1\cdot 2+1\cdot 0\cdot 1-1\cdot 1\cdot 2-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 0\cdot 0=1.$$

Пример 1.6. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1.$$

Свойства определителей

Пример 1.7. Вычислить определитель, разложив его по элементам какой-либо строки или столбца $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим данный определитель по второму столбцу.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (3-6) + 1 \cdot (3-6) - 2 \cdot (3-4) = 9 - 3 + 2 = 8.$$

Пример 1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, используя свойство 3.

Решение. Так как элементы первого столбца имеют общий множитель 2, то, по свойству 3, получаем $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 1 \\ 2 \cdot 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6-1) = 2 \cdot 5 = 10.$

Пример 1.9. Проверить свойство 4 на примере определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. В данном определителе третий столбец с нулевыми элементами, следовательно, он равен нулю. Применим формулу Саррюса и докажем, что это действительно так.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \cdot 2 = 0.$$

Пример 1.10. Проверить свойство 5 для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. В данном определителе поменяем местами первую и вторую строки и вычислим оба определителя по формуле Саррюса.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot0 + 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot1\cdot0 - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot1 - 0\cdot0\cdot2 = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot2\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot1\cdot0 - 1\cdot1\cdot0 = -1.$$

Таким образом получили, что $\Delta_1 = -\Delta_2$.

Пример 1.11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Так как в данном определителе соответствующие элементы второй и третьей строк равны, то, согласно свойству 6, он равен нулю. Покажем это, вычислив определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 = 0.$

Пример 1.12. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, воспользовавшись свойством 7.

Решение. Сначала вычислим данный определитель по формуле Саррюса.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 1 \\ 0 & 3+1 & 1 \\ 2 & 2+2 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot0 + 4\cdot1\cdot0 + 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot4\cdot2 - 1\cdot1\cdot4 - 0\cdot0\cdot2 = -8.$$

В определителе представим один из столбцов, например, второй, в виде суммы элементов и применим свойство 7, т.е. определитель распишем в виде суммы двух определителей и вычислим их по отдельности.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0 + 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot2 - 1\cdot3\cdot2 - 1\cdot1\cdot2 - 0\cdot0\cdot1 = -6;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&2&0\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot0+1\cdot2\cdot0+1\cdot1\cdot2-1\cdot1\cdot2-1\cdot1\cdot2-1\cdot0\cdot1=-2;$$

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2=-6-2=-8.$$

Пример 1.13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&1\\2&2&0\end{vmatrix}$ и проверить свойство 8.

Решение. Вычислим определитель по формуле Саррюса.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&1\\2&2&0\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot0+1\cdot1\cdot2+1\cdot0\cdot2-1\cdot3\cdot2-1\cdot1\cdot2-0\cdot0\cdot1=-6.$$

Теперь к элементам второго столбца прибавим соответствующие элементы первого столбца, умноженные на два, и вычислим полученный определитель.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1+1\cdot2&1\\0&3+0\cdot2&1\\2&2+2\cdot2&0\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot0+1\cdot0\cdot6+3\cdot1\cdot2-1\cdot3\cdot2-1\cdot1\cdot6-3\cdot0\cdot0=-6.$$

Обратная матрица. Матричные уравнения

Пример 1.14. Найти обратную матрицу по отношению к матрице

$$\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&5&-4\\4&1&-3\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель данной матрицы:

$$\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&5&-4\\4&1&-3\end{vmatrix}=2\cdot5\cdot(-3)+1\cdot1\cdot1+(-3)\cdot(-4)\cdot4-1\cdot5\cdot4-2\cdot1\cdot(-4)-$$

$$-(-3)\cdot(-3)\cdot1=-30+1+48-20+8-9=-2.$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов данной матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&-4\\1&-3\end{vmatrix}=-15+4=-11;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&1\\1&-3\end{vmatrix}=-(9-1)=-8;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-4\\4&-3\end{vmatrix}=-(-3+16)=-13;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&1\\4&-3\end{vmatrix}=-6-4=-10;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1-20=-19;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-(2+12)=-14;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix}=12-5=7;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-(-8-1)=9;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10+3=13.$$

Составим обратную матрицу, подставив найденные значения в формулу (1.1),

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-11 & -8 & 7\\ -13 & -10 & 9\\ -19 & -14 & 13\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-11 & -8 & -7\\ -13 & -10 & -9\\ -19 & -14 & -13\end{pmatrix}.$$

Пример 1.15. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $XA = B$, тогда $X = BA^{-1}$, где $A = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Найдем матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Для этого вычислим определитель матрицы A: $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ и найдем алгебраические дополнения всех элементов этой матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1;\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 1=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 0=0;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-1)=-1;$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+0 & 2\cdot 1+0\cdot 1\\ (-1)\cdot(-1)+3\cdot 0 & (-1)\cdot 1+3\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & -2+2\\ -1+0 & 1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$

Системы линейных алгебраических уравнений

Пример 1.16. Решить систему алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x-4\,y+3\,z=1, \\ x-2\,y+4\,z=3, \\ 3x-y+5\,z=2. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему линейных неоднородных уравнений в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу по отношению к матрице $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислим определитель этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20-3-48+18+8+20=-25.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы системы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-10+4=-6; \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-(-20+3)=17;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-(5-12)=7; \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=10-9=1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1+6=5; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-(-2+12)=-10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-16+6=-10; \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-(8-3)=-5;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+4=0.$$

Тогда $\quad A^{-1}=\dfrac{1}{-25}\begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$

Умножим обратную матрицу слева на матрицу-столбец свободных членов и получим искомую матрицу X:

$$X=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}-6 & 17 & -10\\ 7 & 1 & -5\\ 5 & -10 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=-\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-6+51-20\\ 7+3-10\\ 5-30+0\end{pmatrix}=-\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25\\0\\-25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Проверка: $\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-0+3\\ -1-0+4\\ -3-0+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ — верно.

Пример 1.17. Найти общее и какое-нибудь частное решение системы линейных уравнений $\begin{cases}x-2y+z+t=1,\\ x-2y+z-t=-1,\\ x-2y+z+3t=3.\end{cases}$

Решение. Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{II}-\mathrm{I}\to\mathrm{II}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\to\mathrm{III}}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{array}\right)\overset{\substack{\mathrm{III}+\mathrm{II}\to\mathrm{III}\\ \mathrm{II}:(-2)\to\mathrm{II}}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right).$$

1. Умножим первую строку на (–1) и сложим поочередно с соответствующими элементами второй и третьей строк, получим строки с тремя нулевыми элементами, результат запишем вместо второй и третьей строки соответственно.

2. Сложим вторую и третью строки и результат запишем в третью строку; разделим вторую строку на (–2); строку с нулевыми элементами вычеркнем.

3. Найдем базисный минор второго порядка, не равный нулю, $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$

Значит, $r(A)=r(\bar{A})=2$.

Так как ранги расширенной матрицы и матрицы системы равны между собой, но меньше числа неизвестных, то система будет иметь бесчисленное множество решений.

Возьмем два первых уравнения

$$\begin{cases}x-2y+z+t=1,\\ x-2y+z-t=-1.\end{cases}$$

Пусть z и t — главные переменные. Тогда

$$\begin{cases} z+t=1-x+2y, \\ z-t=-1-x+2y. \end{cases}$$

По формулам Крамера найдем значения главного и дополнительных определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1-x+2y & 1 \\ -1-x+2y & -1 \end{vmatrix} = 1-x+2y-\left(-1-x+2y\right)=2x-4y;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-x+2y \\ 1 & -1-x+2y \end{vmatrix} = -1-x+2y-\left(1-x+2y\right)=-2.$$

Тогда общее решение системы будет иметь вид:

$$z=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{2x-4y}{-2}=2y-x, \quad t=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2}{-2}=1.$$

Частное решение: придадим любые значения свободным переменным x и y, например, $x = 1$, $y = 1$, тогда $z = 1$, $t = 1$.

Ответ: $x = y = z = t = 1$ — частное решение системы, $z = 2y - x$, $t = 1$ — общее решение системы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$. *Ответ*: 2;   б) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$. *Ответ*: $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

1.2. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. *Ответ*: – 3;   б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. *Ответ*: 4.

1.3. Вычислить определители, разложив их по элементам какой-либо строки или столбца:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$. *Ответ*: 0;   б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. *Ответ*: –10.

1.4. Решить уравнение и неравенство:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. *Ответ*: –2,5; –3; б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$. *Ответ*: $-\dfrac{41}{21}$.

1.5. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. *Ответ*: 60; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. *Ответ*: –6.

1.6. Найти линейные комбинации матриц:

а) Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, то $A - 3E$ = ? *Ответ*: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;

б) Если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, то $2B - 5A$ = ?

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, то $4A - 5B$ = ?

Ответ: $\begin{pmatrix} -7 & -9 & -10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}$.

1.7. Найти произведение матриц: AB и BA (если это возможно):

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ответ*: (–1); $\begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 \\ -3 & 6 & -9 \\ -4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.8. Найти $(AB)\,C$ и $A\,(BC)$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}13 & -8\\ -13 & 8\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}3 & -17 & -18 & 38\end{pmatrix}$.

1.9. Найти обратные матрицы:

а) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}2 & -1{,}5 & 1\\ 4 & -3 & 2{,}5\\ 3{,}5 & -2{,}5 & 2\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.10. Решить матричные уравнения:

а) $X\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$;

б) $X\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$. *Ответ*: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 10\end{pmatrix}$. *Ответ*: не существует.

1.11. Привести матрицы к ступенчатому виду:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 2\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

1.12. Найти ранги матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: $r = 3$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $r = 2$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$.

Ответ: $r = 3$.

1.13. Решить системы по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; –3);

б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10, \\ 4x + 5y + 6z = 19, \\ 7x + 8y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(-1; 1; 3)$;

в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y = 2. \end{cases}$

Ответ: (–2; 2; 1).

1.14. Решить системы с помощью обратной матрицы:

а) $\begin{cases} -3x + 4y + z = 17, \\ 2x + y - z = 0, \\ -2x + 3y + 5z = 8. \end{cases}$

Ответ: а) $x = -2$, $y = 3$, $z = -1$;

б) $\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ -2x+6y+9z=-11, \\ -4x-3y+8z=-2. \end{cases}$

Ответ: а) $x = 4$, $y = –2$, $z = 1$.

1.15. Исследовать системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x+2y+z=0, \\ 2x+5y+3z=0, \\ 3x+4y+2z=0. \end{cases}$

Ответ: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

б) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2x-y+z=2, \\ x+4y+2z=5. \end{cases}$

Ответ: не совместна;

в) $\begin{cases} x-2y+z-u+3v=2, \\ 2x-4y+3z-2u+6v=5, \\ 3x-6y+4z-3u+9v=7. \end{cases}$

Ответ: $x = 1 + 2t_1 + t_2 – 3t_3$, $y = t_1$, $z = 1$, $u = t_2$, $v = t_3$.

2. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Прямоугольные декартовы координаты

Определение 2.1. Взаимно перпендикулярные прямые с заданным положительным направлением и единичным отрезком, одинаковым для обеих прямых, называются *осями координат*.

Определение 2.2. Точка пересечения осей координат называется *началом координат* и обозначается буквой O.

Обычно ось координат, расположенную горизонтально и направленную вправо, принято называть осью абсцисс или осью Ox, а ось, расположенную вертикально и направленную вверх, называют осью ординат или осью Oy.

Всю систему координат обозначают Oxy, а плоскость, в которой она расположена, называют координатной плоскостью.

Рассмотрим произвольную точку M плоскости Oxy. Проведем через точку M прямые, перпендикулярные координатным осям, и поставим ей в соответствие упорядоченную пару чисел x, y по следующему правилу: x — координата точки M по оси Ox, y — координата точки M по оси Oy.

Числа x и y называются *прямоугольными декартовыми координатами* точки M; при этом x называется ее абсциссой, а y — ординатой (рис. 2.1).

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части, называемые координатными четвертями (квадрантами) или координатными углами. Эти квадранты нумеруются следующим образом: в направлении против хода часовой стрелки, начиная с того квадранта, где обе координаты положительные (рис. 2.2).

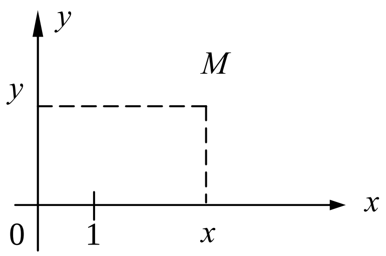


Рис. 2.1

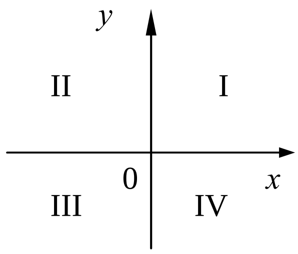


Рис. 2.2

Если исключить точки, лежащие на осях координат, то получим следующую таблицу знаков координат в квадрантах:

	I	II	III	IV
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Итак, если на плоскости задана прямоугольная система координат *Oxy*, то:

1) каждой точке на плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (пара координат точки);

2) разным точкам плоскости поставлены в соответствие разные упорядоченные пары чисел;

3) каждая упорядоченная пара чисел соответствует одной точке плоскости.

2.2. Основные задачи на метод координат на плоскости

1. *Расстояние между двумя точками*. Пусть на плоскости *Oxy* даны точки A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2). Расстояние d между точками A и B выражается через их координаты формулой

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (2.1)$$

2. *Деление отрезка в данном отношении*. Даны точки A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2). Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в следующем отношении $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$.

Искомые координаты точки M находятся по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \text{ — } \qquad (2.2)$$

формулы деления отрезка в данном отношении.

В частности, если $\lambda = 1$, т.е. $AM = MB$, то они примут вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ — } \qquad (2.3)$$

формулы вычисления координат середины отрезка.

2.3. Полярные координаты

Кроме декартовой системы координат, на плоскости часто используют полярную систему. Полярная система координат задается точкой O, называемой полюсом, и лучом OP, называемым полярной осью.

Определение 2.3. *Полярными координатами* точки M на плоскости (не совпадающей с полюсом) называют полярный радиус $\rho = OM$ точки M и полярный угол φ, т.е. угол, на который надо повернуть полярную ось против часовой стрелки до совпадения ее с вектором $\overrightarrow{OM}$ ($\varphi > 0$ — поворот против часовой стрелки, $\varphi < 0$ — по часовой стрелке).

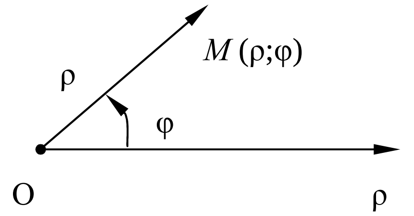


Рис. 2.3

Пара (ρ, φ) — координаты точки M в полярной системе координат. Положение любой точки M на плоскости однозначно определяется координатами ρ и φ, причем

$$0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Если точка M совпадает с полюсом O, то ее полярный радиус $\rho = 0$, а угол φ можно выбрать любым.

Обобщенными полярными координатами точки M называют ее полярные координаты ρ и φ такие, что $-\infty < \rho < \infty$, $-\infty < \varphi < \infty$. Чтобы указать точку M (ρ, φ) в обобщенной полярной системе координат, надо построить луч, образующий с полярной осью угол φ, затем отложить ρ единиц масштаба на нем, если $\rho > 0$, и на его продолжение, если $\rho < 0$.

2.4. Связь между декартовыми и полярными координатами

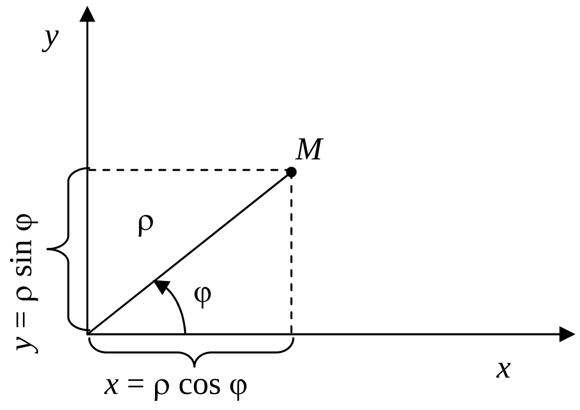


Рис. 2.4

Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси Оx — с полярной осью (рис. 2.4).

1. Если даны декартовы координаты x и y точки M, то ее полярные координаты определяются согласно формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}. \qquad (2.4)$$

2. Если даны полярные координаты (ρ, φ) точки M, то ее декартовы координаты определяются по формулам:

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi. \qquad (2.5)$$

2.5. Параметрические уравнения

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x\,(t), \\ y = y\,(t), \end{cases} \qquad (2.6)$$

где x и y — координаты произвольной точки M $(x; y)$, лежащей на данной линии, а t — переменная, называемая параметром; параметр t определяет положение точки $(x; y)$ на плоскости.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется параметрическим, а уравнения (2.6) — *параметрическими уравнениями линии*.

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x; y) = 0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t. Однако заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

2.6. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве определяется аналогично прямоугольной системе координат на плоскости.

Возьмем три взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в точке O: Ox, Oy, Oz. Выберем на каждой из них положительное направление; противоположное направление будем считать отрицательным (рис. 2.5).

Точка O — начало координат, Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, Oz — ось аппликат (рис. 2.5).

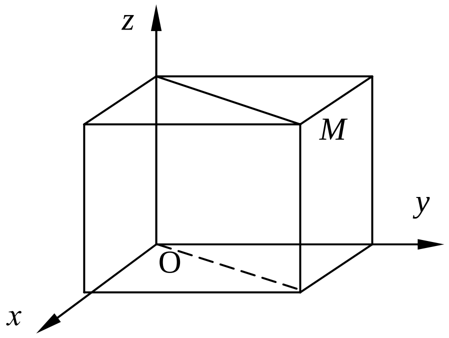


Рис. 2.5

Пусть M — некоторая точка пространства. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные осям Ox, Oy, Oz и поставим ей в соответствие упорядоченную тройку чисел $(x; y; z)$ по следующему правилу: x — координата точки M по оси Ox; y — координата точки M по оси Oy; z — координата точки M по оси Oz.

Числа x, y и z называются *прямоугольными координатами* точки M; при этом x называется абсциссой точки M, y — ее ординатой, а z — аппликатой. Плоскости Oxy, Oyz, Oxz называются координатными плоскостями. Они делят все пространство на восемь частей, называемых октантами. Таким образом, если в пространстве вводится прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то:

1) каждой точке пространства поставлена в соответствие единственная упорядоченная тройка чисел (ее прямоугольные координаты);

2) разным точкам пространства соответствуют разные упорядоченные тройки чисел;

3) каждой упорядоченной тройке чисел $(x; y; z)$ соответствует, и притом одна, точка пространства.

2.7. Основные задачи на метод координат в пространстве

1. *Расстояние между двумя точками.* Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Найти расстояние между точками A и B.

Искомое расстояние d равно:

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (2.7)$$

2. *Деление отрезка в данном отношении.* Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в следующем отношении $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$.

Искомые координаты точки M находятся по следующим формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (2.8)$$

В частности, если λ = 1, т. е. $AM = MB$, то они примут вид формулы координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{2.9}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Основные задачи на метод координат на плоскости

Пример 2.1. Построить треугольник с вершинами A (–4; 2), B (0; –1) и C (3; 3) и определить его периметр.

Решение. Чтобы вычислить периметр, необходимо найти длины сторон треугольника. Найдем длины сторон по формуле (2.1):

$$d_1 = AB = \sqrt{(0+4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5;$$

$$d_2 = BC = \sqrt{(3-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5;$$

$$d_3 = AC = \sqrt{(3+4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}\,.$$

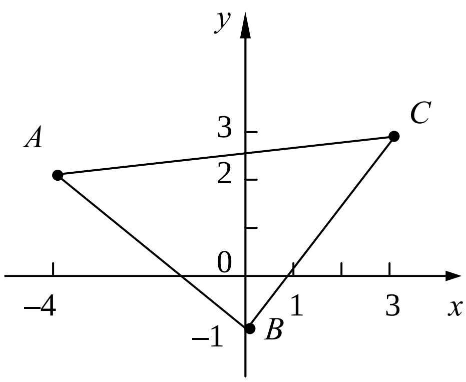


Рис. 2.6

Периметр вычислим по формуле $p = d_1 + d_2 + d_3$, т.е.

$$p = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 5(2 + \sqrt{2}) = 17{,}1.$$

Выполним чертеж (рис. 2.6).

Пример 2.2. Даны вершины треугольника ABC: A (1; 5), B (9; 10); C (10; 3). Определить координаты точки пересечения медиан треугольника.

Решение. Сначала найдем координаты точки D середины одной из сторон, например, стороны AB. Для этого воспользуемся формулой (2.3):

$$x = \frac{1+9}{2} = 5; \qquad y = \frac{5+10}{2} = 7{,}5\,.$$

Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении 2 : 1, считая от точки C. Следовательно, координаты точки M определяются по формулам (2.2):

$$x = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2} = \frac{10+10}{3} = \frac{20}{3}; \quad y = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2} = \frac{3+15}{3} = 6\,.$$

Ответ: $M\left(\frac{20}{3}; 6\right)$.

Пример 2.3. Известны точки A (–2; 5), B (4; 17) — концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от точки A в два раза больше расстояния от точки B. Определить координаты точки C.

Решение. Так как |AC| = 2·|CB|, то λ = |AC|:|CB| = 2. Следовательно,

$$x = \frac{-2+2\cdot 4}{1+2} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{5+2\cdot 17}{1+2} = \frac{39}{3} = 13.$$

Ответ: C (2; 13).

Полярные координаты

Пример 2.4. Найти прямоугольные координаты точек A, B, C, для которых известны полярные координаты: A (3; 0), $B\left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$, $\mathrm{C}\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. По условию задачи, для точки A имеем: ρ = 3, φ = 0. По формулам (2.5) находим x и y: $x = 3\cos 0 = 3$, $y = 3\sin 0 = 0$.

Ответ: A (3, 0).

Аналогично для точки B: $\rho = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ и $x = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$,

$y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}.$

Ответ: B (1, $\sqrt{3}$).

Для точки C: $\rho = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cdot 0 = 0$, $y = 5\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cdot 1 = 5$.

Ответ: C (0, 5).

Пример 2.5. Найти полярные координаты точек A, B, C, для которых известны прямоугольные координаты: A (–3; 3), B (0; –5), $C\left(2\sqrt{3}; 2\right)$.

Решение. По условию задачи, имеем для точки A: $x = -3$, $y = 3$. По формулам (2.4) находим ρ и φ:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(-3)^2 + 3^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{(-3)^2+3^2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 3\sqrt{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 3\sqrt{2}, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $A\left(3\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Аналогично для точки B: $x = 2$, $y = -\frac{\pi}{3}$,

$$\begin{cases}\rho = \sqrt{0^2 + (-5)^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{0^2 + (-5)^2}},\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = 5, \\ \sin\varphi = -1,\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = 5, \\ \varphi = \arcsin(-1).\end{cases}$$

Ответ: $B\left(5; -\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Для точки C: $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2$,

$$\begin{cases}\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}},\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = 4, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2},\end{cases} \qquad \begin{cases}\rho = 4, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

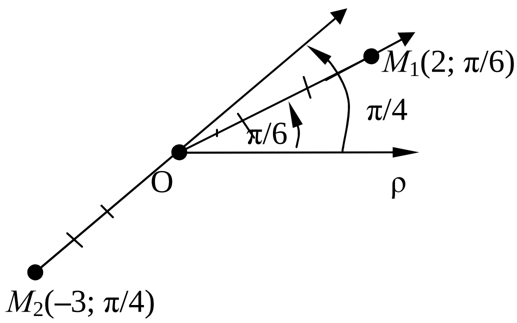


Рис. 2.7

Ответ: $C\left(4; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Пример 2.6. Построить в полярной системе координат точки M_1 $(4; \dfrac{\pi}{6})$ и $M_2\,(-3; \dfrac{\pi}{4})$.

Решение. См. рис. 2.7

Основные задачи на метод координат в пространстве

Пример 2.7. Даны точки A (2; 4; –2) и B (–2; 4; 2). На прямой AB найти точку M, делящую отрезок AB в отношении $\lambda = 3$.

Решение. Координаты точки M найдем по формулам (2.8):

$$x = \frac{2 + 3\cdot(-2)}{1+3} = -1; \quad y = \frac{4 + 3\cdot 4}{1+3} = 4; \quad z = \frac{-2 + 3\cdot 2}{1+3} = 1.$$

Следовательно, искомая точка M (–1; 4; 1).

Ответ: M (–1; 4; 1).

Пример 2.8. Дан треугольник с вершинами A (1; 1; 1), B (5; 1; –2), C (1; –2; 5). Найти координаты точки пересечения биссектрисы угла A со стороной CB.

Решение. Найдем длины сторон треугольника, образующих угол A, по формуле (2.7):

$$d_1 = |AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5;$$

$$d_2 = |AB| = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-1)^2 + (5-1)^2} = 5.$$

Следовательно, $|CD|:|DB| = 5 : 5 = 1$, так как биссектриса делит сторону CB на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, координаты искомой точки найдем по формулам (2.9) с учетом того, что $\lambda = 1$:

$$x = \frac{1+5}{2} = 3;\ y = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5;\ z = \frac{5+(-2)}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: D (3; – 0,5; 1,5).

Пример 2.9. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек A (2; –4; 5) и B (–3; 2; 7).

Решение. Пусть C — искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $|AC| = |CB|$. Так как эта точка лежит на оси Ox, то ее координаты (x; 0; 0), найдем:

$$d = |AC| = \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 41},$$

$$d = |BC| = \sqrt{(x+3)^2 + (0-2)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + 53}.$$

Приравняем $|AC|$ к $|BC|$ и возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53 \Rightarrow x = -1{,}7.$$

Ответ: C (–1,7; 0; 0).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Построить точки A (–2; 1) и B (3; 6) и найти точку M (x; y), делящую отрезок AB в отношении $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{2}$. *Ответ*: (1; 4).

2.2. Определить середины сторон треугольника с вершинами A (2; –1), B (4; 3), С (–2; 1). *Ответ*: (3; 1), (1; 2), (0; 0).

2.3. В полярной системе координат даны точки $A\left(8; -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B\left(6; \frac{\pi}{3}\right)$. Найти полярные координаты середины отрезка, соединяющего эти точки. *Ответ*: $\left(1; -\frac{2\pi}{3}\right)$.

2.4. Найти площадь треугольника, вершины которого $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8; \frac{7\pi}{24}\right)$, $C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$ заданы в полярных координатах. *Ответ*: $3(4\sqrt{3}$; –1) кв.ед.

2.5. Показать, что треугольник с вершинами в точках A (–3; 2; 4), B (0; –2; –1), C (1; 5; 9) равнобедренный.

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Определение вектора

Величина, полностью характеризуемая своим числовым значением в выбранной системе единиц, называется скалярной или скаляром. Например, температура в данной точке, концентрация раствора, площадь, длина, объем и т.д.

Величина, которая характеризуется величиной и направлением, называется векторной. Например, скорость тела, движущегося по кривой, сила, момент силы и т.п.

Определение 3.1. *Геометрическими векторами*, или просто *векторами*, называются направленные отрезки, т.е. отрезки прямых, для которых заданы каким-то образом их длина и направление.

Векторы обозначаются либо $\overrightarrow{AB}$, где A — начало вектора, B — конец вектора, либо $\vec{a}$.

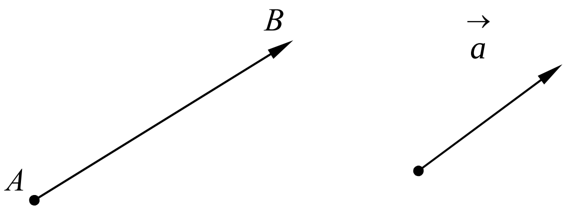


Рис. 3.1

Определение 3.2. Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются *коллинеарными*.

Запись $\vec{a} \parallel \vec{b}$ обозначает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ обозначает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные и одинаково направлены; $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ обозначает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные и противоположно направлены.

Определение 3.3. Длина вектора называется его *модулем*.

Модуль вектора обозначают $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.

Определение 3.4. *Векторы* называются *равными*, если они имеют равные модули, коллинеарны и одинаково направлены, т.е.

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|,\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

Если же хотя бы одно из трех условий определения не выполняется, то векторы не равны.

Векторы, величина и направление которых не изменятся от перемещения их параллельно самим себе, называются свободными. Векторы, величина и направление которых зависит от точки приложения, называются связными. Далее изучаются только свободные векторы.

Свободные векторы можно параллельным переносом:

а) приводить к общему началу (рис. 3.2); б) выстраивать один за другим (рис. 3.3).

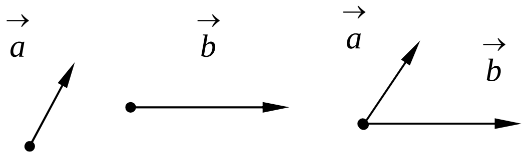


Рис. 3.2

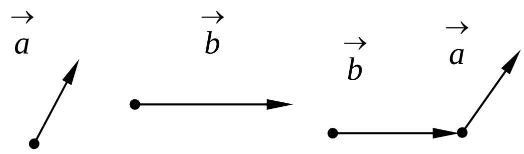


Рис. 3.3

3.2. Линейные действия над векторами

Линейными действиями называются операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на скаляр.

Определение 3.5. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым вектором* или нулем и обозначается $\vec{0}$. Модуль нулевого вектора равен нулю, а направление не определено.

Определение 3.6. *Суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$, построенный по следующему правилу: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выстроить один за другим, то вектор, идущий из начала $\vec{a}$ в конец $\vec{b}$, будет искомой суммой $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 3.4).

Это правило называется *правилом треугольника*.

Легко показать, что сумма двух неколлинеарных векторов совпадает с вектором, определяемым диагональю параллелограмма, построенного на представителях слагаемых как на сторонах — *правило параллелограмма* (рис. 3.5).

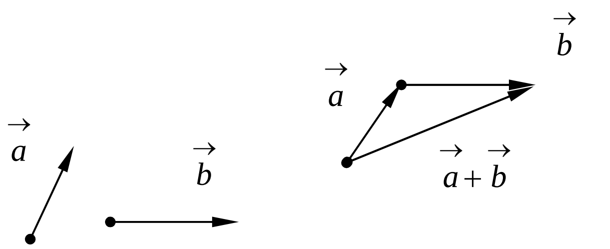


Рис. 3.4

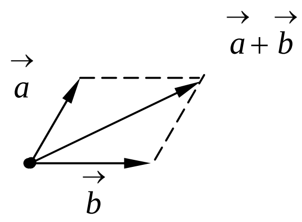


Рис. 3.5

Определение 3.7. Если два вектора имеют равные модули, коллинеарны, но противоположно направлены, то они называются *противоположными*.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $\left(-\vec{a}\right)$.

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительности (коммутативности);

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сочетательности (ассоциативности);

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$; $\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Определение 3.8. *Разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют сумму векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, при этом пишут $\vec{a}-\vec{b}$.

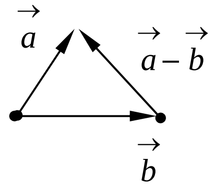


Рис. 3.6

Геометрически разность $\vec{a}-\vec{b}$ находится так: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приводятся к общему началу, тогда вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, и будет $\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 3.6).

Определение 3.9. *Произведением вектора* $\vec{a}$ на число (скаляр) $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, обладающий свойствами:

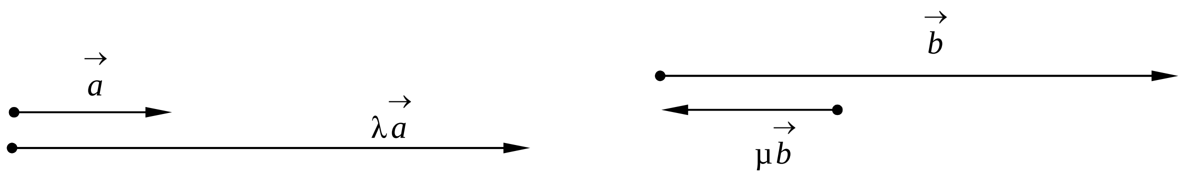
1) длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на абсолютную величину числа λ:

$$|\lambda\cdot\vec{a}| = |\lambda|\cdot|\vec{a}|;$$

2) направление $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, или противоположно ему, если $\lambda < 0$:

$$\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a},\ \lambda > 0;\ \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a},\ \lambda < 0.$$

Операцию умножения вектора на число можно проиллюстрировать следующим образом (рис. 3.7).



$\lambda > 0$, $|\lambda| > 1$ $\qquad$ $\mu < 0$, $|\mu| < 1$

Рис. 3.7

Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1) сочетательности относительно числового множителя:

$\mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$;

2) распределительности относительно суммы векторов:

$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

3) распределительности относительно суммы чисел:

$\vec{a}(\lambda+\mu) = \vec{a}\lambda + \vec{a}\mu$;

4) при натуральном n:

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n};$$

5) $\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$;

6) $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$;

7) $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$.

Определение 3.10. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* (*ортом*).

Пусть дан вектор $\vec{a}$. Рассмотрим вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, одинаково с ним направленный, но имеющий длину, равную единице. Обозначим этот вектор через $\vec{a}^{\,0}$, тогда $\left|\vec{a}^{\,0}\right| = 1$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что $\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\,0}$, т.е. *каждый вектор равен произведению его модуля на единичный вектор (орт) того же направления*.

Определение 3.11. Векторы, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

3.3. Линейная зависимость векторов. Базис на плоскости и в пространстве

Определение 3.12. Пусть задана совокупность из n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ и n чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Сумма произведений этих векторов на числа называется *линейной комбинацией векторов*, т.е. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Определение 3.13. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = 0$.

Определение 3.14. Если данное равенство имеет место только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0,$$

то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*.

Таким образом, если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации других.

Теорема 3.1. Для того чтобы два вектора на плоскости были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарными.

Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.

Теорема 3.2. Для того чтобы три вектора в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарными.

Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трем.

Одним из важнейших понятий линейной и векторной алгебры является понятие базиса.

Определение 3.15. *Базисом на плоскости* называются два любых линейно независимых (неколлинеарных) вектора.

Пусть $\vec{a}$ — любой вектор на плоскости, а векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис, т.е. линейно независимы. Так как на плоскости три вектора линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т.е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} .$$

Если вектор $\vec{a}$ представлен в таком виде, то говорят, что он разложен по базису, образованному векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа λ_1, λ_2 называют *координатами вектора* $\vec{a}$ *в данном базисе*.

Теорема 3.3. Разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является единственным.

Определение 3.16. *Базисом в пространстве* называются три любых линейно независимых вектора (некомпланарных).

Как и в случае плоскости, любой вектор $\vec{a}$ однозначно разлагается по векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ базиса, т.е. $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d}$. Числа λ_1, λ_2, λ_3 называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в данном базисе.

3.4. Проекция вектора на ось. Основные теоремы о проекциях

Пусть x — некоторая ось, $\overrightarrow{AB}$ — вектор, произвольно расположенный в пространстве. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось x соответственно начала A и конца B этого вектора. Предположим, что A_1 на оси x имеет координату x_1, а B_1 — координату x_2.

Определение 3.17. Разность $x_2 - x_1$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось x называется *проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на эту ось и обозначается $\text{Пр}_x \overrightarrow{AB}$ (рис. 3.8).

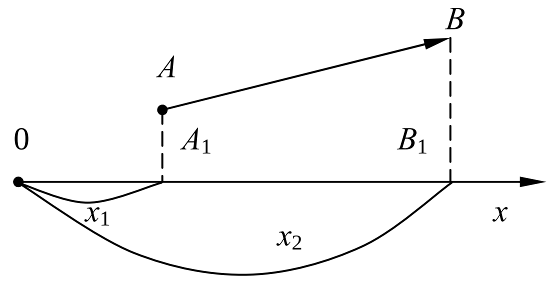


Рис. 3.8

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ образует с осью x острый угол, то $\text{Пр}_x \overrightarrow{AB} > 0$; если угол между осью x и вектором $\overrightarrow{AB}$ — тупой, то $\text{Пр}_x \overrightarrow{AB} < 0$. Наконец, если $\overrightarrow{AB} \perp x$, то $x_2 = x_1$ и $\text{Пр}_x \overrightarrow{AB} = 0$ (рис. 3.9).

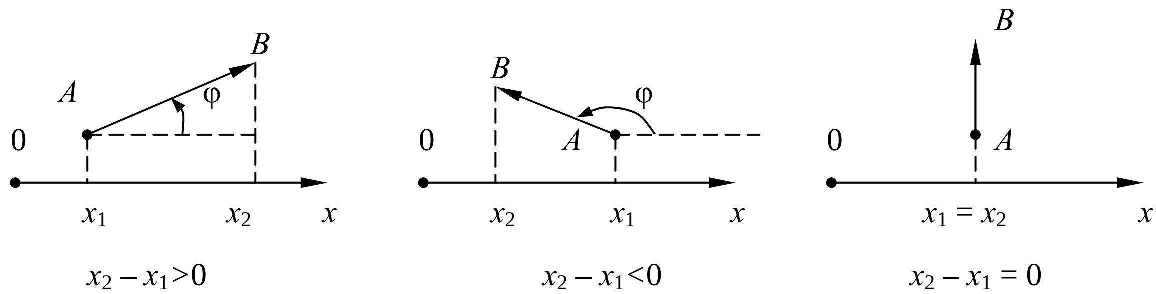


Рис. 3.9

Теорема 3.4. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось x равна модулю вектора $|\vec{a}|$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью $\text{Пр}_x \vec{a} = \vec{a}\cos\varphi$ (рис. 3.10).

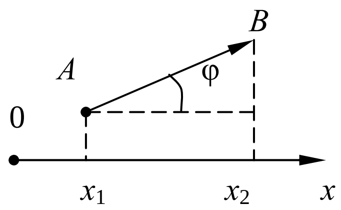


Рис. 3.10

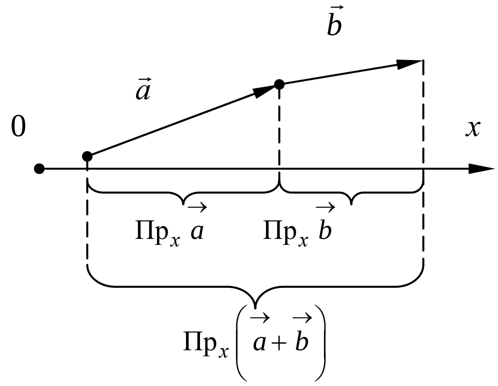


Рис. 3.11

Теорема 3.5. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось (рис. 3.11), т.е.

$$\text{Пр}_x \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \text{Пр}_x \vec{a} + \text{Пр}_x \vec{b}.$$

Теорема 3.6. Если вектор $\vec{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось также умножится на это число: $\text{Пр}_x \left(\lambda \vec{a}\right) = \lambda \text{Пр}_x \vec{a}$ (рис. 3.12).

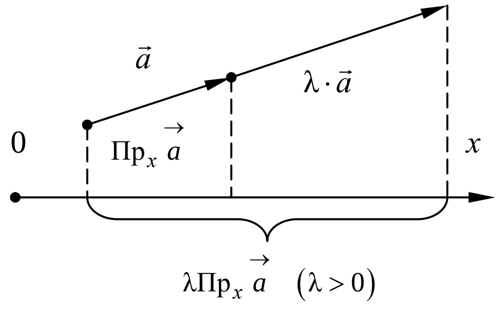


Рис. 3.12

3.5. Разложение вектора на составляющие по осям координат

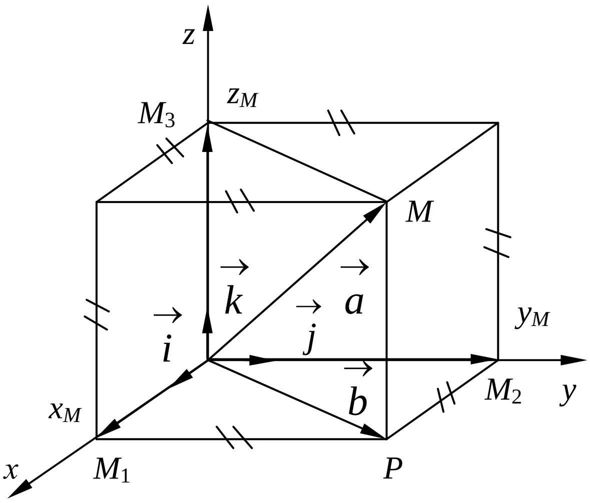
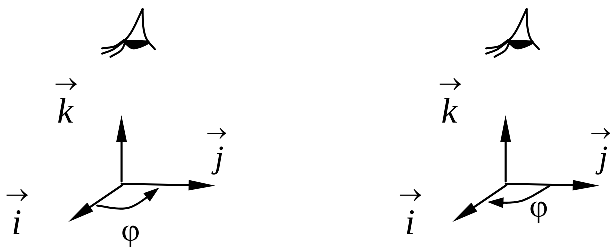


Рис. 3.13

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $Oxyz$ (рис. 3.13). На каждой из осей выберем единичный вектор (орт), направление которого совпадает с положительным направлением оси. Так, на оси Ox возьмем единичный вектор $\vec{i}$, на оси Oy — $\vec{j}$, а на оси Oz — $\vec{k}$;

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$

Так как орты не компланарны, то они образуют базис, который называется *декартовым ортогональным базисом*. Декартов базис называется *правым*, если направление кратчайшего вращения от вектора $|\vec{i}|$ к вектору $|\vec{j}|$ (при условии, что смотрят с конца вектора $|\vec{k}|$) противоположно направлению вращения часовой стрелки. В противном случае базис называется *левым* (рис. 3.14).



Правый Левый

Рис. 3.14

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$ в пространстве. С помощью параллельного переноса отложим этот вектор от начала координат O, т.е. $\vec{a} = \vec{OM}$. Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные осям координат Ox, Oy, Oz. По правилу сложения векторов

$$\vec{a} = \vec{OP} + \vec{OM_3} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}. \qquad (3.1)$$

Векторы $\vec{OM_1}$, $\vec{OM_2}$, $\vec{OM_3}$ являются проекциями вектора $\vec{a} = \vec{OM}$ на оси координат, следовательно, по определению имеем:

$$\vec{OM_1} = \text{Пр}_x \vec{OM} \cdot \vec{i}, \quad \vec{OM_2} = \text{Пр}_y \vec{OM} \cdot \vec{j}, \quad \vec{OM_3} = \text{Пр}_z \vec{OM} \cdot \vec{k}.$$

Обозначая проекции вектора $\vec{a}$ на оси *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно через *X*, *Y*, *Z* и подставив в формулу (3.1), получим

$$\vec{a} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k}\,.$$

Данная формула называется разложением вектора $\vec{a}$ на составляющие по координатным осям. Это равенство для краткости будем записывать следующим образом:

$$\vec{a} = \{X;\,Y;\,Z\}\,.$$

Определение 3.18. Проекции *X*, *Y*, *Z* называются *прямоугольными декартовыми координатами* вектора $\vec{a}$ в пространстве.

3.6. Простые задачи на декартовы координаты

1. *Если известны координаты векторов, то линейные операции над векторами можно заменить арифметическими действиями над их проекциями*. Так, если

$$\vec{a} = X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} + Z_1\,\vec{k} = \{X_1;Y_1;Z_1\},$$

$$\vec{b} = X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j} + Z_2\,\vec{k} = \{X_2;Y_2;Z_2\},$$

то $\lambda\,\vec{a} = \{\lambda X;\lambda Y;\lambda Z\}$,

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{X_1 \pm X_2;Y_1 \pm Y_2;Z_1 \pm Z_2\}\,. \tag{3.2}$$

2. *Условие коллинеарности векторов*. Если $\vec{a} = \{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2;Y_2;Z_2\}$, то $\vec{a}\parallel\vec{b}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lambda = \frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} \tag{3.3}$$

(векторы $\vec{a}\parallel\vec{b}$ тогда и только тогда, когда пропорциональны их соответствующие координаты).

3. *Зная проекции вектора* $\vec{a}$, *можно легко найти выражение для его модуля*

$$|\vec{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.$$

Итак, модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его координат.

4. *Направляющие косинусы*. Пусть вектор $\vec{a}$ помещен в прямоугольные декартовы координаты *x*, *y*, *z*. Условимся обозначать: $\alpha = \widehat{\vec{a}, Ox}$, $\beta = \widehat{\vec{a}, Oy}$, $\gamma = \widehat{\vec{a}, Oz}$. Тогда cos α, cos β, cos γ называются *направляющими косинусами* данного вектора $\vec{a}$. Пусть $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$. Координаты вектора $\vec{a}$ в декартовом базисе равны

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma. \tag{3.4}$$

Возводя в квадрат и складывая, найдем зависимость между направляющими косинусами вектора $\vec{a}$: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Координаты единичного вектора $\vec{a}^{\,0}$ в декартовом базисе равны его направляющим косинусам, т.е. $\vec{a}^{\,0} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Направляющие косинусы вектора полностью определяют его направление, но ничего не говорят о его длине.

5. *Определение координат вектора по заданным координатам его начала и конца*. Пусть даны две точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$, $B\ (x_2; y_2; z_2)$. Из определения проекции вектора на ось следует, что

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{3.5}$$

3.7. Скалярное произведение векторов

Определение 3.19. *Скалярным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, обозначаемая $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равная произведению модулей векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

По теореме (3.4) скалярное произведение можно представить в виде

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}. \tag{3.6}$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2) $\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\lambda \cdot \vec{b}\right)$; 3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

4) $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ — условие перпендикулярности двух векторов; 5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2}$ — скалярный квадрат, $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Пусть $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \tag{3.7}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0, \tag{3.8}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{3.9}$$

3.8. Векторное произведение векторов

Определение 3.20. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, который определяется следующим образом:

1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

2) вектор $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, т.е. вектор векторного произведения перпендикулярен каждому из перемножаемых векторов (рис. 3.14);

3) векторы $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют правую тройку.

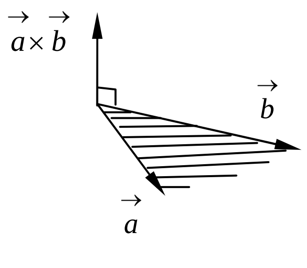


Рис. 3.14

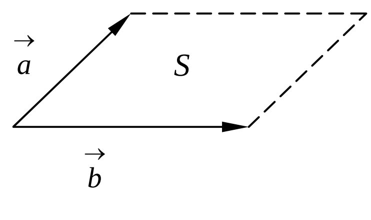


Рис. 3.15

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1. Модуль векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (рис. 3.15):

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{3.10}$$

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$.

4. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

5. $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Выражение векторного произведения через координаты векторов. Векторное произведение в декартовых координатах, где $\vec{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$, $\vec{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$, имеет вид

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}. \qquad (3.11)$$

3.9. Смешанное произведение векторов

Определение 3.21. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, получаемое в результате скалярного умножения $\vec{a}\times\vec{b}$ на $\vec{c}$ и обозначаемое $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\vec{b}.$$

Свойства смешанного произведения:

1. Абсолютная величина смешанного произведения $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ с общим началом как на ребрах

$$V_{\text{пар-да}}=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|\Rightarrow V_{\text{тетр.}}=\frac{1}{6}V_{\text{пар-да}}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \qquad (3.12)$$

2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}>0$, когда базис $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ правый;
$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}<0$, когда базис $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ левый.

3. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке сомножителей: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$; оно меняет знак при перестановке двух сомножителей: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$.

4. $\lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=\left(\lambda\,\vec{a}\right)\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\left(\lambda\,\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\left(\lambda\,\vec{c}\right).$

5. $\vec{a}\,\vec{b}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}+\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\,.$

6. $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0,\ \vec{c}\neq 0,\quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ — компланарны.

Смешанное произведение в декартовых координатах. Пусть $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, $\vec{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\}$, тогда

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

3.10. Сводная таблица основных понятий и формул по теме «Векторная алгебра»

Понятие	Содержание, формула
Скалярная величина	Величина, которая может быть задана числом в выбранной системе единиц
Вектор	Величина, которая задается числовым значением и направлением
Коллинеарные векторы	Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой
Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Коэффициенты X, Y, Z в разложении вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a}=X\,\vec{i}+Y\,\vec{j}+Z\,\vec{k}$
Условие коллинеарности векторов, заданных координатами $\vec{a}=\{X_1;\,Y_1;\,Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;\,Y_2;\,Z_2\}$	Пропорциональность их соответствующих координат $\dfrac{X_1}{X_2}=\dfrac{Y_1}{Y_2}=\dfrac{Z_1}{Z_2}$
Модуль (длина) вектора $\vec{a}=\{X;\,Y;\,Z\}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$
Направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{X;\,Y;\,Z\}$	Косинусы углов, образуемых вектором с положительными направлениями осей *Ox*, *Oy*, *Oz*: $\cos\alpha=\dfrac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$	Число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$
Скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{X_1;\,Y_1;\,Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;\,Y_2;\,Z_2\}$, заданных в координатной форме	$\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$
Вычисление угла между векторами $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$	$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}=$ $=\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$
Условие перпендикулярности (ортогональности) двух векторов	$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$
Модуль векторного произведения вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$	$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$
Векторное произведение векторов $\vec{a}=\{X_1;\,Y_1;\,Z_1\}$ и $\vec{b}=\{X_2;\,Y_2;\,Z_2\}$, заданных в координатной форме	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$
Площадь параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах	$S=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert\Rightarrow S_\Delta=\dfrac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$
Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$	Число, получаемое в результате скалярного умножения $\vec{a}\times\vec{b}$ на $\vec{c}$ и обозначаемое $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ с общим началом как на ребрах.	$V_{\text{пар-да}}=\lvert\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\rvert,\ V_{\text{тетр.}}=\dfrac{1}{6}V_{\text{пар-да}}=\dfrac{1}{6}\lvert\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\rvert$
Смешанное произведение векторов $\vec{a}=\{X_1;\,Y_1;\,Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;\,Y_2;\,Z_2\}$ и $\vec{c}=\{X_3;\,Y_3;\,Z_3\}$, заданных в координатной форме.	$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Линейные действия над векторами

Пример 3.1. Даны координаты двух точек *A* (1; 0; –1) и *B* (1; 3; 3). Найти: 1) координаты вектора $\vec{a} = \vec{AB}$; 2) модуль вектора $\vec{a}$; 3) направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Решение. 1. Координаты вектора $\vec{a}$ найдем с помощью формулы (3.5). $\vec{a} = \vec{AB} = \{1-1, 3-0, 3-(-1)\} = \{0; 3; 4\}$.

2. Модуль вектора $\vec{a}$ вычислим по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$. В данной формуле *X*, *Y*, *Z* — координаты вектора $\vec{a}$. Следовательно, $|\vec{a}| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$.

3. Направляющие косинусы можно найти по формулам (3.4). $X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

Следовательно, $\cos\alpha = \dfrac{X}{|\vec{a}|} = \dfrac{0}{5} = 0, \quad \cos\beta = \dfrac{Y}{|\vec{a}|} = \dfrac{3}{5}, \quad \cos\gamma = \dfrac{Z}{|\vec{a}|} = \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\vec{a} = \{0; 3; 4\}$; 5; $\left\{0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right\}$.

Проекция вектора на ось. Скалярное и векторное произведение

Пример 3.2. Заданы два вектора $\vec{a} = \{3; 4; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; 0; 3\}$. Найти: 1) координаты векторов $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$; 2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 3) косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 4) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$; 5) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 6) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. 1. Координаты векторов $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ нетрудно найти, используя формулы (3.2): $\vec{a} \pm \vec{b} = \{3 \pm 4; 4 \pm 0; 0 \pm 3\}$. Следовательно, $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} = \{7; 4; 3\}$ и $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} = \{-1; 4; -3\}$.

Следует заметить, что векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ геометрически представляют собой диагонали параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычислим по формуле (3.7):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 4 + 4\cdot 0 + 0\cdot 3 = 12.$$

3. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить с помощью формулы (3.9):

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{3^2+4^2+0}\sqrt{4^2+0+3^2}} = \frac{12}{5^2} = \frac{12}{25}.$$

4. Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ найдем по формуле (3.6):

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{4^2+0+3^2}} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

Аналогично вычислим проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{12}{\sqrt{3^2+4^2+0}} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

5. Векторное произведение векторов вычислим по формуле (3.11).

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot 12 - \vec{j}\cdot 9 + \vec{k}\cdot(-16) = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 16\vec{k}.$$

6. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $\vec{a}$, определим, используя свойство 1 векторного произведения. Отсюда искомую площадь параллелограмма найдем по формуле (3.10):

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{12^2+(-9)^2+(-16)^2} = \sqrt{481} = 21{,}93 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 1) $\vec{m} = \{7; 4; 3\}$ и $\vec{n} = \{-1; 4; -3\}$; 2) 12; 3) 0,48; 4) 2,4; 5) $\vec{a}\times\vec{b} = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 16\vec{k}$; 6) 21, 93 кв. ед.

Линейная зависимость векторов. Смешанное произведение векторов

Пример 3.3. Заданы векторы $\vec{a}=\{3;-1;2\}$, $\vec{b}=\{-2;4;1\}$ и $\vec{c}=\{4;-5;-1\}$. Требуется: 1) проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; 2) проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$; 3) проверить, ортогональны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$; 4) найти орт $\vec{n}^{\,0}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 5) объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$; 6) вектор $\vec{d}=\{-5;11;1\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение. 1. Применим свойство 6 смешанного произведения:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ -2 & 4 & 1\\ 4 & -5 & -1\end{vmatrix}=3\cdot4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-5)\cdot2+(-1)\cdot1\cdot4-$$

$$-2\cdot4\cdot4-(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)-(-5)\cdot1\cdot3=-11\neq0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны.

2. Коллинеарность векторов проверим по формуле (3.3), но сначала найдем координаты векторов $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ по формуле (3.2):

$$\vec{a}+2\vec{b}=\{3+(-2)\cdot2;\,(-1)+4\cdot2;\,2+1\cdot2\}=\{-1;\,7;\,4\}.$$

Аналогично найдем $\vec{b}+\vec{c}$: $\vec{b}+\vec{c}=\{-2+4;\,4-5;\,1-1\}=\{2;-1;0\}$. Тогда

$$\frac{-1}{2}\neq\frac{7}{-1}\neq\frac{4}{0}.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ не коллинеарны.

3. Вычислим скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ по формуле (3.7):

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot4+(-1)\cdot(-5)+2\cdot(-1)=12+5-2=15\neq0.$$

Значит, по свойству 4 скалярного произведения, векторы не ортогональны.

4. Найти орт $\vec{n}^{\,0}$ вектора $\vec{n}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно по формуле $\vec{n}^{\,0}=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, где $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{vmatrix}=-9\vec{i}-7\vec{j}+10\vec{k}$.

Следовательно,

$$\vec{n}^{\,0}=\frac{-9\vec{i}-7\vec{j}+10\vec{k}}{\sqrt{(-9)^2+(-7)^2+10^2}}=\frac{-9\vec{i}-7\vec{j}+10\vec{k}}{\sqrt{230}}=\frac{1}{\sqrt{230}}\left(-9\vec{i}-7\vec{j}+10\vec{k}\right).$$

5. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, определяется формулой (3.12):

$$V=\frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|=\frac{1}{6}|-11|=\frac{11}{6}.$$

6. Требуется представить вектор $\vec{d}$ в виде

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}, \qquad (*)$$

где x, y, z — неизвестные числа. Это возможно, так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, согласно п.1.

Искомые числа найдем, используя определение равенства векторов, а именно запись (*), которая равносильна записи

$$-5\vec{i}+11\vec{j}+\vec{k}=x\left(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}\right)+y\left(-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\right)+z\left(4\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}\right),$$

т.е.

$$\begin{cases}3x-2y+4z=-5,\\ -x+4y-5z=11,\\ 2x+y-z=1.\end{cases}$$

Для решения системы используем правило Крамера. Главный определитель $\Delta=-11\neq 0$ (см. п. 1).

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5 & -2 & 4\\ 11 & 4 & -5\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=11,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & -5 & 4\\ -1 & 11 & -5\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-55,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3 & -2 & -5\\ -1 & 4 & 11\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-22.$$

Тогда по формулам Крамера получим

$$x=\frac{11}{-11}=-1,\quad y=\frac{-55}{-11}=5,\quad z=\frac{-22}{-11}=2.$$

Вектор $\vec{d}$ как линейная комбинация векторов нового базиса имеет следующий вид: $\vec{d}=-\vec{a}+5\vec{b}+2\vec{c}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы: а) $\frac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$; б) $4\vec{a}+\vec{b}$; в) $2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; г) $\frac{3}{4}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)-\frac{1}{4}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)-\vec{a}-\vec{b}$;

3.2. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат, если $\vec{a}=\vec{AB}+\vec{CD}$, A (0; 0; 1), B (3; 2; 1), C (4; 6; 5), D (1; 6; 3). *Ответ*: $\vec{a}=\{0;2;-2\}$.

3.3. Даны точки M (1; 2; 3) и N (3; –4; 6). Найти длину и направление вектора $\vec{MN}$. *Ответ*: $|\vec{MN}|=7;$ $\left\{\frac{2}{7};-\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right\}$.

3.4. Угол составляет с осями Ox и Oz углы 40° и 80°. Найти его угол с осью Oy. *Ответ*: $\beta\approx 52°$ или 128°.

3.5. Вектор $\vec{OM}=\vec{r}$ составляет с осями координат равные острые углы. Определить эти углы и построить вектор $\vec{r}$, если длина равна $2\sqrt{3}$. *Ответ*: $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.6. Определить угол между векторами $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$. *Ответ*: 135°.

3.7. Даны векторы $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{3;-4;2\}$, $\vec{c}=\{-1;1;4\}$. Найти $\text{Пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$. *Ответ*: 5.

3.8. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $5\vec{a}-6\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=6, \left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{3}$. *Ответ*: –96.

3.9. Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{a}\cdot\vec{b}=28$. *Ответ*: {2; 4; –6}.

3.10. При каком значении λ векторы $\vec{b}=\lambda\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-\lambda\vec{k}$ взаимно перпендикулярны? *Ответ*: –5.

3.11. В треугольнике ABC вершины имеют координаты A (1; 1; –1), B (2; 3; 1), C (3; 2; 1). Найти: а) длины сторон; б) внутренние углы; в) острый угол между медианой BD и стороной AC. *Ответ*: а) 3; 3; $\sqrt{2}$; б) ≈ 76°; 76°; 27°; в) ≈ 50°.

3.12. Упростить выражения:

а) $2\vec{i}(\vec{j}\times\vec{k})+3\vec{j}(\vec{i}\times\vec{k})+4\vec{k}(\vec{i}\times\vec{j})$. *Ответ*: 3;

б) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}+(\vec{b}-\vec{c})\times\vec{a}$. *Ответ*: $2(\vec{a}\times\vec{c})$;

в) $(3\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k})\times(2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$. *Ответ*: $34\vec{i}-7\vec{j}+26\vec{k}$.

3.13. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. *Ответ*: $-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$.

3.14. Дано: $\vec{a}=\{1;-4;0\}$, $\vec{b}=\{6;3;-2\}$, $\vec{c}=\{1;-2;2\}$. Найти $\text{Пр}_{\vec{a}}(\vec{b}\times\vec{c})$. *Ответ*: $\frac{58}{\sqrt{17}}$.

3.15. Найти площадь треугольника с вершинами *A* (2; 2; 2), *B* (4; 0; 3) и *C* (0; 1; 0). *Ответ*: $\frac{\sqrt{65}}{2}$.

3.16. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$. Найти: а) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; б) $|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})|$. *Ответ*: а) 6; б) 66.

3.17. Даны векторы: $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Найти: а) $\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{b})$; б) $|\vec{c}|$. *Ответ*: а) {10; 10; 10}; б) $10\sqrt{3}$.

3.18. Даны векторы $\vec{a}=\{-4;-8;8\}$, $\vec{b}=\{4;3;2\}$. Найти: а) векторное произведение; б) синус угла между ними; в) площадь параллелограмма, построенного на этих векторах. *Ответ*: а) {–40; 40; 20}; б) $\frac{5}{\sqrt{29}}$; в) 60.

3.19. Найти координаты вектора $\vec{x}$, перпендикулярного оси аппликат и вектору $\vec{a}=\{8;-15;3\}$. Вектор $\vec{x}$ образует острый угол с осью абсцисс; $|\vec{x}|=51$. *Ответ*: {45; 24; 0}.

3.20. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b}$. *Ответ*: ±30.

3.21. Найти единичный вектор $\vec{c}^{\,0}$, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}=\{3;-1;2\}$, $\vec{b}=\{-1;3;-1\}$. *Ответ*: $\pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(5\vec{i}-\vec{j}-8\vec{k})$.

3.22. Вычислить произведение $\vec{b}\,(\vec{c}+\vec{a})(\vec{b}+2\,\vec{c})$, если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=5$. *Ответ*: –10.

3.23. Показать, что векторы $\vec{a}=\{7;-3;2\}$, $\vec{b}=\{3;-7;8\}$, $\vec{c}=\{1;-1;1\}$ компланарны.

3.24. Показать, что точки A (5; 7; –2), B (3; 1; –1), C (9; 4; –4), D (1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

3.25. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{1;-2;1\}$, $\vec{b}=\{3;2;1\}$, $\vec{c}=\{1;0;-1\}$. *Ответ*: 12.

3.26. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{2;4;1\}$, $\vec{c}=\{2;-1;0\}$. *Ответ*: $\dfrac{25}{6}$.

3.27. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\{2;1;-3\}$, $\vec{b}=\{1;2;1\}$, $\vec{c}=\{1;-3;1\}$, опущенную на грань, построенную на векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$. *Ответ*: $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

3.28. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$. Найти $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. *Ответ*: ±27.

3.29. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\vec{AB}=\{4;3;0\}$, $\vec{AD}=\{2;1;2\}$, $\vec{AA_1}=\{-3;-2;5\}$. Найти:

а) объем параллелепипеда. *Ответ*: 12;

б) площадь грани $ABCD$. *Ответ*: $2\sqrt{26}$;

в) длину высоты, проведенной из вершины A. *Ответ*: $\dfrac{6}{\sqrt{26}}$;

г) угол между ребром AB и диагональю BD_1. *Ответ*: $\arccos\dfrac{16\sqrt{10}}{75}$.

3.30. Даны три вектора $\vec{a}=\{-1;4;3\}$, $\vec{b}=\{3;2;-4\}$, $\vec{c}=\{-2;-7;1\}$. Найти вектор $\vec{d}=\{6;20;-3\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. *Ответ*: $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Прямая на плоскости. Виды уравнений прямой

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой в прямоугольной системе координат соответствуют различные виды ее уравнений.

1. *Общее уравнение прямой* имеет вид

$$Ax + By + C = 0, \tag{4.1}$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Определение 4.1. Вектор $\vec{n} = \{A;\ B\}$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором* этой прямой.

2. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.* Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0\ (x_0;\ y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A;\ B\}$, имеет вид

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0, \tag{4.2}$$

где x, y — координаты текущей точки, лежащей на этой прямой.

3. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*. Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение определяется ординатой b точки $(0;\ b)$ пересечения с осью Oy и углом α между прямой и положительным направлением оси Ox.

Определение 4.2. *Углом наклона данной прямой к оси Ox* называется наименьшее неотрицательное значение угла α, на который нужно повернуть против часовой стрелки ось Ox, чтобы ее положительное направление совпало с одним из направлений прямой (рис. 4.1).

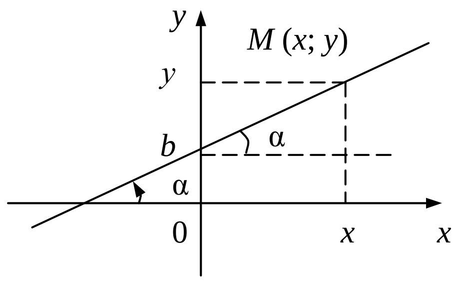


Рис. 4.1

Возьмем на прямой произвольную точку $M\ (x;\ y)$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y - b}{x}$, т.е. $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$.

Обозначим $\operatorname{tg}\ \alpha = k$ и получим $y = kx + b$, уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Определение 4.3. Число $k = \operatorname{tg}\ \alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой.

Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом:

1) если прямая проходит через начало координат, то $b = 0$, а уравнение имеет вид $y = kx$;

2) если прямая проходит параллельно оси Ox, т.е. $\alpha = 0$ ($k = \operatorname{tg}\ 0 = 0$), то уравнение имеет вид $y = b$;

3) если прямая проходит параллельно оси Oy, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$), то уравнение имеет вид $x = a$, где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox.

4. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*. Пусть прямая проходит через точку M_0 (x_0; y_0) и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Тогда уравнение прямой примет вид

$$(y - y_0) = k\,(x - x_0), \tag{4.3}$$

где x, y — координаты текущей точки, лежащей на прямой.

Замечание. Из этого уравнения нельзя определить прямую, параллельную оси Oy.

5. *Уравнение прямой, проходящей через две точки*. Пусть прямая проходит через точки M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2). Тогда

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ —} \tag{4.4}$$

уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Угловой коэффициент для данного случая запишется в виде

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.5}$$

Частные случаи уравнения прямой, проходящей через две точки. Если $x_2 = x_1$, то прямая проходит параллельно оси Oy, а уравнение имеет вид $x = x_1$. Если $y_2 = y_1$, то прямая проходит параллельно оси Ox, а уравнение имеет вид $y = y_1$.

6. *Уравнение прямой в отрезках*. Пусть прямая пересекает ось Ox в точке M_1 (a; 0) и ось Oy в точке M_2 (0; b). В этом случае уравнение (4.4) примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{4.6}$$

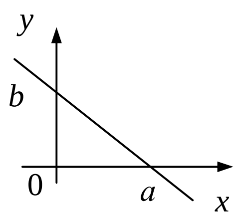


Рис. 4.2

где a и b — отрезки, отсекаемые данной прямой от соответствующих осей координат (рис. 4.2).

4.2. Основные задачи для прямой линии на плоскости

1. *Угол между двумя прямыми*

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \tag{4.7}$$

где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ — угловые коэффициенты соответствующих прямых.

2. *Условие параллельности прямых*. Так как $\varphi = 0$, то из (4.7)

$$k_1 = k_2. \tag{4.8}$$

3. *Условие перпендикулярности прямых*. Так как $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad k_1 k_2 = -1. \qquad (4.9)$$

4. *Расстояние от точки до прямой*. Пусть заданы прямая своим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка на плоскости $M_0\ (x_0; y_0)$, тогда

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ —} \qquad (4.10)$$

расстояние от точки M_0 до данной прямой.

4.3. Сводная таблица понятий и формул по теме «Прямая на плоскости»

Понятие	Содержание, формула
Угловой коэффициент прямой k	Тангенс угла, образованного с положительным направлением оси Ox: $k = \operatorname{tg} \alpha$
Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$, где A, B, C — произвольные числа, одновременно не равные нулю
Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$, где k — угловой коэффициент прямой
Вычисление угла между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$	$\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, где $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ — угловые коэффициенты соответствующих прямых
Условие параллельности двух прямых	$k_1 = k_2$
Условие перпендикулярности двух прямых	$k_1 k_2 = -1$ или $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$
Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0\ (x_0; y_0)$ с данным угловым коэффициентом	$(y - y_0) = k\ (x - x_0)$
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\ (x_1; y_1)$ и $M_2\ (x_2; y_2)$	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Вычисление углового коэффициента прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\ (x_1; y_1)$ и $M_2\ (x_2; y_2)$	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Вычисление расстояния d от точки $M_0\ (x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B\}$	$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0$

4.4. Кривые второго порядка

Окружность

Уравнение окружности с центром в точке C (x_0; y_0) *и радиусом R* в декартовой системе координат имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (4.11)$$

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4.12)$$

Это уравнение называется каноническим (простейшим) уравнением окружности.

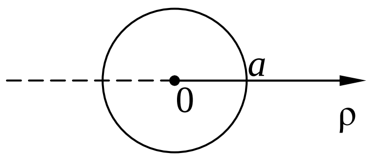
Параметрические уравнения окружности имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t, \\ y &= R\sin t, \end{aligned}\right\} \quad 0 \le t \le 2\pi, \qquad (4.13)$$

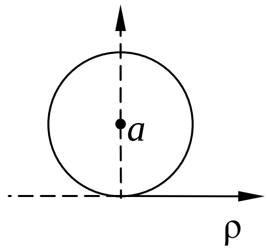
где t — угол между положительным направлением оси Ox и радиусом $\overline{OM}$ текущей точки M (x; y) окружности, отсчитываемый против хода часовой стрелки.

В полярной системе координат окружность определяется одним из следующих уравнений:

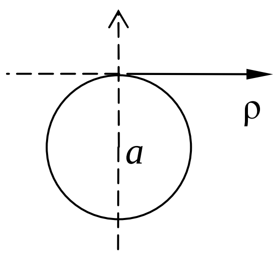
1) $\rho = R$;



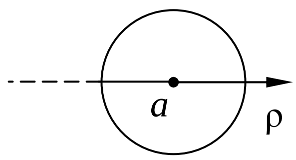
2) $\rho = a \sin \varphi$;



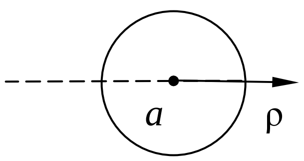
3) $\rho = -a \sin \varphi$;



4) $\rho = a \cos \varphi$;



5) $\rho = -a \cos \varphi$.



Эллипс

Эллипсом с центром симметрии в начале координат O (0; 0) называется кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат Oxy имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4.14)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ называются полуосями эллипса. Данное уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

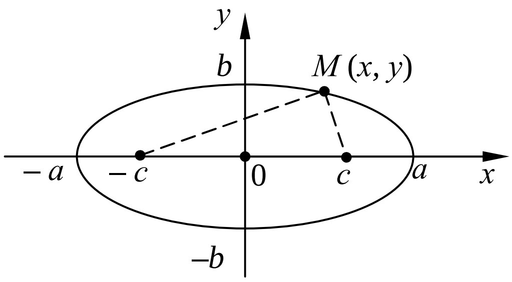


Рис. 4.3

Если $a > b$, то ось $2a$ называется большой осью эллипса и лежит на оси Ox, а ось $2b$ — малой осью и лежит на оси Oy. Точки F_1 $(-c;\ 0)$ и F_2 $(c;\ 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, называются фокусами эллипса, соответственно левым и правым; $2c$ — фокусным расстоянием. Точки с координатами $(a; 0)$, $(-a; 0)$, $(0; b)$, $(0; -b)$ называются вершинами эллипса (рис. 4.3).

Фокальное свойство эллипса. Для того чтобы точка M $(x; y)$ принадлежала эллипсу (4.14), необходимо и достаточно, чтобы сумма расстояний от этой точки до фокусов эллипса F_1 и F_2 была постоянной и равнялась $2a$, т.е.

$$|M F_1| + |M F_2| = 2a.$$

Если $a < b$, то уравнение (4.14) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ — на оси Ox. Фокусы такого эллипса находятся на оси Oy в точках F_1 $(0; -c)$ и F_2 $(0; c)$, где $c=\sqrt{b^2-a^2}$ (рис. 4.4). Его фокальное свойство:

$$|M F_1| + |M F_2| = 2b.$$

Если $a = b$, то каноническое уравнение эллипса примет вид $x^2 + y^2 = a^2$, которое соответствует окружности радиуса a с центром в начале координат. Таким образом, окружность является частным случаем эллипса.

Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Если центр симметрии эллипса лежит в точке C $(x_0; y_0)$ (рис. 4.5), то его каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

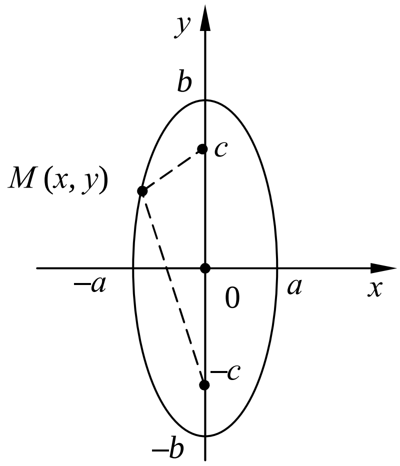


Рис. 4.4

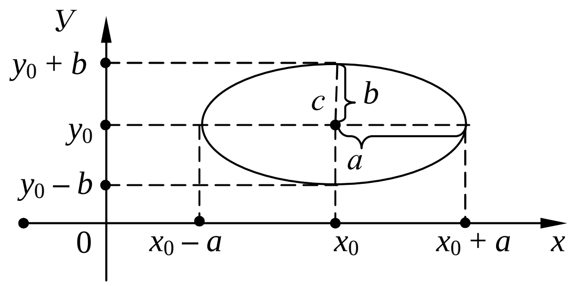


Рис. 4.5

Гипербола

Гиперболой с центром в начале координат O (0; 0) называется кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат *Oxy* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.15}$$

где $a > 0$ называется действительной полуосью и лежит на оси *Ox*, а $b > 0$ — мнимой полуосью гиперболы и лежит на оси *Oy*. Данное уравнение называется каноническим уравнением гиперболы.

Точки F_1 (–*c*; 0) и F_2 (*c*; 0), где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, называются фокусами гиперболы, соответственно левым и правым; $2c$ — фокусным расстоянием. Точки с координатами (*a*; 0) и (–*a*; 0) называются вершинами гиперболы (рис. 4.6).

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется основным прямоугольником гиперболы.

Фокальное свойство гиперболы. Для того чтобы точка *M* (*x*; *y*) принадлежала гиперболе (4.15), необходимо и достаточно, чтобы разность расстояний от этой точки до фокусов гиперболы F_1 и F_2 по абсолютной величине была постоянной и равнялась $2a$, т.е.

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Определение 4.4. Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1, \tag{4.16}$$

называется *сопряженной гиперболе* (4.15). Действительная ось этой гиперболы лежит на оси *Oy* и равна $2b$, а мнимая — на оси *Ox* и равна $2a$. Фокусы сопряженной гиперболы находятся на оси *Oy* в точках F_1 (0; –*c*) и F_2 (0; *c*), где $c=\sqrt{a^2+b^2}$ (рис. 4.7).

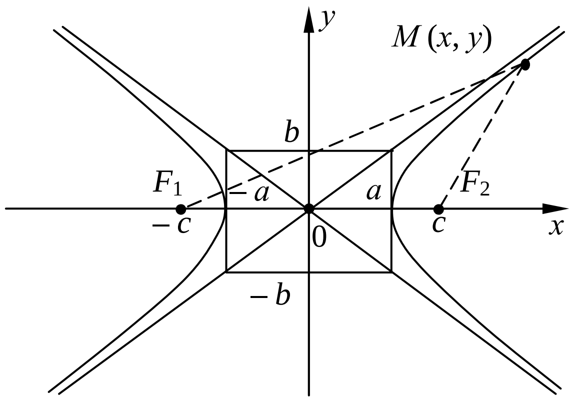


Рис. 4.6

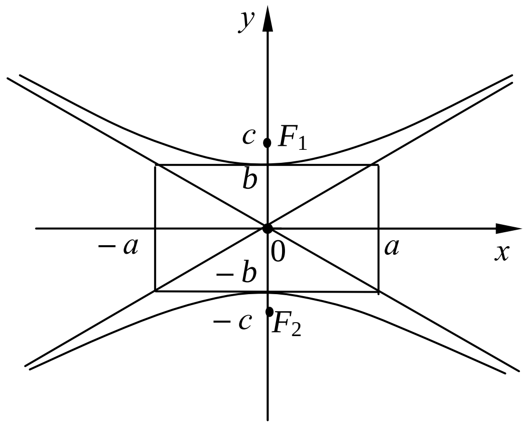


Рис. 4.7

Фокальное свойство гиперболы, заданной уравнением (4.16):

$$|MF_1 - MF_2| = 2b.$$

Замечание. При построении гиперболы целесообразно построить основной прямоугольник гиперболы, провести в нем диагонали и продолжить их за вершины прямоугольника.

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней.

Если центр гиперболы лежит в точке C (x_0; y_0) (рис. 4.8), то ее каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, а уравнение сопряженной гиперболы (рис. 4.9) — $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1$.

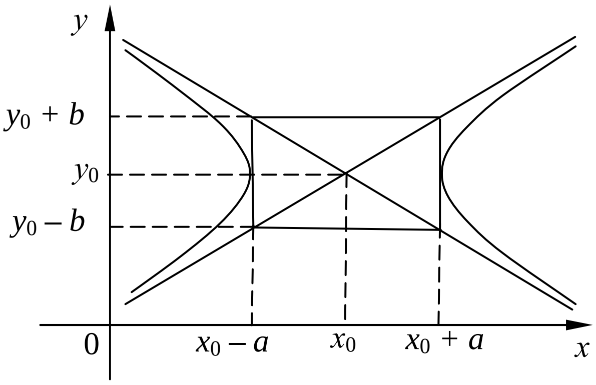


Рис. 4.8

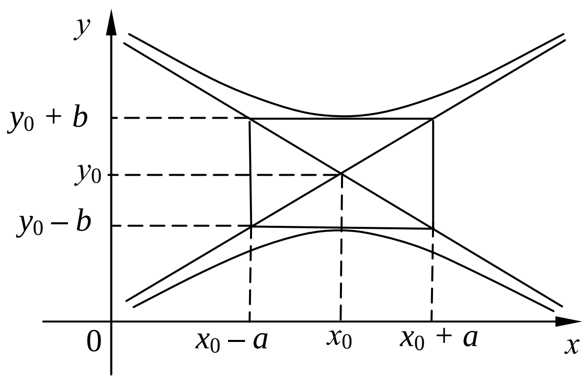


Рис. 4.9

Парабола

Параболой называется кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$y^2 = 2px, \qquad (4.17)$$

где $p > 0$ называется параметром параболы. Это уравнение называется каноническим уравнением параболы. Вершина ее лежит в точке O (0; 0). Точка

$F\left(\frac{p}{2};0\right)$ называется фокусом, а прямая $x=-\frac{p}{2}$ — директрисой параболы (рис. 4.10).

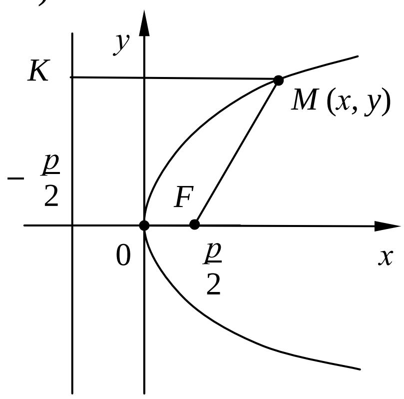


Рис. 4.10

Фокальное свойство параболы. Для того чтобы точка M $(x; y)$ принадлежала параболе (4.17), необходимо и достаточно, чтобы расстояние от этой точки до фокуса параболы было равно расстоянию от этой же точки до директрисы параболы, т.е.

$$|MK| = |MF|.$$

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ также определяют следующие параболы (рис. 4.11):

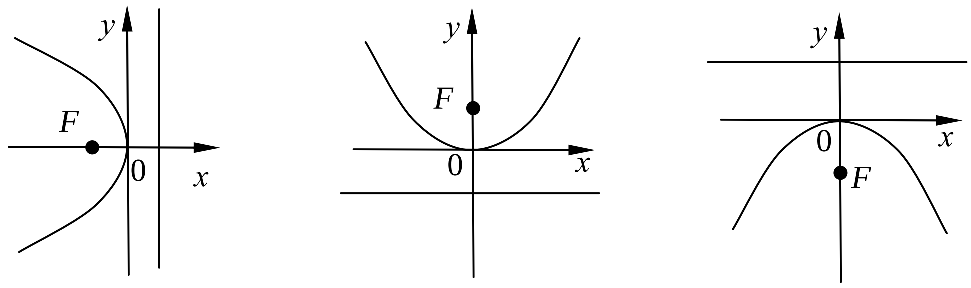


Рис. 4.11

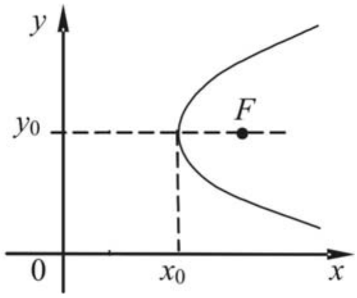


Рис. 4.12

Если вершина параболы лежит в точке C $(x_0; y_0)$ (рис. 4.12), то ее каноническое уравнение примет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p\ (x - x_0).$$

Общее уравнение кривой второго порядка

Уравнение $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, в котором A, B, C одновременно не равны нулю, называется общим уравнением кривой второго порядка.

В данном кратком курсе при рассмотрении общих уравнений кривых второго порядка ограничимся случаем, когда $B = 0$, т.е. рассмотрим уравнение кривой второго порядка без члена с произведением координат x и y:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F= 0.$$

Для того чтобы научиться определять, какую кривую описывает данное уравнение, сформулируем теорему.

Теорема 4.1. Уравнение $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ всегда определяет:

1) окружность, если $A = C$;

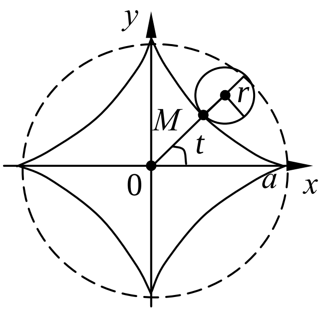
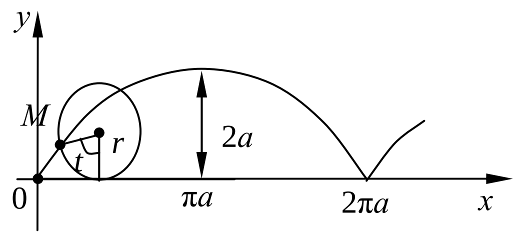
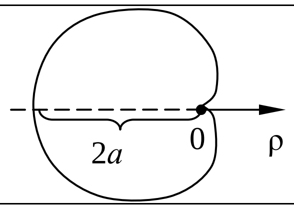
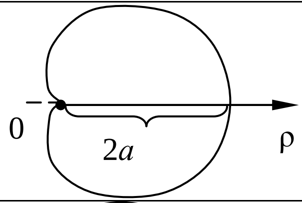
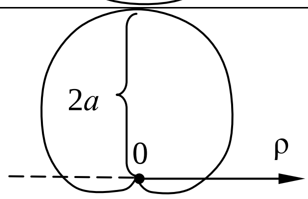
2) эллипс, если $AC > 0$;

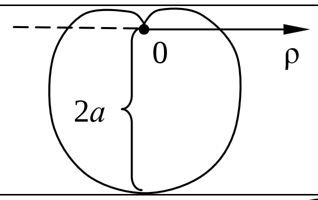
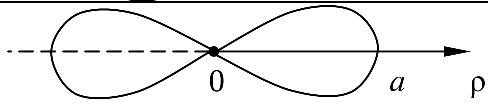
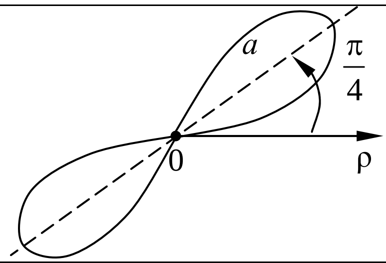
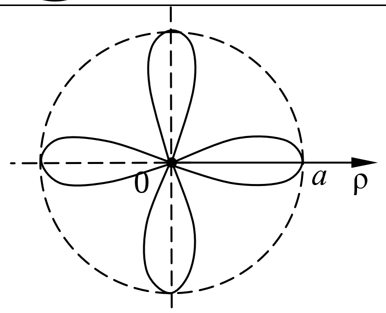
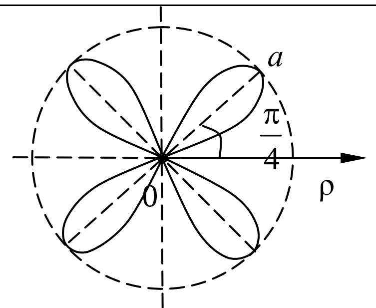
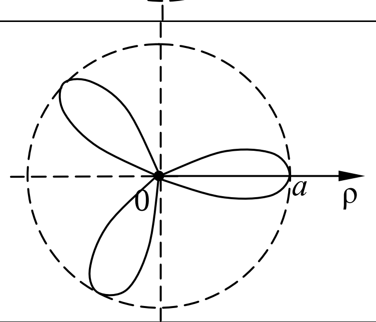
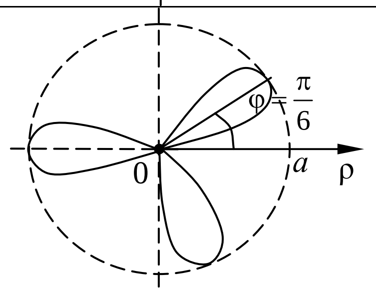
3) гиперболу, если $AC < 0$;

4) параболу, если $AC = 0$.

При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) — в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы — в пару пересекающихся прямых, для параболы — в пару параллельных прямых.

Некоторые другие кривые

<table>
<tr><th>Название</th><th>Уравнение</th><th>Кривая</th></tr>
<tr><td>Астроида</td><td>$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Leftrightarrow$
$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t, \end{aligned}\right\} 0 \le t < 2\pi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Циклоида</td><td>$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos\ t) \end{cases}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Кардиоида</td><td>ρ = a (1 – cos φ)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ρ = a (1 + cos φ)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ρ = a (1 + sin φ)</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$\rho = a\,(1 - \sin\varphi)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Лемниската Бернулли</td><td>$\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Четырехлепестковая роза</td><td>$\rho = a \cos 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho = a \sin 2\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Трехлепестковая роза</td><td>$\rho = a \cos 3\varphi$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\rho = a \sin 3\varphi$</td><td>
</td></tr>
</table>

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Различные виды уравнений прямой на плоскости

Пример 4.1. Построить прямые:
а) $3x - 2y - 6 = 0$;
б) $2x - 5y = 0$;
в) $2y - 1 = 0$;
г) $3x + 2 = 0$;
д) $5y = 0$.
Решение:

а) прямая пересекает обе координатные оси, так как в ее уравнении коэффициенты при текущих координатах x и y и свободный член не равны нулю. Приведем данное уравнение к уравнению в отрезках. Для этого свободный член перенесем вправо и обе части уравнения разделим на 6, т.е.

$$3x - 2y = 6 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \text{ или } \frac{x}{2} + \frac{y}{(-3)} = 1.$$

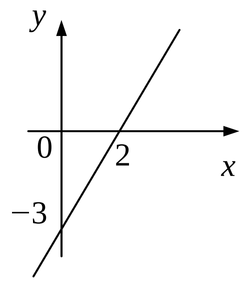


Рис. 4.13

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (4.6), замечаем, что $a = 2$, а $b = -3$. На оси Ox от начала координат откладываем две единицы в положительном направлении, на оси Oy три единицы в отрицательном направлении. Через полученные точки проводим прямую (рис. 4.13);

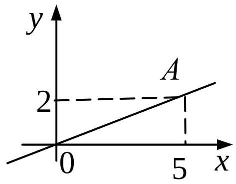


Рис. 4.14

б) прямая проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена. Для построения найдем еще одну точку на этой прямой. Дадим одной из переменных в заданном уравнении произвольное значение, например, $x = 5$ и из уравнения $2 \cdot 5 - 5y = 0$ определим $5y = 10$, $y = 2$. Через точки A (5; 2) и O (0; 0) проводим прямую (рис. 4.14);

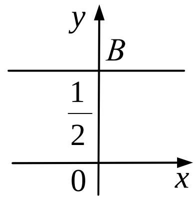


Рис. 4.15

в) прямая параллельна оси Ox, так как ее уравнение не содержит текущей координаты x. Из уравнения прямой находим $2y = 1$, $y = \frac{1}{2}$ и через точку $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ параллельно оси Ox проводим прямую (рис. 4.15);

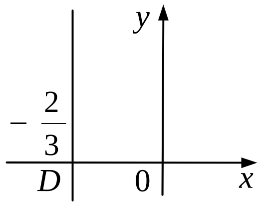


Рис. 4.16

г) так как в уравнении $3x + 2 = 0$ или $x = -\frac{2}{3}$ отсутствует текущая координата y, то прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $D\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ (рис. 4.16);

д) прямая $5y = 0$ или $y = 0$ совпадает с осью Ox, так как в уравнении отсутствуют свободный член и текущая координата x.

Пример 4.2. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок b = –3 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \pi/6$.

Решение. Находим угловой коэффициент: k = tg (π/6) = $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Воспользовавшись уравнением прямой с угловым коэффициентом, получаем $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - 3$; освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой $x - \sqrt{3} \cdot y - 3\sqrt{3} = 0$.

Пример 4.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 3) и B (2; 5).

Решение. Полагая $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$ в уравнении (4.4), получаем

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+1}{2+1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+1}{3}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид $2x - 3y + 11 = 0$.

Полезно проверить, что уравнение составлено верно. Для этого достаточно показать, что координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, равенства $2\,(-1) - 3 \cdot 3 + 11 = 0$; $2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 11 = 0$ выполняются тождественно.

Пример 4.4. Определить угол между прямыми: $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1. \end{cases}$

Решение. Так как угловой коэффициент первой прямой равен $k_2 = 2$, а второй прямой — $k_1 = \dfrac{1}{2}$, то угол между этими прямыми найдем по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - 0{,}5}{1 + 2 \cdot 0{,}5} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75.$$

Следовательно, φ = arctg 0,75.

Пример 4.5. Дан треугольник с вершинами A (–2; 0), B (2; 4), C (4; 0). Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

Решение. 1. Найдем уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, воспользовавшись формулой (4.4); получим:

$$AB: \quad \frac{x+2}{2+2} = \frac{y-0}{4-0}, \quad \Rightarrow \quad x + 2 = y \quad \Rightarrow \quad x - y + 2 = 0;$$

$$BC: \quad \frac{x-2}{4-2} = \frac{y-4}{0-4}, \quad \Rightarrow \quad (-2)(x-2) = (y-4) \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 8 = 0;$$

$$AC: \quad \frac{x+2}{4+2} = \frac{y-0}{0-0}, \quad \Rightarrow \quad 0 = 8y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

2. Чтобы найти уравнение прямой, на которой лежит медиана AE, найдем координаты точки E по формулам (2.9):

$$x = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y = \frac{4+0}{2} = 2,$$

т.е. точка E имеет координаты E (3; 2).

Теперь найдем уравнение прямой AE:

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{2-0} \quad \Rightarrow \quad 2(x+2) = 5y \quad \Rightarrow \quad 2x - 5y + 4 = 0.$$

3. Найдем уравнение высоты. Для этого вычислим угловой коэффициент прямой BC:

$$y = 8 - 2x \Rightarrow k_{BC} = -2.$$

Воспользуемся условием перпендикулярности (4.9) высоты AD и стороны BC:

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}} \Rightarrow k_{AD} = \frac{1}{2}.$$

Подставим в уравнение (4.3) значение k_{AD} и координаты точки A:

$$(y - x) = \frac{1}{2}(x + 2);\ 2y = x + 2;\ 2y - x - 2 = 0.$$

4. Найдем длину медианы AE, применив формулу (2.7):

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Кривые второго порядка

Пример 4.6. Определить и построить кривые:

а) $3x^2 + 4y^2 = 12$;

б) $9x^2 - 4y^2 = 36$;

в) $x^2 = -4y$.

Решение: а) Приводим уравнение к каноническому виду. Для этого обе части уравнения разделим на свободный член, т.е. на 12,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

и представим знаменатели в виде квадратов чисел

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

Значит, данная кривая — это эллипс (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них одинаковые — положительные). Осями симметрии эллипса служат оси координат, большая полуось $a = 2$ и малая $b = \sqrt{3}$.

Вершинами эллипса являются точки пересечения с осями координат: A_1 (2; 0), A_2 (–2; 0), B_1 (0; $\sqrt{3}$), B_2 (0; $-\sqrt{3}$).

При построении эллипса обращаем внимание на то, что график представляет собой выпуклую линию, которая в точках A_1 и A_2 перпендикулярна оси Ox, а в точках B_1 и B_2 перпендикулярна оси Oy, т.е. в вершинах эллипс не имеет заострений (рис. 4.17).

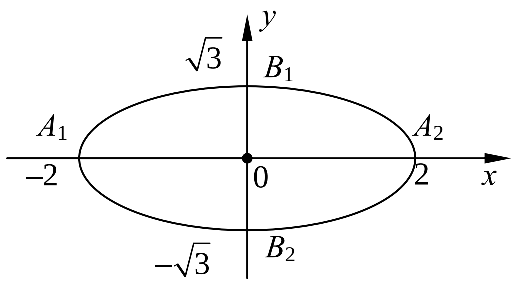


Рис. 4.17

б) Приводим уравнение к каноническому виду. Для этого обе части уравнения разделим на свободный член, т.е. на 36,

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

и представим знаменатели в виде квадратов чисел

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1.$$

Значит, данная кривая — это гипербола (переменные x и y входят в уравнение в квадратах, знаки при них разные). Положительному знаку при x^2 геометрически соответствует пересечение с осью Ox. Действительно, при $y = 0$ уравнение примет вид $x^2 = 4$ и имеет два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$.

Точки A_1 (2; 0), A_2 (–2; 0) — вершины гиперболы и лежат на оси Ox, которая является действительной осью симметрии гиперболы.

При $x = 0$ уравнение примет вид $-y^2 = 9$ и решений не имеет. Это означает, что гипербола не пересекается с осью Oy. Аналитически этому факту соответствует знак минус перед y^2.

Построение начинаем с характеристического прямоугольника со сторонами $2a = 4$ и $2b = 6$ и проводим его диагонали. Они служат асимптотами гиперболы. Затем строим кривую, обращая внимание на то, что в точках A_1 и A_2 она перпендикулярна оси Ox, а при удалении в бесконечность точки гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам (рис. 4.18).

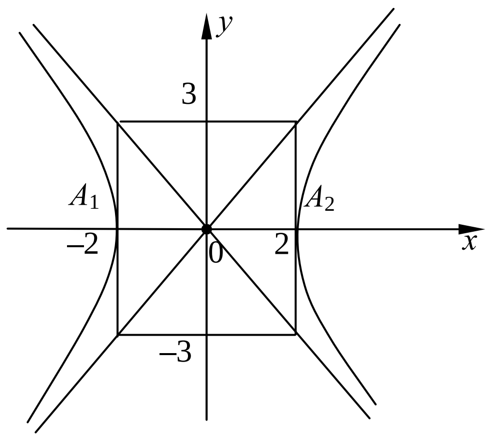


Рис. 4.18

в) При наличии в уравнении квадрата только одной переменной делаем вывод, что это парабола.

При значениях $y > 0$ уравнение не имеет смысла, ординаты точек параболы удовлетворяют неравенству $y \leq 0$.

Так как уравнение содержит y только в первой степени, то определяемая им парабола симметрична относительно оси Oy.

Придадим значение переменной y:

при $y = -3 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2.$

Точки A_1 (2; –3), A_2 (–2; –3) расположены на кривой симметрично относительно оси Oy.

Через вершину параболы, которая лежит в начале координат, и точки A_1, A_2 проводим кривую, учитывая при этом, что в точке (0; 0) направление перпендикулярно оси Oy (рис. 4.19).

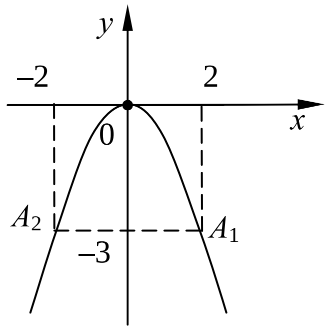


Рис. 4.19

Пример 4.7. Найти координаты центра и радиуса окружности:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0.$$

Решение. В данном уравнении выделим полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие числа. Получаем

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 10y + 25) - 25 - 15 = 0,$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2$, находим, что $x_0 = 3$, $y_0 = -5$, $R = 7$.

Пример 4.8. Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$.

Решение. Выделяя полные квадраты, преобразуем левую часть уравнения:

$$9\,(x^2 - 6x + 9) - 81 + 4\,(y^2 - 8y + 16) - 64 + 109 = 0,$$

$$9\,(x - 3)^2 + 4\,(y - 4)^2 = 36 \text{ или } \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2$, $b = 3$ и центром в точке C (3; 4).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Дано уравнение прямой $\frac{x+4}{4} + \frac{y-10}{2} = 0$. Написать:

а) общее уравнение прямой;

б) уравнение с угловым коэффициентом;

в) уравнение в отрезках.

4.2. Построить прямые:

а) $4x - 5y + 15 = 0$;

б) $2x - y = 0$;

в) $2y + 3 = 0$;

г) $7x - 10 = 0$.

4.3. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = 3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \pi/3$. *Ответ*: $\sqrt{3} \cdot x = y - 3 = 0$.

4.4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 3) и B (2; 5). *Ответ*: $2x + 3y + 11 = 0$.

4.5. Даны стороны треугольника: $x - y = 0$ (AB), $x + y = 2$ (BC), $y = 0$ (AC). Составить уравнение медианы, проходящей через вершину B, уравнение высоты, проходящей через вершину A, и длину высоты. *Ответ:* уравнение медианы $x = 1$; уравнение высоты $x - y = 0$; длина высоты равна 1.

4.6. Определить координаты центров и радиусы окружностей и построить данные кривые:

а) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$;

б) $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 20 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 52 = 0$.

Ответ: а) (4; –3), $R = 5$; б) (–5; 2), $R = 7$; в) (2; –7), $R = 1$.

4.7. Определить и построить данные кривые:

а) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $9x^2 + 25y^2 = 225$;

в) $y^2 = -3x$.

4.8. Определить и построить кривые:

а) $y = x^2 - 5x + 7$;

б) $y = -3x^2 + 6x - 5$;

в) $x = 5y^2 - 10y + 6$;

г) $x = y^2 + 3y + 4$;

д) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$;

е) $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 11 = 0$;

ж) $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$;

з) $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$;

и) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$;

к) $\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$;

л) $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$;

м) $\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$.

5. Аналитическая геометрия в пространстве

5.1. Плоскость

Общее уравнение плоскости

Определение 5.1. *Плоскостью* будем называть поверхность, обладающую тем свойством, что прямая, проведенная через любые две точки плоскости, целиком принадлежит ей.

Определение 5.2. Ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости, будем называть *нормальным вектором* или *вектором нормали* к плоскости и обозначать $\vec{n}$.

Теорема 5.1. Любая плоскость в декартовой системе координат определяется линейным уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{5.1}$$

где A, B, C — координаты нормального вектора $\vec{n}$ данной плоскости, x, y, z — текущие координаты точек плоскости.

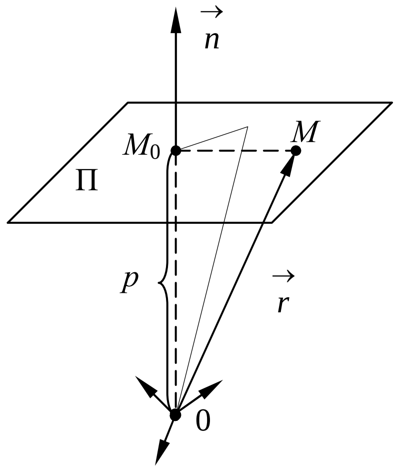


Рис. 5.1

Доказательство. Пусть П — данная плоскость, $\vec{n} = \{A; B; C\}$ — нормальный вектор этой плоскости (рис. 5.1). Возьмем на плоскости произвольную точку M (x; y; z). Тогда $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \{x; y; z\}$ — радиус-вектор точки M.

Очевидно, что проекция радиуса-вектора $\vec{r}$ любой точки плоскости на нормальный вектор $\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{r}$ является величиной постоянной.

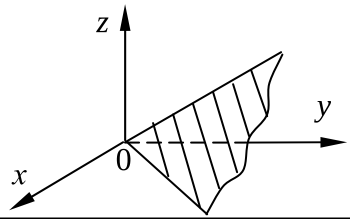
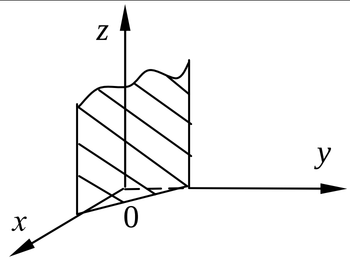
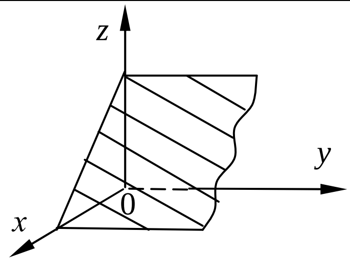
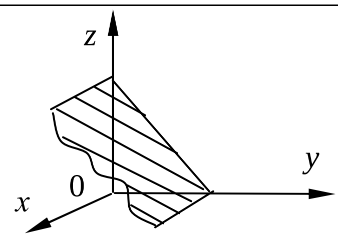
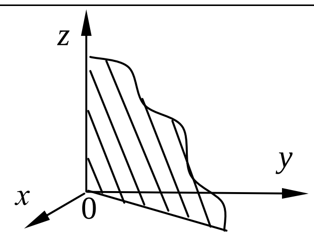
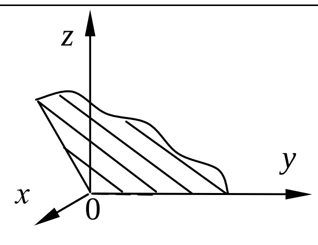
$$\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{r} = p = \text{const}.$$

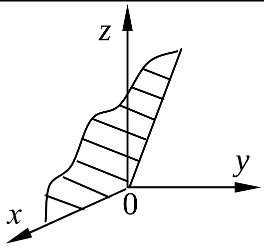
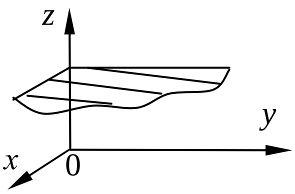
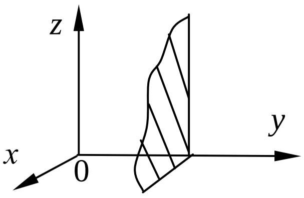
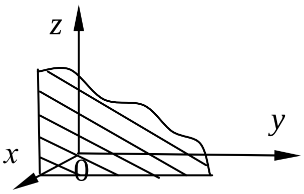
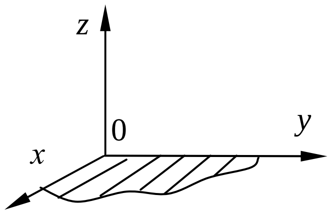
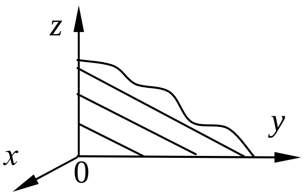
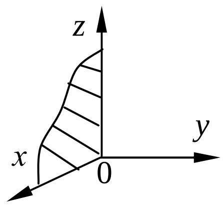
Это условие имеет место лишь для точек плоскости; оно нарушается, если точка M лежит вне плоскости.

Из векторной алгебры известно, что $\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, следовательно, $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|}$. Тогда $\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{r} = \dfrac{\vec{n}\,\vec{r}}{|\vec{n}|} = p$ или $\vec{n}\,\vec{r} - |\vec{n}| \cdot p = 0$. Обозначим $|\vec{n}| \cdot p = -D$, тогда уравнение примет вид $\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$.

Это уравнение представляет общее уравнение плоскости в векторной форме. Записав скалярное произведение векторов $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и $\vec{r} = \{x; y; z\}$ в координатной форме, получим уравнение (5.1), т.е. общее уравнение плоскости.

Анализ общего уравнения плоскости

Уравнение плоскости	Характеристики плоскости	Изображение плоскости
$Ax + By + Cz = 0$, $D = 0$	Уравнению удовлетворяют координаты точки O (0; 0; 0). Следовательно, в этом случае *плоскость проходит через начало координат*	
$Ax + By + D = 0$, $C = 0$	Нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B; 0\}$ перпендикулярен оси Oz. Следовательно, *плоскость параллельна оси Oz*	
$Ax + Cz + D = 0$, $B = 0$	Нормальный вектор $\vec{n} = \{A; 0; C\}$ перпендикулярен оси Oy. Следовательно, *плоскость параллельна оси Oy*	
$By + Cz + D = 0$, $A = 0$	Нормальный вектор $\vec{n} = \{0; B; C\}$ перпендикулярен оси Ox. Следовательно, *плоскость параллельна оси Ox*	
$Ax + By = 0$, $C = D = 0$	Плоскость проходит через O (0; 0; 0) параллельно оси Oz, т.е. *плоскость проходит через ось Oz*	
$Ax + Cz = 0$, $B = D = 0$	Плоскость проходит через O (0; 0; 0) параллельно оси Oy, т.е. *плоскость проходит через ось Oy*	

Уравнение плоскости	Характеристики плоскости	Изображение плоскости
$By + Cz = 0$, $A = D = 0$	Плоскость проходит через $O\,(0;\,0;\,0)$ параллельно оси Ox, т.е. *плоскость проходит через ось Ox*	
$Cz + D = 0$, $A = B = 0$, т.е. $z = -\dfrac{D}{C}$	*Плоскость параллельна плоскости Oxy*	
$By + D = 0$, $A = C = 0$, т.е. $y = -\dfrac{D}{B}$	*Плоскость параллельна плоскости Oxz*	
$Ax + D = 0$, $B = C = 0$, т.е. $x = -\dfrac{D}{A}$	*Плоскость параллельна плоскости Oyz*	
$Cz = 0$, $A = B = D = 0$, т.е. $z = 0$	*Уравнение плоскости Oxy*	
$By = 0$, $A = C = D = 0$, т.е. $y = 0$	*Уравнение плоскости Oxz*	
$Ax = 0$, $B = C = D = 0$, т.е. $x = 0$	*Уравнение плоскости Oyz*	

Взаимное расположение плоскостей

1. *Угол между плоскостями.*

Определение 5.3. Пусть даны две плоскости Π_1 и Π_2, заданные соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Углом между плоскостями Π_1 и Π_2 будем называть любой из двух смежных двугранных углов, образованных этими плоскостями (рис. 5.2) (в случае параллельности плоскостей угол между ними можно считать равным 0 или π по желанию).

Угол между плоскостями или равен углу между их нормальными векторами, или равен смежному с ним углу, т.е. или $\varphi = \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ (рис. 5.3), или $\varphi = 180^\circ - \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$ (рис. 5.4).

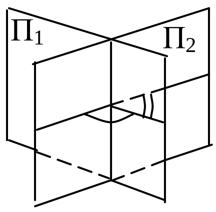


Рис. 5.2

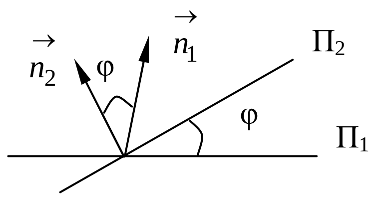


Рис. 5.3

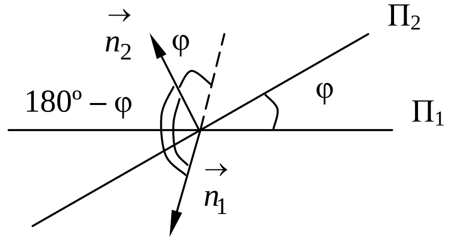


Рис. 5.4

Теорема 5.2. В декартовых координатах угол между плоскостями Π_1 и Π_2 определяется формулой

$$\varphi = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{5.2}$$

2. *Условие перпендикулярности двух плоскостей.* В случае перпендикулярности двух плоскостей угол между ними равен 90°, следовательно, $\cos \varphi = 0$. Из (5.2) следует, что

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{5.3}$$

3. *Условие параллельности двух плоскостей.* Если плоскости Π_1 и Π_2 параллельны, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, т.е. $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$. Переходя к координатам, это условие записывают следующим образом:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{5.4}$$

4. *Условие совпадения плоскостей.* Пусть плоскости Π_1 и Π_2 заданы соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Для совпадающих плоскостей выполняется условие $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$.

Различные формы уравнений плоскости

1. *Общее уравнение плоскости* имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

2. *Уравнение плоскости в отрезках*. Пусть плоскость П пересекает оси декартовых координат в точках (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c). Тогда уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Этим уравнением удобно пользоваться при построении плоскости (рис. 5.5).

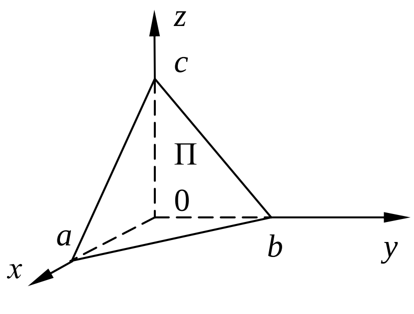


Рис. 5.5

3. *Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, получается как условие компланарности трех векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 5.6), где $M(x; y; z)$ — текущая точка плоскости, т.е. $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (5.5)$$

4. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$, получается как условие перпендикулярности двух векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 5.7), где $M(x; y; z)$ — текущая точка плоскости, т.е.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (5.6)$$

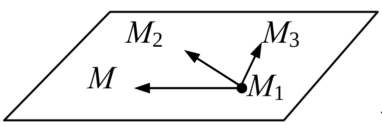


Рис. 5.6

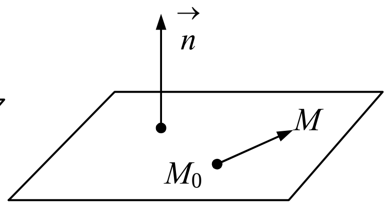


Рис. 5.7

5. *Расстояние от точки до плоскости*. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости П, которая задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\vec{n}=\{A;B;C\}$, находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (5.7)$$

5.2. Прямая в пространстве

Общие уравнения прямой

Определение 5.4. Всякие две не параллельные между собой плоскости Π_1 и Π_2 с общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют прямую их пересечения. Эти уравнения, рассматриваемые совместно, называются *общими уравнениями прямой*.

Определение 5.5. Ненулевой вектор $\vec{S} = \{m; n; p\}$, параллельный прямой или лежащий на ней, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Взаимное расположение прямых в пространстве

1. *Угол между двумя прямыми* L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами (рис. 5.8) $\vec{S}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{S}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$.

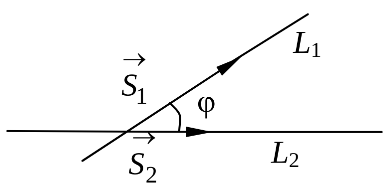


Рис. 5.8

$$\cos\left(\widehat{\vec{L}_1, \vec{L}_2}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{S}_1, \vec{S}_2}\right) = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (5.8)$$

2. *Условие перпендикулярности двух прямых:*

$$L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{S}_1 \perp \vec{S}_2 \;\Rightarrow\; \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = 0 \;\Rightarrow\; m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (5.9)$$

3. *Условие параллельности двух прямых:*

$$L_1 \parallel L_2 \;\Leftrightarrow\; \vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2 \;\Rightarrow\; \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (5.10)$$

Различные виды уравнений прямой в пространстве

1. *Канонические уравнения прямой*. Пусть M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0) \in L$; $\vec{S} = \{m; n; p\} \parallel L$; M $(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка прямой L (рис. 5.9). Векторы $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, т.е.

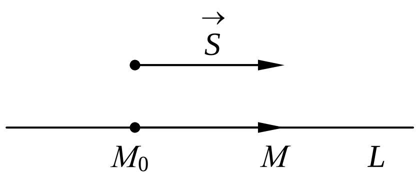


Рис. 5.9

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{S} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (5.11)$$

Полученные уравнения называются каноническими уравнениями прямой.

2. *Параметрические уравнения прямой.* Пусть прямая L задана каноническими уравнениями. Обозначим через t каждое из равных отношений. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_0}{m}&=t,\\ \frac{y-y_0}{n}&=t,\\ \frac{z-z_0}{p}&=t, \end{aligned}\right\} \quad \text{откуда} \quad \left.\begin{aligned} x&=x_0+mt,\\ y&=y_0+nt,\\ z&=z_0+pt. \end{aligned}\right\}$$

Полученные равенства называются параметрическими уравнениями прямой, а t — параметром прямой.

3. *Уравнение прямой, проходящей через две точки.* Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L$, вектор

$$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$$

является направляющим для данной прямой (рис. 5.10). Подставляя в канонические уравнения прямой координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и координаты точки M_1, получим уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5.12}$$

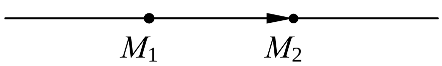


Рис. 5.10

Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

От общих уравнений прямой можно перейти к ее каноническим уравнениям. Для этого нужно знать какую-либо точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и ее направляющий вектор $\vec{S}$.

Пусть прямая задана общими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Координаты точки M_0 на прямой получим из системы уравнений (5.13), придав одной из координат произвольное значение.

Очевидно, что прямая перпендикулярна нормальным векторам плоскостей

$$\vec{n}_1=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{n}_2=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}.$$

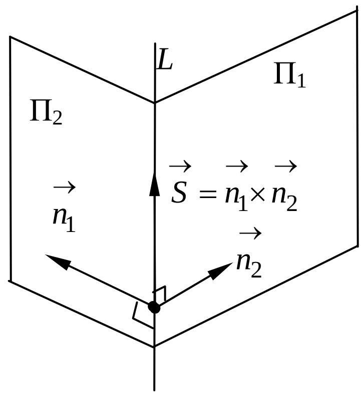


Рис. 5.11

Найдем направляющий вектор этой прямой (рис. 5.11). За направляющий вектор $\vec{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$:

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

5.3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

1. *Угол между прямой и плоскостью*. Пусть даны прямая L, заданная уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

и плоскость П, заданная уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

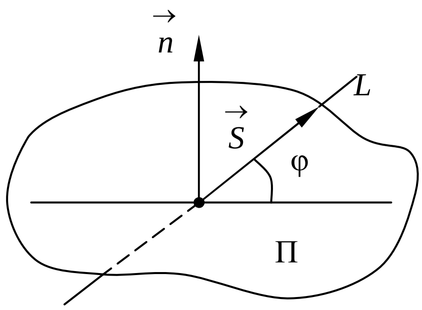


Рис. 5.12

Определение 5.6. *Углом* φ *между прямой и плоскостью* называют наименьший из углов, образованных прямой с ее проекцией на плоскость.

Из рисунка 5.12 видно, что $\varphi = 90^\circ - (\widehat{\vec{n}, \vec{S}})$,

откуда $(\widehat{\vec{n}, \vec{S}}) = 90^\circ - \varphi$.

Учитывая, что

$$\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{S}}) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{S}|} \text{ и } \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{S}}) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi,$$

находим

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{5.14}$$

2. *Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости*. На рис. 5.13 видно, что

$$L \perp \Pi \Rightarrow \vec{S} \parallel \vec{n} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

На рис. 5.14 видно, что

$$L \parallel \Pi \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{n} \Rightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

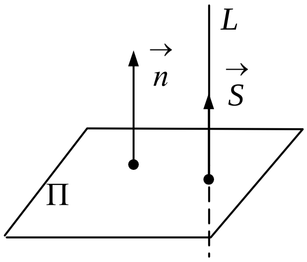


Рис. 5.13

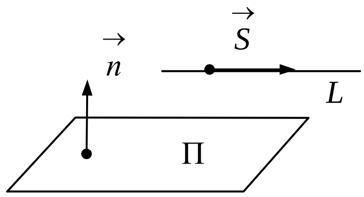


Рис. 5.14

3. *Точка пересечения прямой с плоскостью*. Пусть требуется найти точку пересечения прямой L, заданной каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

с плоскостью П, общее уравнение которой

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + mt, \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Каждому значению параметра t соответствует точка прямой. Нужно выбрать такое значение t, при котором точка прямой L будет лежать на плоскости П. Подставляя x, y, z из соотношений (5.15) в уравнение плоскости П, получим уравнение, из которого найдем значение параметра t. Затем найденное значение параметра t подставляем в уравнения (5.15). Полученные таким образом x, y, z и будут координатами точки пересечения прямой L и плоскости П.

4. *Условие принадлежности прямой плоскости* П. Пусть прямая L и плоскость П заданы соответственно уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Для того чтобы прямая L принадлежала плоскости П, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:

1) перпендикулярность векторов $\vec{S}$ и $\vec{n}$;

2) точка M_0 прямой L лежала на плоскости, т.е. ее координаты удовлетворяли уравнению плоскости, а именно:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

5. *Условие принадлежности двух прямых одной плоскости*. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы соответственно уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Данные прямые лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если их направляющие векторы $\vec{S_1} = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{S_2} = \{m_2; n_2; p_2\}$ и вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ компланарны (рис. 5.15), т.е. $\vec{S_1} \cdot \vec{S_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$

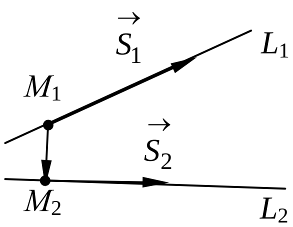


Рис. 5.15

или

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.17}$$

5.4. Поверхности второго порядка

Общие сведения

К *поверхностям второго порядка* относятся цилиндры, эллипсоиды, конусы, параболоиды и гиперболоиды. В декартовых координатах эти поверхности описываются уравнением $F(x, y, z) = 0$, левая часть которого есть целый многочлен второй степени относительно x, y, z.

Для того чтобы построить такую поверхность по ее уравнению, применяют *метод параллельных сечений*. Он состоит в том, что данную поверхность пересекают координатными плоскостями и плоскостями, им параллельными. Таким образом получают некоторые линии пересечения, по которым восстанавливают (строят) поверхность.

Поверхности второго порядка можно разбить на три группы. В каждой из них канонические уравнения поверхностей имеют общий признак, которому соответствуют некоторые особенности в расположении их относительно системы координат.

Рассмотрим канонические уравнения и изображение поверхностей каждой группы с указанием характерного признака в уравнении и особенности в расположении относительно системы координат.

Цилиндры второго порядка

Определение 5.7. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, описываемая прямой (*образующей*), движущейся вдоль некоторой линии (*направляющей*) и остающейся параллельной исходному направлению (рис. 5.16).

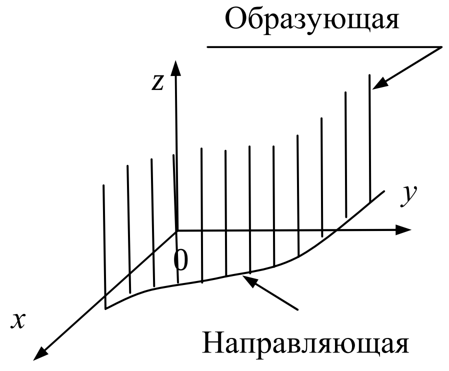


Рис. 5.16

Определение 5.8. *Цилиндром второго порядка* называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является окружность, эллипс, гипербола или парабола.

Характерным признаком уравнений цилиндров второго порядка является отсутствие в этом уравнении одной из текущих координат.

Особенности построения цилиндров: образующие параллельны той оси, координата которой отсутствует в уравнении. Уравнение направляющей совпадает с уравнением поверхности.

Таким образом, цилиндрические поверхности определяются одним из следующих уравнений:

$F\ (x, y) = 0$, образующая параллельна оси Oz, направляющая определятся системой уравнений

$$\begin{cases} F\ (x, y) = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

$F\ (y, z) = 0$, образующая параллельна оси Ox, направляющая определятся системой уравнений

$$\begin{cases} F\ (y, z) = 0, \\ x = 0; \end{cases}$$

$F\ (x, z) = 0$, образующая параллельна оси Oy, направляющая определятся системой уравнений

$$\begin{cases} F\ (x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Эллиптический цилиндр, направляющая — эллипс (рис. 5.17). $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Направляющая определяется системой уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$ Образующая $\parallel Oz$.

Круговой цилиндр, направляющая — окружность (рис. 5.18). $a = R$; $b = R$; $c = R$. Уравнение направляющей — $x^2 + y^2 = R^2$, образующая || Oz.

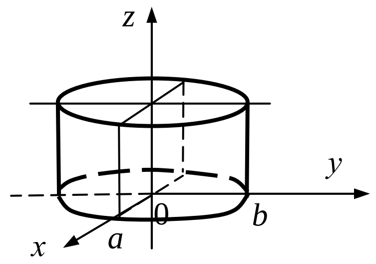


Рис. 5.17

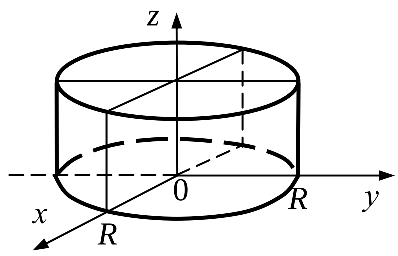


Рис. 5.18

Гиперболический цилиндр, направляющая — гипербола (рис. 5.19). $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Направляющая определяется системой уравнений $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$ Образующая || Oz, ось Ox — мнимая.

Параболический цилиндр, направляющая — парабола (рис. 5.20). $y^2 = 2px$, образующая || оси Oz, направляющая определяется системой уравнений $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = 0. \end{cases}$

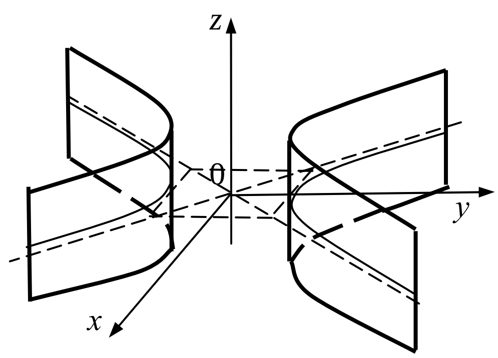


Рис. 5.19

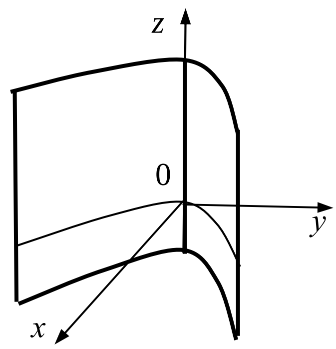


Рис. 5.20

Эллипсоид, конус, гиперболоид

Характерный признак уравнений: уравнение содержит квадраты всех трех текущих координат.

Эллипсоид трехосный (рис. 5.21). $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a \neq b \neq c$, сечениями эллипсоида координатными плоскостями являются эллипсы.

Эллипсоид вращения (рис. 5.22). $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \quad a \neq c,$ ось вращения Oz; сечениями плоскостями $x = 0$, $y = 0$ являются эллипсы. Сечением плоскостью $z = 0$ является окружность радиуса a.

Сфера (рис. 5.23). $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $a = b = c = R$, сечениями координатными плоскостями являются окружности радиуса R.

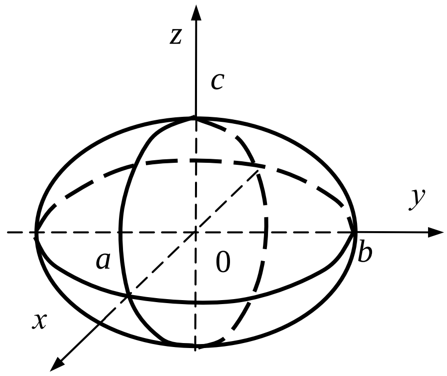


Рис. 5.21

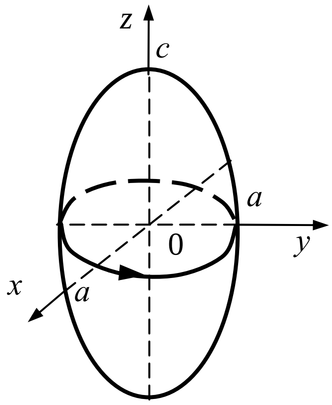


Рис. 5.22

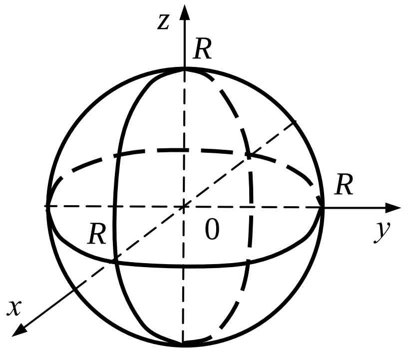


Рис. 5.23

Конус. Особенности построения: знак «–» перед квадратом одной из координат в левой части уравнения указывает на расположение поверхности вдоль оси этой переменной, т.е. осью поверхности является ось той переменной, квадрат которой входит в уравнение с отрицательным множителем.

Каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0.$ Сечением любой плоскостью, параллельной плоскости Oxy, является эллипс, ось Oz (рис. 5.24).

Однополостный гиперболоид. Особенности построения: знак «–» перед квадратом одной из координат в левой части уравнения указывает на расположение поверхности вдоль оси этой переменной, т.е. осью поверхности является ось той переменной, квадрат которой входит в уравнение с отрицательным множителем.

Каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Исследуем эту поверхность с помощью метода сечений (рис. 5.25). Рассмотрим сечение ее координатными плоскостями $x = 0$ (плоскость Oyz) и $y = 0$ (плоскость Oxz):

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

В сечениях получаются гиперболы.

Рассмотрим сечение $z = h$, параллельное плоскости *Oxy*. Линия, получающаяся в сечении — эллипс.

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a_0^2} + \dfrac{y^2}{b_0^2} = 1. \end{cases}$$

Полуоси эллипса $a_0 = a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$; $b_0 = b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$ достигают своих наименьших значений при $h = 0$ в сечении гиперболоида координатной плоскостью *Oxy* ($z = 0$) $\left(a_0 = a; b_0 = b\right)$. При $h \to \pm\infty$ $a_0, b_0 \to \infty$. Гиперболоид имеет вид трубки, бесконечно расширяющейся по мере удаления от плоскости *Oxy*.

Величины a, b, c называются полуосями. Чтобы изобразить полуось c, надо построить основной прямоугольник какой-нибудь из гипербол.

Двуполостный гиперболоид. Особенности построения: знак «–» перед квадратом одной из координат в левой части уравнения указывает на расположение поверхности вдоль оси этой переменной, т.е. осью поверхности является ось той переменной, квадрат которой входит в уравнение с отрицательным множителем.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, сечением плоскостью, параллельной плоскости *Oxy*, $x = h$ ($h > c$), является эллипс, мнимая ось *Oz* (рис. 5.26).

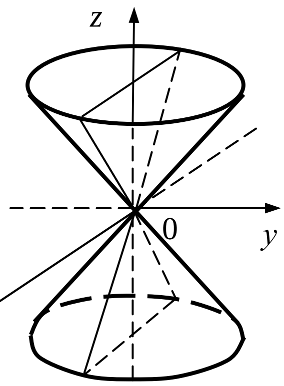


Рис. 5.24

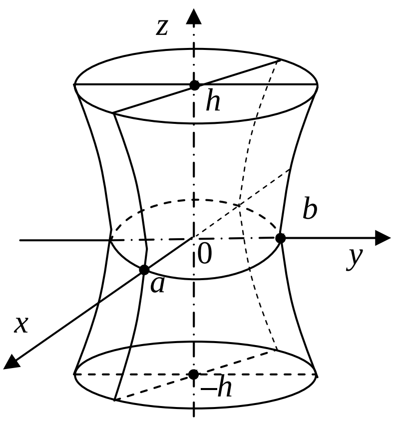


Рис. 5.25

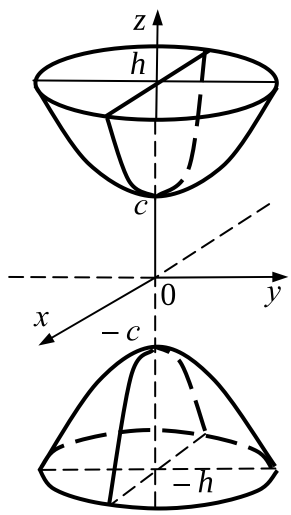


Рис. 5.26

Параболоиды

Эллиптический параболоид. Характерный признак уравнения: содержит квадраты двух переменных с положительными множителями и первую степень третьей.

Особенности построения: осью симметрии поверхности является ось той переменной, которая входит в уравнение в первой степени.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z,\ a>0,\ b>0$, сечением плоскостью, параллельной плоскости Oxy является эллипс, а параллельной оси Oz — парабола, ось симметрии — ось Oz (рис. 5.27).

Если $a = b$, то получаем параболоид вращения, а сечением плоскостью, параллельной плоскости Oxy, является окружность (т.е. вращение параболы вокруг оси).

Гиперболический параболоид. Характерный признак уравнения: содержит квадраты двух переменных с множителями противоположных знаков и первую степень третьей.

Особенности построения: осью симметрии поверхности является ось той переменной, которая входит в уравнение в первой степени.

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 2z,\ a>0,\ b>0$, ось симметрии Oz. Сечениями плоскостями, параллельными плоскости Oxy, являются гиперболы, а сечениями плоскостями, параллельными плоскостям Oxz Oyz — параболы (рис. 5.28).

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z,\ a>0,\ b>0$, ось симметрии Oz.

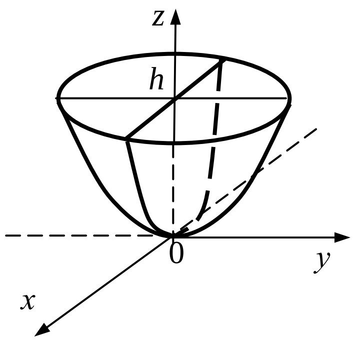


Рис. 5.27

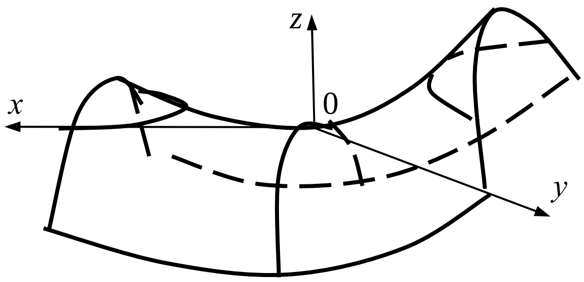


Рис. 5.28

5.5. Сводная таблица понятий и формул по теме «Прямая и плоскость в пространстве»

Понятие	Содержание, формула
П л о с к о с т ь	
Нормальный вектор плоскости $\vec{n}$	Ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости $\vec{n}=\{A;B;C\}$
Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$, где $\vec{n}=\{A;B;C\}$ — вектор нормали к плоскости

Угол между двумя плоскостями (угол между нормалями)	$\cos\alpha = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$, где $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ — векторы нормалей к данным плоскостям
Условие перпендикулярности двух плоскостей (условие перпендикулярности векторов нормали)	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
Условие параллельности двух плоскостей (условие коллинеарности нормальных векторов)	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
Условие совпадения плоскостей	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$
Уравнение плоскости в отрезках	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью от осей координат Ox, Oy, Oz соответственно.
Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 (x_0; y_0; z_0) перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) и M_3 (x_3, y_3, z_3)	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
Расстояние d от точки M_0 (x_0; y_0; z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$	$d = \left\lvert \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right\rvert$
П р я м а я	
Направляющий вектор прямой $\vec{S}$	Ненулевой вектор, параллельный данной прямой или лежащий на ней $\vec{S} = \{m; n; p\}$
Общее уравнение прямой (пересечение двух плоскостей)	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
Канонические уравнения прямой	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где M_0 (x_0; y_0; z_0) — точка на прямой, $\vec{S} = \{m; n; p\}$ — направляющий вектор прямой, x, y, z — текущие координаты точек прямой

Понятие	Содержание, формула
Угол между двумя прямыми (угол между направляющими векторами)	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 \rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
Условие параллельности двух прямых (коллинеарность направляющих векторов)	$\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$
Условие перпендикулярности двух прямых (перпендикулярность направляющих векторов)	$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
Уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 (x_1; y_1; z_1), M_2 (x_2; y_2; z_2)	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
Параметрические уравнения прямой	$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{array}\right\}$
П р я м а я и п л о с к о с т ь	
Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$	$\sin\varphi = \dfrac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$
Условие параллельности прямой и плоскости (перпендикулярность направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости)	$Am + Bn + Cp = 0$
Условие перпендикулярности прямой и плоскости (коллинеарность направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости)	$\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$
Условие принадлежности прямой плоскости	Одновременное выполнение равенств $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$
Условие принадлежности двух прямых $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$ одной плоскости	$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Плоскость

Пример 5.1. Определить отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - 3y + 8z - 4 = 0$ на осях координат.

Решение. Приведем данное уравнение плоскости к уравнению в отрезках. Для этого свободный член перенесем в правую сторону, а затем каждое слагаемое разделим на него, т.е. на 4:

$$\frac{2x}{4} - \frac{3y}{4} + \frac{8z}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{-\frac{4}{3}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Следовательно, плоскость отсекает по оси Ox отрезок $a = 2$, по оси Oy – $b = -3/4$, по оси Oz – $c = 1/2$.

Пример 5.2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A\ (2; -1; 4)$ и $B\ (3; 2; -1)$ перпендикулярно к плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

Решение. В качестве нормального вектора $\vec{N}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору

$$\vec{AB} = \{3-2;\ 2+1;\ -1-4\} \quad \Rightarrow \quad \vec{AB} = \{1;\ 3;\ -5\}$$

и нормальному вектору $\vec{n} = \{1; 1; 1\}$ данной плоскости. Поэтому за $\vec{N}$ примем векторное произведение $\vec{AB}$ и $\vec{n}$

$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\,\vec{i} - 6\,\vec{j} - 2\,\vec{k}\,.$$

Остается воспользоваться уравнением (5.6) плоскости, проходящей через данную точку (например, точку A) перпендикулярно заданному вектору $\vec{N} = 8\,\vec{i} - 6\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$,

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0,$$

$$8\,(x - 2) - 6\,(y + 1) - 2\,(z - 4) = 0 \text{ или } 8x - 6y - 2z - 14 = 0.$$

Пример 5.3. Построить плоскости:

1) $3x + 4y - 6z - 12 = 0$;

2) $y + z - 2 = 0$;

3) $y + z = 0$;

4) $3y - 7 = 0$.

Решение. 1) Приведем данное уравнение к уравнению в отрезках $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = 1$.

Следовательно, данная плоскость отсекает по оси Ox отрезок $a = 4$, по оси Oy – $b = 3$, по оси Oz – $c = -2$ (рис. 5.29).

2) Так как в уравнении отсутствует координата x, то данная плоскость параллельна оси Ox и проходит через прямую $\frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ (рис. 5.30).

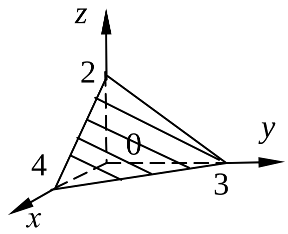


Рис. 5.29

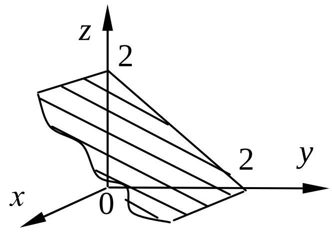


Рис. 5.30

3) В уравнении отсутствует свободный член и переменная x, поэтому плоскость проходит через ось Ox, т.е. содержит ее. А также проходит через прямую $y = -z$ (рис. 5.31).

4) В данном уравнении отсутствуют переменные x и z, поэтому плоскость проходит параллельно плоскости xOz и через прямую $y = 7/3$ (рис. 5.32).

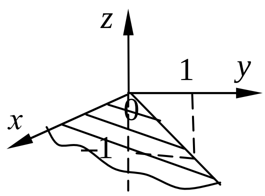


Рис. 5.31

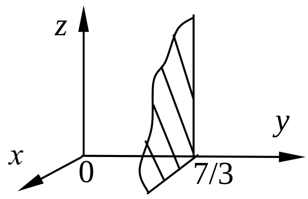


Рис. 5.32

Пример 5.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; –1; 2), B (2; 1; 2) и C (1; 1; 4).

Решение. Воспользуемся уравнением (5.5) плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4(x-1) - 2(y+1) + 2(z-2) =$$

$$= 4x - 2y + 2z - 10 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2y + 2z - 10 = 0 \text{ или}$$

$$2x - y + z - 5 = 0 .$$

Пример 5.5. Найти расстояние от точки (5; 1; –1) до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

Решение. Используя формулу (5.7) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 5-2\cdot 1-2\cdot(-1)+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

Пример 5.6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (2; –1; 1), перпендикулярно к плоскостям $3x + 2y - z + 4 = 0$ и $x + y + z - 3 = 0$.

Решение. Очевидно, что в качестве нормального вектора $\vec{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1=\{3;\,2;\,-1\}$ и $\vec{n}_2=\{1;1;1\}$ данных плоскостей:

$$\vec{N}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\,\vec{i}-4\,\vec{j}+1\,\vec{k}\,.$$

Теперь, используя формулу (5.6), получаем

$$A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+C\,(z-z_0)=0,$$

$$3\,(x-2)-4\,(y+1)+1\,(z-1)=0 \text{ или } 3x-4y+z-11=0.$$

Пример 5.7. Найти угол между плоскостями $4x + 3y - 5\,z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (5.2), тогда

$$\cos\,\alpha=\frac{|4\cdot 4+3\cdot 3+5\cdot 5|}{\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+(-5)^2}}=\frac{50}{50}=1.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos 1 = 0$, т.е. плоскости параллельны.

Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пример 5.8. Привести к каноническому виду уравнения прямой:
$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0,\\ 5x+4y-z-7=0.\end{cases}$$

Решение. Найдем вектор $\vec{n}$, перпендикулярный нормальным векторам $\vec{n}_1=\{2;-1;\,3\}$, $\vec{n}_2=\{5;4;-1\}$ соответствующих плоскостей:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 5 & 4 & -1\end{vmatrix}=-11\,\vec{i}+17\,\vec{j}+13\,\vec{k}\,.$$

В качестве точки M_1 (x_1; y_1; z_1), через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например, с плоскостью yOz. Так как при этом $x_1 = 0$, то координаты y_1 и z_1 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x = 0$:

$$\begin{cases} -y+3z-1=0, \\ 4y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11z-11=0, \\ 4y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Итак, получена точка M_1 (0; 2; 1). Запишем канонические уравнения (5.11) данной прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-0}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13} \text{ или}$$

$$\frac{x}{-11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

Пример 5.9. Написать уравнение прямой, проходящей через точки A (–1; 2; 3) и B (2; 6; –2).

Решение. Воспользуемся формулой (5.12):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{6-2}=\frac{z-3}{-2-3} \text{ или}$$

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}.$$

Пример 5.10. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (–2; 1; –1) параллельно вектору $\vec{p}=\{1;-2;3\}$.

Решение. Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (5.11). Полагая в равенствах

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

$l = 1$, $m = -2$, $n = 3$, $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $z_1 = -1$, получаем

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Приравнивая поочередно каждое уравнение к параметру t, получим

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}=t \text{ или } \begin{cases} x+2=t, \\ y-1=-2t, \\ z+1=3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t-2, \\ y=-2t+1, \\ z=3t-1. \end{cases}$$

Пример 5.11. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежит в плоскости $2x + y - z = 0$.

Решение. Проверим выполнение условий (5.16): $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \end{cases}$

где $A = 2$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$, $m = 2$, $n = -1$, $p = 3$, $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = -3$.

$$\begin{cases} 2\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3=0, \\ 2\cdot(-1)+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-3)+0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\equiv 0, \\ 0\equiv 0. \end{cases}$$

Следовательно, прямая принадлежит плоскости.

Пример 5.12. Найти угол между прямой $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-1}{3}$ и плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой (5.14)

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

где $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, $m = -2$, $n = -6$, $p = 3$.

$$\sin\varphi=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot(-6)+1\cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{-7}{\sqrt{6}\sqrt{49}}=-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, $\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Поверхности второго порядка

Пример 5.13. Определить и построить цилиндр $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$.

Решение. Так как две переменные в квадратах и все коэффициенты положительные, то делаем вывод, что данная поверхность — это эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox, и направляющей эллипсом $\frac{y^2}{(5)^2}+\frac{z^2}{(2)^2}=1$ в плоскости yOz.

В плоскости yOz строим эллипс с полуосями $b = 5$, $c = 2$ (рис. 5.33). Затем строим такой же эллипс в любой плоскости $x = h$ и параллельно оси Ox проводим образующие. Поверхность является неограниченной, на рисунке изображена лишь часть ее.

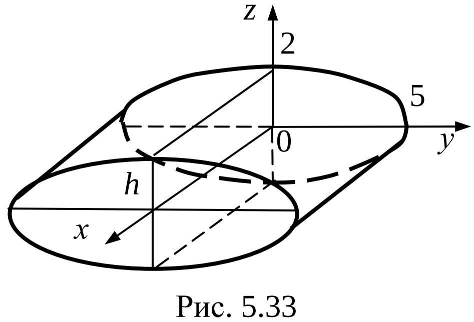


Рис. 5.33

Пример 5.14. Определить и построить поверхность $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1.$

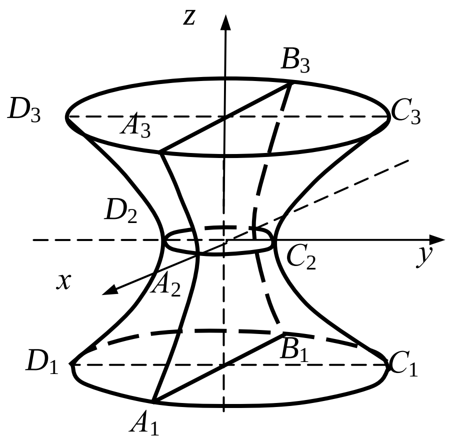


Рис. 5.34

Решение. Так как все переменные в квадратах и один из коэффициентов отрицателен, то данная поверхность — это однополостный гиперболоид с центром в начале координат и соответствующими полуосями: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Гиперболоид расположен вдоль оси Oz (множитель при квадрате этой координаты имеет отрицательный знак). Сначала строим перпендикулярно оси Oz три сечения (рис. 5.34). Одно проходит через начало координат, два других — по обе стороны от него, например, в плоскостях $z = 4$ и $z = –4$.

Этими сечениями являются эллипсы:

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} z=4, \\ x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{25}{9}; \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-4, \\ x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{25}{9}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+\frac{y^2}{(2)^2}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} z=4, \\ \frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-4, \\ \frac{x^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{10}{3}\right)^2}=1. \end{cases}$$

Вершины первого эллипса, называемого горловым, лежат в точках C_2 (0; 2; 0), D_2 (0; –2; 0), A_2 (1; 0; 0), B_2 (–1; 0; 0).

Второй эллипс, расположенный в плоскости $z = 4$, имеет вершины C_1 (0; $\frac{10}{3}$; 4), D_1 (0; $-\frac{10}{3}$; 4), A_1 ($\frac{5}{3}$; 0; 4), B_1 ($-\frac{5}{3}$; 0; 4).

Третий эллипс расположен в плоскости $z = –4$, его вершинами служат точки C_3 (0; $\frac{10}{3}$; –4), D_3 (0; $-\frac{10}{3}$; –4), A_3 ($\frac{5}{3}$; 0; –4), B_3 ($-\frac{5}{3}$; 0; –4).

Теперь строим сечение однополостного гиперболоида координатной плоскостью yOz. В сечении получается гипербола

$$\begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ \frac{y^2}{(2)^2}-\frac{z^2}{(3)^2}=1. \end{cases}$$

Она расположена симметрично относительно осей Oy и Oz, координаты ее вершин, лежащих на оси Oy, определяются решением системы

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \\ \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Полученные точки (0; 2; 0) и (0; –2; 0) являются уже известными нам вершинами C_2 и D_2 горлового эллипса.

Решая системы

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \\ \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ z = 4, \\ y^2 = \dfrac{100}{9}; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ z = 4, \\ y = \pm\dfrac{10}{3} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 0, \\ z = -4, \\ \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ z = 4, \\ y^2 = \dfrac{100}{9}; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ z = 4, \\ y = \pm\dfrac{10}{3}, \end{cases}$$

получим, соответственно, точки C_1 и D_1, C_3 и D_3. Строим ветви гиперболы $C_1C_2C_3$ и $D_1D_2D_3$.

Аналогично получаем гиперболы $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ в сечении однополостного гиперболоида плоскостью xOz.

Достраиваем поверхность и заключаем, что однополостный гиперболоид представляет собой трубку, бесконечно расширяющуюся в обе стороны от горлового эллипса.

Пример 5.15. Построить тело, ограниченное поверхностями: $4z = x^2 + y^2$, $z = 15 - x^2 - y^2$.

Решение. Обе поверхности являются эллиптическими параболоидами. Первый параболоид имеет вершину в начале координат, а второй — в точке (0; 0; 15). Чтобы построить тело, ограниченное этими поверхностями, найдем плоскость их пересечения. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ z = 15 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ 15 - z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4z = 15 - z \quad \Rightarrow$$

$$5z = 15 \quad \Rightarrow z = 3$$

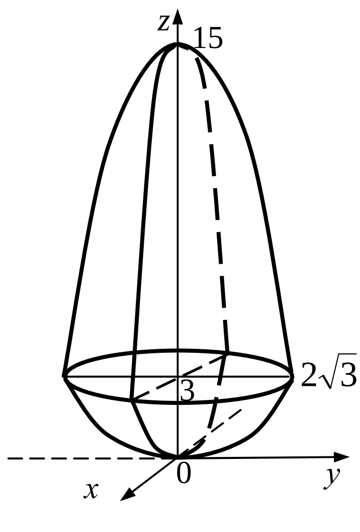


Рис. 5.35

Значит, поверхности пересекаются на плоскости, параллельной плоскости xOy, на высоте $z = 3$ и имеют сечение $12 = x^2 + y^2$ — окружность радиуса $2\sqrt{3}$ (рис. 5.35).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку *M* (2; –1; –4) и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \{3; -6; 1\}$. *Ответ*: $3x - 6y + z - 8 = 0$.

5.2. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостями:

а) $2x - 3y + 4z - 24 = 0$ (*ответ*: $a = 12$, $b = -8$, $c = 6$);

б) $4x + y - 3z - 2 = 0$ (*ответ*: $a = 1/2$, $b = 2$, $c = -2/3$).

5.3. Построить плоскости:

а) $2x + 3y - 4z - 12 = 0$; б) $2x - 3y - 6 = 0$;

в) $4x + 5y = 0$; г) $4x + 9 = 0$.

5.4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки *A* (–2; 4; 1), *B* (0; 2; –1), *C* (2; 0; –1). *Ответ*: $x + y - 2 = 0$.

5.5. Найти угол между двумя плоскостями $11x - 8y - 7z + 5 = 0$ и $7x + 2y - 8z - 3 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

5.6. Составить канонические и параметрические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x + y - 6z - 3 = 0, \\ 3x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0, \\ 4x + 5y - 6z - 2 = 0. \end{cases}$

Ответ: а) $\frac{x}{-11} = \frac{y+3}{-13} = \frac{z+1}{-4}$; $\begin{cases} x = -11t, \\ y = -13t - 3, \\ z = -4t - 1; \end{cases}$

б) $\frac{x-5}{-9} = \frac{y}{24} = \frac{z+1}{14}$; $\begin{cases} x = -9t + 5, \\ y = 24t, \\ z = 14t - 1. \end{cases}$

5.7. Даны вершины треугольника *A* (3; –1; –1), *B* (1; 2; –7), *C* (–5; 14; –3). Найти угол *B*. *Ответ*: 74°42′.

5.8. Найти расстояние от точки *C* (–5; 4; 3) до прямой $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$. *Ответ*: $2\sqrt{10}$.

5.9. Проверить, лежат ли прямые $\begin{cases} x - 2y + 8 = 0, \\ y + z - 6 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x + 2z - 3 = 0, \\ x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$ в одной плоскости.

5.10. Найти величину острого угла между прямой $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $2x + y + 2z - 5 = 0$. *Ответ*: $\varphi = 45°$.

5.11. Определить следующие поверхности:

а) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x + 15y - 9z + 33 = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z - 28 = 0$;

в) $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$;

г) $-x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 24z + 52 = 0$;

д) $x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 10 = 0$;

е) $z^2 - 8x - 2z - 7 = 0$;

5.12. Определить и построить поверхности:

а) $x^2 + y^2 - 4z^2 = -1$;

б) $3x^2 + y^2 = 2(z - 2)$;

в) $y^2 = 15z$;

г) $x^2 - 9y^2 = 4z^2$;

д) $x^2 = 5y - 1$;

е) $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;

ж) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{81} = 1$.

6. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

6.1. Функция одной переменной. Основные элементарные функции

Определение 6.1. *Постоянной* называется величина, сохраняющая одно и то же значение или вообще, или в данном процессе.

Определение 6.2. *Переменной* называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Определение 6.3. Величина y называется *однозначной функцией* от переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует единственное вполне определенное значение величины y. Если же одному и тому же значению аргумента x соответствует несколько (может быть, бесконечное множество) значений y, то y называется *многозначной функцией* аргумента x.

Во всех случаях, когда употребляется термин «функция», подразумевается, если не оговорено противное, однозначная функция.

Переменная x называется при этом аргументом или независимой переменной, y иногда называют зависимой переменной. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Обозначают функцию $y = f(x)$ или $y(x)$.

Определение 6.4. Совокупность всех значений независимой переменной x, для которых функция y определена, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Определение 6.5. Совокупность значений, которые может принимать данная функция y, называется *областью изменения* этой функции.

Определение 6.6. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.

Определение 6.7. Если функция $y(x)$ задана в виде уравнения $f(x, y) = 0$, не разрешенного относительно y, то говорят, что *функция задана неявно* или *в неявном виде*.

Определение 6.8. Если функция имеет структуру $y = f(u(x))$, то ее называют *сложной функцией*, где u называется *промежуточным аргументом*, а x — *независимой переменной*. Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

Определение 6.9. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в некотором промежутке из области ее определения, если для любых $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Промежутки возрастания, убывания называются промежутками монотонности.

Определение 6.10. Функция $y(x)$ называется *четной*, если $y(-x) = y(x)$, и *нечетной*, если $y(-x) = -y(x)$. График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат. В случае если функция $y(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то говорят, что она *общего вида*.

Определение 6.11. Функция $y(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T такое, что $y(x + T) = y(x)$.

Определение 6.12. *Нулями* или *корнями функции* называют все те значения аргумента, при которых функция обращается в ноль.

Обычно рассматривают три способа задания функции: аналитический (в виде формулы), табличный (таблица значений x и y) и графический (задан график функции).

Определение 6.13. *Обратная функция* $x = \varphi(y)$ — это функция, которая получается из данной функции $y = f(x)$, если из соотношения $y = f(x)$ выразить x через y (т.е. нужно решить уравнение $y = f(x)$ относительно x).

Например, обратной к функции $y = 5x$ является функция $x = \dfrac{y}{5}$; обратной к функции $y = e^x$ — функция $x = \ln y$.

Если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ являются взаимно обратными, то их графиком является одна и та же кривая.

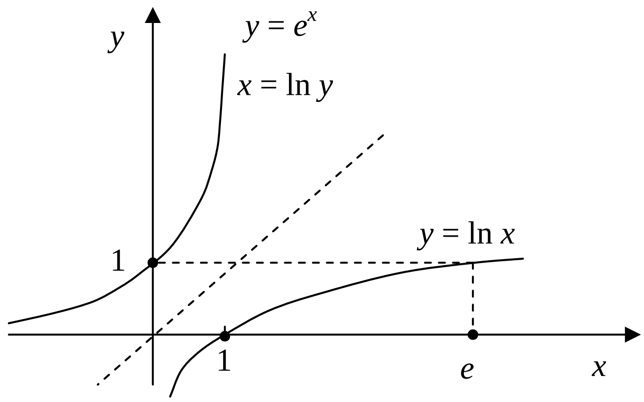


Рис. 6.1

Если же мы обозначим аргумент обратной функции снова через x, а функцию через y и построим их в одной координатной системе, то получим уже не один, а два различных графика, которые будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 6.1).

Среди функций, заданных аналитически, основная роль в нашем курсе отводится элементарным. *Основными элементарными функциями* являются функции вида:

$y = C$,	$y = x^n$,	$y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,	$y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$,
$y = \sin x$,	$y = \cos x$,	$y = \operatorname{tg} x$,	$y = \operatorname{ctg} x$,
$y = \arcsin x$,	$y = \arccos x$,	$y = \operatorname{arctg} x$,	$y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение 6.14. *Элементарными функциями* называются все функции, которые можно составить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций.

Элементарные функции составляют значительную часть функций, которые рассматриваются в общем курсе высшей математики.

6.2. Модуль действительного числа

Определение 6.15. *Модулем* (или *абсолютной величиной*) действительного числа x называется неотрицательное число, обозначаемое $|x|$ и определяемое формулой $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Из определения следует, что для всех x справедливо соотношение $x \le |x|$. Если расположить действительные числа на числовой оси, то модуль $|x|$ любого числа x представляет собой расстояние от начала отсчета O до соответствующей точки с абсциссой x (рис. 6.2).

Отсюда следует: если модуль числа x удовлетворяет неравенству $|x| < a$ (или $|x| \le a$), где $a > 0$, то число x подчинено ограничению $-a < x < a$ (или соответственно $-a \le x \le a$), т.е. x принадлежит интервалу $(-a; a)$ (или отрезку $[-a; a]$) (рис. 6.3).

Рассмотрим более общий случай: если $|x - x_0| < a$ (или $|x - x_0| \le a$), то число x подчинено ограничению $x_0 - a < x < x_0 + a$ (или соответственно $x_0 - a \le x \le x_0 + a$), т.е. x принадлежит интервалу с центром в точке x_0 $(x_0 - a; x_0 + a)$ (или отрезку $[x_0 - a; x_0 + a]$) (рис. 6.4).

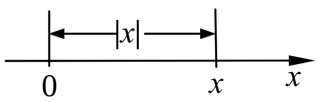


Рис. 6.2

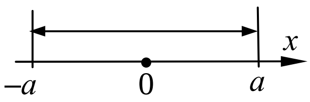


Рис. 6.3

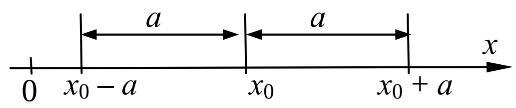


Рис. 6.4

Модуль действительного числа обладает свойствами:

1. $|x + y| \le |x| + |y|$. Неравенство распространяется на любое конечное число слагаемых.

2. $|x - y| \ge |x| - |y|$.

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. Равенство распространяется на любое конечное число сомножителей.

4. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

5. $|x^n| = |x|^n$.

6.3. Предел функции одной переменной

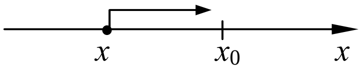
Определение 6.16. Постоянное число x_0 называется *пределом переменной* величины x в данном процессе, если для каждого наперед заданного произвольно малого $\delta > 0$ можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству $|x - x_0| < \delta$.

Если число x_0 есть предел переменной величины x, то говорят, что x стремится к пределу x_0, и пишут $x \to x_0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

С помощью логических символов это определение выражается следующим образом: $x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \left(\forall \delta > 0 \quad \exists x : |x - x_0| < \delta\right)$.

Если $x \to x_0$, $x < x_0$, то говорят, что x стремится к x_0 слева (рис. 6.5) и пишут $x \to x_0 - 0$.

Если $x \to x_0$, $x > x_0$, то говорят, что x стремится к x_0 справа (рис. 6.6) и пишут $x \to x_0 + 0$.



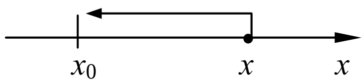


Рис. 6.5 Рис. 6.6

Определение 6.17. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$, если, каково бы ни было положительное число ε, найдется такое δ, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$

Символическая запись:

$$\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A\right) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

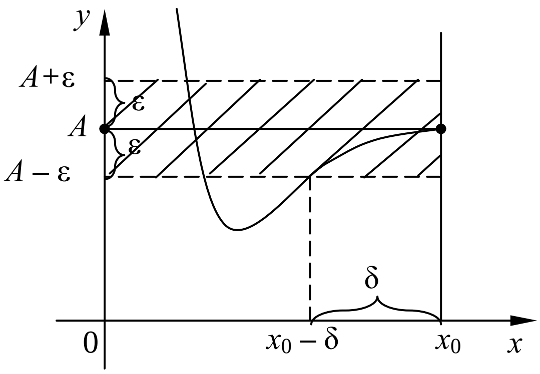


Рис. 6.7

Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, заключенных между $x_0 - \delta$ и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 6.7).

Аналогично пределу функции при $x \to x_0 - 0$ вводится понятие предела при $x \to x_0 + 0$.

Определение 6.18. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$, если, каково бы ни было число ε, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

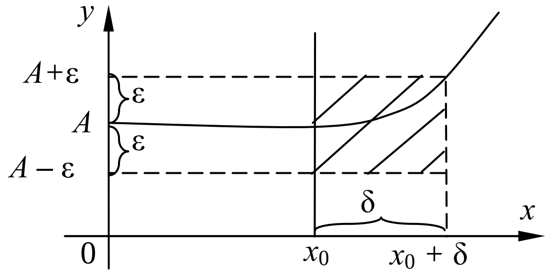
Символическая запись:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\colon x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, для всех x, заключенных между x_0 и $x_0 + \delta$ (рис. 6.8).

Пределы функции при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$ называются *односторонними* пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что $f(x)$ имеет двусторонний предел при $x \to x_0$, или просто имеет предел при $x \to x_0$ (рис. 6.9).



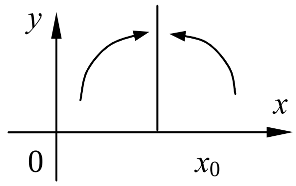


Рис. 6.8

Рис. 6.9

Определение 6.19. Число A называется *пределом* $f(x)$ при $x \to x_0$, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое δ, что для всех $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ (за исключением, быть может, точки x_0) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Символическая запись:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

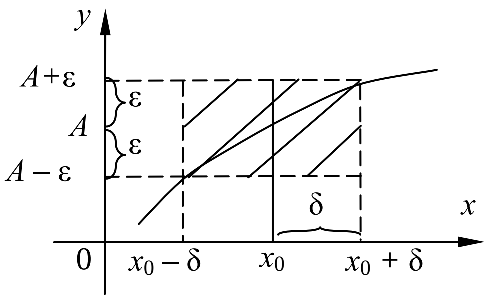


Рис. 6.10

Геометрически это значит, что для всех точек x, отстоящих от точки x_0 не далее чем на δ, точки графика функции $f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 6.10).

Определение 6.20. Назовем *окрестностью точки* x_0 любой интервал, содержащий эту точку.

Дельта-окрестностью (δ-*окрестностью*) точки x_0 называется интервал $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$.

6.4. Бесконечно большой аргумент и функция

Определение 6.21. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента x, если существует положительное число M такое, что для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области, будет выполняться неравенство $|f(x)| \le M$. Если же такого числа M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной* в данной области.

Определение 6.22. Если x неограниченно возрастает, т.е. может стать больше как угодно большого наперед заданного числа $M > 0$, т.е. $x > M$, или если x неограниченно убывает, т.е. может стать меньше любого наперед заданного числа $x < -M$ ($M > 0$), то пишут $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ соответственно и говорят, что *x бесконечно большой аргумент*.

Определение 6.23. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если для каждого положительного числа M, как бы велико оно ни было, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений x, отличных от x_0, удовлетворяющих условию $| x - x_0 | < \delta$, имеет место неравенство $| f(x)| > M$, т.е.

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \neq x_0 \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow | f(x) | > M.$$

Если $f(x)$ стремится к ∞ при $x \to x_0$ и при этом принимает только положительные или только отрицательные значения (рис. 6.11), соответственно пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ или } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

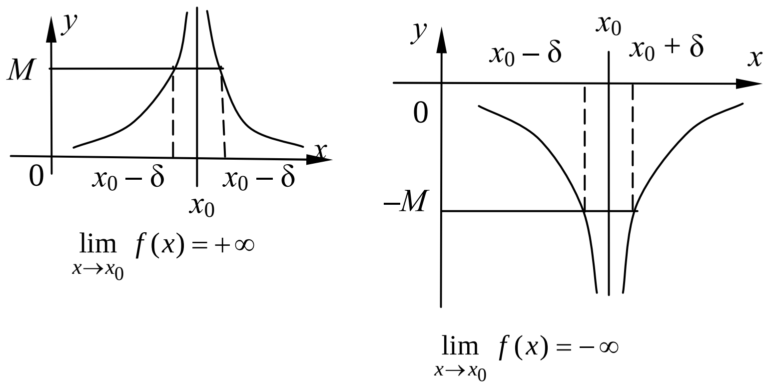


Рис. 6.11

Дадим теперь точное определение предела функции при $x \to +\infty$.

Определение 6.24. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если, каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ ($x < -N$) выполняется неравенство $| f(x) - A | < \varepsilon$.

Обозначается $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \right)$.

Символическая запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x > N\ (x < -N) \Rightarrow | f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функция, стремящаяся к пределу, может оставаться все время меньше его или больше его и, наконец, может колебаться около него (рис. 6.12).

Число N, вообще говоря, зависит от ε. Чем меньше ε, т.е. чем уже полоса между прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, тем большим будет N.

Определение 6.25. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при бесконечно большом аргументе, если, каково бы ни было $M > 0$, можно найти такое число $N > 0$, что для всех $|x| > N$ выполняется неравенство $| f(x) | > M$ (рис. 6.13).

Обозначается

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Символическая запись:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x\colon |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M.$$

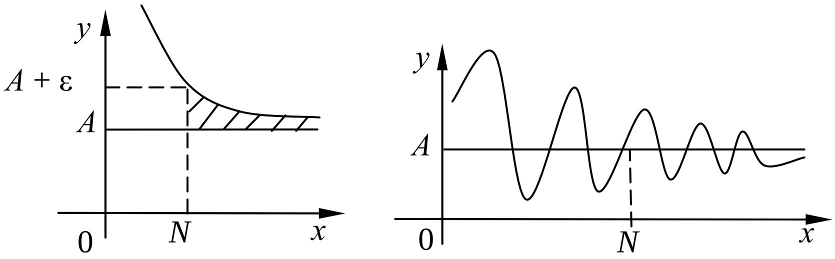


Рис. 6.12

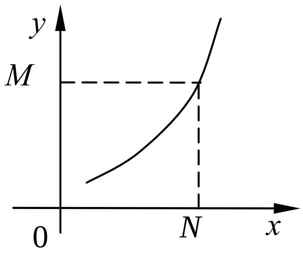


Рис. 6.13

6.5. Бесконечно малые функции (б.м.ф.)

Определение 6.26. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой соответственно при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$.

Обозначаются бесконечно малые функции буквами греческого алфавита $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, …

Замечание. Далее будем рассматривать бесконечно малые функции, определенные в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0. Точка x_0 может быть конечной или бесконечно удаленной ($+\infty$, $-\infty$, ∞).

Свойства бесконечно малых функций

1. Сумма конечного числа б.м.ф. при $x \to x_0$ есть функция бесконечно малая при $x \to x_0$.

2. Произведение б.м.ф. при $x \to x_0$ на функцию, ограниченную в окрестности точки x_0, является функцией бесконечно малой при $x \to x_0$.

Следствие 1. Произведение двух б.м.ф. при $x \to x_0$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$

Следствие 2. Произведение б.м.ф. при $x \to x_0$ на число есть б.м.ф. при $x \to x_0$.

3. Если $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, а функция $\varphi(x)$ имеет в точке x_0 предел, отличный от нуля, то частное $\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$.

Связь бесконечно малой функции с бесконечно большой функцией

Теорема 6.1. Если функция $f(x)$ является бесконечно большой (б.б.ф.) при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ — б.м.ф. для тех же x.

Теорема 6.2. Если функция $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, не обращающаяся в ноль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — б.б.ф. для тех же x.

Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$.

Определение 6.27. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией более высокого порядка*, чем $\beta(x)$.

Например, $\alpha(x) = x^2$ — б.м.ф. при $x \to 0$ более высокого порядка, чем $\beta(x) = x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Определение 6.28. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми функциями одного порядка*. Например, $\alpha(x) = 2x$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$ — б.м.ф. одного порядка, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$.

Определение 6.29. Говорят, что б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ *не сравнимы*, если отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ не имеет предела, ни конечного, ни бесконечного.

Например, бесконечно малые при $x \to 0$ функции $\alpha(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ и $\beta(x) = x$ не сравнимы, так как их отношение $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \sin\dfrac{1}{x}$ не имеет конечного предела в точке $x = 0$ и не является б.б.ф. при $x \to 0$.

Определение 6.30. Две б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен единице: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентные б.м.ф. представляют частный случай б.м.ф. одного порядка. Эквивалентность б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается следующим образом: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, при $x \to x_0$.

Теорема 6.3. Предел отношения двух б.м.ф. при $x \to x_0$ не изменяется, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей б.м.ф. при $x \to x_0$.

Замечание. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$, отношение эквивалентности обладает свойством: рефлективности: $\alpha(x) \sim \alpha(x)$, при $x \to x_0$; симметричности: если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$, при $x \to x_0$; транзитивности: если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, при $x \to x_0$.

Эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$

1. $\sin x \sim x$. 2. $\operatorname{tg} x \sim x$. 3. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$. 4. $\arcsin x \sim x$. 5. $\operatorname{arctg} x \sim x$. 6. $\ln(1 + x) \sim$ $\sim x$. 7. $a^x - 1 \sim x \ln a$. 8. $e^x - 1 \sim x$. 9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$. 10. $(1 + x)^p - 1 \sim px$, $p > 0$. 11. $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$.

6.6. Основные теоремы о пределах

Для определенности все доказательства и формулировки проведем для $x \to + x_0$. Теоремы для случаев $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to x_0 \pm 0$ совершенно аналогичны.

Теорема 6.4 (*прямая о связи между функцией, имеющей предел, и б.м.ф.*). Если функция $f(x)$ имеет предел (при $x \to x_0$), равный A, то ее можно представить как сумму числа A и б.м.ф. (при $x \to x_0$), т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{6.1}$$

где $\alpha(x)$ — б.м.ф. при $x \to \infty$.

Теорема 6.5 (*обратная о связи между функцией, имеющей предел, и б.м.ф.*). Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и некоторой б.м.ф. ($x \to x_0$), т.е. $f(x) = A + \alpha(x)$, то число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

Теорема 6.6. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена своим пределом в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 6.7 (*о пределе постоянной функции*). Предел постоянной при $x \to x_0$ равен самой этой постоянной.

$$\lim_{x\to x_0} C = C, \text{ где } C = \text{const}.$$

Теорема 6.8 (*о пределе суммы функций, имеющих предел*). Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B.$$

Замечание. Теорема 6.8 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 6.9 (*о пределе произведения функций, имеющих пределы*). Предел произведения двух функций равен произведению их пределов, т.е. если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B \cdot$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Замечание. Теорема 6.9 справедлива для любого конечного числа сомножителей.

Следствие 2. Предел степени равен степени предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^n.$$

Теорема 6.10 (*о пределе частного*). Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю, т.е. если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

Теорема 6.11. Если $f(x)\geq 0$ в окрестности точки x_0 и при $x\to x_0$ имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\geq 0.$$

Теорема 6.12 (*переход к пределу в неравенстве*). Если $f(x)\leq g(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеет предел, то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\leq\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Теорема 6.13 (*о пределе промежуточной функции*). Пусть три функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют неравенствам $\varphi(x)\leq$ $\leq f(x)\leq g(x)$ для $x\to x_0$ (рис. 6.14).

Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$, то и $f(x)$ имеет предел, равный A: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

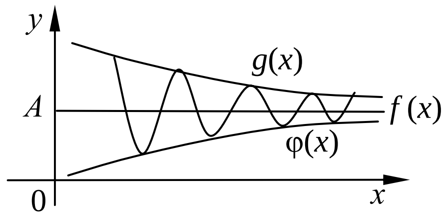


Рис. 6.14

Теорема 6.14. Предел логарифма функции равен логарифму ее предела, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}(\log_a f(x))=\log_a\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right).$$

Теорема 6.15. Если $\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0}f(x)}.$$

Раскрытие неопределенностей — это методы вычисления пределов функций, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т.е. переходят в выражения (неопределенности) типа $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$, по которым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы.

Рассмотрим дробную рациональную функцию, т.е. отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m}.$$

1. Пусть $x \to a$. Если $\lim\limits_{x \to a} Q_m(x) \neq 0,$ то

$$\lim_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} P_n(x)}{\lim\limits_{x \to a} Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}.$$

Если $P_n(a) \neq 0$, $Q_m(a) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} R(x) = \infty$. Если $P_n(a) = 0$, $Q_m(a) = 0$, получим неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, необходимо выделить критический множитель, т.е. множитель, равный нулю при $x = a$, $(x - a)$ и сократить дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ один или несколько раз на этот множитель.

2. Пусть $x \to \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} Q_m(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} P_n(x) = \infty$. Получим неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. В этом случае надо и числитель и знаменатель дроби разделить на старший член числителя $\left(x^n\right)$ или знаменателя $\left(x^m\right)$. В результате получим

$$\lim_{x \to \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \frac{b_0}{a_0}, & n = m, \\ 0, & n < m, \end{cases}$$

т.е. предел дробной рациональной функции при $x \to \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя одинаковы, и равен нулю или бесконечности, если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя.

3. Выражения, содержащие иррациональности в числителе и знаменателе и дающие неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, приводятся к рациональному виду во многих случаях путем введения новой переменной.

Другим приемом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

4. При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$. Каждый из этих случаев путем преобразования данной функции можно привести к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

6.7. Замечательные пределы

Первый замечательный предел (неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$) — $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, где угол x измеряется в радианах. *Второй замечательный предел* (неопределенность типа 1^{∞}) — $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$, где e = 2,7183… — иррациональное число, или

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Другие важные пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$

6.8. Непрерывность функции

Основные определения

Пусть функция $y = f(x)$ определена при некотором значении x_0 и в некоторой ее окрестности (рис. 6.15). Пусть $y_0 = f(x_0)$. Если x получит некоторое положительное или отрицательное приращение Δx и примет значение $x = x_0 + \Delta x$, то функция y получит некоторое приращение Δy. Новое, наращенное значение функции будет $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Тогда приращение функции определяется формулой

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

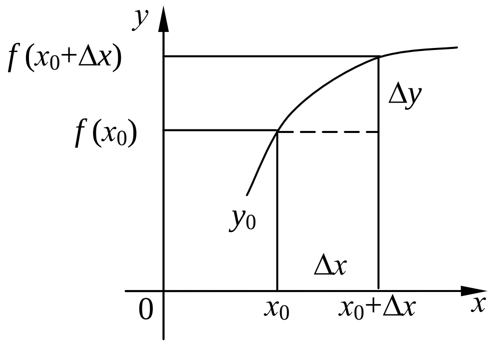


Рис. 6.15

Определение 6.31. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0 \cdot$$

Приведем еще одно определение непрерывной в точке функции.

Определение 6.32. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) эта функция определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) имеет место равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. когда предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в предельной точке.

Определение 6.33. Функция, непрерывная в каждой точке некоторого отрезка, называется *непрерывной на этом отрезке*.

Определение 6.34. Если условие непрерывности функции в точке x_0 не выполняется, то функция называется *разрывной в этой точке*, а сама точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f(x)$.

Теорема 6.16. Функция $f(x)$ непрерывная при x_0 тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

или, в других обозначениях,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{6.2}$$

Классификация точек разрыва функции

Определение 6.35. Если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, но не выполнено хотя бы одно из равенств (6.2), то точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* (рис. 6.16). Если при этом еще

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется *устранимой точкой разрыва* (достаточно изменить значение $f(x)$ в одной точке, положив $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, как функция станет непрерывной). Если же в точке x_0 не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* (рис. 6.17).

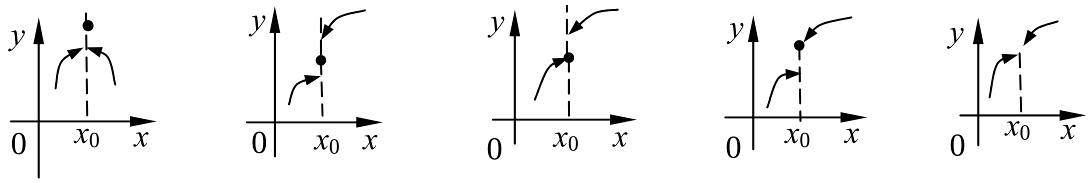


Рис. 6.16

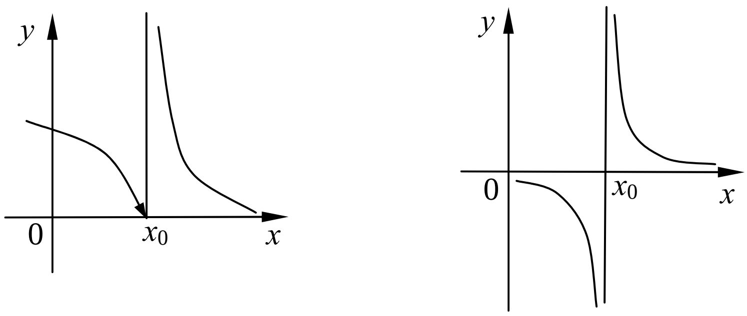


Рис. 6.17

Операции над непрерывными функциями

Теорема 6.17. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, произведение также непрерывны в точке x_0. Если, кроме того, $g(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 6.18. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 6.19. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области своего существования.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 6.20. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

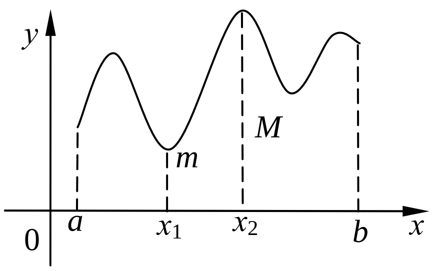


Рис. 6.18

Геометрическое истолкование (рис. 6.18). Эта теорема утверждает, что на отрезке $[a; b]$ найдутся такие точки x_1, x_2, что значение функции $f(x)$ в этих точках является $f(x_1)$ — наименьшим, $f(x_2)$ — наибольшим из всех значений функции на отрезке:

$$f(x_1) \leq f(x), \qquad f(x) \leq f(x_2).$$

Замечание. Утверждение теоремы становится неверным на $(a; b)$. Например, $y = x$ непрерывная на $(0; 1)$ не достигает на этом интервале наибольшего и наименьшего значений. Она принимает значение, сколь угодно близкое к 1 и 0 (так как 0 и 1 не принадлежат этому интервалу).

Следствие. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

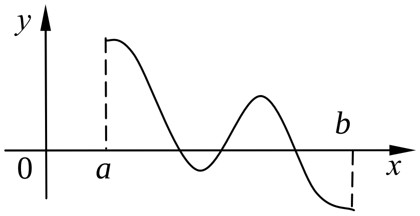


Рис. 6.19

Теорема 6.21. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка найдется, по крайней мере, одна точка, в которой функция равна нулю (рис. 6.19).

Если точки графика $y = f(x)$, соответствующие концам отрезка $[a;\ b]$, лежат по разные стороны от оси Ox, то этот график хотя бы в одной точке отрезка пересекает ось Ox.

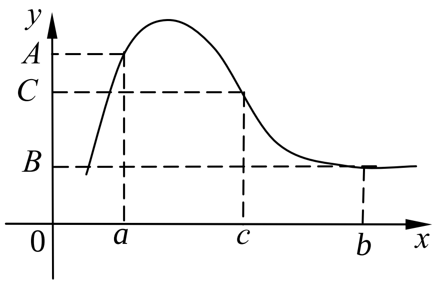


Рис. 6.20

Теорема 6.22 (*о промежуточных значениях*). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри отрезка $[a;\ b]$ такая точка c, что $f(c) = C$ (рис. 6.20).

Прямая $y = C$ пересечет график функции $f(x)$, по крайней мере, в одной точке.

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

Теорема 6.23 (*о существовании обратной непрерывной функции*). Если функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и является монотонной на нем, то обратная функция на соответствующем отрезке $[f(a);\ f(b)]$ оси Oy существует и является также непрерывной и монотонной на этом отрезке.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Вычисление пределов

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+1)$.

Решение. Чтобы вычислить предел, надо подставить в данную функцию предельное значение $x = 1$, т.е.

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-4x+1)=3\cdot 1^2-4\cdot 1+1=0.$$

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Решение. Подставим в данную функцию предельное значение $x = 3$ и получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Так как и в числителе и в знаменателе стоят многочлены, то, чтобы разрешить эту неопределенность, разделим и числитель и знаменатель на $(x-3)$, т.е.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6\cdot$$

Пример 6.3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-x-2}$.

Решение. Подставим в данную функцию предельное значение $x = 1$ и получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Так как и в числителе и в знаменателе стоят многочлены второй степени, то, чтобы разрешить эту неопределенность, разложим и числитель и знаменатель на множители, т.е.

$$2x^2-3x+1=0 \quad \Rightarrow D=3^2-2\cdot 1\cdot 4=1>0,$$

$$x_1=\frac{3-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{3+1}{2\cdot 2}=1 \quad \Rightarrow \quad 2\cdot(x-0{,}5)\cdot(x-1)=0;$$

$$3x^2-x-2=0 \quad \Rightarrow D=1^2+2\cdot 3\cdot 4=25>0,$$

$$x_1=\frac{1-5}{2\cdot 3}=-\frac{2}{3}, \quad x_2=\frac{1+5}{2\cdot 3}=1 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot(x+\frac{2}{3})\cdot(x-1)=0.$$

Тогда предел запишется в виде

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\cdot(x-0{,}5)\cdot(x-1)}{3\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3x+2}=\frac{2\cdot 1-1}{3\cdot 1+2}=\frac{1}{5}.$$

Пример 6.4. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Решение. Подставим в данную функцию предельное значение $x = 5$ и получим неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Так как числитель — это иррациональная функция, то, чтобы разрешить эту неопределенность, домножим и числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, т.е. на $\left(\sqrt{x-1}+2\right)$:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\cdot\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$.

Решение. Подставим в данную функцию предельное значение $x = \infty$ и получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так как в числителе и в знаменателе стоят многочлены третьей степени, то, чтобы разрешить эту неопределенность, разделим и числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3+x}{x^3}}{\dfrac{x^3-1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2+0}{1-0}=2,$$

так как при $x\to\infty$ дроби $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x^3}$ стремятся к нулю.

Пример 6.6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}$.

Решение. Подставим в данную функцию предельное значение $x=\infty$ и получим неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так как в числителе и в знаменателе стоят иррациональные функции, то, чтобы разрешить эту неопределенность, разделим и числитель и знаменатель на x в наибольшей степени. Для этого сравним отдельно степени x, т.е. $x^{\frac{1}{2}}$ и $x^{\frac{1}{3}}$. Так как $\dfrac{1}{2}$ больше, чем $\dfrac{1}{3}$, то будем делить на $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}+1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{3+0}{0+1-0}=3,$$

так как при $x\to\infty$ дроби $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ стремятся к нулю.

Замечательные пределы

Пример 6.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x\cos 5x}$.

Решение. Подставив в функцию предельное значение $x = 0$, получаем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как в функции присутствует тригонометрическая зависимость, то воспользуемся первым замечательным пределом, т.е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=8\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=8\cdot 1\cdot 1=8.$$

Пример 6.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg} 2x.$

Решение. Подставив в функцию предельное значение $x = 0$, получаем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$. Так как в функции присутствует тригонометрическая зависимость, то сведем данную функцию к первому замечательному пределу, т.е.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x}{2\cdot\operatorname{tg} 2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot x}{\operatorname{tg} 2x}=\frac{1}{2}\cdot 1=0,5.$$

Пример 6.9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$.

Решение. Подставив в функцию предельное значение $x = \infty$, получаем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{\infty}$. Сведем данную функцию ко второму замечательному пределу, т.е. выделим целую часть в скобках:

$$\frac{2x+2}{2x-1}=\frac{2x-1+3}{2x-1}=\frac{(2x-1)+3}{2x-1}=1+\frac{3}{2x-1}.$$

Обозначим $\frac{3}{2x-1}=t$, откуда $x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2t}$. Причем при $x \to \infty$ $t \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}-2}=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{3}\cdot(1+t)^{-2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{3}\cdot\lim_{t\to 0}(1+t)^{-2}=e^{3}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{(1+t)^{2}}=e^{3}\cdot 1=e^{3}.$$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Пример 6.10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$.

Решение. Воспользуемся таблицей эквивалентных функций и заменим $\operatorname{arctg} 2x \sim 2x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0} 2=2.$

Пример 6.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$.

Решение. Воспользуемся таблицей эквивалентных функций и заменим $\sqrt{1+7x}-1\sim\dfrac{7x}{2}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{7x}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7}{2}=\dfrac{7}{2}$.

Пример 6.12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x-1\right)}{1-\cos x}$.

Решение. Воспользуемся таблицей эквивалентных функций и заменим $(e^x-1)\sim x$ и $(1-\cos x)\sim\dfrac{x^2}{2}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2=2\cdot$

Непрерывность функции

Пример 6.13. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x+5}{x^2-9}$.

Решение. Очевидно, что функция разрывна при $x\neq\pm3$. Найдем односторонние пределы в этих точках. Сначала найдем предел слева для точки $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x+5}{x^2-9}=\lim_{x\to 3-0}\frac{x+5}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{3-0+5}{(3-0-3)\cdot(3-0+3)}=\frac{8}{(-0)\cdot 6}=-\frac{8}{0}=-\infty.$$

Аналогично найдем предел справа для точки $x=3$, т.е.

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x+5}{x^2-9}=\lim_{x\to 3+0}\frac{x+5}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{3+0+5}{(3+0-3)\cdot(3+0+3)}=\frac{8}{(+0)\cdot 6}=+\frac{8}{0}=+\infty.$$

Следовательно, $x=3$ — точка разрыва второго рода.

Теперь найдем предел слева для точки $x=-3$:

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x+5}{x^2-9}=\lim_{x\to -3-0}\frac{x+5}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{-3-0+5}{(-3-0-3)\cdot(-3-0+3)}=\frac{2}{-6\cdot(-0)}=+\frac{2}{0}=+\infty.$$

Аналогично найдем предел справа для точки $x=-3$, т.е.

$$\lim_{x\to -3+0}\frac{x+5}{x^2-9}=\lim_{x\to -3+0}\frac{x+5}{(x-3)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{-3-0+5}{(-3+0-3)\cdot(-3+0+3)}=\frac{2}{-6\cdot(+0)}=-\frac{2}{0}=-\infty.$$

Следовательно, $x = -3$ — точка разрыва второго рода.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить следующие пределы:

6.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x^5+100}{7x+5-x^6}$.

Ответ: 0.

6.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{3x+4+x^8}}$.

Ответ: 3.

6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$.

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[5]{x^3}-5x}{x+2\sqrt{x}}$.

Ответ: –5.

6.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

Ответ: –1/3

6.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

Ответ: –2.

6.7. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

Ответ: 1/40.

6.8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

Ответ: –3.

6.10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$.

Ответ: $\dfrac{24}{25}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

Ответ: 3.

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16-4}}$.

Ответ: 4.

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

Ответ: 0.

6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

Ответ: 3.

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 4x}{\sqrt{1+x^3-1}}$.

Ответ: 128.

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x^3\operatorname{ctg} 2x}$.

Ответ: 8.

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

Ответ: 1/3.

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot\operatorname{ctg} 7x)$.

Ответ: 3/7.

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x+1-\cos 2x}$.

Ответ: 2/3.

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

Ответ: $6\sqrt{2}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{3}{x}}$.

Ответ: e^3.

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Ответ: e.

6.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{x+1}$.

Ответ: $e^{-5/3}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Ответ: e^{10}.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Ответ: 0,5.

6.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Ответ: 2/3.

6.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-3}\right)$.

Ответ: –1.

6.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-3}-\sqrt{x^2-3x+7}\right)$.

Ответ: 11/2.

6.29. Показать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$. $f(x) = 1 - \cos 4x$; $\varphi(x) = x \sin 3x$.

6.30. Показать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$. $f(x) = \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}$; $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

6.31. Показать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to 0$. $f(x) = \sin 3x$; $\varphi(x) = x^4 + x^2 + x$.

6.32. Показать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to -1$. $f(x) = \sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{x}$; $\varphi(x) = \sqrt[3]{2+x}+1$.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Производная функции одной переменной

Задачи, приводящие к понятию производной

Определение 7.1. *Производной функции* $y = f(x)$ называется величина, обозначаемая $f'(x)$ и равная пределу отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Другие обозначения y'; $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$.

1**.** *Задача о касательной и нормали к кривой (геометрический смысл производной)*. Пусть M_0 — фиксированная точка данной непрерывной кривой K (рис. 7.1). Рассмотрим секущую M_0M, проходящую через точку M_0. Пусть точка M по кривой неограниченно приближается к точке M_0, тогда секущая M_0M стремится к некоторому предельному положению M_0T, т.е. угол γ стремится к нулю при M, стремящемся к M_0. Тогда предельная прямая MT называется касательной, проведенной к кривой K в точке M_0.

Определение 7.2. *Касательной* к данной непрерывной кривой в данной точке M_0 (точка касания) называется предельное положение секущей M_0M, проходящей через точку M_0, когда точка M неограниченно приближается по кривой к точке M_0.

Постановка задачи. Зная уравнение линии $y = f(x)$, найти уравнение касательной в данной точке $M(x, y)$, предполагая, что касательная существует.

Пусть дана функция $y = f(x)$ (рис. 7.2). Пусть аргумент x_0 получил некоторое приращение Δx. Тогда функция y получит приращение Δy.

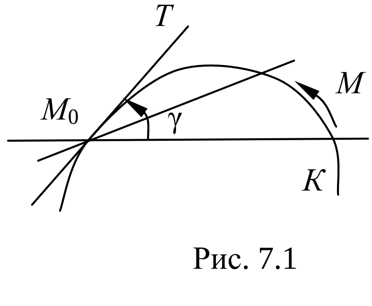


Рис. 7.1

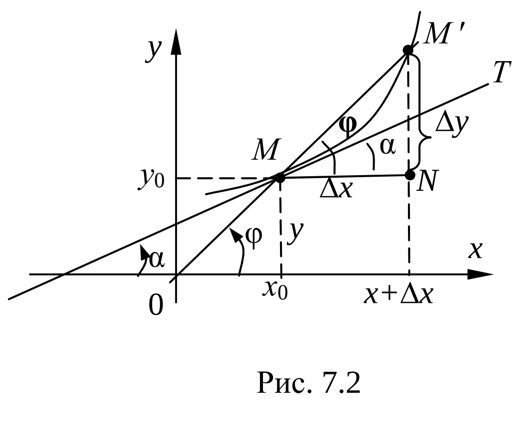


Рис. 7.2

Таким образом, при значении x_0 будем иметь $y = f(x_0)$, при значении $x_0 + \Delta x$ будем иметь $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

Выразим приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при Δx, стремящемся к нулю. Если этот предел существует, то его называют согласно определению производной данной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x)$.

Возьмем на линии еще одну точку $M'(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую MM' и прямые $MN \parallel Ox$ и $M'N \parallel Oy$. $\Delta MM'N$ — прямоугольный с катетами Δx и Δy. Из этого треугольника определяем угловой коэффициент секущей

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{7.1}$$

Пусть теперь $M' \to M$, тогда $\Delta x \to 0$ и $MM' \to MT$ — касательной в точке M. При $\Delta x \to 0$ угол $\varphi \to \alpha$, и если MT не перпендикулярна к оси Ox, то в силу непрерывности тангенса получим

$$\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в (7.1), найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной MT:

$$k = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ равен значению ее производной в точке касания, т.е. $k = f'(x_0)$. Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение. Так как $y - y_0 = k(x - x_0)$, $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$, то

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение 7.3. *Нормалью* к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется перпендикуляр к касательной в той же точке.

Если k — угловой коэффициент касательной, а k_1 — угловой коэффициент нормали, то $k_1 = -\frac{1}{k}$, а так как $k = f'(x_0)$, легко записать уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, то касательная параллельна оси Ox. Тогда нормаль перпендикулярна к оси Ox и проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$. Это означает, что ее уравнение $x = x_0$.

2. *Задача о скорости прямолинейного неравномерного движения (механический смысл производной).* Пусть x — время, прошедшее от начала отсчета; $y = f(x)$ — расстояние, которое прошло тело за время x от начала движения. Рассмотрим промежуток времени Δx, прошедший от момента x до момента $x + \Delta x$. За это время тело пройдет путь

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Отношение пройденного пути Δy к промежутку времени Δx называется средней скоростью движения тела за данный промежуток времени

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Средняя скорость тем лучше характеризует движение, чем меньше промежуток времени Δx.

Тогда мгновенной скоростью движения тела в момент времени x будет предел средней скорости при неограниченном уменьшении промежутка времени Δx (если этот предел существует):

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Полученное выражение представляет производную функции y по переменной x, т.е.

$$v = f'(x).$$

Таким образом, скорость прямолинейного движения равна производной от пути по времени. Или, рассматривая функцию $f(x)$, лишенную конкретного физического содержания, можно сказать, что *производная функции* $y = f(x)$ *в точке* x *есть скорость изменения функции в этой точке.*

Рассмотрение задач о касательной и скорости движения исторически привело к понятию производной.

Итак, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

К подобному выражению приводят и многие другие задачи, что объясняет важность введения понятия производной. Например, теплоемкость есть производная от количества тепла по температуре; линейная плотность стержня есть производная от его массы по длине; скорость химической реакции есть производная от количества вещества по времени.

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Определение 7.4. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b), то говорят, что она дифференцируема на этом отрезке или интервале.

Теорема 7.1 (*о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции*). Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда определим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0$.

По определению непрерывности следует, что $y = f(x)$ непрерывна. Что и требовалось доказать.

Замечание. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной (рис. 7.3). Например, $y = |x|$. Эта функция непрерывна в точке $x = 0$, но не является дифференцируемой для этого значения, так как в точке $x = 0$ к графику функции не существует касательной.

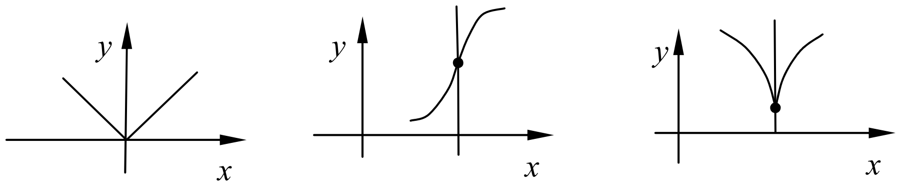


Рис. 7.3

Правило непосредственного вычисления производной функции

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ необходимо произвести следующие действия:

1) дать аргументу x приращение Δx, вычислить наращенное значение функции $f(x + \Delta x)$;

2) найти соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) найти предел данного отношения при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Будем пользоваться этим правилом для нахождения основных формул дифференцирования и вычисления производных от основных элементарных функций.

Основные правила дифференцирования

1. *Производная постоянной* равна нулю, т.е. $C' = 0$.

Доказательство. Пусть $y = C = \text{const}$, тогда $\Delta y = 0$. Следовательно,

$$(C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

2. *Производная алгебраической суммы* конечного числа дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Доказательство. Пусть $y = u \pm v$. Зададим Δx.

Новому значению $x + \Delta x$ аргумента соответствуют новые значения наших функций $u + \Delta u$ и $v + \Delta v$. Тогда

$$\Delta y = \Delta(u \pm v) = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v.$$

Найдем

$$\left(u \pm v\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Замечание. Правило справедливо для любого конечного числа функций.

3. *Производная произведения* конечного числа дифференцируемых функций равна

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Доказательство. Пусть $y = u \cdot v$ Дадим x приращение Δx.

Новому значению $x + \Delta x$ аргумента соответствуют новые значения функций $u + \Delta u$, $v + \Delta v$. Тогда функция uv получит приращение

$$\Delta y = \Delta(u \cdot v) = [(u + \Delta u)\,(v + \Delta v)] - uv =$$

$$= uv + v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v - uv = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

По определению производной

$$y' = \left(u \cdot v\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u \pm u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = vu' + uv'.$$

При доказательстве формулы надо учесть, что функция $u(x)$ дифференцируема, и, следовательно, непрерывна, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.

4. *Постоянный множитель* можно выносить за знак производной, т.е.

$$(C \cdot y)' = C \cdot y'.$$

Доказательство. $(C \cdot y)' = C' \cdot y + C \cdot y' = C \cdot y'$.

5. *Производная частного* двух функций равна

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доказательство. $y = \dfrac{u}{v}$. Составим Δy

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta u \cdot v - uv - u\,\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta u \cdot v - u\,\Delta v}{v^2 + v\,\Delta v}$$

и найдем

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\,\Delta v} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

В доказательстве формулы снова было учтено, что из дифференцируемости функции $v(x)$ следует ее непрерывность, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$

6. *Производная сложной функции*. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Производная сложной функции $f(\varphi(x))$ равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной, т.е. $y'_x = f'_u(u)\cdot\varphi'(x)$,

где вместо u должно быть подставлено выражение $u = \varphi(x)$. Коротко, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

7. *Производная обратной функции*. Производные от взаимно обратных функций обратные по величине $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

8. *Производная функции, заданной параметрическими уравнениями*. Пусть функция $y(x)$ задана параметрическими уравнениями $\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{array}\right\}$

Дифференцируя $y = \psi(t)$ по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t)\cdot t'_x$.

Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Окончательно $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, что можно короче записать так: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Производные основных элементарных функций

1. Пусть $y = \log_a x$. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Найдем

$$\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Тогда

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{x\cdot\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right), \qquad z = \frac{x}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}\infty,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\lim_{z\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x\ln e} = \dfrac{1}{x}$.

2. $(x^n)' = n\,x^{n-1}$. Пусть $y = x^n$. Прологарифмируем обе части данного выражения $\ln y = n\ln x$. Продифференцируем обе части полученного равенства по отдельности, учитывая, что производная от $\ln y$ берется как от сложной функции: $\ln y = \frac{y'}{y}$; $\quad n\ln x = \frac{n}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = y\cdot\frac{n}{x} = \frac{x^n\cdot n}{x} = nx^{n-1}$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a$. Пусть $y = a^x$. Аналогично, $\ln y = x\ln a$, $\frac{y'}{y} = \ln a$, $y' = y\cdot\ln a = a^x \ln a$. В частности, $\left(e^x\right)' = e^x\cdot\ln e = e^x$.

4. $(\sin x)' = \cos x$. Найдем $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$.

Тогда

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= 2\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

5. $(\cos x)' = -\sin x$. Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то

$$\left(\cos x\right)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\sin x.$$

6. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Воспользуемся формулой нахождения производной частного двух функций:

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Аналогично

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x\sin x - \cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Пусть y = arcsin x. Тогда x = sin y и $y' = \dfrac{1}{x'(y)}$ по правилу нахождения производной обратной функции.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. $\left(\arccos x\right)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Пусть y = arccos x, тогда x = cos y и $y' = \dfrac{1}{x'(y)}$.

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Пусть y = arctg x, тогда x = tg y и $y' = \dfrac{1}{x'(y)}$.

$$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

11. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$. Пусть y = arcctg x, тогда x = ctg y и $y' = \dfrac{1}{x'(y)}$.

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

12. Логарифмическая производная.

$$y = u^v, \qquad u = u(x), \qquad v = v(x).$$

Логарифмируя функцию и дифференцируя полученное равенство, получим $\ln y = v \ln u$; $\dfrac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + \dfrac{v}{u} \cdot u'$. Тогда

$$y' = y \cdot \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right) = u^v \left(v' \cdot \ln u + \frac{v}{u} \cdot u' \right).$$

13. (sh x)′ = ch x; $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ — гиперболический синус.

$$\left(\operatorname{sh} x\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \operatorname{ch} x.$$

14. (ch x)′ = sh x; $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ — гиперболический косинус.

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \operatorname{sh} x.$$

15. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — гиперболический тангенс.

$$\left(\operatorname{th} x\right)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\left(\operatorname{sh} x\right)' \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \left(\operatorname{ch} x\right)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

16. $\left(\operatorname{cth} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гиперболический котангенс.

$$\left(\operatorname{cth} x\right)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\left(\operatorname{ch} x\right)' \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \left(\operatorname{sh} x\right)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Итак, перечислим основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю: $C' = 0$.
2. Производная алгебраической суммы: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
3. Производная произведения: $(u \cdot v)' = v \cdot u' + u \cdot v'$.
4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(C \cdot y)' = C \cdot y'$.
5. Производная частного: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
6. Производная сложной функции: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
7. Производная обратной функции: $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ или $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.
8. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Таблица производных основных элементарных и соответствующих сложных функций

Название функции	Элементарные функции	Сложные функции
Степенная (частный случай — корень)	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha\, u^{\alpha-1} \cdot u'$
	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Показательная (частный случай — экспонента)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$

Логарифмическая (частный случай — натуральный логарифм)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$
	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
Тригонометрические	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
Обратные тригонометрические	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
	$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$
Гиперболические	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$
	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$

7.2. Дифференциал функции одной переменной

Определение 7.5. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ называется произведение производной $f'(x)$ на приращение независимой переменной Δx и обозначается dy, т.е.

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

В настоящее время мы считаем дифференциал вторичным понятием, определенным через понятие производной; однако это не всегда было так: в эпоху зарождения анализа бесконечно малых функций и еще долгое время спустя первичным понятием анализа считали именно дифференциал, производную же определяли как отношение дифференциалов, т.е. как вторичное понятие. При этом часто понятие дифференциала оставалось без четкого определения и даже несло в себе противоречивые черты.

Итак, мы записали чисто формальное определение дифференциала, однако понять то огромное значение, какое имеет понятие дифференциала для анализа и его приложений, оно не позволяет. Чтобы разобраться в этом вопросе, надо вглядеться в идею дифференциала по существу.

Теорема 7.2 (*аналитический смысл дифференциала*). Дифференциал представляет собой главную линейную часть приращения функции, т.е. $dy \approx \Delta y$.

Доказательство. Так как по определению $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, где α — б.м.ф. при $\Delta x \to 0$, или $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x = dy + \beta$, где $\beta = \alpha\,\Delta x$ бесконечно малая функция. Так как $f(x)$ дифференцируема, следовательно, она непрерывна, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \beta = 0, \text{ тогда } \lim_{\Delta x \to 0} dy = 0 ,$$

т.е. dy — б.м.ф. при $\Delta x \to 0$.

Сравним Δy и dy при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y' \cdot \Delta x} = \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{y'} \cdot y' = 1.$$

Следовательно, dy и Δy — эквивалентные бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $dy \approx \Delta y$.

Теорема 7.3 (*геометрический смысл дифференциала*). Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 7.4).

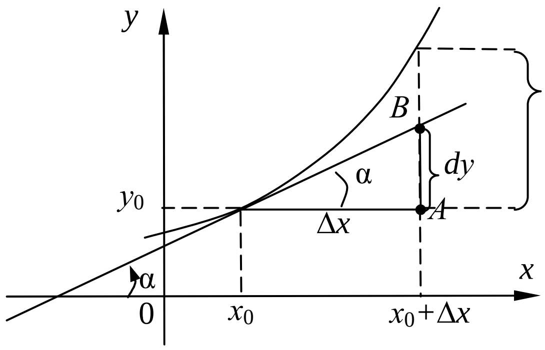


Рис. 7.4

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в точке x_0 и некоторой ее окрестности y_0. Зафиксируем произвольно приращение аргумента Δx. Проведем в точке x_0 касательную к графику функции до пересечения с прямой $x = x_0 + \Delta x$ (точка B). Координаты точки B $(x_0 + \Delta x; y_k)$, где y_k — ордината касательной в точке $x_0 + \Delta x$, удовлетворяют уравнению этой касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

$$y_k - y_0 = f'(x_0)\,\Delta x.$$

В правой части этого равенства стоит дифференциал dy функции $f(x)$ в точке x_0. Таким образом, $dy = y_k - y_0$, дифференциал функции, равен приращению ординаты касательной.

Теорема 7.4 (*механический смысл дифференциала*). Дифференциал пути равен приращению пути, полученному в предположении, что, начиная с данного момента времени t, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

Действительно, рассмотрим неравномерное прямолинейное движение точки, осуществляющееся по закону $S = f(t)$, где S — длина пути, t — время. Приращенному моменту времени $t + \Delta t$ соответствует приращенное значение пути

$$S + \Delta S = f(t + \Delta t),$$

откуда

$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Эта формула выражает истинное приращение пути за промежуток времени Δt.

Вычислим дифференциал пути. Так как $S' = f'(t) = v(t)$ — скорость в момент времени t, то

$$dS = f'(t) \cdot \Delta t = v(t) \cdot \Delta t.$$

Теорема 7.5. Дифференциал независимой переменной равен ее приращению, т.е.

$$dx = \Delta x.$$

Доказательство. Пусть $y = f(x) = x$, тогда $f'(x) = 1$,

$$dy = dx = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x.$$

Теорема 7.6. Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной, т.е.

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Теорема 7.7. Производная функции $y = f(x)$ равна отношению ее дифференциала к дифференциалу независимой переменной, т.е.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Теорема 7.8 (*об инвариантности формы дифференциала*). Дифференциал функции всегда равен произведению ее производной и дифференциала аргумента и не зависит от того, является ли величина, по которой взята производная, независимой переменной или промежуточным аргументом.

Доказательство. Если x — независимая переменная, то

$$dy = f'(x)\, \Delta x = f'(x)\, dx.$$

Пусть теперь величина x является функцией $x = \varphi(t)$ новой переменной t; ясно, что при этом оба соотношения $dy = f'(x)\, \Delta x$ и $dy = f'(x)\, dx$ не могут остаться справедливыми, теперь $dx = \varphi'(t)\Delta t \approx \Delta x$. Замечательно, что второе соотношение

$dy = f'(x)\,dx$ остается в силе при любой такой замене; в самом деле, в результате этой замены y становится функцией от t: $y = f[\varphi(t)]$. Отсюда по правилу дифференцирования сложной функции

$$y'(t) = f'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t),$$

$$dy = y'(t)\,dt = f'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

а так как $\varphi(t) = x$, $\varphi'(t)\,dt = dx$, то действительно $dy = y'(x)\,dx$, как если бы x была независимая переменная. Таким образом, в выражении производной $y' = \dfrac{dy}{dx}$ безразлично, есть ли x независимая переменная или дифференциал функции другой независимой переменной.

Замечание. Дифференциал функции обладает теми же свойствами, что и ее производная.

7.3. Производные и дифференциалы высших порядков

Основные понятия и определения

Очевидно, что в общем случае производная $f'(x)$ является функцией. Поэтому от нее можно взять производную, т.е. выполнить операцию $[f'(x)]'$.

Определение 7.6. Производная от первой производной $f'(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной* и обозначается $f''(x)$.

Определение 7.7. *Производной n-го порядка* или *n-й производной* от функции $f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

То есть производные и дифференциалы высших порядков определяются индуктивно.

По определению дифференциала $dy = f'(x)\,\Delta x$, где Δx — приращение независимой переменной — величина, не зависящая от x, а зависящая от того, какой мы ее назначим, $f'(x)$ — функция от x. Поэтому dy — функция от x, где $\Delta x = \text{const}$. Следовательно, от dy можно найти дифференциал.

Определение 7.8. Дифференциал от дифференциала функции называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* и обозначается d^2y:

$$d(dy) = d^2y.$$

Теорема 7.9. Дифференциал второго порядка определяется формулой

$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2.$$

$$d^2y = d\left(f'(x)\cdot\Delta x\right) = \left(f'(x)\cdot\Delta x\right)'\cdot\Delta x = \left(f''(x)\cdot\Delta x + f'(x)\cdot\left(\Delta x\right)'\right)\cdot\Delta x =$$

$$= f''(x)\cdot\Delta x\cdot\Delta x = f''(x)\cdot\Delta x^2.$$

Определение 7.9. *Дифференциалом n-го порядка* называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$-го порядка функции и обозначается $d^n y$.

Теорема 7.10. Формула для нахождения дифференциала функции n-го порядка имеет вид $d^n y = f^{(n)}(x)\cdot\Delta x^n$ или $d^n y = f^{(n)}(x)\cdot dx^n$ (теорема 7.5), где dx^n означает n-ю степень первого дифференциала переменной x.

Отсюда имеем $f^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, т.е. производную функции можно рассматривать как отношение ее дифференциала соответствующего порядка к соответствующей степени дифференциала независимой переменной.

Замечание. Дифференциалы высших порядков не инвариантны относительно замены независимой переменной.

В этом легко убедиться при $n = 2$. В силу доказательства будем обозначать второй дифференциал функции $y = f(x)$ через $(d^2y)_x$ или $(d^2y)_t$, в зависимости от того, считаем ли мы независимой переменной величину x или величину t. Тогда $(d^2y)_x = f''(x)\, dx^2$, между тем как $x = \varphi(t)$

$$\left(d^2 y\right)_t = \frac{d^2 f\left[\varphi(t)\right]}{dt^2}dt^2 = \frac{d\left[f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\right]}{dt}dt^2 =$$

$$= \left[f''(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) + f'(\varphi(t))\cdot\varphi''(t)\right]dt^2 = f''(x)dx^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)\,dt^2.$$

Эти два выражения различны: второе содержит добавочный член, который равен нулю, если $\varphi(t) = at + b$. Таким образом, второй дифференциал инвариантен лишь относительно линейных преобразований независимой переменной.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Пьера Ферма. Пусть функция $f(x)$ определена в интервале $(a; b)$, принимает в некоторой точке $x = x_0$ этого интервала наибольшее или наименьшее значение. Тогда если в точке x_0 существует производная этой функции, то она равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$ (рис 7.5).

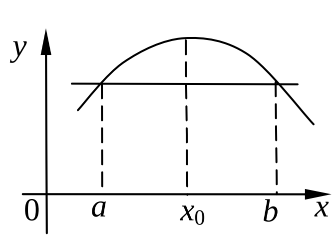


Рис. 7.5

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее (наименьшее) значение, то в точке $(x_0, f(x_0))$ касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox.

Замечание. Теорема может быть не верна, если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a, b]$. Так как, например, $f(x) = x$ на $[0, 1]$ в точке $x = 0$ принимает наименьшее, а в точке $x = 1$ наибольшее значение, однако как в той, так и в другой точке производная в ноль не обращается, а равна 1.

Теорема Ролля *о корнях производной*. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех его внутренних точках и на концах интервала принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$, то ее производная обращается в ноль хотя бы в одной внутренней точке $x = c$ этого интервала (рис. 7.6).

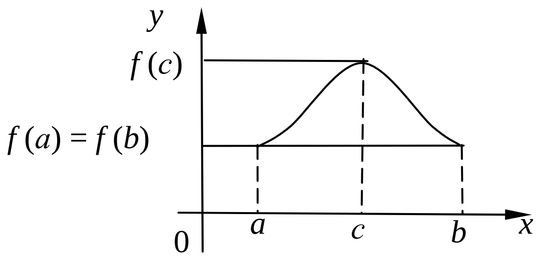


Рис. 7.6

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на концах этого отрезка равные значения, существует точка $(c;\ f(c))$, в которой касательная параллельна оси Ox.

Теорема Лагранжа *о конечных приращениях.* Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, то внутри этого отрезка найдется хотя бы одна точка $x = c$ такая, что имеет место равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

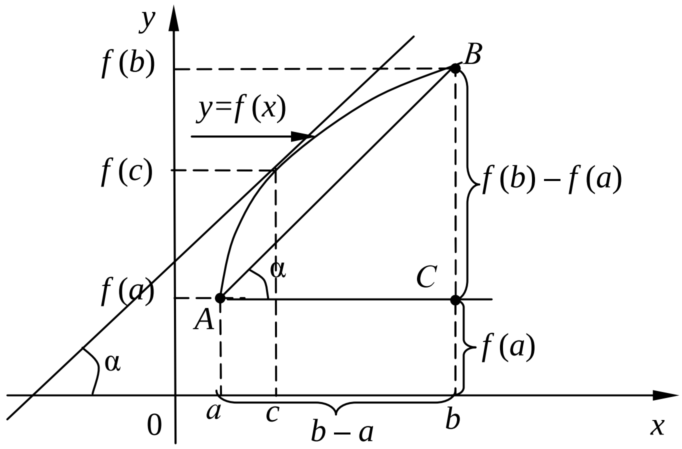


Рис. 7.7

Геометрически теорему Лагранжа можно пояснить следующим образом (рис. 7.7): из треугольника ABC

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\operatorname{tg}\alpha .$$

Так как $f'(c)$ = tg α есть угловой коэффициент касательной, то теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы дуги.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы на интервале $(a; b)$. Пусть, кроме того, $g(x) \neq 0$. Тогда существует точка $c \in (a; b)$ такая, что справедлива формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Эта формула называется обобщенной формулой конечных приращений.

7.4. Правило Лопиталя

Теорема 7.11 (*раскрытие неопределенности вида* $\left[\frac{0}{0}\right]$). Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены и дифференцируемы в точке a и некоторой ее окрестности (хотя бы односторонней) и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$, а $f'_2(x) \neq 0$ в указанной окрестности. Тогда если существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Эту теорему называют правилом Лопиталя.

Доказательство. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(a+\Delta x)-f_1(a)}{f_2(a+\Delta x)-f_2(a)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_1(a+\Delta x)}{f_2(a+\Delta x)}=\left|\begin{array}{l}a+\Delta x=x\\ \Delta x\to 0\Rightarrow x\to a\end{array}\right|=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Правило Лопиталя справедливо и для неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, т.е. когда

$$f_1(x)\to\infty,\ f_2(x)\to\infty \text{ при } x\to a.$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{f_2(x)}}{\dfrac{1}{f_1(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{-\dfrac{f_2'(x)}{f_2^2(x)}}{-\dfrac{f_1'(x)}{f_1^2(x)}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}}\cdot\left[\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1'(x)}{f_2'(x)}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\Rightarrow\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}.$$

Замечание. Если относительно производных $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ продолжает сохраняться неопределенность, то правило Лопиталя применяют повторно.

7.5. Раскрытие неопределенностей

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right],\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, которые называют *основными*.

Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований:

а) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$. Требуется найти $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$. Это неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Можно искомое выражение переписать в виде

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot f_2(x)=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{1/f_2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

или $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot f_2(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_2(x)}{1/f_1(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$;

б) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$. Требуется найти $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)-\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$. Это неопределенность вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{x\to a} f_1(x)-\lim_{x\to a} f_2(x)=\lim_{x\to a} f_1(x)\left[1-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right].$$

В результате получаем либо определенность, либо неопределенность вида $\infty \cdot 0$;

в) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$. Требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)\right]^{f_2(x)}$. Это неопределенность вида 0^0.

Положив $y=\left[f_1(x)\right]^{f_2(x)}$, нужно прологарифмировать обе части полученного равенства:

$$\ln y = f_2(x)\cdot\ln\left[f_1(x)\right].$$

Получим неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Вычислив $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, легко получить $\lim\limits_{x\to a} y$, т.е.

$$\lim_{x\to a}\ln y=\ln\lim_{x\to a} y,$$

и если $\ln\lim\limits_{x\to a} y=b$, то $\lim\limits_{x\to a} y=e^b$.

Аналогичным приемом находятся пределы и в случае ∞^0, 1^∞.

7.6. Исследование функции одной переменной

Теорема 7.12 (*о постоянстве функции на отрезке*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет во всех его внутренних точках производную $f'(x) = 0$, то функция постоянна на отрезке $[a, b]$.

Следствие. Если производные двух функций $\varphi(x)$ и $g(x)$ равны во всех точках отрезка $[a, b]$, то разность этих функций постоянна на этом отрезке.

Теорема 7.13 (*достаточное условие возрастания функции*). Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка имеет положительную производную, то эта функция возрастает на отрезке $[a, b]$.

*Доказательство***.** Пусть $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Рассмотрим два произвольных значения x_1 и x_2 из $[a, b]$, причем $x_1 < x_2$. Напишем формулу Лагранжа применительно к отрезку $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c), \ \ c \in (x_1, x_2).$$

По условию теоремы $f'(c) > 0$, так как $x_1 < x_2$, то и $(x_2 - x_1) > 0$. Тогда произведение

$$(x_2 - x_1) \cdot f'(c) > 0$$

и, следовательно,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$. Что и требовалось доказать.

Подобным же образом доказывается следующая теорема.

Теорема 7.14 (*достаточное условие убывания функции*). Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на отрезке $[a, b]$.

Определение7.10. *Функция* $y = f(x)$ *имеет максимум* в точке $x = c$, если существует такая окрестность точки $x = c$, что для всех точек $x \neq c$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(c) > f(x)$. *Функция* $y = f(x)$ *имеет минимум* в точке $x = c$, если существует такая окрестность точки $x = c$, что для всех точек $x \neq c$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(c) < f(x)$.

Максимум и минимум объединяются общим названием *экстремум функции.*

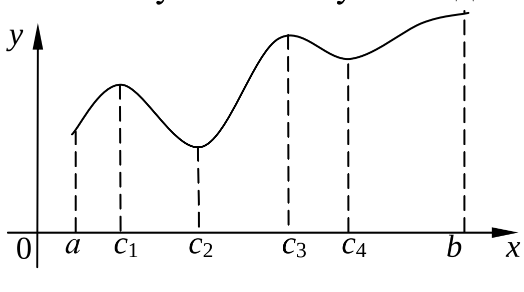


Рис. 7.8

Геометрическое истолкование (рис. 7.8). Значения функций $f(c_1)$ и $f(c_3)$ больше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от c_1 и c_3 соответственно, следовательно, в точках c_1 и c_3 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогично значение функций $f(c_2)$ и $f(c_4)$ меньше значений функции во всех «соседних» точках как слева, так и справа от c_2 и c_4 соответственно, следовательно, в точках c_2 и c_4 функция $f(x)$ имеет минимум.

Следует отметить, что если функция имеет в точке максимум или минимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет наибольшее или наименьшее значение во всей области ее определения. Из определения максимума (минимума) следует только то, что это самое большее (меньшее) значение функции в точках, достаточно близких к точке c.

Нетрудно видеть, что функция, изображенная на рисунке 7.8, имеет наименьшее значение в точке c_2, а наибольшее в точке $x = b$, т.е.

$$f_{\text{наим}} = f(c_2), \quad f_{\text{наиб}} = f(b).$$

Может оказаться, что минимум функции больше, чем максимум:

$$f_{\max}(c_1) < f_{\min}(c_4).$$

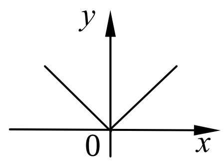
Теорема 7.15 (*необходимый признак существования экстремума функции*). Если дифференцируемая в точке $x = c$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x = c$ обращается в ноль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть, для определенности, функция $y = f(x)$ имеет в точке c максимум. Согласно определению максимума, должна существовать такая окрестность точки c, что для любого x ($x \neq c$) этой окрестности $f(c) > f(x)$, т.е. $f(c)$ — наибольшее значение функции в этой окрестности. Так как, по условию, функция имеет в точке c производную $f'(c)$, то, по теореме Ферма, $f'(c) = 0$.

Аналогично доказывается теорема и для случая минимума функции.

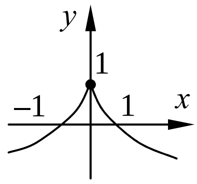
Замечание. Функция может достигать экстремума в точке, в которой производная не существует. Например, $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, но достигает в ней минимума (рис. 7.9). Функция $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ не имеет в точке $x = 0$ производной, но достигает в ней максимума (рис. 7.10).

$$y = 1 - \sqrt[3]{x^2}; \quad f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}; \quad x = 0.$$



$y = |x|$

Рис. 7.9



$y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$

Рис. 7.10

Следствие. Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = c$ экстремум, то производная $f'(c)$ обращается в ноль или не существует.

Определение 7.11. Значения аргумента, при которых производная обращается в ноль или терпит разрыв, будем называть *стационарными* или *критическими* точками функции (точки, подозрительные на экстремум).

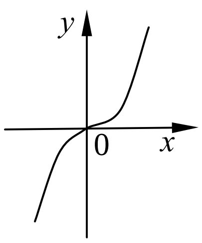


Рис. 7.11

Замечание. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума, т.е. условие, что $y' = 0$, не является достаточным условием существования экстремума. Так, например, функция $y = x^3$ в точке $x = 0$ имеет $f'(0) = 0$: $y' = 3x^2 = 0$, следовательно, $x = 0$; $x = 0$ — стационарная точка (рис. 7.11). Однако в этой точке функция не имеет экстремума. Действительно, как бы ни была близка точка x к точке O, всегда $x^3 < 0$ при $x < 0$ и $x^3 > 0$ при $x > 0$.

Теорема 7.16 (*достаточный признак существования экстремума по первой производной*). Если производная функции $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку $x = c$ меняет знак с плюса на минус, то функция в точке c имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс — минимум, т.е. если $f'(c) = 0$ и

$$\text{при } \left.\begin{array}{ll} x<c & f'(x)>0, \\ x>c & f'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(c) \text{ — максимум;}$$

$$\text{при } \left.\begin{array}{ll} x<c & f'(x)>0, \\ x>c & f'(x)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(c) \text{ — минимум.}$$

Замечание. Если производная $f'(x)$ не меняет знака при переходе через критическую точку, то функция в этой точке не имеет ни максимума, ни минимума.

Теорема 7.17 (*достаточный признак существования экстремума по второй производной*). Пусть $f'(c) = 0$. Тогда если $f''(c) < 0$, то в точке $x = c$ функция имеет максимум; если $f''(c) > 0$, то в точке $x = c$ функция имеет минимум.

Определение 7.12. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* (*выпуклым*) в интервале (a, b), если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (рис. 7.12).

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вогнутым*) в интервале (a, b), если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале (рис. 7.13).

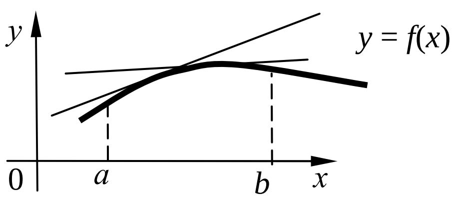


Рис. 7.12

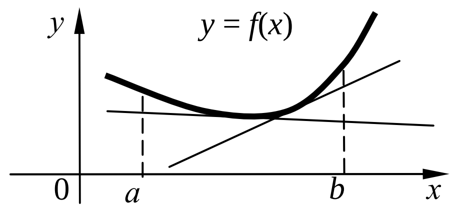


Рис. 7.13

Теорема 7.18 (*достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции*). Пусть $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала (a, b). Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый, если же $f''(x) > 0$, — вогнутый.

Определение 7.13. Точка графика, при переходе через которую график функции $y = f(x)$ меняет характер выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Нахождение точек перегиба графика функции основано на следующих теоремах.

Теорема 7.19 (*достаточный признак существования точки перегиба*). Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка с абсциссой $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$.

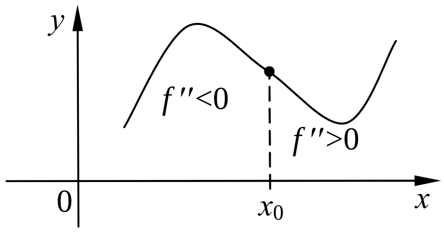


Рис. 7.14

В этом случае слева от точки x_0 график выпуклый, а справа от точки x_0 — вогнутый (рис. 7.14).

Следовательно, при переходе через точку x_0 график $y = f(x)$ меняет характер выпуклости. Тогда, по определению, точка x_0 является точкой перегиба.

Теорема 7.20 (*необходимый признак существования точки перегиба*). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в интервале (a, b) непрерывную производную $f''(x)$. Тогда если точка с абсциссой $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка перегиба с выпуклости на вогнутость, тогда $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда, по первому достаточному признаку существования экстремума (теорема 7.16), $x = x_0$ — точка минимума функции $f'(x)$. Следовательно, по необходимому условию существования экстремума (теорема 7.15), $f''(x_0) = 0$.

Определение 7.14. *Асимптотой графика функции* $y = f(x)$ называется прямая линия, обладающая тем свойством, что расстояние от переменной точки на графике до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат (примеры на рис. 7.15).

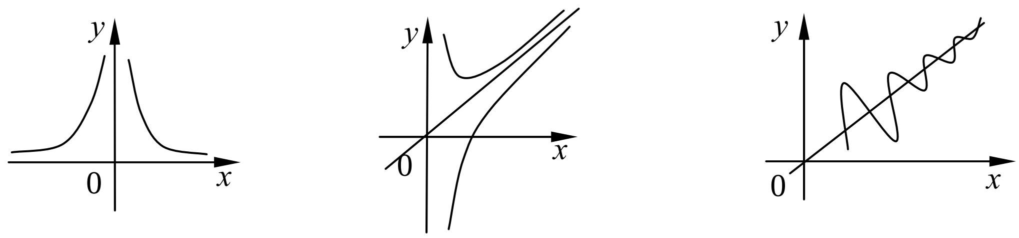


Рис. 7.15

Классификация асимптот: наклонная (не параллельна ни одной из осей координат), горизонтальная (параллельна оси Ox), вертикальная (параллельна оси Oy).

Теорема 7.21 (*о параметрах асимптот*). Если $y = kx + b$ — уравнение асимптоты кривой $y = f(x)$, то

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

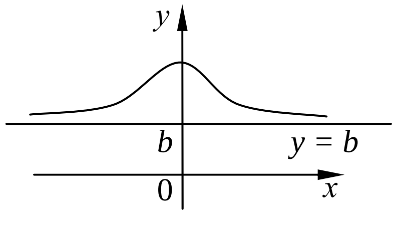


Рис. 7.16

Следствие. Если $k = 0$, а b — конечное число, то график $y = f(x)$ будет иметь горизонтальную асимптоту $y = b$ (рис. 7.16).

Замечания. 1) Если хотя бы один из пределов теоремы 7.21 не существует, то график $y = f(x)$ не имеет асимптоты при $x \to +\infty$.

2) Аналогично находятся асимптоты при $x \to -\infty$. Пределы теоремы 7.21 при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ могут быть различными.

3) Формулы в теореме 7.21 годятся лишь для нахождения наклонных и горизонтальных асимптот. Вертикальные асимптоты имеют уравнение $x = a$. Эта прямая является асимптотой, если в точке $x = a$ график функции терпит бесконечный разрыв, так как точка $x = a$ является точкой разрыва второго рода. Для уточнения поведения функции в окрестности точки разрыва необходимо вычислить односторонние пределы в этой окрестности.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Производная функции одной переменной

Пример 7.1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y^4 = 4x^4 + 6xy$ в точке A (1, 2).

Решение. 1. Уравнение касательной к кривой имеет вид

$$y - y_0 = y_0' (x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты точки A, а y_0' — значение производной в этой точке. Найдем производную от данной неявно заданной функции.

$$(y^4)' = 4(x^4)' + 6\,(x \cdot y)';$$

$$4 \cdot y^3 \cdot y' = 4 \quad 4 \cdot x^3 + 6 \cdot y + 6 \cdot x \cdot y';$$

$$y' = \frac{8x^3 + 3y}{2y^3 - 3x}.$$

Теперь найдем значение производной в точке A (1; 2):

$$y_0' = \frac{8 \cdot 1^3 + 3 \cdot 2}{2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 1} = \frac{14}{13}.$$

Следовательно, касательная имеет вид

$$y - 2 = \frac{14}{13}\,(x - 1).$$

Приведем данное уравнение к общему виду, т.е.

$$13(y - 2) = 14\,(x - 1), \quad 14x - 13y + 12 = 0.$$

2. Уравнение нормали к кривой имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}\,(x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты точки A, а y_0' — значение производной в этой точке. Так как значение производной в точке A (1; 2) равно $\frac{14}{13}$, то $-\frac{1}{y_0'} = -\frac{13}{14}$.

Следовательно, уравнение нормали имеет вид $y - 2 = -\frac{13}{14}\,(x - 1)$.

Приведем данное уравнение к общему виду, т.е.

$$14\,(y-2) = -13\,(x-1), \quad 13x + 14y - 41 = 0.$$

Пример 7.2. Найти производную функции $y = 2x^2 + 1$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(C \cdot y)' = C \cdot y'$, $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$:

$$y' = 2\,(x^2)' + (1)' = 2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = 4 \cdot x.$$

Пример 7.3. Найти производную функции $y = (x + 3)^2$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$:

$$y' = 2(x+3)^{2-1} \cdot (x+3)' = 2\,(x+3)1 = 2x + 6.$$

Пример 7.4. Найти производную функции $y = (2x^3 - 3)\,(2x^3 - 1)$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(u \cdot v)' = v \cdot u' + u \cdot v'$, $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

$$y' = (2x^3 - 3)'(2x^3 - 1) + (2x^3 - 3)\,(2x^3 - 1)' =$$

$$= 2 \cdot 3x^2 \cdot (2x^3 - 1) + 2 \cdot 3x^2\,(2x^3 - 3) = 24 \cdot x^5 - 24 \cdot x^2.$$

Пример 7.5. Найти производную функции $y = \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

$$y' = \frac{\left(3x^2 - 2x - 4\right)' \cdot (2x-1) - (2x-1)' \cdot \left(3x^2 - 2x - 4\right)}{(2x-1)^2} =$$

$$= \frac{(3 \cdot 2 \cdot x - 2\,) \cdot (2x-1) - 2 \cdot \left(3x^2 - 2x - 4\right)}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x + 10}{(2x-1)^2}.$$

Пример 7.6. Найти производную функции $y = e^{\sqrt{x}-4}$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

$$y' = e^{\sqrt{x}-4} \cdot \left(\sqrt{x} - 4\right)' = e^{\sqrt{x}-4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 7.7. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}\left(x^3\right)$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

$$y' = \left(\mathrm{tg}\left(x^3\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(x^3\right)}\cdot\left(x^3\right)' = \frac{3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)}.$$

Пример 7.8. Найти производную функции $y = \ln\cos\left(x+4\right)$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$.

$$y' = \left(\ln\cos\left(x+4\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(x+4\right)}\cdot\left(\cos\left(x+4\right)\right)' =$$

$$= \frac{-\sin(x+4)}{\cos\left(x+4\right)}\cdot\left(x+4\right)' = \frac{-\sin(x+4)}{\cos\left(x+4\right)} = -\mathrm{tg}(x+4).$$

Пример 7.9. Найти производную функции $y = \left(5^x+4\right)^2$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, воспользуемся формулами $(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, $(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

$$y' = \left(\left(5^x+4\right)^2\right)' = 2\cdot\left(5^x+4\right)\cdot\left(5^x+4\right)' = 2\cdot\left(5^x+4\right)\cdot 5^x\cdot\ln 5.$$

Пример 7.10. Найти производную функции $y = x^{\ln x}$.

Решение. Чтобы найти производную данной функции, прологарифмируем обе части равенства $\ln y = \ln x^{\ln x} \;\;\Rightarrow\;\; \ln y = \ln x\cdot\ln x \;\;\Rightarrow\;\; \ln y = \ln^2 x$.

Теперь продифференцируем полученную функцию, учитывая, что $\left(\ln y\right)' = \dfrac{y'}{y}$:

$$\left(\ln y\right)' = \left(\ln^2 x\right)' \;\;\Rightarrow\;\; \frac{y'}{y} = 2\ln x\cdot\frac{1}{x} \;\;\Rightarrow\;\; y' = y\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; y' = x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}.$$

Пример 7.11. Найти вторую производную функции $y = e^x + x^2$.

Решение. Найдем сначала первую производную данной функции: $y' = e^x + 2x$. Теперь проинтегрируем полученную функцию еще раз: $y'' = e^x + 2$.

Пример 7.12. Найти производную функции, заданной неявно $y^2-4xy=0$.

Решение. Найдем производную, учитывая, что $y = y(x)$.

$$\left(y^2\right)'-4\left(xy\right)'=0,\quad 2y\cdot y'-4\left(x'y+xy'\right)=0,$$

$$2y\cdot y'-4y-4xy'=0,\quad \left(2y-4x\right)\cdot y'=4y,$$

$$y'=\frac{4y}{2y-4x}.$$

Пример 7.13. Найти производную функции $\begin{cases} y=t^2+t+1, \\ x=t^3+t. \end{cases}$

Решение. Найдем сначала производную функции y: $y'=2t+1$. Теперь найдем производную функции x: $x'=3t^2+1$. Следовательно, производная функции y'_x: $y'_x=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{2t+1}{3t^2+1}$.

Дифференциал функции одной переменной

Пример 7.14. Найти дифференциал функции $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

Решение. Так как $dy=y'dx$, то в данном случае

$$dy=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'dx \quad\Rightarrow\quad dy=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx.$$

Пример 7.15. Вычислить приближенно $\ln 1{,}02$.

Решение. Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Тогда, подставляя $f(x)=\ln x$, получим $\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln(x_0)+\dfrac{1}{x_0}\cdot\Delta x$.

Полагая здесь $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, найдем $\ln(1{,}02)\approx\ln 1+\dfrac{1}{1}\cdot 0{,}02=0{,}02$. Таким образом, $\ln 1{,}02\approx 0{,}02$.

Пример 7.16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3+5x^2-6x-16}$ по правилу Лопиталя.

Решение. Если в функцию подставить предельное значение $x = 2$, то получим неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Чтобы от нее избавиться, необходимо применить правило Лопиталя, т.е.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-4\right)'}{\left(x^3+5x^2-6x-16\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{3x^2+10x-6}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 4+10\cdot 2-6}=\frac{4}{26}=\frac{2}{13}.$$

Исследование функции одной переменной

Пример 7.17. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Найдем область определения функции. Для этого знаменатель не должен равняться нулю, т.е. $4-x^2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq\pm 2$. Следовательно, D = (– ∞, –2) ∪ (–2; 2) ∪ (2, + ∞).

2. Исследуем на четность и нечетность данную функцию. Для этого в функцию подставим вместо x значение $(-x)$.

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{4-(-x)^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}.$$

Так как $y(-x)\neq y(x)$, но $y(-x)=-\,y(x)$, то данная функция является нечетной. Данная функция не является периодической, так как $y(x+T)\neq y(x)$.

3. Исследуем поведение функции на концах области определения и односторонние пределы для точки $x = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{-\infty}{\frac{4}{+\infty}-1}=\frac{-\infty}{0-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{4}{x^2}-1}=\frac{\infty}{\frac{4}{+\infty}-1}=\frac{\infty}{0-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3}{4-x^2}=\lim_{x\to-2-0}\frac{x^3}{(2-x)\cdot(2+x)}=\frac{(-2-0)^3}{(2-(-2-0))\cdot(2+(-2-0)}=$$

$$=\frac{-8}{4\cdot(-0)}=\frac{2}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x^3}{(2-x)\cdot(2+x)}=\frac{(-2+0)^3}{(2-(-2+0))\cdot(2+(-2+0)}=\frac{-8}{4\cdot(+0)}=\frac{-2}{+0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^3}{(2-x)\cdot(2+x)}=\frac{(2-0)^3}{(2-(2-0))\cdot(2+(2-0)}=\frac{8}{(+0)\cdot 4}=\frac{2}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3}{(2-x)\cdot(2+x)}=\frac{(2+0)^3}{(2-(2+0))\cdot(2+(2+0)}=\frac{8}{(-0)\cdot 4}=\frac{2}{-0}=-\infty.$$

Значит, $x = 2$ и $x = -2$ — точки разрыва второго рода, т.е. вертикальные асимптоты.

4. Найдем горизонтальные или наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(4-x^2\right)\cdot x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{4x-x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^3}}{\dfrac{4x-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{4}{x^2}-1} = -1.$$

Так как $k \neq 0$, то горизонтальных асимптот у данной функции нет. Найдем значение b по формуле

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[y(x)-kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{4-x^2}+x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+4x-x^3}{4-x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{4-x^2}\right] = 0.$$

Значит, наклонная асимптота имеет уравнение $y = -x$.

5. Найдем промежутки возрастания и убывания функции, а также точки экстремума, т.е. решим уравнение $y' = 0$:

$$y' = \frac{\left(x^3\right)'\cdot(4-x^2)-x^3\cdot(4-x^2)'}{\left(4-x^2\right)^2} = \frac{3x^2\cdot(4-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} =$$

$$= \frac{12x^2-3x^4+2x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2},$$

$$\frac{12x^2-x^4}{(4-x^2)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2(12-x^2)=0, \\ 4-x^2\neq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=0, \\ x=\pm 2\sqrt{3}, \\ x\neq \pm 2. \end{cases}$$

Составим таблицу, по которой найдем точки экстремума и промежутки возрастания и убывания.

x	$(-\infty;\ -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3};\ -2)$	-2	$(-2;\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2,\ 2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3},\ +\infty)$
$y'(x)$	$-$	$3\sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	0	$+$	$-$	$+$	$-3\sqrt{3}$	$-$
$y(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\searrow$
		min		$-$		$-$		$-$		max	

Значит, на промежутках $(-\infty;\ -2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},\ +\infty)$ функция убывает, а на промежутках $(-2\sqrt{3};\ -2)$, $(-2;\ 0)$, $(0;\ 2)$ и $(2,\ 2\sqrt{3})$ — возрастает.

6. Найдем промежутки выпуклости и вогнутости функции, а также точки перегиба, т.е. $y'' = 0$:

$$y'' = \frac{\left(12x^2 - x^4\right)' \cdot (4-x^2)^2 - (12x^2 - x^4)\cdot\left((4-x^2)^2\right)'}{(4-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(24x - 4x^3)\cdot(4-x^2)^2 - (12x^2 - x^4)\cdot 2\cdot(4-x^2)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^4} =$$

$$= \frac{(4-x^2)\cdot\left(96x - 16x^3 - 24x^3 + 4x^5 + 48x^3 - 4x^5\right)}{(4-x^2)^4} = \frac{8x^3 + 96x}{(4-x^2)^3},$$

$$\frac{8x^3 + 96x}{(4-x^2)^3} = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 8x\left(x^2 + 12\right) \neq 0 \\ 4 - x^2 \neq 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = 0, \\ x^2 \neq -12, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Составим таблицу, по которой найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$y\,(x)$	+	–	–	0	+	–	–
$y''\,(x)$	$\cup$ +	–	$\cap$ –	0	$\cup$ +	–	$\cap$ –
		–		пер.		–	

Значит, на промежутках $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$ функция вогнутая, а на промежутках $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$ — выпуклая.

7. Найдем точки пересечения с осями:

а) с осью Ox: $y = 0$. Тогда $x = 0$;

б) с осью Oy: $x = 0$. Тогда $y = 0$, т.е. график функции пересекает оси только в одной точке $(0; 0)$.

8. Построим график данной функции (см. рис. 7.17).

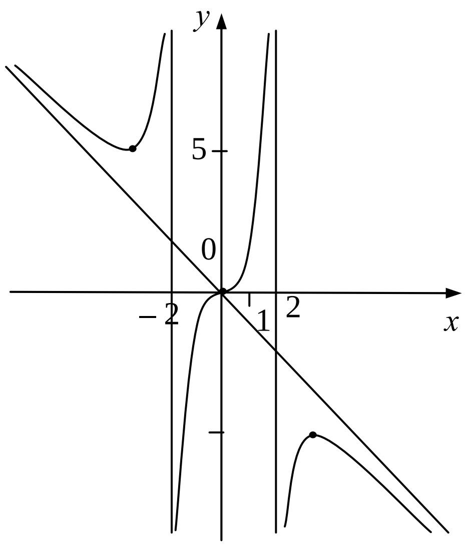


Рис. 7.17

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

7.1. Составить уравнение касательной и нормали к кривой:

а) $xy + \ln y = 1$ в точке $A\ (1, 1)$;

б) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке A (–1, 3);

в) $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке A (1, 1);

г) $x^2 - y^2 + 2xy + 2 = 0$ в точке A (1, 3);

д) $y = -\sqrt{x+1}$ в точке A (4, –1).

Ответы: а) $x + 2y - 3 = 0$; $2x - y - 1 = 0$;

б) $5x + 6y - 13 = 0$; $6x - 5y + 21 = 0$;

в) $x + y - 2 = 0$; $x - y = 0$;

г) $x + y - 4 = 0$; $x - y + 2 = 0$;

д) $x + 2\sqrt{5}y - 3 = 0$; $2\sqrt{5}x - y - 1 - 8\sqrt{5} = 0$.

7.2. Найти производную $y'(x)$ функции:

а) $y = 9x - 5$; б) $y = x^3 + 2x + 3$; в) $y = (2x^3 - 3)\cdot(2x^3 - 1)$; г) $y = \sqrt{x}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}$;

д) $y = \dfrac{x+5}{x-1}$; е) $y = \dfrac{4x^6 - 8}{x+5}$.

7.3. Найти производную $y'(x)$ сложной функции:

а) $y = \lg\left(3x^4 + x + 2\right)$; б) $y = 8^{x^3+2x+7}$; в) $y = \ln\cos\left(x^2 + 4\right)$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$; д) $y = 0{,}5\operatorname{ctg}^2 x + \ln(\sin x)$; е) $y = 5\left(3x^5 - 5x^3 + 9\right)^{10}$;

ж) $y = \left(1 - x^3\right)^{\cos 2x}$; з) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{x+1}$.

7.4. Найти производную $y'(x)$ параметрически заданной функции:

а) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t. \end{cases}$

7.5. Найти вторую производную $y''(x)$ функции:

а) $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$; б) $y = \left(x^2 - 1\right)\cdot\ln x$; в) $y = x\cdot e^{x^2}$; г) $y = \dfrac{\left(x^3 - 1\right)}{e^x}$;

д) $y = x\sqrt{1 + x^2}$; е) $y = \left(x^2 + 1\right)\cdot\operatorname{arctg}(x)$.

7.6. Найти дифференциал dy функции:

а) $y = 4\cos^3 x$; б) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{x+1}$; в) $y = \sqrt[3]{\ln\cos 2x}$; г) $y = (\operatorname{tg} x + 1)\cdot\cos x$;

д) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)$; е) $y=e^{\arccos 5x}$.

7.7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x+\sin x}{x+\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos(\pi x/2)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x^2}}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+3}{x^2+3x+7}\right)^{8x-3}$; л) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin 2x}{x-(\pi/4)}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cos x-\sin 2x}{x^3}$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) –1; г) ∞; д) 1; е) $\dfrac{2}{\pi}$; ж) e^{-2}; з) ∞; и) 0; к) e^{16}; л) 2; м) $\dfrac{1}{3}$.

7.8. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=\dfrac{x}{x^2+16}$; б) $y=2x+3e^{-x}$; в) $y=\dfrac{x^2-x+6}{x-2}$.

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Понятие функции нескольких переменных

Определение 8.1. Если каждой паре независимых друг от друга переменных x, y из некоторого множества D соответствует определенное значение переменной z, то z называется *функцией двух переменных* x, y. При этом пишут $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

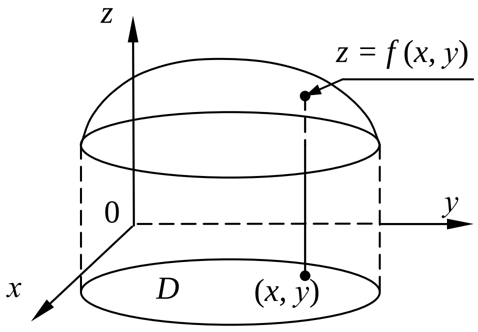


Рис. 8.1

В прямоугольных декартовых координатах $Oxyz$ графиком функции $z = f(x, y)$ обычно служит некоторая поверхность, при этом область D является частью плоскости xOy (рис. 8.1).

Определение 8.2. Если каждой совокупности значений независимых друг от друга n переменных $x, y, \ldots, t$ из некоторого множества D ставится в соответствие определенное значение переменной u, то u есть *функция n переменных* $x, y, \ldots, t$. При этом пишут

$$u = f(x, y, \ldots, t) \text{ или } u = u(x, y, \ldots, t).$$

Замечание. Функция трех и более переменных графического представления не имеет.

Определение 8.3. Множество D, на котором задана функция многих переменных, называется *областью определения* или *областью существования* этой функции.

Определение 8.4. Область существования D функции $u = u(x, y, \ldots, t)$ называется *замкнутой*, если она включает в себя свои граничные точки, и — *незамкнутой*, если функция не определена в граничных точках.

Определение 8.5. Функция многих переменных называется *однозначной*, если каждой совокупности значений независимых переменных из области определения соответствует единственное значение функции.

8.2. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 8.6. Величины

$$\Delta_x u = u(x + \Delta x, y, \ldots, t) - u(x, y, \ldots, t);$$

$$\Delta_y u = u(x, y + \Delta y, \ldots, t) - u(x, y, \ldots, t);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\Delta_t u = u(x, y, \ldots, t + \Delta t) - u(x, y, \ldots, t)$$

называются *частными приращениями функции* $u(x, y, \ldots, t)$ в точке $(x, y, \ldots, t)$ по $x, y, \ldots, t$ соответственно.

Определение 8.7. Величина

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots, t + \Delta t) - u(x, y, \ldots, t)$$

называется *полным приращением функции* $u(x, y, \ldots, t)$ в точке $(x, y, \ldots, t)$.

Определение 8.8. В случае функции двух переменных x, y δ-*окрестностью точки* M_0 (x_0, y_0) называется совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке M_0.

В случае функции трех переменных x, y, z δ-окрестностью точки M_0 (x_0, y_0, z_0) называется совокупность всех точек, лежащих внутри шара радиуса δ с центром в точке M_0.

В случае функции n переменных $x, y, \ldots, t$ δ-окрестностью точки M_0 $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ называется совокупность точек, лежащих внутри n-мерного шара радиуса δ с центром в точке M_0. δ-окрестность точки M_0 обозначается δ (M_0).

Определение 8.9. Число A называется *пределом функции* $u = u(x, y, \ldots, t)$ в точке M_0 $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M\,(x, y, \ldots, t) \in \delta\,(M_0) \Rightarrow |u(x, y, \ldots, t) - A| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{M \to M_0} u(x, y, \ldots, t) = A.$$

Определение 8.10. Функция $u(x, y, \ldots, t)$ называется *непрерывной* в точке $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если бесконечно малым приращениям аргументов $\Delta x, \Delta y, \ldots, \Delta t$ соответствует бесконечно малое приращение функции Δu, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta t \to 0}} \Delta u = 0.$$

Иначе условие непрерывности функции u можно представить следующим образом

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta t \to 0}} \left[u(\underbrace{x_0 + \Delta x}_{x}, \underbrace{y_0 + \Delta y}_{y}, \ldots, \underbrace{t_0 + \Delta t}_{t}) - u(x_0, y_0, \ldots, t_0) \right] = 0$$

или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ t \to t_0}} u(x, y, t) = u(x_0, y_0, \ldots, t_0).$

Определение 8.11. Точка $(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, в которой не выполняется условие непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции*.

Определение 8.12. Функция, непрерывная в каждой точке области, называется *непрерывной* в этой области.

Примеры точек разрыва для функции двух переменных.

1. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ непрерывна всюду, кроме точки (0; 0), которая является точкой разрыва. При $x \to 0$ и $y \to 0$ функция $z \to \infty$. Геометрически это означает, что в точке (0; 0) поверхность имеет бесконечный шпиль (рис. 8.2).

2. Точки разрыва функции двух переменных могут образовывать целые линии. Для функции $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ точками разрыва являются все точки, лежащие на биссектрисах координатных углов плоскости *Oxy*, т.е. точки, в которых $y = x$ или $y = -x$ (рис. 8.3).

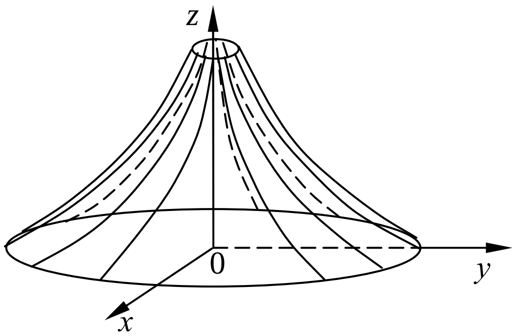


Рис. 8.2

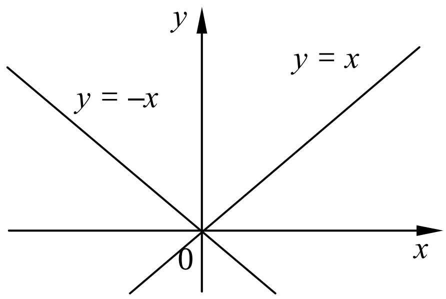


Рис. 8.3.

8.3. Частные производные функции двух переменных

Определение 8.13. *Частными производными* по *x, y, …, t* функции *u* = = *u(x, y, …, t)* называются величины, обозначаемые $u'_x, u'_y, \ldots, u'_t$ и определяемые формулами

$$u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}, \quad u'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}, \quad \ldots, \quad u'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t u}{\Delta t}.$$

Другие обозначения частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial z}$ соответственно.

Чтобы найти частную производную функции по данной независимой переменной, необходимо все остальные переменные мысленно считать постоянными величинами и вычислять производную по правилам дифференцирования функции одной переменной.

Например, для функции $z = y^2 \sin xy$ частные производные по *x* и по *y* имеют вид $z'_x = y^3 \cos xy$; $\quad z'_y = 2y \sin xy + xy^2 \cos xy$.

Определение 8.14. *Полным дифференциалом du* функции многих переменных $u = u(x, y, \ldots, t)$ называется величина, определяемая формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

8.4. Производная по направлению

Определение 8.15. Под производной $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ функции u в данном направлении ℓ понимается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения при условии, что последняя стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta_\ell u}{\Delta \ell}.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial \ell}$ определяет скорость изменения функции в направлении ℓ.

Теорема 8.1 (*формула производной по направлению*). Производная функции u по направлению ℓ в точке $M(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы.

Замечание. Для функции двух переменных третье слагаемое формулы отсутствует.

8.5. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Определение 8.16. Если в области D декартовых координат x, y, z задана скалярная функция $u = u(x, y, z)$, то говорят, что задано *скалярное поле*.

Определение 8.17. *Градиентом скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ в области D называется вектор, обозначаемый grad u, координаты которого в декартовом базисе равны соответствующим частным производным от u, т.е.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Замечание. Для функции двух переменных третье слагаемое формулы отсутствует.

Теорема 8.2 (*о связи градиента с производной по направлению*). Производная функции $u = u(x, y, z)$ по направлению $\vec{\ell}$ равна проекции grad u на это направление, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \text{Пр}_{\vec{\ell}}\operatorname{grad} u.$$

Определение 8.18. Если функция $y = y(x)$, $z = z(x, y)$, …, $\varpi = \varpi(x, y, \ldots, t)$ заданы уравнениями $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, …, $\psi(x, y, \ldots, t, \varpi) = 0$ соответственно, то говорят, что функции $y, z, \ldots, \varpi$ заданы *неявно*.

Теорема 8.3 (*о производных неявных функций*). Если $F(x, y) = 0$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \tag{8.1}$$

если $\Phi(x, y, z) = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi'_x}{\Phi'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi'_y}{\Phi'_z}; \tag{8.2}$$

если $\psi(w; x; y, ..., t) = 0$, то

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = -\frac{\psi'_x}{\psi'_\varpi}, ..., \frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\frac{\psi'_t}{\psi'_\varpi}. \tag{8.3}$$

Геометрическим образом функции двух переменных $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность. Выберем на ней точку M_0 (x_0, y_0, z_0).

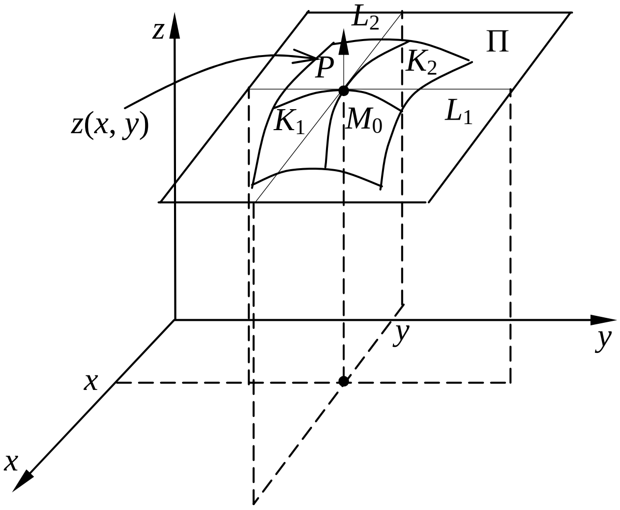


Рис. 8.4

Определение 8.19. *Касательной плоскостью* к поверхности в данной точке называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку (рис. 8.4).

Если уравнение поверхности задано явно, т.е. $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости П, проведенной к данной поверхности в точке M_0 (x_0, y_0) имеет вид

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = z - z_0. \tag{8.4}$$

Если уравнение поверхности P задано неявной функцией $F(x, y, z) = 0$, то

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}; \quad f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В этом случае уравнение касательной плоскости П к поверхности в точке M_0 (x_0, y_0, z_0) примет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{8.5}$$

Замечание. Точка, в которой хотя бы одна из производных F'_x, F'_y, F'_z не существует, называется *особой точкой поверхности*. В такой точке поверхность может не иметь касательной.

Определение 8.20. *Нормалью* к поверхности P в данной точке M_0 называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Согласно условию перпендикулярности прямой и плоскости, уравнение нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0 (x_0, y_0, z_0) имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Если поверхность P задана неявно функцией $F(x, y, z) = 0$, то уравнение нормали примет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

8.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных

Производные первого порядка являются функциями, следовательно, их можно дифференцировать.

Определение 8.21. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются *частными производными второго порядка* от функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$ и обозначаются

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ z''_{xx},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\ f''_{xx}(x,y),$$

f дифференцируется последовательно два раза по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ z''_{xy},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y},\ f''_{xy}(x,y),$$

f дифференцируется сначала по x затем по y;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ z''_{yx},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x},\ f''_{yx}(x,y),$$

f дифференцируется сначала по y затем по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ z''_{yy},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2},\ f''_{yy}(x,y),$$

f дифференцируется последовательно два раза по y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь частных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и так далее.

Частные производные высших порядков функции $z = f(x, y)$, взятые по различным переменным, называются *смешанными производными*.

Теорема 8.4. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} определены и непрерывны в области их определения, то $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Определение 8.22. Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке P (x, y), если он существует, называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается

$$d^2z = d(dz),$$

$$d^2z = d(\overbrace{f'_x(x,y)}^{z'_x}\,dx + \overbrace{f'_y(x,y)}^{z'_y}\,dy) = d(z'_x\,dx) + d(z'_y\,dy) =$$

$$= (z''_{xx}\,dx + z''_{xy}\,dy)\,dx + (z''_{yx}\,dx + z''_{yy}\,dy)\,dy = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}\,dy^2.$$

Дифференциалы третьего и выше порядков получаются аналогично.

8.7. Локальные экстремумы функции двух переменных

Определение 8.23. Точка M_0 (x_0, y_0) называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $z = f(x, y)$, если существует δ-окрестность этой точки, такая, что для всех $M(x, y) \in \delta(M_0)$ выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) < f(x, y)).$$

Точки максимума или минимума функции называют точками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции — экстремумами функции.

Теорема 8.5 (*необходимые условия существования экстремума*). Если в точке M_0 (x_0, y_0) дифференцируемая функция $f(x, y)$ имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

Доказательство. Рассмотрим в $\delta(M_0)$ лишь те точки, для которых $y = y_0$. Получим функцию $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ одной переменной. Эта функция имеет в точке x_0 экстремум, следовательно, $\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично доказывается, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Точка M_0 (x_0, y_0) называется стационарной, критической или точкой возможного экстремума.

Следствие. Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке M_0 экстремум, то ее дифференциал в этой точке равен нулю или не существует.

Теорема 8.6 (*достаточные условия существования экстремума*). Стационарная точка M_0 дважды дифференцируемой в ее окрестности функции $z = f(x, y)$ является точкой экстремума, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

При этом, если $f''_{xx} < 0$, то точка M_0 — точка максимума, если $f''_{xx} > 0$, то точка M_0 — точка минимума.

Обозначим $A = f''_{xx}$, $B = f''_{xy}$, $C = f''_{yy}$. Тогда, если $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в точке M_0 экстремума нет.

Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, тогда точка M_0 является точкой экстремума. Кроме того, если $A > 0$, то M_0 — точка минимума; если $A < 0$, то M_0 — точка максимума.

Если $\Delta = AC - B^2 = 0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке M_0. В этом случае необходимо вести дополнительное исследование поведения знака $f'(x, y)$ в окрестности точки M_0.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 8.1. Найти область определения функции $z = \dfrac{\ln x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Найдем область определения функции. Для этого необходимо, чтобы подкоренное выражение, стоящее в знаменателе, и аргумент натурального логарифма были больше нуля, т.е.

$$\begin{cases} x > 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

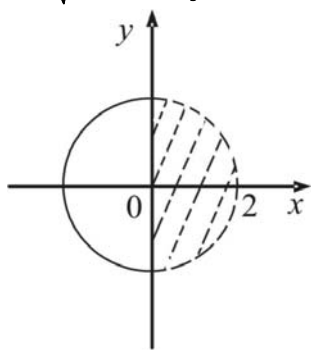


Рис. 8.5

Построим область (рис. 8.5), которая получена этой системой. Так как сумма квадратов меньше 4 и $x > 0$, то искомой будет область, заштрихованная на рисунке.

Пример 8.2. Доказать соотношение $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$, если $z = \cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$.

Решение. 1. Найдем частные производные первого порядка от данной функции. Сначала найдем производную по переменной x, т.е. переменную y будем считать постоянной величиной, производная от которой равна нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right)\cdot\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(2y - x).$$

2. Найдем вторую производную от данной функции по переменной x.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{2}\sin(2y - x)\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2y - x)\cdot(0 - 1) = -\cos(2y - x).$$

Найдем смешанную производную от данной функции, т.е. найдем производную по y от $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sin(2y - x)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{1}{2}\sin(2y - x)\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2y - x)\cdot(2 - 0) = 2\cos(2y - x).$$

3. Подставим найденные значения в данное соотношение и получим

$$-2\cos(2y-x)+2\cos(2y-x)=0 \quad \Rightarrow \quad 0\equiv 0.$$

Пример 8.3. Найти градиент функции $z=x^3+y^3-9xy+27$ в точке B (2; 4) и ее производную в точке A (–2; 1) по направлению вектора $\vec{AB}$.

Решение. 1. Для того чтобы вычислить градиент, необходимо найти частные производные первого порядка от данной функции.

Сначала найдем производную по переменной x, т.е. переменную y будем считать постоянной величиной, производная от которой равна нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+0-9\cdot 1\cdot y+0=3x^2-9y.$$

Теперь найдем производную по переменной y, т.е. переменную x будем считать постоянной величиной.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0+3y^2-9x\cdot 1+0=3y^2-9x.$$

Найдем значения найденных производных в точке A.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=3\cdot(-2)^2-9\cdot 1=12-9=3;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=3\cdot 1^2-9\cdot(-2)=3+18=21.$$

Подставим найденные значения в формулу нахождения градиента

$$\operatorname{grad} z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}=3\vec{i}+21\vec{j}.$$

2. Найдем значения производных, найденных в первом пункте, в точке B.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_B=3\cdot 2^2-9\cdot 4=12-36=-24;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_B=3\cdot 4^2-9\cdot 2=48-18=30.$$

Теперь найдем направляющие косинусы вектора $\vec{AB}$, координаты которого равны $\vec{AB}=\{2-(-2);\,4-1\}=\{4;\,3\}$.

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{4}{5};\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}=\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{3}{5}.$$

Подставим найденные значения в формулу нахождения производной по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=-24\cdot\frac{4}{5}+30\cdot\frac{3}{5}=-\frac{6}{5}=-1{,}2\,.$$

Пример 8.4. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\ln\left(5x+3y\right)$ в точке M_0 (2; –3; 0).

Решение. 1. Так как функция задана явно, то уравнение касательной имеет вид

$$f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)=z-z_0\,.$$

Найдем частные производные первого порядка в точке M_0 от данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{5}{5x+3y}\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\frac{5}{5\cdot 2+3\cdot(-3)}=5\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3}{5x+3y}\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\frac{3}{5\cdot 2+3\cdot(-3)}=3\,.$$

Следовательно,

$$5\cdot(x-5)+3\cdot(y-3)=z-0\quad\Rightarrow\quad 5x+3y-z-34=0.$$

2. Уравнения нормали к поверхности запишем в виде

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Тогда $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-0}{-1}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{-1}\,.$

Пример 8.5. Найти экстремумы функции

$$z=x^2+xy+y^2-13x-11y+7.$$

Решение. Найдем критические точки. Для этого приравняем к нулю частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y+0-13-0+0=2x+y-13\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=0+x+2y-0-11+0=2y+x-11\,;$$

$$\begin{cases}2x+y-13=0,\\2y+x-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=13-2x,\\26-4x+x-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}y=13-2x,\\3x=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3,\\x=5.\end{cases}$$

Теперь найдем вторые частные производные.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2;$$

Исследуем точку M (5; 3). Здесь A = 2, B = 1, C = 2.

$$AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0,$$

Следовательно, экстремум есть.

Так как $A > 0$, то в точке M функция z имеет минимум. Найдем значение функции в точке M.

$$z_{\min}(M) = z(5;3) = 5^2 + 5\cdot 3 + 3^2 - 13\cdot 5 - 11\cdot 3 + 7 = -42.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.1. Найти область определения функций:

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{\left(y^2-1\right)\cdot\left(x+1\right)}}$; б) $z = \sqrt{\dfrac{x+y+1}{y-x}}$.

8.2. Доказать соотношения:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, если $z = e^{-x-3y}\cdot\sin\left(x+3y\right)$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, если $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

8.3. Найти градиент функции в точке B и ее производную в точке A по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$:

а) $u = xy + \dfrac{x}{y}$, если A (3; 2), B (5; 4);

б) $u = xy^2z^3$, если A (3; 2; 1), B (5; 4; 2).

8.4. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке:

а) $2x^2 + y^2 + z^2 = 5$ в точке M_0 ($\sqrt{2}$; 1; 0);

б) $z = 3x^2y - 2xy^2$ в точке M_0 (1; – 1; 5).

8.5. Найти экстремумы функции: $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.

9. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

9.1. Первообразная функции

Основные понятия и определения

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или $df = f'(x)\,dx$ функции $f(x)$.

В интегральном исчислении решается обратная задача. По заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ или

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Таким образом, основной задачей интегрального исчисления является восстановление функции $F(x)$ по известной производной (дифференциалу) этой функции.

Определение 9.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором множестве, если она дифференцируема на этом множестве и

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)\,dx.$$

Теорема 9.1. Любая непрерывная на $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Теорема 9.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на множестве x, то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, т.е. $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — постоянная.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$. Их разность $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$ является дифференцируемой функцией. Следовательно,

$$F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = C,$$

т.е. $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Следствие. Если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то все первообразные этой функции определяются выражением $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Определение 9.2. Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Определение 9.3. Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, $f(x)$ — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования, C — постоянная интегрирования.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная — подынтегральной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ и $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x).$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Доказательство. Так как

$$dF(x) = F'(x)\,dx,$$

а $F'(x) = f(x)$, то $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Тогда $aF(x)$ — первообразная функции $af(x)$:

$$(aF(x))' = aF'(x) = af(x).$$

Следовательно,

$$a\int f(x)\,dx = a(F(x)+C) = aF(x) + C_1 = \int af(x)\,dx, \quad C_1 = aC.$$

4. $\int\left(f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \ldots\right)dx = \int\left(f_1\right)dx \pm \int\left(f_2\right)dx \pm \int\left(f_3\right)dx \pm \ldots$

Доказательство. Проведем для двух функций. Пусть $F'(x) = f_1(x)$, $\Phi'(x) = f_2(x)$. Тогда $F(x) \pm \Phi(x)$ является первообразными функций $f_1(x) \pm f_2(x)$. Следовательно,

$$\int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx = (F(x)+C_1) \pm (\Phi(x)+C_2) =$$

$$= F(x) \pm \Phi(x) + C_1 \pm C_2 = \int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx.$$

Замечание. Данное свойство справедливо для любого конечного числа функций.

5. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Доказательство. Действительно

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

6. (*Инвариантность формул интегрирования.*) Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)\,du = F(u) + C,$$

где u — дифференцируемая функция.

Доказательство. Воспользуемся свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Если $dF(x) = F'(x)\,dx$, то $dF(u) = F'(u)\,du$, где $u = u(x)$. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, тогда $F'(x) = f(x)$. Так как $d\left(\int f(u)\,du\right) = f(u)\,du$ и $d\left(F(u)+C\right) = dF(u) = f(u)\,d(u)$, получаем $\int f(u)\,d(u) = F(u) + C$.

Основные формулы интегрирования

Таблица основных формул интегрирования получается из таблицы производных элементарных функций при обратном ее чтении.

Буква z может обозначать как независимую переменную $z = x$, так и функцию от независимой переменной $z = z(x)$.

1. $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \int dz = z + C.$

2. $\int \dfrac{dz}{z} = \ln|z| + C.$

3. $\int a^z dz = \dfrac{a^z}{\ln a} + C, \int e^z dz = e^z + C.$

4. $\int \sin z\,dz = -\cos z + C.$

5. $\int \cos z\,dz = -\sin z + C.$

6. $\int \dfrac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z + C.$

7. $\int \dfrac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg} z + C.$

8. $\int \dfrac{dz}{a^2 - z^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+z}{a-z}\right| + C.$

9. $\int \dfrac{dz}{a^2 + z^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{z}{a} + C.$

10. $\int \dfrac{dz}{z^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{z-a}{z+a}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = \ln\left|z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \arcsin\dfrac{z}{a} + C.$

13. $\int \sqrt{z^2 + a^2}\,dz = \dfrac{z}{2}\sqrt{z^2 + a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left|z + \sqrt{z^2 + a^2}\right| + C.$

14. $\int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \dfrac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{z}{a} + C.$

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет универсальных приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

9.2. Основные методы интегрирования

Основными методами интегрирования являются: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной и интегрирование по частям.

1. *Непосредственное интегрирование*. Этот метод основан на разложении подынтегральной функции на сумму функций, от каждой из которых первообразную можно найти с помощью таблицы интегралов.

Например,

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2+2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx + \int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{6}+2x+\ln|x|+C.$$

Проверка. $d\left(\frac{x^3}{6}+2x+\ln|x|+C\right) = \left(\frac{x^2}{2}+2+\frac{1}{x}\right)dx.$

Замечание. Нет надобности после каждого слагаемого ставить произвольную постоянную, так как сумма произвольных постоянных есть также произвольная постоянная, которую мы пишем в конце.

2. *Метод замены переменной или способ подстановки*. Пусть $f(x)$ непрерывна на (a, b) и $x = \varphi(t)$ дифференцируема на (α, β); причем функция φ отображает (α, β) в (a, b). На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента, и учитывая, что $dx = \varphi'(t)\,dt$, получаем формулу замены переменной в неопределенном интеграле

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (9.1)$$

Интеграл, стоящий в правой части (9.1) может оказаться проще интеграла, стоящего в левой части этого равенства, или даже табличным.

Итак, для вычисления $\int f(x)\,dx$ с помощью подстановки $x = \varphi(t)$ надо в функции $f(x)$ заменить x на $\varphi(t)$ и положить $dx = \varphi'(t)\,dt$. При этом получаем искомую функцию, выраженную через переменную t. Для возвращения к переменной x необходимо t заменить значением $t = \psi(x)$, которое находится из соотношения $x = \varphi(t)$.

Иногда формулу (9.1) удобно применять справа налево, т.е.

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$$

или

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \text{ где } t = \varphi(x).$$

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила:

1) если $\int f(x)\,dx = F(x)+C,$ то $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+C;$

2) если $\int f(x)\,dx = F(x)+C,$ то $\int f(x\pm b)\,dx = F(x\pm b)+C;$

3) если $\int f(x)\,dx = F(x)+C,$ то $\int f(ax\pm b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

3. *Интегрирование по частям*. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две функции от x, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du. \tag{9.2}$$

В равенстве (9.2) произвольной постоянной не пишем, так как в правой части формулы остался неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную. Формула (9.2) называется *формулой интегрирования по частям*. По этой формуле нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int v\,du$. Применение этой формулы имеет смысл в тех случаях, когда последний интеграл будет проще, чем заданный, или когда он будет ему подобен. Чтобы применить формулу интегрирования по частям к некоторому интегралу $\int f(x)dx$, надо подынтегральное выражение $\int f(x)dx$ представить в виде произведения двух сомножителей u и dv. За u чаще всего принимают функцию, которая при дифференцировании упрощается (например $\ln x$, x^n, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и т.д.) За dv всегда выбирают выражение (содержащее dx), из которого интегрированием можно найти v.

Иногда для получения окончательного результата необходимо интегрирование по частям применять последовательно несколько раз.

Группы интегралов, вычисляемые по формуле интегрирования по частям:

1. $\int P_n(x)e^{kx}dx$; $\int P_n(x)\sin kx\,dx$; $\int P_n(x)\cos kx\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n; k — некоторое число. Интегралы этого типа берутся по частям, если положить $u = P_n(x)$, и интегрирование по частям ведется n раз.

2. $\int P_n(x)\ln x\,dx$; $\int P_n(x)\arcsin x\,dx$; $\int P_n(x)\arccos x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arctg} x\,dx$; $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Во всех этих случаях за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

3. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a, b — числа. Для этих интегралов решение по частям применяется дважды.

9.3. Многочлены. Рациональные дроби. Простейшие рациональные дроби

Определение 9.4. *Корнем многочлена* $P(x)$ называют всякое число α, обращающее многочлен в ноль, т.е. такое, что $P(\alpha) = 0$.

Теорема 9.3. Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = A(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\times$$
$$\times(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{t_m},$$

где x_1, x_2, …, x_r — корни многочлена кратности k_1, k_2, …, k_r соответственно. При этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(t_1 + t_2 + \ldots + t_m) = n$, все кратные трехчлены не имеют вещественных корней.

Определение 9.5. *Рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, $Q_n(x)$— многочлен степени n.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, в противном случае рациональная дробь называется *неправильной*.

Теорема 9.4. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W(x) + \frac{P_r(x)}{Q_n(x)}, \ m \ge n, \ r < n.$$

9.4. Интегрирование простейших рациональных дробей

Определение 9.6. Правильные рациональные дроби следующих видов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \text{ II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \ k \ge 2; \text{ III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \text{ IV. } \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}, \ k \ge 2$$

(в дробях III, IV видов знаменатель действительных корней не имеет) называются *простейшими дробями* I, II, III, IV типов.

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k} dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \pm \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]}.$$

Последний интеграл является табличным типа $\int \dfrac{dx}{z^2 \pm a^2}$, где $x + \dfrac{p}{2} = z$, $q - \dfrac{p^2}{4} = a^2$.

Дробь IV типа в рамках данного курса не рассматривается.

9.5. Разложение рациональной дроби на простейшие. Интегрирование рациональных дробей

Теорема 9.5. Пусть дана правильная рациональная дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$, $r<n.$

Если $Q(x)=A(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}...,$ то дробь $\dfrac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_{k_1}}{(x-a)^{k_1}}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+$$

$$+\frac{B_{k_2}}{(x-b)^{k_2}}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+...+$$

$$+\frac{M_{t_1}x+N_{t_1}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{t_1}}+...+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_2x+q_2}+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+...+$$

$$+\frac{C_{t_2}x+D_{t_2}}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{t_2}}+... \qquad (9.\ 3)$$

Разложение (9.3) называется *разложением рациональной функции* на элементарные (простейшие) дроби. Чтобы определить числа $A_{k_i}, B_{k_i}, M_{t_i}, N_{t_i}, C_{t_i}, D_{t_i}$, правую часть разложения приводят к общему знаменателю и числители левой и правой дробей приравнивают. Так как равенство между многочленом $R_r(x)$ и многочленом, который получится в правой части, справедливо для всех *x*, то коэффициенты при одинаковых степенях *x* этих многочленов равны между собой. Таким образом, получим ряд уравнений первой степени, из которых найдем неизвестные числа. Этот метод нахождения коэффициентов называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\displaystyle\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx.$ Интеграл от рациональной дроби вычисляется согласно следующим основным правилам.

1. Если рациональная дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

2. Разлагают знаменатель правильной рациональной дроби на множители.

3. Правильную рациональную дробь раскладывают на сумму простейших дробей, т.е. сводят интегрирование правильной рациональной дроби к интегрированию простейших дробей.

9.6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы от некоторых иррациональных функций с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам рациональных функций и, следовательно, до конца интегрируются.

Вид интеграла	Замена переменной в интеграле
$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$, где R — рациональная функция своих аргументов	$t^k = x$, тогда $dx = k \cdot t^{k-1}\,dt$, где k — общий знаменатель всех дробных показателей у переменной x. В результате получаем интеграл от рациональной дроби
$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$,	$ax + b = t^k$, тогда $a{\cdot}dx = k \cdot t^{k-1}dt$, где k — общий знаменатель всех дробных показателей у переменной x
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k — общий знаменатель всех дробных показателей у переменной x
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$	$x = a \sin t$. Полезно знать формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$	$x = a \operatorname{tg} t$. Полезно знать формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$	$x = a \sec t = \frac{a}{\cos t}$. Полезно знать формулу $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

9.7. Интегрирование тригонометрических функций

Вид интеграла	Способ решения
$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	Универсальные тригонометрические подстановки (общий случай): $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dx}{1+t^2}$. В результате получится интеграл от рациональной функции
$\int R(\sin x)\cos x\,dx$	$t = \sin x, \quad \cos x\,dx = dt \quad \Rightarrow \quad \int R(t)dt$
$\int R(\cos x)\sin x\,dx$	$t = \cos x, \quad -\sin x\,dx = dt \quad \Rightarrow \quad -\int R(t)dt$
$\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$	$t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, $\sin x$, $\cos x$ входят только в четных степенях	$t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$; $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$
$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$: а) по крайней мере, одна из m и n — нечетна;	а) Пусть $n = 2k + 1$. $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\,dx = = \int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k \cos x\,dx = = \left\lvert \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{matrix} \right\rvert = \int t^m (1-t^2)^k\,dt$ — интеграл от рациональной функции.
б) m, n — четные, больше нуля, т.е. $m = 2p$, $n = 2q$;	б) Воспользоваться формулами понижения степени $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.
в) n, m — четные и хотя бы один отрицателен	в) Вводится замена $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$
$\int \cos mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \sin nx\,dx$, $m \neq n$	Воспользоваться формулами $\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$, $\sin mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$, $\sin mx \sin nx = \dfrac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$

9.8. Понятие об интегрируемости в конечном виде или о функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции

Трудность интегрального исчисления по сравнению с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределенный интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией.

Определение 9.7. Говорят, что функция $f(x)$ *интегрируема в конечном виде* (или интеграл $\int f(x)\,dx$ берется в конечном виде), если ее первообразная является элементарной функцией.

Определение 9.8. Говорят, что элементарные функции, интегралы от которых не выражаются никакими конечными комбинациями основных элементарных функций, *не интегрируемы в элементарных функциях* (или не интегрируемы в конечном виде).

Например, интегралы $\int e^{-x^2}\,dx$; $\int \dfrac{\sin x}{x}dx$; $\int \dfrac{\cos x}{x}dx$; $\int \dfrac{dx}{\ln x}$; $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ нельзя представить никакими элементарными функциями. То есть первообразные от элементарных функций e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\cos x}{x}$ и т.д. не являются элементарными функциями. В подобных случаях первообразная представляет собой, очевидно, некоторую новую функцию, которая не сводится к комбинации конечного числа элементарных функций. Так, например, та из первообразных $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx + C$, которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *функцией Лапласа* и обозначается $\Phi(x)$. То есть

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2}dx + C, \text{ если } \Phi(0) = 0.$$

Эта функция хорошо изучена. Составлены таблицы ее значений при различных значениях x. График подынтегральной функции $y = e^{-x^2}$ представлен на рис. 9.1. График функции Лапласа $y = \Phi(x)$ представлен на рис. 9.2.

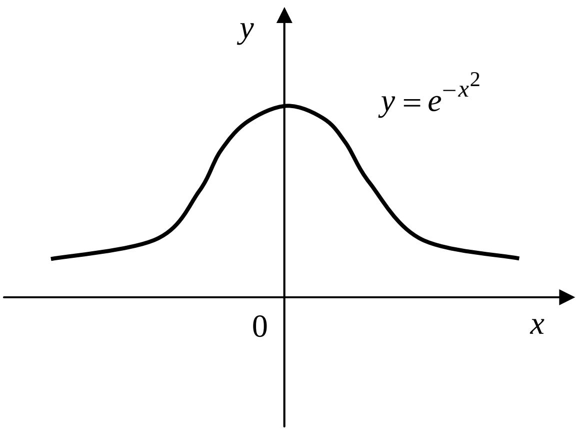


Рис. 9.1

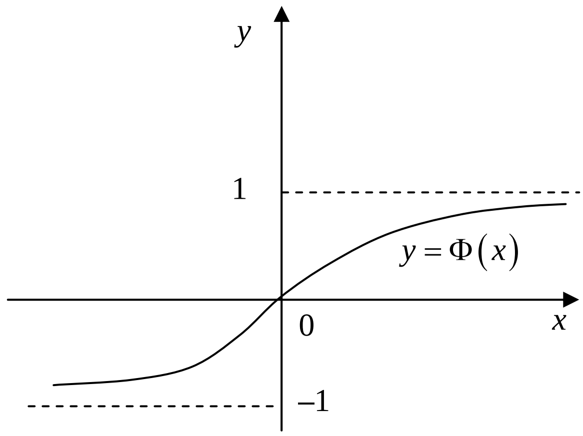


Рис. 9.2

Та из первообразных $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx + C$ ($k < 1$), которая обращается в нуль при $x = 0$, называется *эллиптическим интегралом* и обозначается $E(x)$:

$$E(x) = \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx + C_2, \text{ если } E(0) = 0.$$

Для этой функции также составлены таблицы значений при различных значенях x.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 9.1. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x}dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция представляет собой произведение двух функций с одинаковым основанием, но разными степенями, то

$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C.$$

Пример 9.2. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{x-5}\,dx$.

Решение. Произведем в данном интеграле замену переменной.

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x-5} = t \\ x-5 = t^2 \\ x = t^2+5 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int (t^2+5)\cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+5t^2)dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{10t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 9.3. Вычислить интеграл $\int x\ln x dx$.

Решение. Данный интеграл вычисляется методом интегрирования по частям.

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 9.4. Вычислить интеграл $\int \frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1}dx.$

Решение. 1. Так как подынтегральная функция представляет неправильную дробь, то сначала необходимо выделить целую часть рациональным методом деления числителя на знаменатель.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4+1 \qquad\qquad & x^3-x^2+x-1 \\ \cline{2-2} x^4-x^3+x^2-x & x+1 \\ \cline{1-1} -\;x^3-x^2+x+1 & \\ x^3-x^2+x-1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

2. Разложим знаменатель полученной правильной рациональной дроби на элементарные множители:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1) \Rightarrow \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}.$$

3. Методом неопределенных коэффициентов представим данную дробь в виде суммы двух простейших дробей по формуле (9.3):

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Отсюда $Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C = 2$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа последнего равенства, получим

$$\left.\begin{matrix} A+B=0, \\ C-B=0, \\ A-C=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=-B, \\ C-B=0, \\ -B-C=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C=1, \\ A=1, \\ -2B=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C=1, \\ A=1, \\ B=-1; \end{matrix}\right\}$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1} = x+1+\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1};$$

$$\int \frac{(x^4+1)}{x^3-x^2+x-1}dx = \int\left(x+1+\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx + \int dx + \int\frac{dx}{x-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 9.5. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

Решение. Так как в интеграле присутствуют корни различных степеней, то сначала находится наименьшее общее кратное между ними, а затем x в наименьшей степени заменяется через другую переменную, т.е.

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3}.$$

Теперь, так как дробь неправильная, выделим целую часть и вычислим по отдельности полученные два интеграла, т.е. $6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$ $=6t-6\operatorname{arctg}t+C=6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

Пример 9.6. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Данная подынтегральная функция является тригонометрической, причем $\sin x$ присутствует в первой степени, поэтому воспользуемся следующей подстановкой: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $x=2\operatorname{arctg}t$; $dx=\frac{2dx}{1+t^2}$ и получим

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 9.7. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Решение. Данная подынтегральная функция является тригонометрической, причем $\sin x$ и $\cos x$ присутствуют в четных степенях, поэтому распишем 1, которая домножена на $\sin^2 x$ и преобразуем полученное выражение.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\,(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\cos^6 x}dx=\int\operatorname{tg}^2x(\operatorname{tg}^2x+1)^2dx=\left|\begin{matrix}\operatorname{tg}x=t,\\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int t^2(t^2+1)^2\frac{dt}{1+t^2}=\int t^2(t^2+1)\,dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=\frac{\operatorname{tg}x^5}{5}+\frac{\operatorname{tg}x^3}{3}+C.$$

Пример 9.8. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{4-x^2}dx$.

Решение. Вычислим интеграл методом замены.

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{4-x^2}=t\\ 4-x^2=t^2\\ -2x\,dx=2t\,dt\\ x\,dx=-t\,dt\end{matrix}\right|=-\int t\cdot t\,dt=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3+C.$$

Пример 9.9. Вычислить интеграл $\int\sin 5x\sin 3x\,dx$.

Решение. Сначала представим подынтегральную функцию в виде сумм двух простых функций по формуле $\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$, а затем вычислим полученные два интеграла, т.е.

$$\int\sin 5x\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\left[-\cos 8x+\cos 2x\right]dx=-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вычислить интегралы

9.1. $\int \left(2\sin x - 3\cos x\right) dx$.

9.2. $\int 2x e^{x^2} dx$.

9.3. $\int \cos 2x\, dx$.

9.4. $\int x^2 \sqrt[3]{4-3x^3}\, dx$.

9.5. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

9.6. $\int x e^x dx$.

9.7. $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$.

9.8. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

9.9. $\int e^x (x^2+2)\, dx$.

9.10. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$.

9.11. $\int \frac{x}{(x+1)(x-2)} dx$.

9.12. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

9.13. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)(x^2+1)}$.

9.14. $\int \frac{\left(3x+2\right) dx}{x(x-1)^3}$.

9.15. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

9.16. $\int \cos^2 x\, dx$.

9.17. $\int \cos 10x \sin 4x\, dx$.

9.18. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^5}+1}$.

9.19. $\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}\, dx$.

9.20. $\int x^2 \sqrt{7-6x-x^2}\, dx$.

10. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. Определенный интеграл и задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Некоторые физические толкования определенного интеграла

Определение 10.1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разделим $[a, b]$ на части произвольными точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ данного разбиения выберем произвольную точку ξ_i. Сумма $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$.

Определение 10.2. Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма S_n, когда $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, называется *определенным интегралом* от функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Число a называется *нижним пределом* определенного интеграла, а число b — *верхним его пределом*.

Теорема 10.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

Теорема 10.2 (*существования определенного интеграла*). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она и интегрируема на этом отрезке.

Теорема 10.3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a, b]$.

Задача 10.1 (*о массе неоднородного стержня*). Пусть дан линейный неоднородный стержень, лежащий на оси Ox в пределах отрезка $[a, b]$ (рис. 10.1).

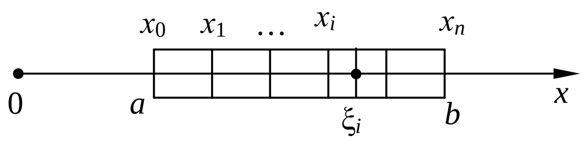


Рис. 10.1

Требуется определить массу этого стержня. Пусть плотность распределения массы вдоль стержня есть некоторая непрерывная функция от x: $\rho(x)$.

Разобьем стержень на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В пределах каждой части $[x_i, x_{i+1}]$ выберем по произвольной точке ξ_i. Так как в пределах $[x_i, x_{i+1}]$ функция $\rho(x)$ изменяется мало, то массу части стержня, соответствующей отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, можно считать приближенно равной $m_i = \rho(\xi_i)\,\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Составим сумму m_n

$$m_n = \rho(\xi_i)\Delta x_i + \ldots + \rho(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i,$$

которую называют интегральной суммой, по определению 10.1, и которая, очевидно, равна сумме m_i.

Устремим все Δx_i к нулю так, чтобы максимальный частичный отрезок разбиения стремился к нулю. Если при этом величина m_n стремится к определенному пределу m, не зависящему от способов разбиения и выбора точек ξ_i, то естественно величину m называть массой данного стержня. Таким образом

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{опред. 10.2}}{=} \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Задача 10.2 (*о площади криволинейной трапеции*). Пусть на $[a, b]$ задана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$. Требуется определить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 10.2).

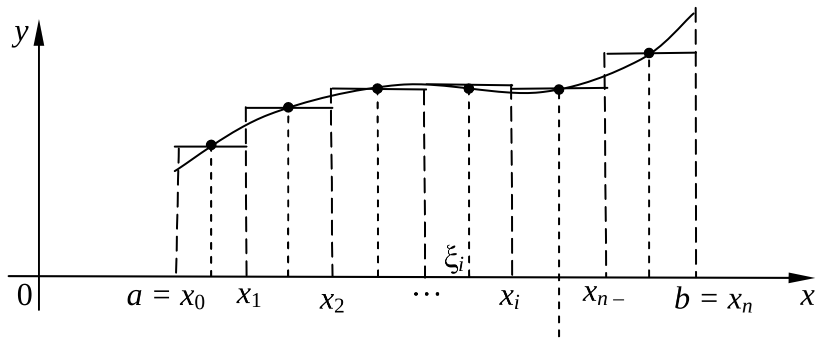


Рис. 10.2

Разобьем $[a, b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Выберем на каждом из полученных частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ по произвольной точке ξ_i, значение функции $f(x)$ в этих точках будет $f(\xi_i)$ и, следовательно, площадь каждого из полученных прямоугольников будет $f(\xi_i)\,\Delta x_i$.

Составим сумму $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$, которую, по определению 10.1, называют интегральной суммой и которая, очевидно, равна сумме площадей прямоугольников.

Пусть $\max \Delta x_i \to 0$, тогда $S_n \to S$ при любом разбиении и выборе точек ξ_i. Таким образом, величина $S = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{опред. 10.2}}{=} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ является площадью криволинейной трапеции.

Обе из рассмотренных задач привели нас к одной и той же математической операции над функциями различного происхождения, заданными на $[a, b]$. Эта операция называется *операцией интегрирования* функции на отрезке, а ее результат — число — называется *определенным интегралом от функции* на отрезке.

Некоторые физические толкования определенного интеграла

1. Если $f(x)$ — это скорость прямолинейного движения точки в момент времени x, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ выражает путь, пройденный данной точкой от момента времени $x = a$ до момента $x = b$.

2. Если $f(x)$ — это переменная сила, под действием которой материальная точка движется по оси Ox, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ выражает работу, произведенную данной силой при перемещении точки по отрезку $[a, b]$.

3. Если $f(x)$ — это теплоемкость материала тела при температуре x, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ выражает количество тепла, приобретенного телом при нагревании его от температуры $x = a$ до температуры $x = b$.

4. Масса, распределенная на линии, равна интегралу от плотности, взятому по длине линии $m = \int\limits_0^S f(S)dS$.

10.2. Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Доказательство. Соответствующая криволинейная трапеция вырождается в отрезок прямой (ее основание $b - a = 0$). Площадь такой «трапеции» равна нулю.

Свойство 2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, т.е. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

Свойство 4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm q(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b q(x)dx.$$

Свойство 5 (*аддитивность*) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$

Геометрически это свойство выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a, c]$ и $[c, b]$ (рис. 10.3).

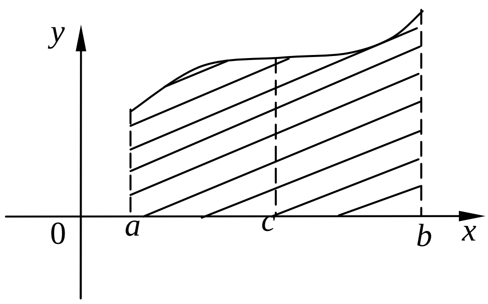


Рис. 10.3

Свойство 6. Если $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

Свойство 7. Если на $[a, b]$ $f(x) \geq q(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b q(x)\,dx$.

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

Теорема 10.4 (*о среднем значении*). Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

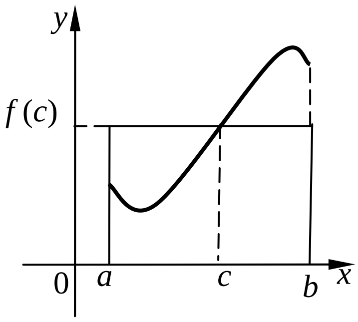


Рис. 10.4

Теорема о среднем значении допускает наглядное геометрическое толкование (рис. 10.4): площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, равна площади прямоугольника с тем же основанием и с высотой $f(c)$, равной ординате кривой в некоторой промежуточной точке c основания.

10.3. Производная интеграла по переменной верхней границе

Замечание. От обозначения переменной интегрирования значение определенного интеграла не зависит.

Определение 10.3. Пусть дан интеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x. Тогда величина этого интеграла является функцией верхнего предела. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$, т.е.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

и назовем ее *интегралом с переменным верхним пределом.*

Исходя из геометрического смысла интеграла, функция $\Phi(x)$ представляет собой переменную площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$, ограниченной

$y = f(x)$, $y = 0$, $t = a$ и $t = x$ (рис. 10.5).

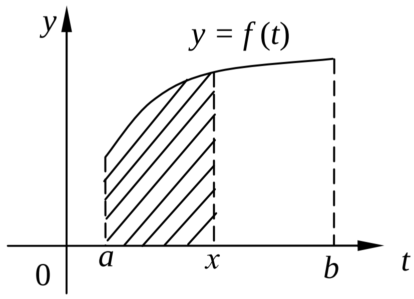


Рис. 10.5

Теорема 10.5 (*о связи между производной и интегралом*). Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е. $\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

Замечание. Функция $\Phi(x)$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$. Как известно, всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $\Phi(x)$ на постоянную. Таким образом, связь между определенным и неопределенным интегралами заключается в следующем:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

Теорема 10.6 (*основная теорема интегрального исчисления*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда если функция $F(x)$ является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница*.

Доказательство. Пусть $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, тогда, по теореме о связи между производной и интегралом, функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Таким образом $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на $[a, b]$. Так как первообразные отличаются на постоянную, т.е.

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad a \le x \le b,$$

то имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C, \quad a \le x \le b.$$

Подставляя в это равенство значение $x = a$ и используя свойство 1 определенного интеграла, имеем $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C;\ 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$, т.е. $\forall x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Полагая $x = b$, имеем $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

10.4. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 10.7. Если выполняются условия: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$; 2) $[a, b]$ является множеством значений функции $x = \varphi(t)$, определенной на отрезке $t \in [\alpha; \beta]$ и имеющей на нем непрерывную производную; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, — то справедлива формула замены переменной под знаком определенного интеграла

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

10.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 10.8. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на $[a, b]$, то справедлива формула $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$

10.6. Несобственные интегралы

Определение 10.4. Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ стремится к конечному пределу при неограниченном возрастании b, то этот предел называется *несобственным интегралом с бесконечной верхней границей* от $f(x)$ и обозначается символом $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$

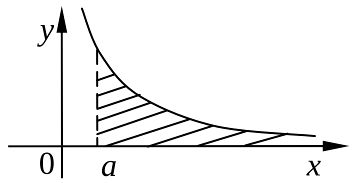


Рис.10.6

Таким образом, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$ В этом случае говорят, что данный несобственный интеграл существует или сходится (рис. 10.6). Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл не существует или расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей: $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется формулой $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, где c — любая точка оси Ox.

Таким образом, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует только тогда, когда существует каждый из интегралов $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Определение 10.5. Пусть функция $f(x)$ разрывна в точке b интервала $[a, b]$ и непрерывна во всех внутренних точках этого интервала. Если $c \to$ $\to b-0$ $[c \in (a, b)]$ и определенный интеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется *несобственным интегралом от разрывной функции* и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)\,dx.$ В этом случае говорят, что несобственный интеграл существует или сходится. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл не существует или расходится.

Аналогично, если функция $f(x)$ разрывна в точке a интервала $[a;\, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Наконец, если функция разрывна в точке $d \in (a,\, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 10.1. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^2 dx$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример 10.2. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x\,dx$.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\cdot\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx =$$

$$= e^1\cdot 1 - 1\cdot 0 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Пример 10.3. Вычислить интеграл $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

$$\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \begin{vmatrix} x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = 2 \end{vmatrix} = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2t\,dt =$$

$$= \left.\left(\frac{2}{3}t^3 - 2t\right)\right|_1^2 = \frac{2}{3}\cdot 8 - 4 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}.$$

Пример 10.4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 t \cdot 2\cos t\,dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = 8\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t\,dt}{2\cos t} =$$

$$= 4\int\limits_0^{\pi/6} (1-\cos 2t)\,dt = \left(4t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 10.5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Пример 10.6. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left(\operatorname{arctg} x\right)\Big|_a^b = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}} \left(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Пример 10.7. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

$$J = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad x = 0 \text{ — разрыв.}$$

$$\int\limits_{-1}^{0} x^{-3/2}dx = \lim_{a\to 0}\int\limits_{-1}^{a} x^{-3/2}dx = \lim_{a\to 0} 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{a} = 3,$$

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{0}^{1} x^{-3/2}dx = \lim_{a\to 0} 3x^{1/3}\Big|_{a}^{1} = 3.$$

$$J = 3 + 3 = 6.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; г) $\int\limits_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\,dx$.

Ответы: а) 1; б) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}-1$; г) $\frac{\pi-2}{4}$; д) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$.

10.2. Вычислить несобственные интегралы:

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$; б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2}$; в) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}$; г) $\int\limits_3^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}$;

Ответы: а) ∞; б) $\frac{7}{8}\pi^3$; в) 1; г) ∞.

11. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

11.1. Вычисление площади в декартовых координатах

Если на $[a, b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$; $y = 0$; $x = a$; $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{11.1}$$

Пусть теперь $f(x) < 0$ на $[a, b]$, тогда

$$S = -\int_a^b y\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если фигура ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ ($f_2(x) > f_1(x)$) и прямыми $x = a, x = b$ (рис. 11.1), то ее площадь

$$S = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_a^b \left(y_2 - y_1\right)dx.$$

Если фигура ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, $y = 0$, как показано на рис. 11.2, то площадь такой фигуры

$$S = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx = \int_a^c y_1\,dx + \int_c^b y_2\,dx.$$

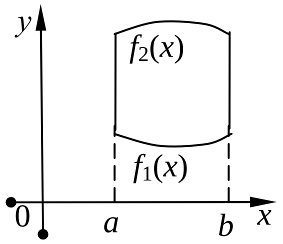


Рис. 11.1

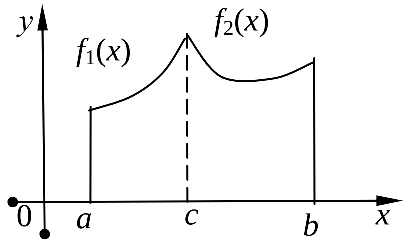


Рис. 11.2

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ вычисляется следующим образом:

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)\,dt, \tag{11.2}$$

где $a = x(t_1), b = x(t_2)$.

11.2. Вычисление площади в полярных координатах

Определение 11.1. Плоскую фигуру, ограниченную кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть *криволинейным сектором*.

Теорема 11.1. Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

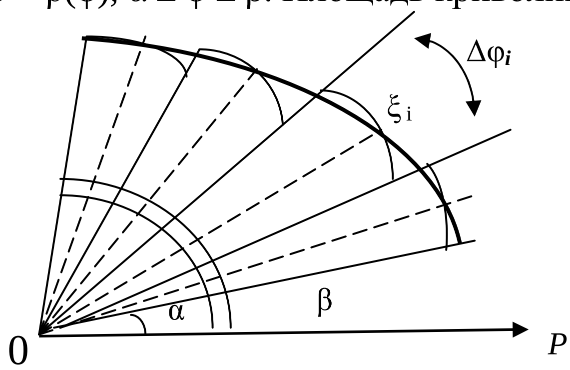


Рис. 11.3

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (11.3)$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ произвольно точку ξ_i и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$ (рис. 11.3).

В результате получена веерообразная фигура, площадь которой приближенно равна площади криволинейного сектора $S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$.

Таким образом, получена интегральная сумма. Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, то предел этой суммы существует при $\max_i \Delta\varphi_i \to 0$ и площадь криволинейного сектора численно равна

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\max\Delta\varphi_i \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} \rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

11.3. Длина дуги кривой

1. *В прямоугольных координатах*. Пусть задана кривая AB. Разобьем ее точками $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на n частей (рис. 11.4). Соединив последовательно точки разбиения, получим ломаную, вписанную в дугу AB. Эта ломаная состоит из звеньев $AM_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}B$.

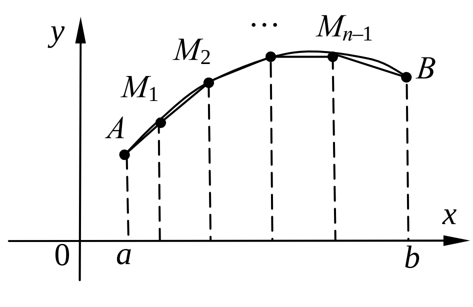


Рис. 11.4

Примем обозначения $M_i, M_{i+1} = \Delta L_i$. Тогда периметр этой ломаной

$$L_n = \Delta L_0 + \Delta L_1 + \ldots + \Delta L_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta L_i .$$

Очевидно, с уменьшением длин звеньев ΔL_i ломаной она по своей форме приблизится к дуге AB.

Определение 11.2. *Длиной* ℓ дуги AB называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной, когда число ее звеньев неограниченно растет, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:

$$\ell = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta L_i .$$

Нетрудно показать, что $\Delta L_i = \sqrt{1+\left[f'(c_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i$. Тогда

$$\ell = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta L_i = \lim_{\max \Delta L_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+\left[f'(c_i)\right]^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(c_i)\right]^2}\, dx.$$

Теорема 11.2. Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во всех точках $[a, b]$. Тогда длина дуги AB определяется формулой

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1+\left[y'\right]^2}\, dx. \tag{11.4}$$

2. *Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями*. Пусть теперь кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2 .$$

При этом предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными и $x'(t) > 0$. Тогда

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left[y'\right]^2}\, dx.$$

Произведем в этом интеграле замену переменной, положив $x = x(t)$. Так как при этом $y = y(t)$, то, по правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, найдем $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'(t)}$ и, замечая, что $dx = x'(t)\, dt$, получим

$$\sqrt{1+y'_x}\, dx = \sqrt{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\, x'(t)\, dt = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\, dt .$$

Следовательно,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\left[y'\right]^2}\, dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\, dt, \tag{11.5}$$

где $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

3. *Длина дуги кривой, заданной уравнениями в полярных координатах* $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Предположим, что ρ и ρ' непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Эту кривую можно задать параметрически, принимая за параметр полярный угол φ. Действительно, между декартовыми и полярными координатами существует зависимость

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi.$$

Найдем

$$x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi;\ y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi.$$

Подставив полученные выражения в формулу (11.5), получим

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, d\varphi = \int_a^b \sqrt{(\rho' \cos\varphi + \rho \sin\varphi)^2 + (\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_a^\beta \sqrt{\rho'^2 \cos^2\varphi - 2\rho'\rho \sin\varphi \cos\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi + \rho'^2 \sin^2\varphi + 2\rho'\rho \sin\varphi \cos\varphi + \rho^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_a^\beta \sqrt{\left(\rho'^2 + \rho^2\right)\cos^2\varphi + \left(\rho'^2 + \rho^2\right)\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_a^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi.$$

Таким образом, $\ell = \int_a^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi.$

11.4. Вычисление объема тела вращения

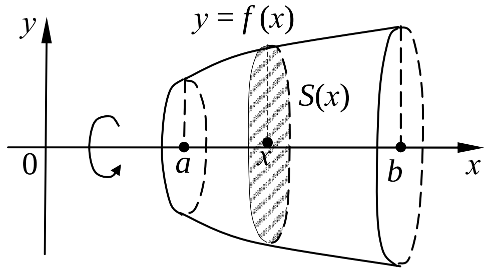


Рис. 11.5

Теорема 11.3. Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией $y = f(x)$ на $[a, b]$, объем тела вращения (рис. 11.5) вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{11.7}$$

Замечание. Если криволинейная трапеция, ограниченная линиями $0 \le x \le \varphi(y)$, $a \le y \le b$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy. \tag{11.8}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 11.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad y = 1 \ (y > 1).$$

Решение. Построим искомую фигуру в плоскости Oxy (рис. 11.6). Фигура, заданная параметрическими уравнениями, представляет собой окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Прямая $y = 1$ ($y > 1$) параллельна оси Ox и отсекает от окружности круговой сегмент (на рис. 11.6 заштрихованная область). Так как полученная фигура симметрична относительно оси Oy, то ее площадь S удобно искать следующим образом: $S = 2S_{ABC}$. Из рисунка видно, что

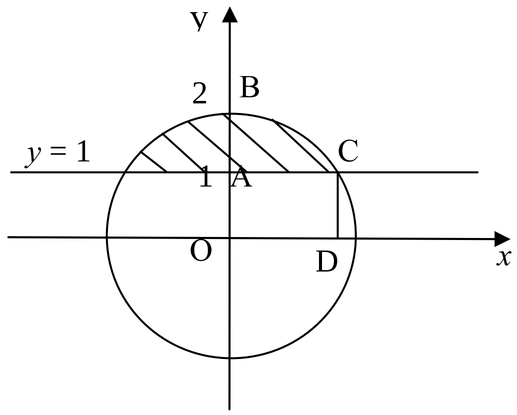


Рис. 11.6

$$S_{ABC} = S_{OABCD} - S_{OACD}. \qquad (*)$$

Найдем S_{OABCD}. Для этого определим значение параметра t_1 и t_2 в точках O и D соответственно. Для нахождения параметра t_1 в точке O (0; 0) решим для $x = 0$ уравнение $x = 2\cos t$:

$$2\cos t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Для нахождения параметра t_2 в точке D решим для $y = 1$ уравнение $y = 2\sin t$:

$$2\sin t = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{6}.$$

Пользуясь формулой (11.2), найдем площадь криволинейной трапеции $OABCD$:

$$S_{OABCD} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi/6} 2\sin t(-2\sin t)\,dt = -4\int_{\pi/2}^{\pi/6} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,dt = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}.$$

Для того чтобы найти площадь прямоугольника $OACD$, надо определить абсциссу точки D, подставив значение $t_2 = \dfrac{\pi}{6}$ в равенство $x = 2\cos t$. Получим $x = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$ Тогда $S_{OACD} = |OA| \cdot |OD| = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Вернувшись к формуле (*), вычислим $S_{ABC} = \dfrac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6} - \sqrt{3} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$. Окончательно находим площадь заданной фигуры $S = 2S_{ABC} = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ (ед.^{2}).

Пример 11.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 3\cos\varphi$.

Решение. Построим данную фигуру в полярной системе координат (рис. 11.7).

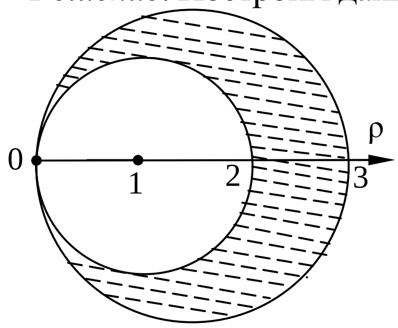


Рис. 11.7

Так как она симметрична относительно полярной оси, то достаточно вычислить площадь половины данной фигуры при изменении угла от 0 до 90°, а затем полученный результат удвоить. Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой (11.3):

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (3\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) = \frac{5\pi}{4} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Пример 11.3. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = 4$.

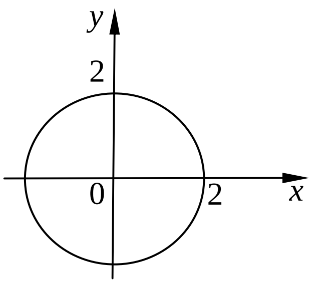


Рис.11.8

Решение. Построим кривую, длину которой необходимо найти (рис. 11.8). Так как график функции симметричен относительно осей координат, то сначала вычислим $\frac{1}{4}$ часть длины дуги, а затем домножим полученное значение на четыре. Здесь $x \in [0, 2]$, $y = \sqrt{4 - x^2}, y' = \dfrac{-2}{2\sqrt{4 - x^2}}$. Теперь подставим найденные значения в формулу (11.4) нахождения длины дуги.

$$\ell = 4\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx = 4\int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 8\arcsin\frac{x}{2}\Bigg|_0^2 = 8\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 4\pi.$$

Пример 11.4. Определить длину кривой

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

Решение. Найдем производные первого порядка от функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$x' = 2t\sin t + (t^2 - 2)\cos t + 2\cos t - 2t\sin t = t^2\cos t,$$

$$y' = 1 - 2t\cos t - (2 - t^2)\sin t + 2\sin t + 2t\cos t = t^2\sin t.$$

Теперь подставим найденные значения в формулу (11.5) нахождения длины дуги и получим

$$\ell = \int_0^{\pi} \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\,dt = \int_0^{\pi} t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}.$$

Пример 11.5. Определить длину кардиоиды $\rho = 2\,(1 - \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

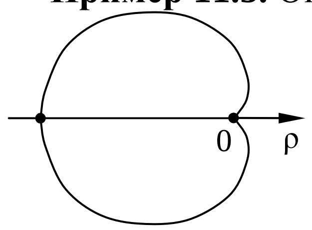


Рис. 11.9

Решение. Построим данную кривую в полярной системе координат (рис. 11.9).

Найдем производную первого порядка от функции и подставим в формулу (11.6) нахождения длины дуги.

$$2(1 - \cos\varphi)' = 2\sin\varphi.$$

$$\ell = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{4 - 8\cos\varphi + 4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{8(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 8\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} = 16\cos\left.\frac{\varphi}{2}\right|_0^{\pi} = -16(0-1) = 16.$$

Пример 11.6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x + 4)^3$, $x = 0$.

Решение. Рассмотрим вращение вокруг оси Ox (рис 11.10).

Так как фигура образована вращением вокруг оси Ox, то $(x + 4)^3 \le y \le 0$, а x изменяется от –4 до 0. Тогда по формуле (11.7)

$$V = \pi\int_{-4}^{0} (x+4)^3 dx = \pi\left.\frac{(x+4)^4}{4}\right|_{-4}^{0} = \pi\frac{4^4}{4} - 0 = 64\pi\,(\text{ед.}^2).$$

Рассмотрим вращение вокруг оси Oy (рис. 11.11).

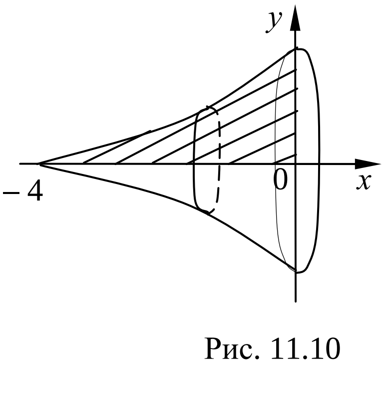


Рис. 11.10

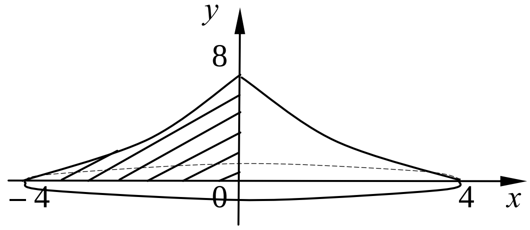


Рис. 11.11

Так как фигура образована вращением вокруг оси Oy, то $y^{2/3}+4\le x\le 0$, а y изменяется от 8 до 0. Тогда по формуле (11.8)

$$V=\pi\int_0^8 x^2dy=\pi\int_0^8\left(y^{2/3}+4\right)^2dy=\pi\int_0^8\left(y^{4/3}+8y^{2/3}+16\right)dy=$$

$$=\pi\left(\frac{3y^{7/3}}{7}+\frac{24y^{5/3}}{5}+16y\right)\Bigg|_0^8=\pi\left(\frac{3}{7}2^7+\frac{24}{5}2^5+16\cdot 8\right)=32^2\cdot\pi\cdot\frac{92}{35}\ (\text{ед.}^2).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11.1. Найти площадь фигуры, ограниченной:

а) кривыми $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 7$;

б) астроидой $\begin{cases} x=3\cos^3\varphi, \\ y=3\sin^3\varphi; \end{cases}$

в) одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(t-\cos t) \end{cases}$ и осью Ox, $0\le t\le 4\pi$.

Ответы: а) $\frac{64}{3}$; б) $\frac{27}{8}\pi$; в) 12π.

11.2. Вычислить длину дуги:

а) полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от точки O (0; 0) до точки A (4; 8);

б) кардиоиды $r = 5(1 - \cos\varphi)$. *Ответы*: а) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; б) 40.

11.3. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры:

а) вокруг оси Oy, ограниченной кривыми $y=\frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$;

б) вокруг оси Ox, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(t-\cos t). \end{cases}$

Ответы: а) $2\ln 2-\frac{1}{2}$; б) $243\pi(8\pi^2+1)$.

12. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

12.1. Понятие двойного интеграла

Задача. Найти объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$ ($f(x, y) > 0$), снизу конечной замкнутой областью S плоскости Oxy с образующей, параллельной оси Oz (рис. 12.1).

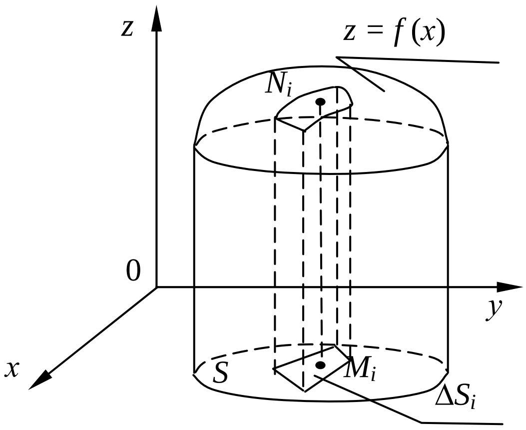


Рис. 12.1

Для вычисления объема V данного тела разобьем основание его S на конечное число элементарных ячеек: ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n. В каждой из этих ячеек выберем точку M_i (x_i, y_i, z_i) $\in \Delta S_i$ и построим прямой цилиндрический столбик с основанием ΔS_i и высотой $M_iN_i = f(x_i, y_i)$, равной аппликате поверхности в выбранной точке. Тогда объем полученного столбика $V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь соответствующей ячейки.

Сумма объемов всех цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего данное криволинейное тело, причем приближение будет тем более точным, чем меньше диаметр ячеек ΔS_i. Поэтому объем тела приближенно выразится суммой

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Данная формула дает возможность найти объем V с любой степенью точности, если число ячеек ΔS_i достаточно велико и линейные размеры их малы.

Обозначим через d_i диаметр ячейки ΔS_i, т.е. ее наибольший линейный размер (диаметр прямоугольника равен его диагонали, эллипса — его большой оси и т.д.). Пусть $d = \max\limits_{i} d_i$ — наибольший из диаметров ΔS_1, ΔS_2, …, ΔS_n, тогда

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = V.$$

Выражение, стоящее в левой части данной формулы, называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$, распространенным на области S и обозначается следующим образом:

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y)\, dS.$$

Следовательно,

$$V = \iint_S f(x, y)\, dS. \tag{12.1}$$

Определение 12.1. *Двумерной интегральной суммой* от данной функции $f(x, y)$, распространенной на данную область S, называется сумма парных произведений площадей элементарных ячеек ΔS_i области S на значения $f(x_i, y_i)$ функции $f(x, y)$ в выделенных точках этих ячеек, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Определение 12.2. *Двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области S называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы при неограниченном возрастании числа n элементарных ячеек ΔS_i и стремлении к нулю их наибольшего диаметра d при условии, что этот предел существует и не зависит от способа разбиения области S на элементарные ячейки ΔS_i и выбора точек в них, т.е.

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_S f(x, y)\,dS,$$

где $f(x, y)$ — подынтегральная функция; S — область интегрирования; dS — элемент площади.

12.2. Геометрический смысл двойного интеграла и его свойства

Если $f(x, y) \ge 0$, то двойной интеграл представляет собой объем прямого цилиндроида, построенного на области S как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

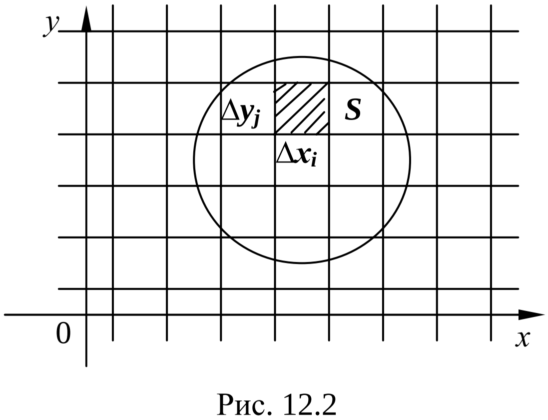


Рис. 12.2

Так как значение двойного интеграла не зависит от вида элементарных ячеек, то в дальнейшем при решении задач мы будем использовать это обстоятельство, выбирая наиболее подходящие сетки. Очень часто удобной оказывается прямоугольная сетка, образованная пересечением двух систем прямых, параллельных соответственно координатным осям Ox и Oy (рис. 12.2).

В этом случае ΔS_i — прямоугольники со сторонами Δx_i, Δy_j; а $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

Чтобы подчеркнуть использование прямоугольной сетки, элемент площади записывают в виде

$$dS = dx \cdot dy,$$

т.е. элемент площади в декартовых координатах является произведением дифференциалов независимых переменных.

Таким образом, в прямоугольной системе координат

$$\iint_S f(x, y)\,dS = \iint_S f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (12.2)$$

Свойства двойного интеграла

Свойство 1. $\iint\limits_S (u \pm v)\,dS = \iint\limits_S u\,dS \pm \iint\limits_S v\,dS.$

Свойство справедливо для любого конечного числа функций.

Свойство 2. $\iint\limits_S cu\,dS = c\iint\limits_S u\,dS.$

Свойство 3. Если область интегрирования S разбита на две части S_1 и S_2, то

$$\iint\limits_S u\,dS = \iint\limits_{S_1} u\,dS + \iint\limits_{S_2} u\,dS.$$

Данное свойство справедливо для любого конечного числа областей S_i.

Свойство 4. $\iint\limits_S dS = S_1$, где S_1 — площадь области S.

Свойство 5. Если во всех точках области S выполняется условие $u \geq v$, то

$$\iint\limits_S u\,dS \geq \iint\limits_S v\,dS.$$

Свойство 6. Если u во всех точках области S удовлетворяет неравенствам $m \leq u \leq M$, то

$$mS_1 < \iint\limits_S u\,dS < MS_1,$$

где S_1 — площадь области S.

12.3. Вычисление двойных интегралов в прямоугольных декартовых координатах

Пусть $f(x, y)$ непрерывна в области S и $J = \iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$ — ее двойной интеграл. Область S представляет собой криволинейную трапецию:

$$a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ — однозначные, непрерывные функции на отрезке $[a, b]$ (рис. 12.3). Такую область будем называть *стандартной* относительно оси Oy.

Предположим, что $f(x, y) \geq 0$ в области S. Тогда J представляет собой объем цилиндроида, ограниченного снизу областью S, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и с образующей, параллельной оси Oz (рис. 12.4).

Для вычисления объема данного цилиндра справедлива формула

$$V = \iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,. \tag{12.3}$$

Таким образом, двойной интеграл равен соответствующему повторному интегралу. Пределы внутреннего интеграла — переменные величины, пределы внешнего интеграла — постоянные числа.

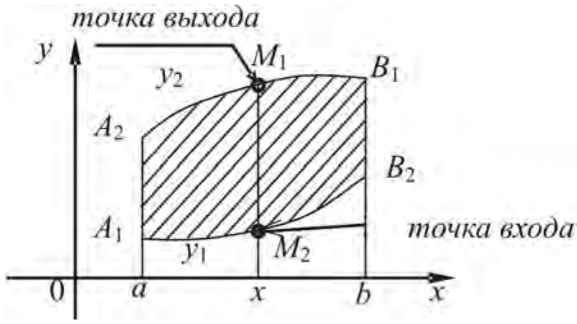


Рис. 12.3

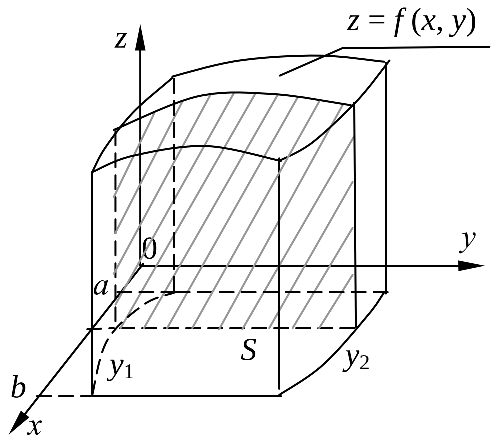


Рис. 12.4

В случае знакопеременной функции $z = f(x, y)$, т.е. если $f(x, y) \geq 0$ при $(x, y) \in S_1$ и $f(x, y) < 0$ при $(x, y) \in S_2$ ($S_1 \cup S_2 = S$), двойной интеграл равен алгебраической сумме объемов V_1 и V_2 цилиндров, построенных соответственно на основаниях S_1 и S_2 (рис. 12.5), т.е. $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = V_1 - V_2$.

Пусть S — прямоугольник $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$ и $f(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, где $X(x)$ — функция, непрерывная на $[a, b]$ и зависящая только от x, и $Y(y)$ — функция непрерывная на $[A, B]$, зависящая только от y (рис. 12.6). Тогда

$$\iint\limits_S X(x)Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_A^B X(x)Y(y)\,dy = \int\limits_a^b X(x)\,dx \int\limits_A^B Y(y)\,dy.$$

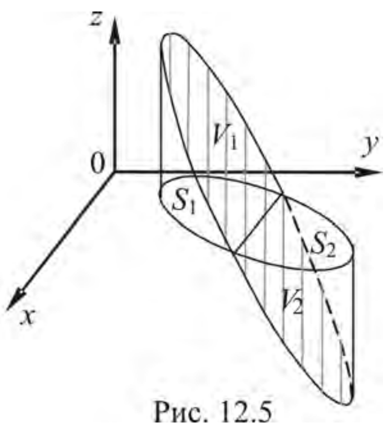


Рис. 12.5

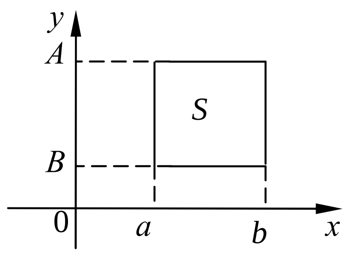


Рис. 12.6

Если S — стандартная область относительно оси Ox (рис. 12.7), т.е. $A \leq y \leq B$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, то по аналогии с п.1

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

В частности, если область S — прямоугольник: $a \le x \le b,\ A \le y \le B$, то

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x,y)\,dy \text{ или } \iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_A^B f(x,y)\,dy = \int\limits_A^B dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx,$$

т.е. если пределы интегрирования в повторном интеграле от непрерывной функции конечны и постоянны, то результат интегрирования не зависит от порядка интегрирования.

Если область S нестандартная (рис. 12.8), то ее разбивают (если это возможно) на конечное число областей S_1, S_2, …, S_p, стандартных относительно осей координат Ox или Oy, и на основании свойств двойного интеграла

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)\,dx\,dy + \ldots + \iint\limits_{S_p} f(x,y)\,dx\,dy.$$

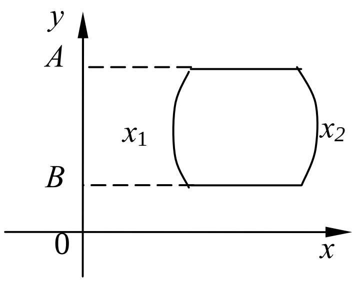


Рис. 12.7

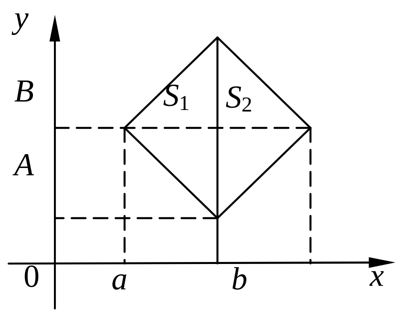


Рис. 12.8

12.4. Правила вычисления двойных интегралов и порядок приведения двойного интеграла к повторному

1. Для того чтобы расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, прежде всего необходимо построить область интегрирования.

2. Затем нужно установить порядок интегрирования, т.е. наметить, по какой переменной будет производиться внутреннее интегрирование, а по какой — внешнее.

3. Во внутреннем интеграле пределы интегрирования в общем случае есть функции той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла остается постоянной.

4. Пределы внешнего интеграла есть величины постоянные.

5. Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла.

6. Вычислять внутренний интеграл по данной переменной следует в предположении, что другая переменная есть величина постоянная.

7. При вычислении внутреннего интеграла в общем случае всегда получается функция той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл.

12.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Одним из методов упрощения вычисления определенного интеграла является метод замены переменной. Точно так же введение новых переменных в двойном интеграле часто приводит к более простым вычислениям.

В тех случаях, когда область интегрирования *D* есть круг $x^2+y^2 \le R^2$ или сектор круга, или когда подынтегральная функция $f(x, y)$ содержит двучлен x^2+y^2, целесообразно перейти к полярным координатам φ, ρ.

Переход от декартовых координат *x*, *y* к полярным ρ, φ осуществляется посредством известных формул:

$$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ \rho\ge 0;\ 0\le\varphi<2\pi. \tag{12.4}$$

Тогда сумма x^2+y^2 принимает более простой вид

$$x^2+y^2=R^2=(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2.$$

Формула преобразования двойного интеграла от декартовых координат к полярным φ, ρ принимает вид

$$J=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{12.5}$$

где уравнения линий, ограничивающих область интегрирования *D*, также преобразуют к полярным координатам посредством формул (12.4).

Выражение $dS=\rho\,d\rho\,d\varphi$ называется *элементом площади в полярных координатах*.

Из формул (12.4) следует *правило преобразования*: для того чтобы преобразовать двойной интеграл к полярным координатам, нужно переменные *x*, *y* в подынтегральной функции $f(x, y)$ заменить соответственно через $\rho\cos\varphi$ и $\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dS=dx\,dy$ заменить его выражением в полярных координатах $dS=\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат также сводится к вычислению повторного интеграла по переменным φ и ρ.

Различают три основных области интегрирования.

1. *Полюс не содержится внутри области интегрирования* D, заключенной между лучами, образующими с полярной осью углы $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, $\alpha<\beta$, и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ (рис. 12.9), т.е. *D*:

$$\begin{cases}\alpha\le\varphi\le\beta,\\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi).\end{cases}$$

В этом случае двойной интеграл (12.5) вычисляется через повторный по формуле

$$J=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho. \tag{12.6}$$

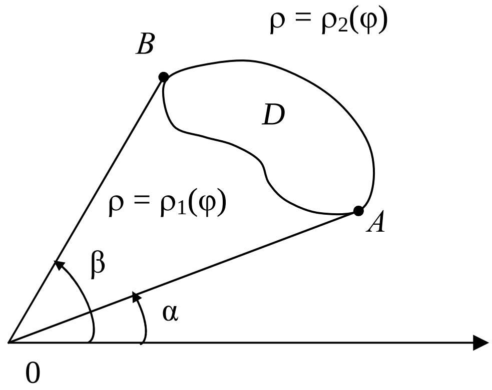


Рис. 12.9

Здесь внутренний интеграл по переменной ρ берется при постоянном φ. Результат этого интегрирования есть некоторая функция $J(\varphi)$, которую затем нужно проинтегрировать во внешнем интеграле по φ (от $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$).

Интегрирование в обратном порядке, то есть сначала по φ, а затем по ρ, обычно не встречается.

В частном случае, когда область интегрирования D — часть кругового кольца $R_1\le\rho\le R_2$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, пределы интегрирования постоянны по обеим переменным

$$J=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{R_1}^{R_2}f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho. \tag{12.7}$$

2. *Область D охватывает полюс* (*полюс содержится внутри области интегрирования*). Любой полярный радиус пересекает границу в одной точке D (рис. 12.10).

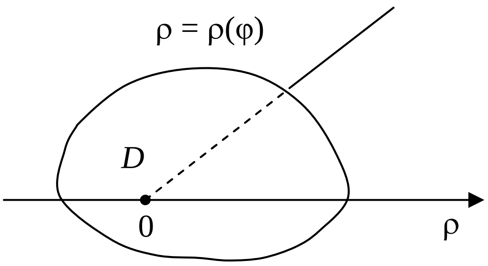


Рис. 12.10

Пусть D:

$$\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le\rho(\varphi).\end{cases}$$

Тогда

$$J=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\rho(\varphi)}f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho. \tag{12.8}$$

В частности, если область интегрирования D — круг с центром в полюсе, т.е. D:

$$\begin{cases}0\le\rho\le R,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\end{cases}$$

то пределы интегрирования будут постоянными

$$J=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}f\left(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\right)\rho\,d\rho. \tag{12.9}$$

3. *Область D касается полюса* (рис. 12.11). Область D ограничена лучами, образующими с полярной осью углы α и β, $\alpha<\beta$ и кривой $\rho=\rho(\varphi)$, т.е. полюс находится на границе области интегрирования D; D: $\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le\rho(\varphi).\end{cases}$

Тогда

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho. \qquad (12.10)$$

В частном случае, когда D — круговой сектор, т.е. D:

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ 0 \le \rho \le R, \end{cases}$$

пределы интегрирования постоянны по обеим переменным.

Представляют интерес два случая. Если область интегрирования расположена относительно полярной оси так, как показано на рис 12.12, то

$$J = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho.$$

Если область интегрирования расположена относительно полярной оси так, как показано на рис. 12.13, то

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho\, d\rho.$$

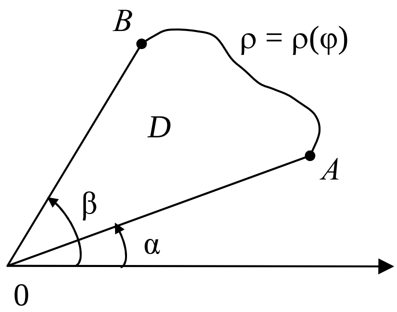


Рис. 12.11

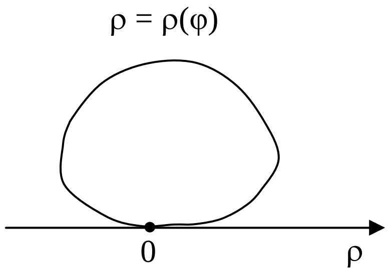


Рис. 12.12

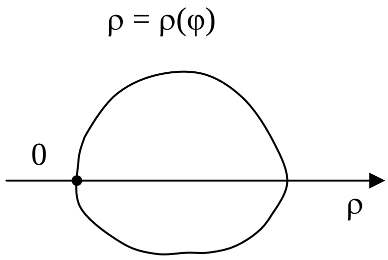


Рис. 12.13

12.6. Тройной интеграл и его приложения

Пусть задана некоторая пространственная область G, ограниченная замкнутой поверхностью S (будем называть такую область телом), и пусть выполняются следующие условия:

1) всякая прямая, проходящая через внутреннюю (т.е. не лежащую на границе S) точку области, пересекает поверхность не более чем в двух точках;

2) вся область G проецируется на плоскость xOy в область D. Пусть такая область G снизу и сверху ограничена поверхностями $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$.

Пусть в замкнутой ограниченной трехмерной области G (рис. 12.14) задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ в области G обозначается символом

$$J = \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Вычислить объем тела G можно с помощью тройного интеграла (положив $f(x, y, z) = 1$)

$$V = \iiint\limits_G dx\, dy\, dz. \qquad (12.11)$$

Если тело G имеет объемную плотность $\rho = \rho(x, y, z)$, то масса этого тела находится по формуле

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (12.12)$$

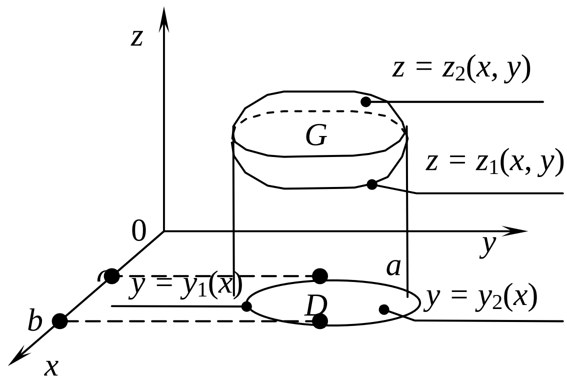


Рис. 12.14

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного определенного интеграла и одного двойного интеграла или к вычислению трех однократных определенных интегралов. Если область интегрирования G ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху — поверхностью $z = z_2(x, y)$,

где $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$, и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью Oxy является область D, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (12.13)$$

Выражая двойной интеграл по области D двумя способами через повторный, получаем формулу

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz,$$

сводящую вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Порядок интегрирования может быть и другим. Если область D имеет вид (рис. 12.15)

$$\begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$$

то

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

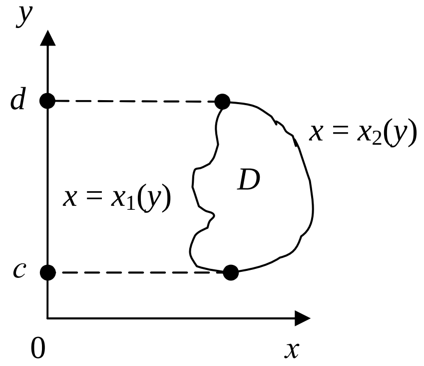


Рис. 12.15

При вычислении тройного интеграла иногда бывает целесообразно находить его посредством преобразования к цилиндрическим координатам ρ, φ и z, связанным с декартовыми координатами x, y, z соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ (рис. 12.16).

Формула преобразования тройного интеграла имеет вид

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Если положить $f(x, y, z) = 1$ всюду в области G, то получим объем G данного тела в цилиндрических координатах: $V = \iiint_G dV = \iiint_G \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

В случае, когда область G есть шар или его часть, тройной интеграл целесообразно вычислять посредством преобразования его к сферическим координатам ρ, φ, θ, связанным с декартовыми x, y, z соотношениями $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$; $\rho \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$ (рис. 12.17).

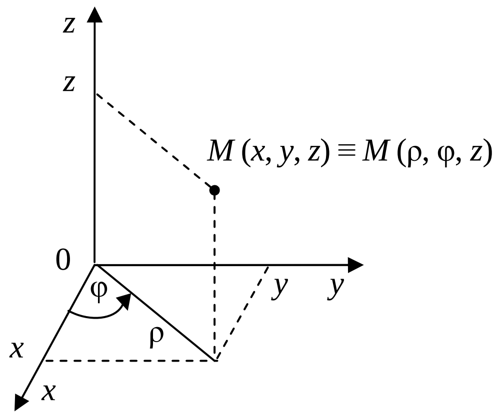


Рис. 12.16

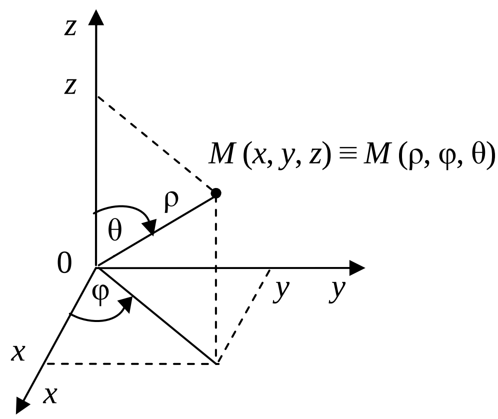


Рис. 12.17

Формула преобразования тройного интеграла имеет вид

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \rho\cos\theta)\cdot\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Выражение $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$ называется *элементом объема в цилиндрических координатах*, а $dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ — *элементом объема в сферических координатах*. Если область интегрирования — шаровое кольцо и радиус внутреннего шара R_1, а внешнего R_2,то пределы интегрирования надо расставить так:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$

Если область интегрирования – шар, то надо положить $R_1 = 0$.

Например, вычислим объем шара радиуса R. В этом случае подынтегральную функцию надо взять равной 1. $V = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi R^3.$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 12.1. Вычислить объем тела $z = 3x^2 + y^2$; $y = 2$; $x = 1$; $z = 0$; $y = 0$; $x = 0$.

Решение. Найдем пределы интегрирования. Так как при $z = 0$ $x = 0$, значит, $0 \le x \le 1$. Тогда y изменяется от 0 до 2 (по условию задачи). Подставим найденные значения в формулу нахождения объема и получим

$$V = \int_0^1 dx \int_0^2 (3x^2 + y^2)\, dy = \int_0^1 \left(3x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 dx = \int_0^1 \left(6x^2 + \frac{8}{3} \right) dx =$$

$$= \left(2x^3 + \frac{8}{3}x \right)\Bigg|_0^1 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Пример 12.2. Найти $\iint\limits_D (x + y)\, dx\, dy$, где D — фигура, ограниченная линиями $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 4$; $y = 0$, причем всюду в D $y > 0$ (рис. 12.18).

Решение. Переходя к полярным координатам, найдем

$$\iint\limits_D (x + y)\, dx\, dy = \iint\limits_D (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi \int_2^3 \rho^2 (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\rho =$$

$$= \frac{19}{3}\int_0^{\pi} (\sin\varphi + \cos\varphi)\, d\rho = \frac{19}{3}(-\cos\varphi + \sin\varphi)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{19}{3}(-\cos\pi + \sin\pi + \cos 0 - \sin 0) = \frac{38}{3}.$$

Пример 12.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2),\ a > 0.$$

Решение. Перейдем к полярной системе координат, где уравнение данной кривой будет иметь вид $\rho^4 = 25\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $\rho^2 = 25\cos 2\varphi, \rho = 5\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Последнее уравнение задает *лемнискату Бернулли* (рис. 12.19), которая симметрична относительно координатных осей.

Площадь S фигуры, ограниченной этой кривой, выражается двойным интегралом $S = 4\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi$. Здесь D — фигура (область), лежащая в первом квадранте, для которого $0 \le \varphi \le \pi/4$, $0 \le \rho \le 5\sqrt{\cos 2\varphi}$. Следовательно,

$$s = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{5\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\, d\rho = 4\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{5\sqrt{\cos 2\varphi}} ; d\varphi = 2\cdot 25\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\varphi\, d\varphi = 25\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 25.$$

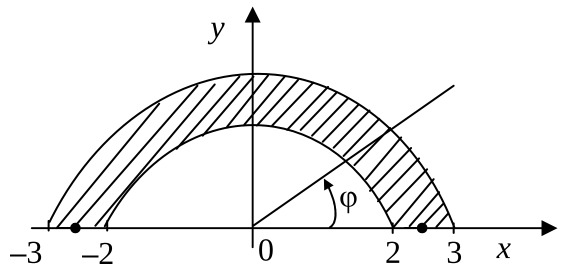


Рис. 12.18

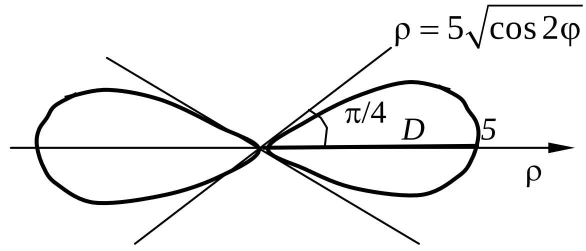


Рис. 12.19

Пример 12.4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - y^2$ $(z \ge 0)$.

Решение. Найдем линию пересечения конуса $z^2 = x^2 + y^2$ и параболоида $z = 2 - x^2 - y^2$ из системы $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 2 - x^2 - y^2. \end{cases}$ Выразим из второго уравнения $x^2 + y^2 = 2 - z$ и подставим в первое: $z^2 + z - 2 = 0$, $z_1 = -2, z_2 = 1$. При $z = 1\,(z \ge 0)$ из первого уравнения найдем $x^2 + y^2 = 1$.

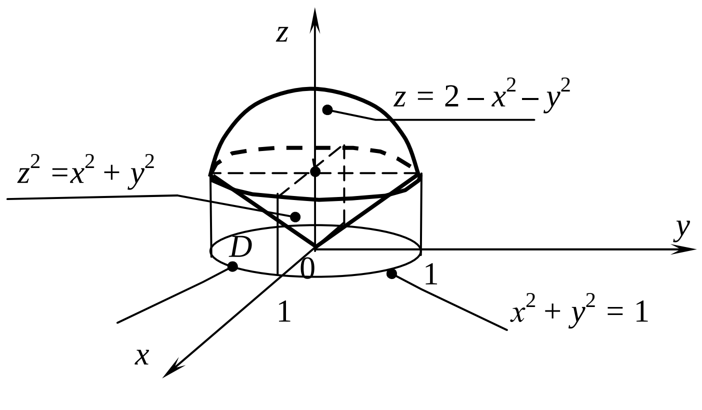


Рис. 12.20

Строим тело и его проекцию на плоскость xOy (рис. 12.20).

Так как проекцией тела на плоскость xOy (область D) служит круг, а уравнения поверхностей содержат двучлен $x^2 + y^2$, то перейдем к цилиндрическим координатам:

$$z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 2 - \rho^2 \text{ или } z = 2 - \rho^2;$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2 \text{ или } z = \rho;$$

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ или } \rho^2 = 1,\ \ \rho = 1.$$

Объем тела вычислим с помощью тройного интеграла

$$V=\iiint\limits_G \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho\, d\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2} dz.$$

Последовательно вычисляя интегралы

$$\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2} dz=z\Big|_{\rho}^{2-\rho^2}=2-\rho^2-\rho,$$

$$\int\limits_0^1 \rho(2-\rho^2-\rho)\,d\rho=\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{15}{12},$$

получим

$$V=\int\limits_0^{2\pi}\frac{15}{12}d\varphi=\frac{15}{12}\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{5\pi}{6}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

12.1. Изменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{2x} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$; в) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2-1}^{0} f(x,y)\,dy$.

12.2. Вычислить двойной интеграл в прямоугольной системе координат:

а) $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, D: $\{x^2=y,\ x=y^2\}$. *Ответ.* $-\dfrac{1}{6}$;

б) $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, D: $\{y=x^2;\ y=1\}$. *Ответ*: $\dfrac{19}{12}$;

в) $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy$, D: $\{y=x,\ x=2;\ yx=1\}$.*Ответ*: $\dfrac{9}{4}$.

12.3. Вычислить объем тела:

а) $z=x^2+y^2$; $y=x^2$; $y=1$; $z=0$. *Ответ*: $\dfrac{88}{105}$;

б) $z=8-x$; $y=(x)^{1/2}$; $y=(4x)^{1/2}$; $z=0$. *Ответ*: $\dfrac{512\sqrt{2}}{15}$;

в) $z=4-x^2$; $2x+y=4$; $x=0$; $y=0$; $z=0$. *Ответ*: $\dfrac{256}{3}$.

13.РЯДЫ

13.1. Числовые ряды

Основные понятия числового ряда

Определение 13.1. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{13.1}$$

называется *числовым рядом,* числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — *членами* ряда, член u_n — *общим членом* ряда (это формула, по которой для любого номера n можно определить соответствующий член ряда).

Определение 13.2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется его *n-й частичной суммой*:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (13.1)

$$S_1 = u_1,\ \ S_2 = u_1 + u_2,\ \ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots,\ \ S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\ , \ldots$$

Определение 13.3. Если существует конечный предел при $n \to \infty$ последовательности частичных сумм членов данного ряда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд (13.1) называется *сходящимся,* а число S — его суммой:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если же данный предел не существует или бесконечен (т.е. $S_n \to \infty$ при $n \to \infty$), то ряд (13.1) *расходится* и суммы не имеет.

Геометрическая прогрессия

Определение 13.4. Геометрической прогрессией называется ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \tag{13.2}$$

где q — знаменатель ряда (действительное число). Этот ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Действительно, согласно известной формуле, при $q \neq 1$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q},$$

следовательно, ряд сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$.

В случае $|q| > 1$: $\left|q^n\right| \to \infty$ при $n \to \infty$ и $S_n = \pm\infty$.

При $q = 1$ ряд (13.2) имеет вид: $a + a + a + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a$, $S_n = na$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

При $q = -1$ ряд (13.2) имеет вид: $a - a + a - a + \ldots$ В этом случае

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном}, \\ a \text{ при } n \text{ нечетном} \end{cases} \Rightarrow S_n \quad \text{предела не имеет и ряд расходится.}$$

Свойства сходящихся рядов

Теорема 13.1. Если сходится ряд, полученный из данного ряда (13.1) путем отбрасывания его первых n членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится ряд (13.1), то сходится и ряд, полученный из данного ряда путем отбрасывания первых n членов. Иными словами, если ряд сходится, то сходится и любой его остаток, и наоборот.

Теорема 13.2. Если ряд (13.1) сходится и его сумма равна S, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n, \tag{13.3}$$

где c — некоторое число, также сходится, и его сумма равна $c \cdot S$.

Теорема 13.3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и $\overline{\overline{S}}$, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \pm v_n\right) \tag{13.4}$$

тоже сходится и его сумма равна $S \pm \overline{\overline{S}}$.

Необходимый признак сходимости

Теорема 13.4. Если ряд (13.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{13.5}$$

Доказательство. По условию, ряд (13.1) сходится. Обозначим через S его сумму. Рассмотрим частичные суммы ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad \text{и} \qquad S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}.$$

Отсюда $S_n - S_{n-1} = u_n$. Так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если предел общего члена ряда не равен нулю при $n \to \infty$, то данный ряд расходится.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда. Далее будет доказано, что так называемый *гармонический* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Знакоположительные ряды. Достаточные признаки сходимости

Теорема 13.5 (*признак сравнения*). Пусть даны два ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{13.6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{13.7}$$

и для любого n выполняется неравенство

$$u_n \le v_n. \tag{13.8}$$

Тогда: а) из сходимости ряда (13.7) следует сходимость ряда (13.6); б) из расходимости ряда (13.6) следует расходимость ряда (13.7).

Схематическая запись признака сравнения

$$u_n \le v_n,$$
$$\text{сх} \leftarrow \text{сх},$$
$$\text{расх} \rightarrow \text{расх}.$$

Замечание. На практике признак сравнения наиболее удобно применять в следующем виде: если предел отношения u_n к v_n существует, конечен и не равен нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \ne 0, A < \infty, \tag{13.9}$$

где A = const, то ряды (13.6) и (13.7) сходятся или расходятся одновременно.

Если выполняется условие $u_n \le v_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ называется *мажорантой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (или мажорирующим рядом), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — мажорируемым.

Для того чтобы с помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряды, целесообразно знать ряды, сходимость или расходимость которых уже известна:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (ряд Дирихле) $\begin{cases} \text{расходится при } p \le 1, \\ \text{сходится при } p > 1; \end{cases}$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд) — расходится;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — $\begin{cases} \text{расходится при } |q| \ge 1, \\ \text{сходится при } |q| < 1. \end{cases}$

Для того чтобы найти ряд, с которым удобно проводить сравнения, полезно знать следующие неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \ |\sin x| \le 1, \ |\cos x| \le 1, \ \ln x < x.$$

Существуют признаки сходимости, позволяющие судить о сходимости ряда, не сравнивая его с другим рядом.

Теорема 13.6 (*признак Даламбера*). Пусть дан ряд (13.1) с положительными членами и существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Тогда: а) при $q < 1$ ряд сходится; б) при $q > 1$ ряд расходится; в) при $q = 1$ о сходимости ряда ничего нельзя сказать (признак не работает), надо исследовать его, используя другие признаки.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$. По определению предела, для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что для любого $n \ge N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon. \qquad (13.10)$$

а) Пусть $q < 1$. Докажем, что ряд (13.1) сходится.

Так как $q < 1$, то ε можно взять настолько малым, что $q + \varepsilon < 1$. Полагая $q + \varepsilon = p$, рассмотрим правую часть неравенства (13.10)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \text{ или } u_{n+1} < pu_n \quad \text{для } n = N,\ N + 1,\ \ldots$$

Придавая n эти значения, из последнего неравенства получаем

$$u_{N+1} < pu_N,$$
$$u_{N+2} < pu_{N+1} < p^2u_N,$$
$$u_{N+3} < pu_{N+2} < p^3u_N,$$

т.е. члены ряда $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots$ меньше соответствующих членов ряда

$$pu_N + p^2u_N + p^3u_N + \ldots, \tag{13.11}$$

составленного из элементов геометрической прогрессии, причем убывающей, так как знаменатель ряда $p < 1$. Отсюда следует, что ряд (13.11) сходится. Тогда согласно признаку сравнения ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \tag{13.12}$$

также сходится. Но ряд (13.12) получен из ряда (13.1) в результате отбрасывания конечного числа первых N членов, следовательно, по теореме 13.1 ряд (13.1) сходится.

б) Пусть теперь $q > 1$. Докажем, что ряд (13.1) расходится.

Возьмем ε настолько малым, чтобы $q - \varepsilon > 1$. Тогда при $n \geq N$ в силу левой части неравенства (13.10) выполняется неравенство $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > q - \varepsilon > 1$ или $u_{n+1} > u_n$.

Таким образом, члены ряда, начиная с некоторого номера N, возрастают с увеличением их номеров, т.е. общий член $u_n \underset{\substack{n\to\infty \\ n>N}}{\to} \infty$. Следовательно, согласно теореме 13.4 (необходимый признак сходимости ряда) ряд (13.1) расходится.

в) При $q = 1$ ряд может как сходится, так и расходится. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Теорема доказана.

Теорема 13.7 (*радикальный признак Коши*). Пусть дан ряд (13.1) с положительными членами и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q, \tag{13.13}$$

тогда: а) при $q < 1$ ряд сходится; б) при $q > 1$ ряд расходится; в) при $q = 1$ о сходимости ряда ничего нельзя сказать (признак не работает), надо исследовать его, используя другие признаки.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 13.6.

Теорема 13.8. (*интегральный признак сходимости Коши*). Пусть для некоторого ряда (13.1) с положительными членами существует вещественная непрерывная функция $f(x)$, определенная на $[1, \infty)$, монотонно убывающая и такая, что $f(n) = u_n$ для целых значений $x = n$. Ряд (13.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится (существует) несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Если этот интеграл расходится (не существует), то расходится и ряд (13.1).

Исследуем, используя интегральный признак, на сходимость ряд Дирихле (обобщенный гармонический ряд)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Заменим n на x и тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{\alpha\to\infty} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^{\alpha} = \frac{1}{1-p}\lim_{\alpha\to\infty}\left(\alpha^{1-p}-1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} \text{ при } p>1; \\ \infty \text{ при } p<1. \end{cases}$$

При $p = 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to\infty} \ln x\Big|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} \ln\alpha = \infty$$

Отсюда следует, что при $p > 1$ данный интеграл сходится, а при $p \le 1$ — расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Замечание. *Знакоположительными* называются ряды с неотрицательными членами. Если все члены ряда — это неположительные числа, то умножая их на (–1), мы опять получим ряд с положительными членами. Поэтому все теоремы применимы ко всем знакопостоянным рядам.

Знакочередующиеся ряды

Определение 13.5. Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}u_n, \qquad (13.14)$$

где $u_n > 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. ряд, члены которого имеют чередующиеся знаки.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Теорема 13.9 (*признак Лейбница*). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям:

1) $u_n > u_{n+1}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ — то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Знакопеременные ряды. Абсолютная сходимость. Остаток ряда и его оценка

Определение 13.6. Ряд с произвольным распределением знаков его членов называется *знакопеременным* (т.е. ряд с произвольным расположением положительных и отрицательных членов).

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{13.15}$$

Одновременно рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{13.16}$$

Для знакопеременных рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 13.10 (*достаточный признак сходимости знакопеременного ряда*). Если ряд (13.16) сходится, то сходится и ряд (13.15).

Рассмотренный признак является достаточным, но не является необходимым, так как существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, состоящие из абсолютных величин их членов, расходятся.

Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница, а гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится. Поэтому все сходящиеся знакопеременные ряды можно разделить на абсолютно и условно сходящиеся.

Определение 13.7. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов.

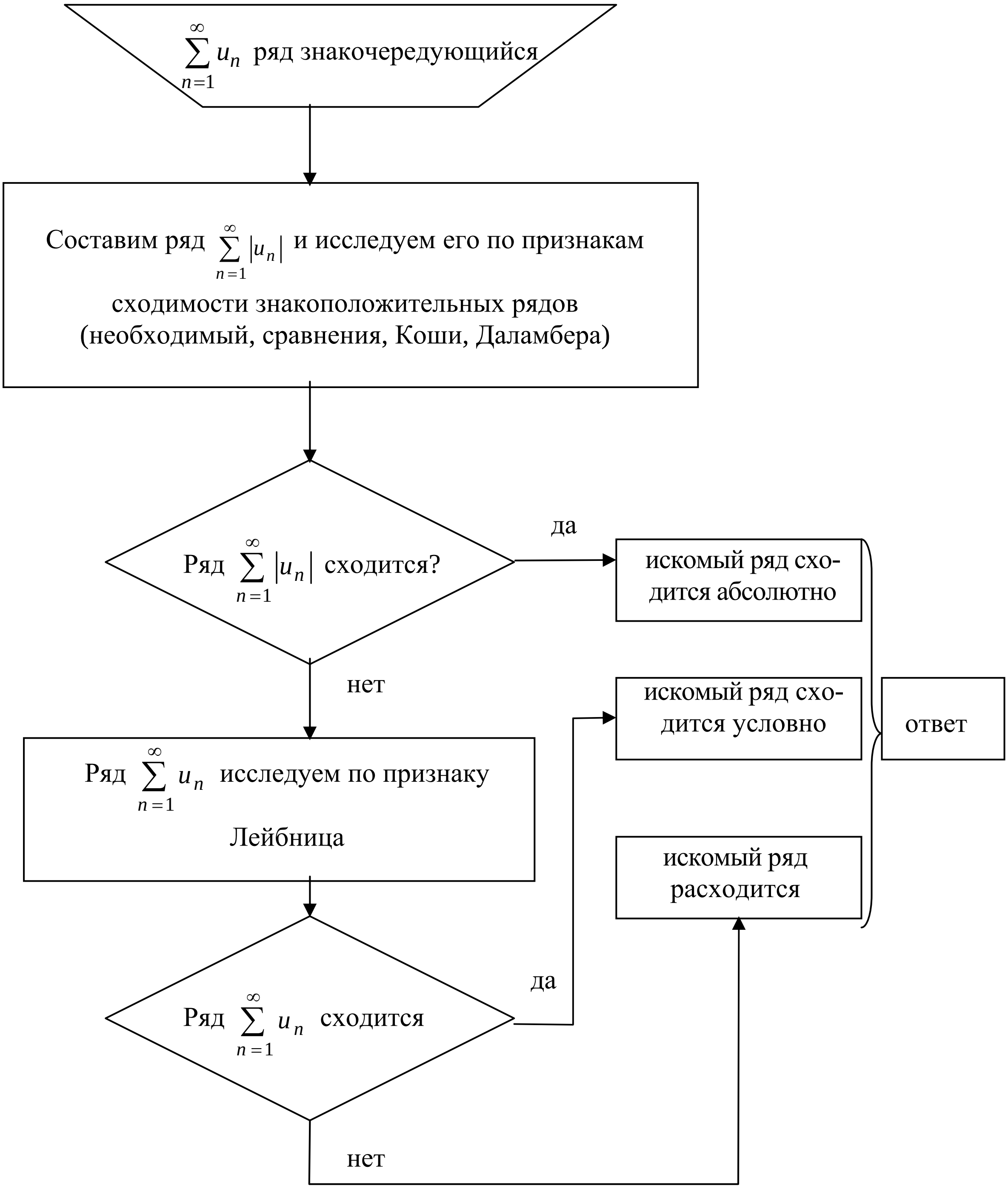
Определение 13.8. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся,* если он сходится (например, по признаку Лейбница), а ряд, состоящий из абсолютных величин его членов, расходится.

Замечание. Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

После того как мы убедились в сходимости ряда, возникает вопрос о вычислении его суммы. Эта задача более сложная, так как сумму ряда во многих случаях вычислить невозможно. Поэтому чаще всего вычисляют приближенное значение суммы ряда с желаемой степенью точности.

Схема

исследования знакочередующегося ряда на абсолютную (условную) сходимость



Определение 13.9. Пусть дан ряд (13.15). Величина $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ называется *остаточным членом* ряда.

Теорема 13.11. Если ряд (13.15) сходится, то его остаточный член стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Доказательство. Действительно, пусть ряд (13.15) сходится и S_n — его частичная сумма.

Сумма самого ряда равна

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = S_n + R_n,$$

тогда $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$, или $R_n = S - S_n$.

Учитывая, что $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$ Теорема доказана.

В данной теореме утверждается следующее: если вместо точного значения S суммы ряда взять сумму S_n его первых n членов, то ошибка будет равна R_n, а так как $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, следует, что всегда можно взять n настолько большим, чтобы R_n было сколь угодно малым.

Другими словами, сумму сходящегося ряда всегда можно вычислить с любой точностью, а величина R_n укажет ошибку при замене суммы ряда суммой его первых n членов. Для приближенных вычислений при помощи рядов оценка этой ошибки весьма существенна. Особенно просто удается оценить погрешность в случае знакочередующегося ряда.

Теорема 13.12. Остаток R_n для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, по абсолютной величине меньше абсолютного значения своего первого члена $|R_n| < u_{n+1}$, причем знак остатка совпадает со знаком u_{n+1}.

Сводная таблица основных понятий и формул по теме «Числовые ряды»

Ряд	Признаки сходимости
Знакопостоянный $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$	*Необходимый:* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0,$ следовательно, ряд расходится; $\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$ следовательно, ничего о сходимости ряда сказать нельзя, надо применять достаточные признаки
	Сравнения: даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n;$ а) $u_n \le v_n,$ сх $\leftarrow$ сх, расх $\rightarrow$ расх; б) $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0, A < \infty,$ оба ряда сходятся и расходятся одновременно

Ряд	Признаки сходимости
	Даламбера: $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q;$$ а) при $q<1$ ряд сходится; б) при $q>1$ ряд расходится; в) при $q=1$ признак не работает
	Радикальный Коши: $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q;$$ а) при $q<1$ ряд сходится; б) при $q>1$ ряд расходится; в) при $q=1$ признак не работает
	Интегральный Коши: если несобственный интеграл $$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$ сходится, то и ряд сходится, а если интеграл расходится, то и ряд расходится
Геометрическая прогрессия $$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$	$$\begin{cases}\text{расходится при } \lvert q\rvert\geq 1,\\ \text{сходится при } \lvert q\rvert<1\end{cases}$$
Ряд Дирихле $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$	$$\begin{cases}\text{расходится при } p\leq 1,\\ \text{сходится при } p>1\end{cases}$$
Знакочередующийся $$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots=$$ $$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$$	*Лейбница:* если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям: 1) $u_n > u_{n+1}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена
Знакопеременный $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$	*Достаточный:* 1) сходится абсолютно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ сходится; 2) сходится условно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert u_n\rvert$ — расходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — сходится (например, по теореме Лейбница)

13.2. Функциональные ряды

Определение 13.10. *Функциональным* рядом называется ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (13.17)$$

членами которого являются функции от x.

Давая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Определение 13.11. Функциональный ряд (13.17) называется *сходящимся в точке* x_0, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Определение 13.12. Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют *областью сходимости* этого ряда.

Область сходимости некоторых функциональных рядов можно найти с помощью известных достаточных признаков сходимости, установленных для рядов с положительными членами, например признака Даламбера, радикального признака Коши.

Обозначим через $S_n(x)$ сумму первых n членов ряда (13.17). Если этот ряд сходится и сумма его равна $S(x)$, то ее можно представить в виде $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где $R_n(x)$ есть сумма сходящегося ряда $u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$, который называется n*-м остатком* функционального ряда (13.17), т.е.

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

Для всех значений x в области сходимости ряда имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x),$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[S(x)-S_n(x)\right]=0,$$

т.е. остаток $R_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

13.3. Степенные ряды

Основные понятия. Радиус сходимости

Определение 13.13. Ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad (13.18)$$

называется *степенным рядом*, а числа a_0, a_1, a_2, …, a_n, …— *коэффициентами степенного ряда.*

Теорема Абеля. 1) Если степенной ряд (13.18) сходится при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то он сходится, и притом абсолютно, для любых x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$;

2) Если ряд (13.18) расходится при $x = x_1$, то он расходится для любых x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Доказательство. 1) Так как, по условию, числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, то его общий член $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что существует число $M > 0$ такое, что все члены ряда по абсолютной величине меньше M, т.е.

$$\left| a_n x_0^n \right| < M \, . \tag{13.19}$$

Перепишем ряд (13.18) в виде

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \ldots$$

и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\left| a_0 \right| + \left| a_1 x_0 \right| \left| \frac{x}{x_0} \right| + \left| a_2 x_0^2 \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + \left| a_n x_0^n \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots \tag{13.20}$$

Члены ряда (13.20), в силу неравенства (13.19) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots \tag{13.21}$$

При $|x| < |x_0|$ ряд (13.21) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \left| \dfrac{x}{x_0} \right| < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (13.20) меньше соответствующих членов ряда (13.21), то, по признаку сравнения, ряд (13.20) также сходится, а это значит, что ряд (13.18) сходится абсолютно.

2) По условию, в точке x_1 ряд (13.18) расходится. Докажем, что он расходится для любого x: $|x| > |x_1|$. Предположим обратное, т.е. допустим, что при некотором значении x таком, что $|x| > |x_1|$, ряд (13.18) сходится. Тогда, по только что доказанной первой части теоремы, этот ряд должен сходится в точке x_1, так как $|x_1| < |x|$. Но это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Если ряд (13.18) сходится не при всех значениях x и не только в точке $x = 0$, то существует число $R > 0$ такое, что ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$ (без доказательства).

Определение 13.14. *Радиусом сходимости* степенного ряда называется такое число R, что для всех x: $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для любого x: $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R;\ R)$ называется интервалом сходимости (рис. 13.1). Множество точек, в которых ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда. Область сходимости есть интервал сходимости, который может включать один или оба его конца.

Замечание. 1) Если $R = 0$, то ряд сходится в единственной точке $x = 0$. Если $R = \infty$, то ряд сходится при всех x. 2) При $x = \pm R$ ряд может как сходится, так и расходится. Вопрос о сходимости ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

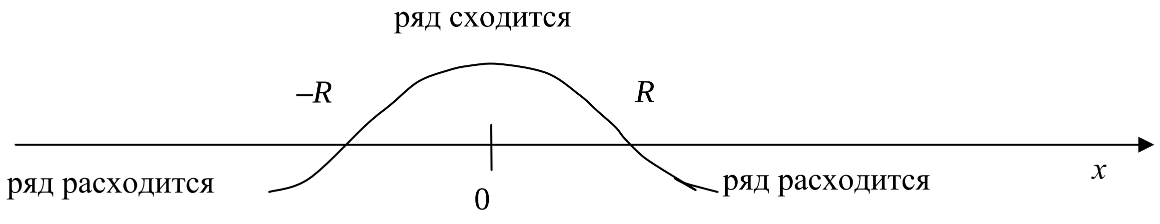


Рис. 13.1

Теорема 13.13 *(о способе определения радиуса сходимости).*

Если существует

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \tag{13.22}$$

то радиус сходимости ряда (13.18) равен

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{13.23}$$

Доказательство. Исследуем ряд (13.18) на сходимость по признаку Даламбера. По условию теоремы, существует предел (13.22). Обозначим его $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{R}.$$

При каждом значении x ряд становится числовым. Поэтому по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ сходится, если $\frac{|x|}{R} < 1$, т.е. $|x| < R$. Следовательно, по достаточному признаку сходимости знакопеременного ряда ряд (13.18) сходится абсолютно при $|x| < R$.

При $|x| > R$ этот ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R} > 1$$

и его общий член $a_n x^n \not\to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, ряд сходится внутри интервала $(-R; R)$ и расходится вне его, при этом $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Замечание. Аналогичным образом для определения интервала сходимости можно пользоваться радикальным признаком сходимости Коши. Тогда радиус сходимости ряда (13.18) определяется формулой

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{13.24}$$

если предел, стоящий в знаменателе, существует.

Свойства степенных рядов

Определение 13.15. Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{13.25}$$

интервал сходимости которого $(-R; R)$. В этом случае говорят, что на $(-R; R)$ $f(x)$ разлагается в степенной ряд или в ряд по степеням x.

Теорема 13.14. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R; R)$ разлагается в степенной ряд (13.25), то она дифференцируема на этом интервале и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием членов этого ряда, т.е.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Аналогично могут быть вычислены производные любого порядка функции $f(x)$. При этом соответствующие ряды имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (13.25).

Теорема 13.15. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R; R)$ разлагается в степенной ряд (13.25), то она интегрируема на $(-R; R)$ и интеграл от нее может быть вычислен почленным интегрированием ряда (13.25), т.е. если $a, b \in (-R; R)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = a_0\int_a^b dx + a_1\int_a^b x\,dx + \ldots + a_n\int_a^b x^n dx + \ldots$$

При этом полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (13.25).

Замечание. Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n . \tag{13.26}$$

Если $f(x)$ — сумма ряда, то говорят, что $f(x)$ разлагается в сходящийся к ней степенной ряд по степеням $x - x_0$.

Все сказанное выше остается в силе для ряда (13.26), с той разницей, что центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x = 0$, а в точке $x = x_0$ (рис. 13.2).

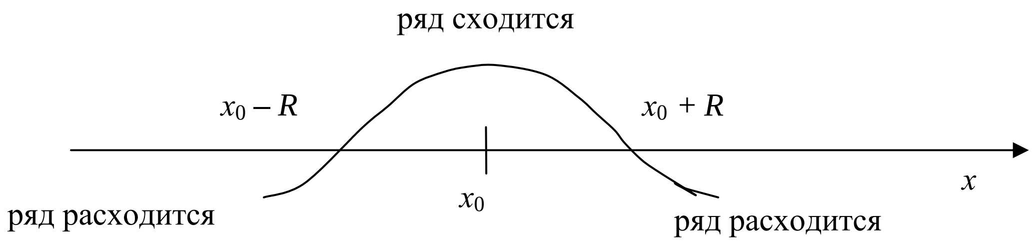


Рис. 13.2

Областью сходимости степенного ряда (13.26) является интервал $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, к которому могут присоединиться один или оба его конца.

Ряд Тейлора

Теорема 13.16 (*о разложении функции в степенной ряд*). Если функция $f(x)$ может быть разложена в сходящийся к ней степенной ряд (13.26)

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{13.27}$$

то это разложение единственно и коэффициенты степенного ряда в этом случае определяются формулами

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

При $x = x_0$ следует, что $f(x_0) = a_0$.

Последовательно дифференцируя равенство (13.27), получим:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 (x - x_0) + \ldots,$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Положив в полученных равенствах $x = x_0$, найдем:

$$f'(x_0) = a_1;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2};$$

$$f'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, мы получили, что все коэффициенты a_0, a_1, a_2, …, a_n определяются единственным образом формулами

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots,$$

что и доказывает теорему.

Подставляя найденные выражения в ряд (13.27), получим ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (13.28)$$

Определение 13.16. *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (13.29)$$

относительно разности $(x - x_0)$, а его коэффициенты называются *коэффициентами Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Таким образом, мы установили, что если функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$, то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.

Обратим внимание на тот факт, что все рассуждения были сделаны в предположении, что $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд. Поставим теперь вопрос о том, когда заданную функцию можно разложить в степенной ряд. Как указано выше, необходимым условием для возможности такого разложения является дифференцируемость функции $f(x)$ бесконечное число раз. В дальнейшем станет ясно, что это условие не является достаточным.

Определение 13.17. Если в ряде (13.29) $x_0 = 0$, то полученный ряд называется *рядом Маклорена*, т.е.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (13.30)$$

Определение 13.18. Многочлен $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора n-й степени* функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

Определение 13.19. Величина

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) \qquad (13.31)$$

называется *n-м остаточным членом* ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 13.17 (*условие разложимости функции в ряд Тейлора*). Для того чтобы ряд Тейлора сходился на интервале

$$(x_0 - R;\, x_0 + R)$$

и имел своей суммой функцию $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале остаточный член $R_n(x)$ ряда Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для $\forall x \in (x_0 - R;\, x_0 + R)$.

Из теоремы вытекает, что вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора сводится к исследованию поведения остаточного члена $R_n(x)$ при $n \to \infty$. То есть если для какой-либо функции формально написан ряд Тейлора, то для того, чтобы доказать, что ряд представляет функцию, необходимо или доказать, что остаточный член $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, или каким-либо иным способом удостовериться, что ряд сходится к функции.

Для каждой элементарной функции существует такое x_0 и такое R, что в интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ она разлагается в ряд Тейлора или (при $x_0 = 0$) в ряд Маклорена.

Разложение функции в ряд Маклорена

Разложим некоторые функции в ряд Маклорена.

1. $f(x) = e^x$.

$$(e^x)' = e^x,\ (e^x)^{(n)} = e^x \Rightarrow x = 0,\ f^{(n)}(0) = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{n!},\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 = \infty.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится к функции e^x на всей числовой оси.

2. $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x;$$

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0;$$

$$f^{(2\pi)}(0) = (-1)^n,\ f^{(2\pi+1)}(0) = 0,\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2\pi}}{(2\pi)!}.$$

Аналогично

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ряд Маклорена для sin x и cos x сходится к ним на всей числовой оси, т.е. $R = \infty$.

3. $f(x)=\ln(1+x)$. Согласно формуле суммы членов геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$, имеем

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

Интегрируя левую и правую части равенства от 0 до x, при $|x| < 1$ получаем

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+...$$

Очевидно, область сходимости полученного ряда $x \in (-1; 1]$.

4. $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$, где $x > 1$, α — любое действительное число.

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)'=\alpha(1+x)^{\alpha-1};$$

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2};$$

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};$$

$$x = 0;$$

$$\left((1+x)^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).$$

Полученный ряд называется *биномиальным*.

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n;$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1.$$

При любом α данный степенной ряд сходится к функции $(1+x)^{\alpha}$ на $(-1; 1)$.

5. $f(x)$ = arctg x. Используем сумму геометрической прогрессии со знаменателем $-t^2$ ($|t| < 1$).

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^n t^{2n}+...$$

Интегрируя левую и правую части по t от 0 до x ($|x| < 1$), получаем

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Этот ряд сходится на интервале [–1; 1].

6. $f(x) = \arcsin x$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Разложим ее в ряд, используя разложение ряда $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^4 + \ldots +$$

$$+\left(-1\right)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}x^{2n} + \ldots$$

Это разложение справедливо при $R = 1$. Интегрируя левую и правую части от 0 до x, находим

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1}, R = 1.$$

Замечание. Можно показать во всех полученных разложениях, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Степенные ряды имеют разнообразные приложения. С их помощью с любой заданной точностью вычисляют значения функций (в частности, значения π и e). Значительную роль играют степенные ряды в приближенных методах решений дифференциальных уравнений. Определенные интегралы от различных типов функций, за малым исключением, не вычисляются по формуле Ньютона — Лейбница, например

$$\int_0^\alpha \sin\left(x^2\right)dx,\ \int_0^\alpha x^m\left(1+x^n\right)^p dx,\ \int_0^\alpha \cos\left(x^2\right)dx,\ \int_0^\alpha e^{-x^2},\ \int_0^\alpha \frac{\sin x}{x}dx \text{ и др.}$$

С помощью рядов находят приближенные значения таких определенных интегралов, которые или не выражаются через элементарные функции, или сложны для вычислений.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^{\alpha} e^{-u^2} du.$

Здесь первообразная от e^{-u^2} не является элементарной функцией. Для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

заменяя в разложении $x = -u^2$, тогда

$$e^{-u^2} = 1 - \frac{u^2}{1!} + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!} + \cdots$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до *a*, получим

$$\int\limits_0^{\alpha} e^{-u^2} du = \left(\frac{u}{1} - \frac{u^3}{1! \cdot 3} + \frac{u^5}{2! \cdot 5} - \frac{u^7}{3! \cdot 7} + \ldots \right) \Bigg|_0^{\alpha} = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1! \cdot 3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} + \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \ldots$$

С помощью этого равенства мы можем при любом *a* вычислить данный интеграл с любой степенью точности.

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx$ Этот интеграл не берется в элементарных функциях, поскольку первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$ не является элементарной. В то же время эта первообразная легко выражается в виде степенного ряда.

Из равенства

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

получаем

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Последний ряд сходится при всех значениях *x*. Интегрируя почленно, получим

$$\int\limits_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} = a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} + \frac{a^5}{5! \cdot 5} - \frac{a^7}{7! \cdot 7} + \ldots$$

Сумма ряда вычисляется с любой заданной степенью точности при всех *a*.

Сводная таблица основных формул по теме «Функциональные и степенные ряды»

Понятие	Определение, формула
Функциональный ряд	Ряд вида $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — функции переменной x
Степенной ряд	$x_0 \neq 0$, $a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$; $x_0 = 0$, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
Радиус сходимости	По признаку Даламбера $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left\| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\|$. По радикальному признаку Коши $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}$
Ряд Тейлора	$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$ $+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$
Ряд Маклорена	$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$
Разложение функций по степеням x	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,\ x \in (-\infty; \infty)$, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1; 1]$, $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\ x \in (-1; 1]$, $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots,$ $x \in (-1; 1)$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Знакопостоянные ряды

В примерах 13.1—13.13 исследуются ряды на сходимость.

Пример 13.1. $\dfrac{2}{101}+\dfrac{4}{201}+\dfrac{6}{301}+\ldots+\dfrac{2n}{100n+1}+\ldots$

Решение. Воспользуемся необходимым признаком.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{100n+1}=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}\neq 0$, значит, ряд расходится.

Пример 13.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{7^n}$.

Решение. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{7^n}=0$, т.е. необходимый признак сходимости выполняется. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{7^{n+1}}\cdot\frac{7^n}{n}=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{7}<1,$$

значит, данный ряд сходится.

Пример 13.3. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{12^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{12^n}=12\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}=0<1,$$

ряд сходится.

Пример 13.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{5n+1}\right)^n$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{5n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n-1}=\frac{1}{5}<1,\text{ ряд сходится.}$$

Пример 13.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{1+n^2}$.

Решение. Применим интегральный признак Коши. Заменим n на x и вычислим

$$\int_1^{\infty}\frac{8dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{8dx}{1+x^2}=8\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^n=$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}n-\operatorname{arctg}1\right)=8\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 13.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+4}}$.

Решение. Очевидно, что $n^2+n+4<(n+2)^2$, следовательно, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n+4}}>\frac{1}{n+2}$, а так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 13.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+2n}$.

Решение. Сравним его с рядом $\sum\frac{1}{n^2}$, который сходится (ряд Дирихле). Воспользуемся замечанием [формула (13.9)] и найдем предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{5n^2+2n}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{5n^2+2n}=\frac{1}{5},$$

значит, данный ряд также сходится.

Пример 13.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n+4}}$.

Решение. Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{n+4}}=0.$$

Следовательно, исследование необходимо продолжить далее. Воспользуемся достаточным признаком сравнения. Выберем мажоранту ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}$, который сходится, так как $p=\frac{6}{5}>1$,

$$\frac{1}{n\cdot\sqrt[5]{n+4}}<\frac{1}{n^{\frac{6}{5}}},$$

сход $\leftarrow$ сход.

Пример 13.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{3^n}$.

Решение. Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{3^n} = 0.$$

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, который представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{3}<1$ и, следовательно, сходится

$$\sin\frac{\pi}{3^n} < \frac{\pi}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

сход ⟵ сход.

Пример 13.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)4^n}$.

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+3)\cdot 4^{n+1}}\cdot\frac{(n+2)\cdot 4^n}{n} = \frac{1}{4}\cdot 1 = 4 > 1$$

и, следовательно, расходится.

Пример 13.11. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Решение. Необходимый признак сходимости выполняется, так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0.$$

Далее воспользуемся признаком сравнения

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n},$$

расход ⟶ расход.

Пример 13.12.

1. Какой вывод можно сделать:

а) о поведении a_n при $n\to\infty$, если ряд расходится;

б) о сходимости ряда, если $a_n \to 0$.

Ответ: а) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ может равняться нулю, а может и не равняться нулю; б) ряд с общим членом a_n может сходиться, а может расходиться.

2. Поставьте знак следствия между утверждениями вместо знака вопроса:

а)	$a_n \to 0$ при $n \to \infty$	?	ряд сходится;
б)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$	?	ряд расходится.

Ответ: а) ←; б) →.

Знакопеременные ряды

В примерах 13.13—13.15 исследуются ряды на абсолютную (условную) сходимость.

Пример 13.13. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{3n-1}+\ldots$

Решение. Проверим условия теоремы Лейбница:

$$1)\ 1>\frac{1}{5}>\frac{1}{8}>\frac{1}{11}>\ldots;\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n-1}=0.$$

Оба условия теоремы Лейбница выполнены, значит, данный ряд сходится.

Ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$ ведет себя как гармонический, что можно установить, воспользовавшись признаком сравнения. Значит, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$ сходится *условно*.

Пример 13.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2n+1}{5^n}$.

Решение. Этот ряд сходится по теореме Лейбница. Действительно,

$$1)\ \frac{3}{5}>\frac{5}{5^2}>\frac{7}{5^2}>\ldots;\ 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{5^n}=0.$$

Ряд из абсолютных величин данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5^n}$ исследуем по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)+1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{2n+1}=\frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{5}<1,$$

значит, ряд сходится. Следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится *абсолютно*.

Пример 13.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{10n+1} = -\frac{1}{11} + \frac{2}{21} - \frac{3}{31} + \dots$

Решение. Так как второе условие теоремы Лейбница не выполняется, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{10n+1} = \frac{1}{10} \neq 0$, то ряд *расходится.*

Степенные ряды

Пример 13.16. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 5^n} x^n$.

Решение. $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 \cdot 5^{n+1}}$. Найдем радиус сходимости ряда по формуле (13.23): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 5^{n+1}}{n^2 \cdot 5^n} = 5 \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 5.$

Интервал сходимости ряда (–5; 5). Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости. При x = –5 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 5^n}(-5)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится по признаку Лейбница. При x = 5 получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 5^n} \cdot 5^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится (это ряд Дирихле). Область сходимости данного ряда [–5, 5].

Пример 13.17. Определить интервал сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdots$$

Решение. Применяя признак сходимости Даламбера, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Так как предел не зависит от x и меньше единицы, то, значит, ряд сходится при всех значениях x. $R = \infty$.

Пример 13.18. Определить интервал сходимости ряда

$$1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$$

Решение. Этот ряд расходится при всех значениях x, кроме x = 0, так как $(nx)^n \to \infty$ при $n \to \infty$, каково бы ни было x, отличное от 0.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; a_n = n^n.$$

Пример 13.19. Определить интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Решение. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится на интервале (–1; 1).

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (он расходится). При $x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Он сходится в силу признака Лейбница. Данный ряд сходится в любой точке полуинтервала [–1; 1) и расходится вне его.

Пример 13.20. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = xe^{-3x}$.

Решение. Воспользуемся разложением $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$ Полагаем $z = -3x$ и получим

$$e^{-3x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{2^2 x^3}{2!} - \frac{2^3 x^4}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n x^{n+1}}{n!} + \ldots$$

Отсюда

$$xe^{-3x} = x - \frac{3x^2}{1!} + \frac{3^2 x^2}{2!} - \frac{3^3 x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!} + \ldots$$

Пример 13.21. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}}$.

Решение. Запишем $f(x) = x^2 \cdot (1-x^5)^{-\frac{1}{2}}$ и воспользуемся разложением $(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \ldots$ Положим $z = -x^5$, $m = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}} = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^7 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} x^{12} - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!} x^{17} + \ldots$$

или

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}} = x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^7 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^{12} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^{17} + \ldots$$

Пример 13.22. Разложить функцию $f(x)=\cos x$ в ряд по степеням $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Воспользуемся разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x\ )}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

В последней формуле примем $x_0 = \pi / 2$. Последовательно дифференцируя, найдем:

$$f'(x)=-\sin x;\ \ f'(\pi/2)=-1;\ \ f''(x)=-\cos x;\ \ f''(\pi/2)=0;$$

$$f'''(x)=\sin x;\ \ f'''(\pi/2)=1;\ \ f^{IV}(x)=\cos x;\ \ f^{IV}(x)=0;$$

$$f^{V}(x)=-\sin\ x;\ \ f^{V}(x)=-1$$

и т.д. Таким образом

$$\cos x=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\ldots$$

Пример 13.23. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x\sin x^3dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Воспользуемся уже известным рядом: $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$ Заменив в нем x на x^3, получим $\sin x^3=x^3-\frac{x^9}{3!}+\frac{x^{15}}{5!}-\ldots$ Умножим обе части равенства на x: $x\sin x^3=x^4-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{x^{16}}{5!}-\ldots$, отсюда

$$\int_0^1 x\sin x^3dx=\int_0^1(x^4-\frac{x^{10}}{3!}+\frac{x^{16}}{5!}-\ldots)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^{11}}{11\cdot 3!}+\frac{x^{17}}{17\cdot 5!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{66}+\frac{1}{2040}-\ldots$$

Замечаем, что третий член ряда по абсолютной величине меньше 0,001. Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых двух членов, что обеспечит требуемую точность:

$$\int_0^1 x\sin x^3dx\approx\frac{1}{5}-\frac{1}{66}=0{,}185.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

13.1. Написать простейшую формулу n-го и (n + 1)-го членов ряда по указанным первым членам:

а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$; б) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$; в) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$;
г) $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$; д) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots$; е) 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – …

13.2. Написать 4 первых члена ряда по известному общему члену:

а) $u_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$; б) $u_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$; в) $u_n=\frac{2+(-1)^n}{n^3}$.

13.3. Исследовать знакопостоянные ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n-1}}{8n+7}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+16}$; в) $2+\frac{4}{16}+\frac{8}{81}+\ldots$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^{3n}}{9^n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+2}{18n-10}\right)^n$.

Ответы. а), б), в), г), е) — расходятся; д), ж) — сходятся.

13.4. Исследовать знакочередующиеся ряды на абсолютную, условную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left(n^5+4\right)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^4+10)}{(2n+1)!}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3n-1)}{\sqrt{(n+1)\cdot 12^n}}$.

Ответы. а), г), д), е) — абсолютно сходятся, в) — сходится условно, б) — расходится.

13.5. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+0{,}5)^n}{n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n(3n-2)}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

Ответы: а) [–1,5; 0,5]; б) (– ∞; + ∞); в) $[-\sqrt{2}/3;\ \sqrt{2}/3]$; г) [–2; 2).

13.6. Разложить в ряд по степеням $x-x_0$ функции:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$; б) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^5}}$, $x_0=0$;

в) $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$, $x_0=0$; г) $f(x)=\sin^2 x$, $x_0=0$.

14. РЯДЫ ФУРЬЕ

Периодические функции и процессы

Определение 14.1. Функция $f(x)$, определенная на неограниченно множестве D, называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что $\forall x \in D$ выполняется условие

$$f(x \pm T) = f(x),$$

где $(x \pm T) \in D$.

Наименьшее из таких чисел T называется периодом функции $f(x)$.

Простейшими периодическими функциями являются $\sin x$, $\cos x$. Их период равен 2π.

Свойства периодических функций:

1. Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодические функции периода T.

2. Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(ax)$ $(a \neq 0)$ имеет период $\dfrac{T}{|a|}$.

3. Определенный интеграл от периодической функции $f(x)$ с периодом T по любому отрезку длиной T имеет одно и то же значение, т.е. для любого x справедливо равенство

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Определение 14.2. *Простейшим периодическим процессом* (движением) является простое гармоническое колебание (движение), описываемое функцией

$$y = A\sin(\omega x + \varphi_0),\ x \geq 0,$$

где A — амплитуда колебания; ω — частота колебания; $(\omega x + \varphi_0)$ — фаза колебания; φ_0 — начальная фаза.

Функцию такого вида (и ее график) называют простой гармоникой. Основным периодом этой функции является $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Используя формулы сложения тригонометрических функций, простую гармонику можно представить в виде

$$A\sin(\omega x + \varphi_0) = \underbrace{A\sin\varphi_0}_{a}\cos\omega x + \underbrace{A\cos\varphi_0}_{b}\sin\omega x = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Отсюда видно, что простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega x$, $\cos\omega x$.

Сложное гармоническое колебание, возникающее в результате наложения конечного или бесконечного числа простых гармоник, также описывается функциями вида $\sin \omega x$, $\cos \omega x$.

График суммы нескольких гармоник резко отличается от графика слагаемых гармоник.

Тригонометрический ряд Фурье

Определение 14.3. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (14.1)$$

а числа a_0, a_n, b_n — *коэффициентами тригонометрического ряда*.

Очевидно, что каждый член ряда (14.1) является периодической функцией с периодом 2π

$$\sin(nx \pm 2\pi) = \sin\left(n(x \pm \frac{2\pi}{n}) \right) = \sin nx.$$

Следовательно, если ряд (14.1) сходится, то его сумма есть периодическая функция с периодом 2π.

Свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул.

Теорема 14.1 (*о единственности разложения в тригонометрический ряд*). Если $f(x)$ определена и интегрируема на $[-\pi; \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (14.2)$$

(т.е. является его суммой), который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно и коэффициенты тригонометрического ряда в этом случае определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad (14.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \qquad (14.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx. \qquad (14.5)$$

Определение 14.4. Пусть $f(x)$ — функция, определенная и интегрируемая на $[-\pi; \pi]$. Тогда коэффициенты a_0, a_n, b_n, определяемые формулами (14.3) — (14.5), называются *коэффициентами Фурье*, а ряд (14.1) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье*, соответствующим функции $f(x)$.

Разложение в ряд Фурье 2π-периодических функций

Будем рассматривать функции $f(x)$, имеющие период $T = 2\pi$.

Теорема Дирихле (*достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье*). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывная, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонная, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на $[-\pi; \pi]$ и его сумма равна:

1) $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри $[-\pi; \pi]$;

2) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ во всех точках разрыва;

3) $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ на концах промежутка.

Определение 14.5. Будем говорить, что функция $F(x)$, определенная на всей числовой прямой и периодическая с $T = 2\pi$, является периодическим продолжением функции $f(x)$, если на $[-\pi; \pi]$ $F(x) = f(x)$.

Теорема Дирихле справедлива и для периодического продолжения функции $f(x)$ (рис. 14.1).

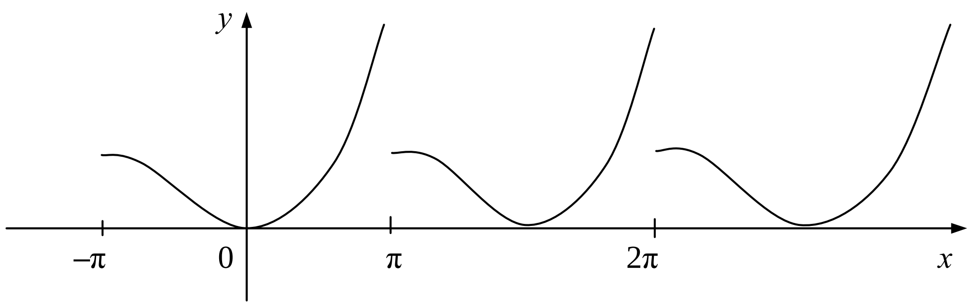


Рис. 14.1

Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Как известно, если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная.} \end{cases} \qquad (*)$$

Теорема 14.2 (*о разложении в ряд Фурье четной функции*). Пусть функция $f(x)$ определена на $[-\pi;\ \pi]$ и является четной, т.е. $f(x) = f(-x)$. Тогда ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx;\ b_n=0, \tag{14.6}$$

где

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx. \tag{14.7}$$

Доказательство. Действительно $f(x)$ — четная, следовательно, и $f(x)\cdot\cos nx$ — четная. По формуле (*) a_0, a_n определяются формулами (14.7) и

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\overbrace{f(x)}^{\text{чётная}}\quad\overbrace{\sin nx}^{\text{нечётная}}}_{\text{нечетная}}\,dx=0.$$

Теорема 14.3 (*о разложении в ряд Фурье нечетной функции*). Пусть функция $f(x)$ нечетная и определена на $[-\pi;\ \pi]$. Тогда ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx;\ a_0=a_n=0, \tag{14.8}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx. \tag{14.9}$$

Доказательство. Действительно, если $f(x)$ — нечетная, то $f(x)\cdot\sin nx$ — четная; $f(x)\cdot\cos nx$ — нечетная. Отсюда по формуле (*) вытекает (14.9), $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

Ряды, стоящие в правой части формул (14.6) и (14.8), называются неполными тригонометрическими рядами, или рядами из косинусов и синусов соответственно.

Разложение в ряд Фурье функций на отрезке $[-\ell;\ \ell]$

Теорема 14.4. Пусть $f(x)$ определена на $[-\ell;\ \ell]$ (ℓ — произвольное положительное число) и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле, тогда ее разложение в ряд Фурье на $[-\ell;\ \ell]$ имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{14.10}$$

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\ b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{14.11}$$

Доказательство. Преобразуем $f(x)$, сделав подстановку $x = \frac{\ell t}{\pi}$ в функцию $f(x) = f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) = \varphi(t)$, которая определена на [–π; π] и имеет периодом 2π.

Кроме того $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Разложим $\varphi(t)$ на [–π; π] в ряд Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Возвращаясь к переменной

$$x = \frac{\ell t}{\pi} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi x}{\ell} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{\pi}{\ell}dx,$$

получим (14.10)

$$\varphi(t) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

где a_i, b_i находятся по формулам (14.11).

Замечание. Все теоремы, имеющие место для рядов Фурье 2π-периодических функций, остаются в силе и для рядов Фурье 2ℓ-периодических функций.

В частности, если $f(x)$ на $[-\ell; \ell]$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx; \quad b_n = 0;$$

если $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx; \ a_0 = a_n = 0.$$

Представление непериодической функции рядом Фурье

1. Пусть $y = f(x)$ непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая, и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для любого x.

Однако непериодическую функцию $f(x)$ можно представить в виде ряда Фурье на любом конечном отрезке $[a; b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле. Для этого можно поместить начало координат в середину $[a; b]$ и построить функцию $f_1(x)$ периода $T = 2\ell$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $x \in [-\ell; \ell]$. Вне промежутка $[-\ell; \ell]$ сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными функциями (рис. 14.2).

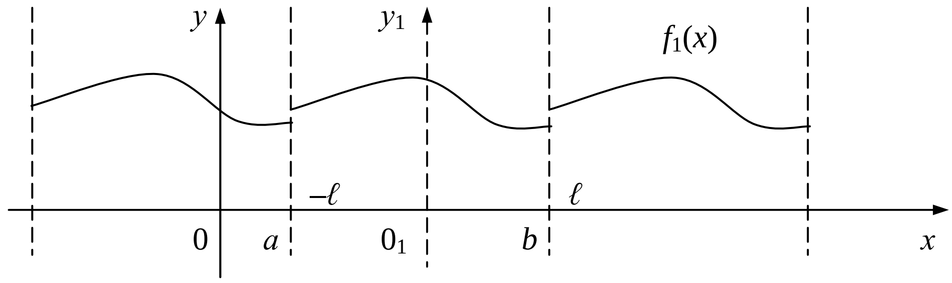


Рис. 14.2

2. Пусть $f(x)$ — непериодическая функция. Требуется разложить ее в ряд Фурье на $[0; \ell]$ (это частный случай п. 1: начало координат перенесено в точку $x = a$ отрезка $[a; b]$; область определения $f(x)$ будет иметь вид $[0; \ell]$, где $\ell = b - a$).

Такую функцию можно произвольным образом доопределить на $[-\ell; 0]$, а потом осуществить ее периодическое продолжение с $T = 2\ell$ (рис. 14.3). Разложив в ряд Фурье на $[-\ell; \ell]$ полученную таким образом функцию $f_1(x)$, получим искомый ряд для $f(x)$ при $x \in [0; \ell]$.

В частности, $f(x)$ можно доопределить на $[-\ell; 0]$ четным образом. В этом случае $f(x)$ разлагается в ряд по косинусам.

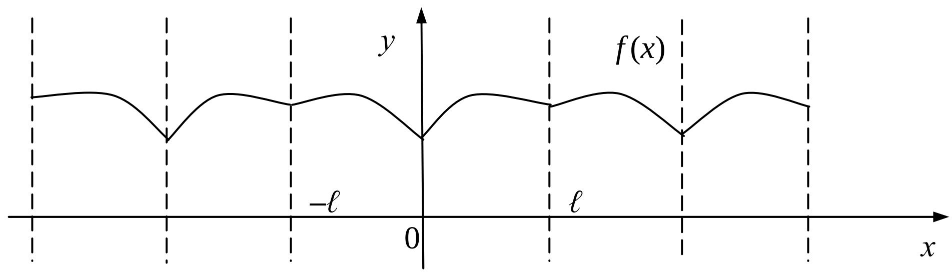


Рис. 14.3

Если же $f(x)$ продолжить на $[-\ell; 0]$ нечетным образом, то она разложится в ряд по синусам (рис. 14.4).

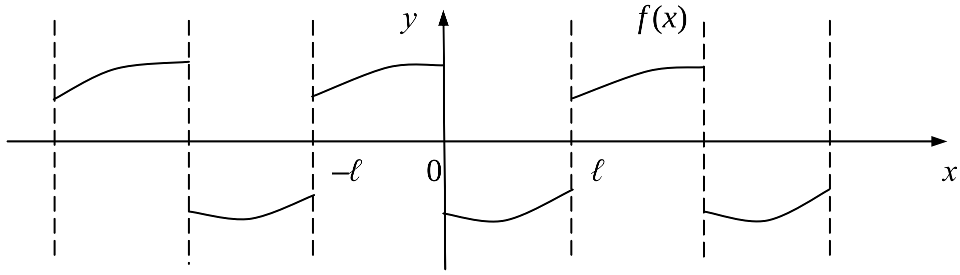


Рис. 14.4

Ряд косинусов и ряд синусов для функции $f(x)$, заданной на $[0;\ \ell]$, имеет одну и ту же сумму. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, то сумма как одного, так и другого ряда равна одному и тому же числу $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Замечание. Все, что было сказано о разложении в ряд Фурье функции $f(x)$ на $[0;\ \ell]$, переносится практически без изменения на случай, когда $f(x)$ задана на $[0;\ \pi]$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 14.1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x \quad (-\pi<x<+\pi).$$

Решение. Заданная функция удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье. На интервале $(-\pi;+\pi)$ функция $f(x)=x$ — нечетная. Следовательно, ряд Фурье этой функции содержит только синусы (все коэффициенты $a_n=0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

Коэффициенты b_n определим по формуле

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

в которую вместо $f(x)$ надо подставить x.

На рис. 14.5 представлен график функции $f(x)=x$ $(-\pi < x < \pi)$. На рис. 14.6 представлен график функции $f(x)=x$ $(-\pi < x < \pi)$ с ее периодическим продолжением.

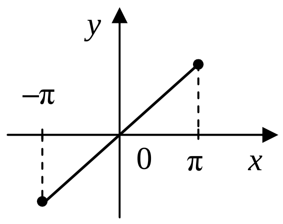


Рис. 14.5

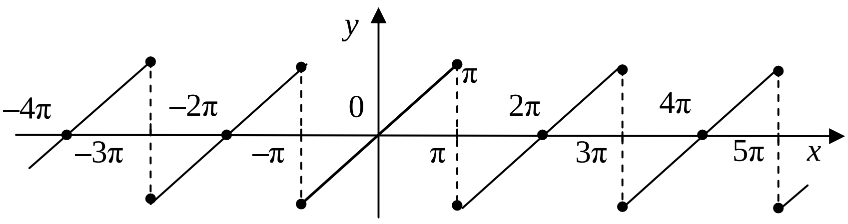


Рис. 14.6

Найдем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx; \\ dv=\sin nx\,dx; & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\pi\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right]=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\pi\cdot(-1)^n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n};\ b_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Здесь учтено, что $\cos n\pi = (-1)^n$. Подставим эти значения коэффициентов в формулу $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ и вынесем постоянный множитель 2 за знак суммы: $x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sin nx}{n}$.

Придавая n значения 1, 2, 3, …, получим разложение в развернутом виде

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right]. \qquad (**)$$

В интервале $(-\pi; +\pi)$ это равенство справедливо в точках непрерывности функций $f(x)$, т.е. в данном случае во всех внутренних точках интервала $(-\pi; +\pi)$. Вне интервала этот ряд изображает периодическое продолжение рассматриваемой функции.

В точках разрыва $(\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots)$ сумма ряда равна среднему арифметическому ее левостороннего и правостороннего пределов в этих точках.

Найдем эти пределы:

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} x = \pi; \quad \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} x = -\pi.$$

Среднее арифметическое этих пределов $\dfrac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = \dfrac{\pi - \pi}{2} = 0.$

Во всех точках разрыва этой функции получим то же самое.

Таким образом, в точках разрыва сумма ряда равна нулю. На рис.14.7 представлены первый, второй и третий члены ряда, а также сумма шести, десяти членов ряда, а также S_∞. Разложение (**) можно записать так:

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] = \begin{cases} x, & \text{если } -\pi < x < \pi, \\ 0, & \text{если } x = (2k+1)\pi, \end{cases}$$

где k — любое целое число.

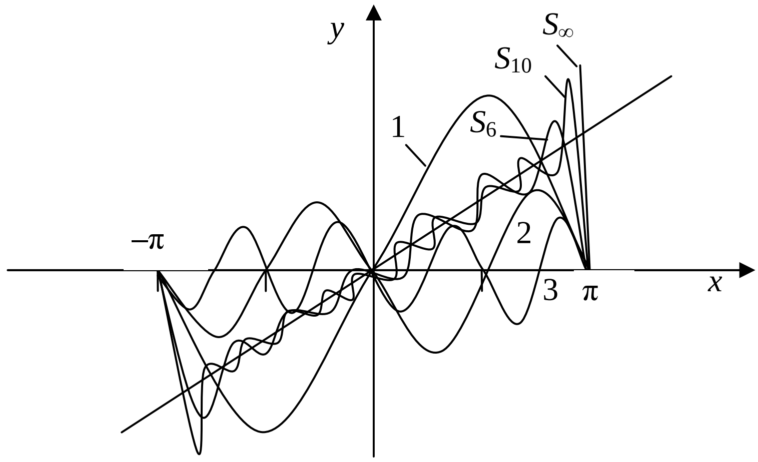


Рис. 14.7

Если подставить в разложение (**) $x=\dfrac{\pi}{2}$, которая является точкой непрерывности заданной функции, получим известную формулу

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 14.2. Разложить функцию

$$f(x)=2x-2$$

в ряды Фурье из синусов и из косинусов на отрезке [0; 2].

На отрезке [0; 2] данная функция удовлетворяет условиям Дирихле (рис. 14.8). Построим графики функций, которые являются нечетным и четным продолжением функции $f(x)$ на отрезок [–2; 0], и затем с отрезка [–2; 2] периодически продолжаем их на всю числовую ось (см. рис.14.8, рис. 14.9).

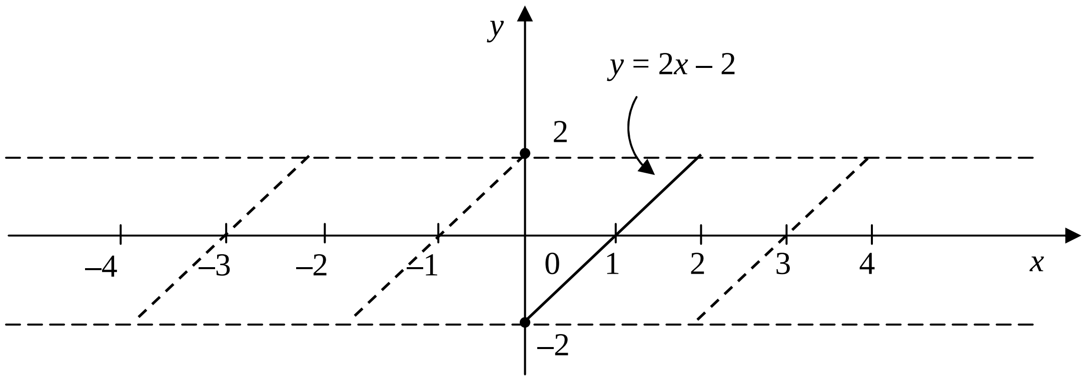


Рис. 14.8

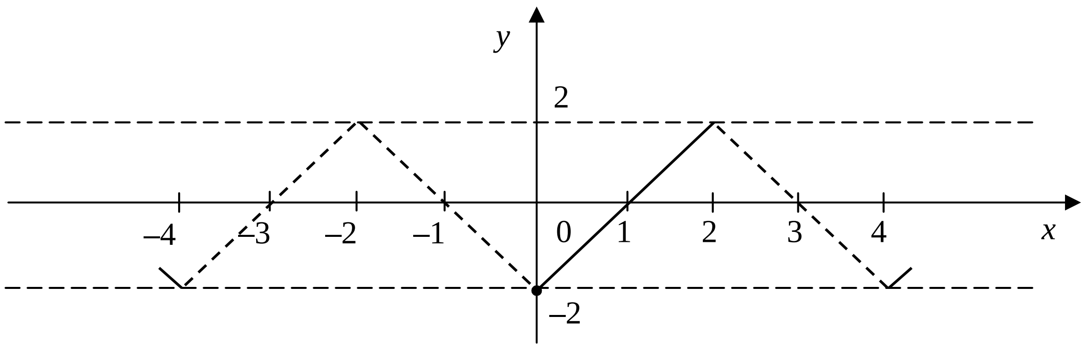


Рис. 14.9

1) Разложение в ряд Фурье из синусов для функции $f(x)$ имеет вид

$$2x-2=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}, \quad 0\le x\le 2,$$

где $b_n=\int\limits_0^2 (2x-2)\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx, \quad n=1,2,\ldots$

Для вычисления коэффициентов b_n применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^b u\,dv = uv\Big|_0^b - \int_0^b v\,du.$$

Полагая $u = x-1$ (общий множитель 2 вынесем за знак интеграла), $dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx$, находим

$$du = dx,\ v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2},$$

$$2\int_0^2 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{\pi n}(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}(\cos n\pi + 1) + \frac{8}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{4}{\pi n}[1+(-1)^n]\ \ (\cos n\pi = (-1)^n),$$

$$\int \cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$b_n = -\frac{4}{\pi n}\left[1+(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ нечетно,} \\ -\dfrac{8}{\pi n}, \text{ если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Положив $n = 2k$ (k = 1, 2…), получаем искомое разложение функции $f(x)$:

$$2x - 2 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} -\frac{8}{\pi\cdot 2k}\sin\frac{2k\pi x}{2} = -\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\pi x}{k} =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left(\sin\pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \ldots + \frac{\sin k\pi x}{k} + \ldots\right),$$

$$0 \le x \le 2.$$

2) Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье из косинусов имеет вид

$$2x - 2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{2},\ \ 0 \le x \le 2,$$

где $a_0 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)dx = \frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2 = 0,\ \ a_n = 2\cdot\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx,\ \ n = 1, 2, \ldots$

По формуле интегрирования по частям находим

$$2\cdot\int_0^2 (x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{pmatrix} u=x-1; & du=dx \\ dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx; & v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{4}{\pi n}(x-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{4}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{8}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{8(\cos n\pi-1)}{\pi^2 n^2};\ a_n=\begin{cases}-\dfrac{16}{\pi^2 n^2},\ \text{если } n \text{ нечетно.}\\ 0,\ \text{если } n \text{ четно.}\end{cases}$$

Положив $n=2k-1$ (k = 1, 2, …), получаем разложение данной функции в ряд Фурье из косинусов:

$$2x-2=-\frac{16}{\pi^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}=$$

$$=-\frac{16}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1^2}+\frac{\cos\frac{3\pi x}{2}}{3^2}+\ldots+\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^2}+\ldots\right),\ 0\le x\le 2.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

14.1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ для значений x на отрезке $[-\pi; +\pi]$.

Ответ: $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}-4\left(\dfrac{\cos x}{1^2}-\dfrac{\cos 2x}{2^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}-\dfrac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right).$

14.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$ для значений x из интервала $[0; 2\pi]$.

Ответ: $e^x=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{1+n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{1+n^2}\right].$

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

15.1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 15.1. *Комплексным числом* z называется число вида

$$z = x + iy, \tag{15.1}$$

где $x, y \in R$; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z, для них приняты обозначения:

$$x = \operatorname{Re}(x + iy) = \operatorname{Re} z; \qquad y = \operatorname{Im}(x + iy) = \operatorname{Im} z.$$

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым. Если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, т.е. любое действительное число можно рассматривать как комплексное. Множество комплексных чисел обозначается C. Следовательно, множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел $R \subset C$.

Форма записи комплексного числа в виде (15.1) называется *алгебраической*.

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$(z_1 = z_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2,\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2).$$

Комплексное число $z = 0 + 0i$ называется нулем. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены.

Определение 15.2. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным с числом $z = x + iy$. Два комплексных числа, которые отличаются только знаком мнимой части, т.е. $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, называются *комплексно-сопряженными*.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости xOy или точкой с координатами (x, y), или как вектор $\vec{z}$, с проекциями на оси абсцисс и ординат равными соответственно x и y (рис. 15.1).

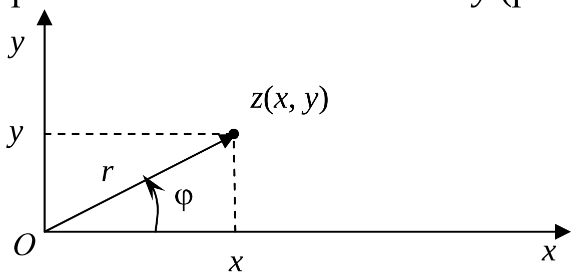


Рис. 15.1

Длина r вектора $\vec{z}$ называется модулем числа z и обозначается $|z|$.

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{15.2}$$

Плоскость xOy называется комплексной плоскостью, ось абсцисс — действительной осью, ось ординат — мнимой осью.

Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{z}$ называется аргументом z и обозначается $\operatorname{Arg} z$, он определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$0 \le \arg z < 2\pi \left(\text{или} -\pi < \arg z \le \pi \right)$, где $\arg z$ — главное значение аргумента.

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{15.3}$$

Связь между алгебраической и тригонометрической формами:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{15.4}$$

Чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, надо найти его модуль по формуле (15.2), а затем с помощью одной из формул (15.4) найти аргумент φ.

Для главного значения аргумента справедливо

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \ \forall x > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, \ \forall x < 0,\ \forall y \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, \ \forall x < 0,\ \forall y < 0. \end{cases} \tag{15.5}$$

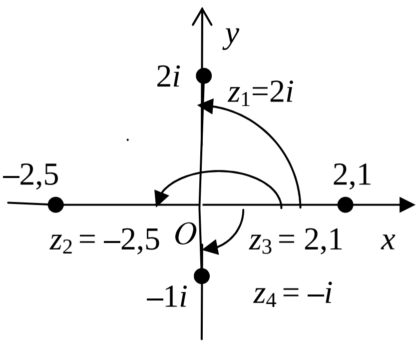


Рис. 15.2

Если комплексное число z находится на одной из осей, то $\varphi = \arg z$ находят непосредственно (рис 15.2).

Например, $z_1 = 2i$; $z_2 = -2{,}5$; $z_3 = 2{,}1$; $z_4 = -i$.

Тогда $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg z_2 = \pi$, $\arg z_3 = 0$, $\arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$.

Показательная форма комплексного числа — наиболее удобная его форма. Для ее получения применяют *формулу Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in R \tag{15.6}$$

(e = 2,718 … — иррациональное число).

Если комплексное число z записано в тригонометрической форме (15.3), то, используя формулу (15.6), получим *показательную форму* комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}, \tag{15.7}$$

где $r = |z|$; $\varphi = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Действия над комплексными числами производятся так:

1. *Числа заданы в алгебраической форме.* Если $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \tag{15.8}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); \tag{15.9}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \text{ (при } z_2 \neq 0\text{)}. \tag{15.10}$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме выполняются по тем же правилам, что и над многочленами с действительными коэффициентами, если учесть, что $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i$ и т.д.

Частное получается при умножении числителя и знаменателя дроби $\frac{z_1}{z_2}$ на число $\bar{z}_2$, комплексно-сопряженное знаменателю.

Возведение комплексного числа z в степень n $(n \in N)$ рассматривается как умножение z на себя n раз.

Например, $(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$

2. *Числа заданы в тригонометрической форме.* Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]; \tag{15.11}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \text{ (при } z_2 \neq 0\text{)}; \tag{15.12}$$

если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ — *формула Муавра*;

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1. \tag{15.13}$$

3. *Числа заданы в показательной форме.* Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \tag{15.14}$$

если $z_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \tag{15.15}$$

если $n \in N, z = re^{i\varphi}$, то

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}, \tag{15.16}$$

$$z_k = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi + 2k\pi)/n}, k = 0, 1, ..., n-1. \tag{15.17}$$

Для взаимно сопряженных чисел z и $\overline{z}$ справедливы формулы: если $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, то

$$\overline{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}.$$

15.2. Понятие функции комплексного переменного

Определение 15.3. Пусть даны две плоскости комплексных чисел: плоскость Z точек $z = x + iy$ и плоскость W точек $w = u + iv$, где x, y, u, v — действительные переменные. Рассмотрим некоторое множество точек M в плоскости Z и множество D в плоскости W. Если каждому значению $z \in M$ по какому-то закону поставлено в соответствие значение другого комплексного переменного $w \in D$, то говорят, что на множестве M определена *функция комплексной переменной* z и пишут $w = f(z)$.

Так как $z = x + iy$, $w = u + iv$, то функция $f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$u = \operatorname{Re} f(z),\ v = \operatorname{Im} f(z).$$

Определение 15.4. Функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению $z \in M$ можно поставить в соответствие только одно значение $w \in D$, в противном же случае функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Будем откладывать значения z на одной комплексной плоскости, а значения w — на другой.

Тогда функцию комплексного переменного можно геометрически представить как *отображение* множества M плоскости Z на множество D плоскости W (рис. 15.3).

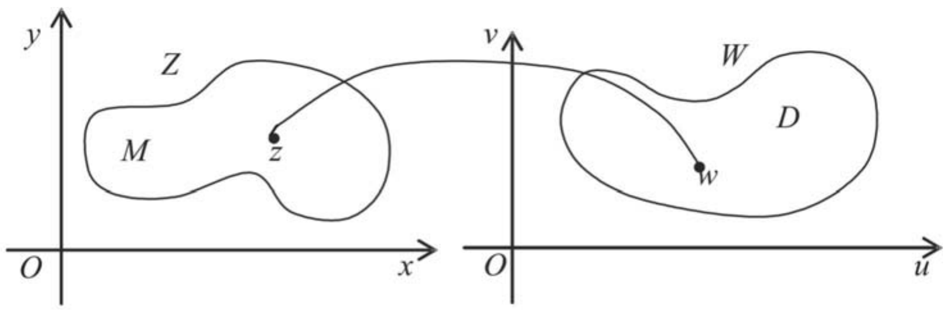


Рис. 15.3

Если функция $w = f(z)$ однозначна на множестве M и двум различным точкам M всегда соответствуют различные точки D, то такое отображение принято называть взаимно однозначным или однолистным.

Точки множества D называют образами соответствующих точек множества M при отображении $w = f(z)$, а точки множества M — прообразами соответствующих точек множества D.

Определение 15.5. Область, ограниченная замкнутой несамопересекающейся линией, называется *односвязной*.

К односвязным областям принадлежит вся плоскость. Другие примеры односвязных областей приведены на рисунках ниже. Например, на рис. 15.4 изображена ограниченная открытая область. На рис. 15.5 представлена ограниченная замкнутая область. Сами области заштрихованы. Если граница области входит в область задания, то она изображается сплошной линией, если нет — пунктиром.

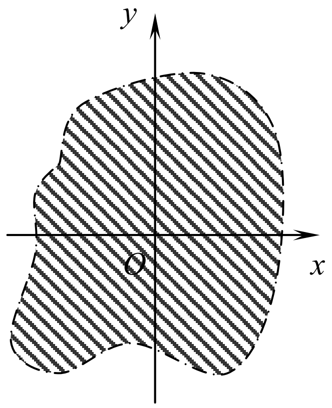


Рис. 15.4

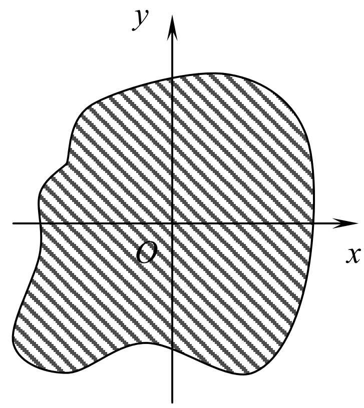


Рис. 15.5

Определение 15.6. Область называется *двусвязной*, если она ограничена двумя замкнутыми непересекающимися и несамопересекающимися линиями.

К примеру, область будет двусвязной, если внутри рассматриваемой части плоскости имеется одна точка или односвязная ограниченная область, не принадлежащая к области задания функции.

Двусвязные области приведены на рис. 15.6—15.7, в том числе ограниченная двусвязная область (рис. 15.6) и неограниченная двусвязная область (рис. 15.7).

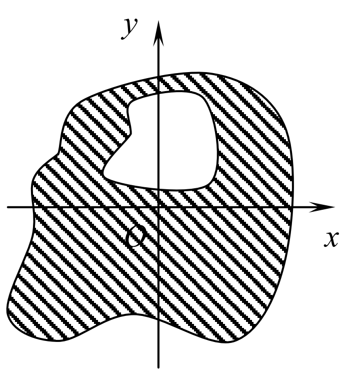


Рис. 15.6

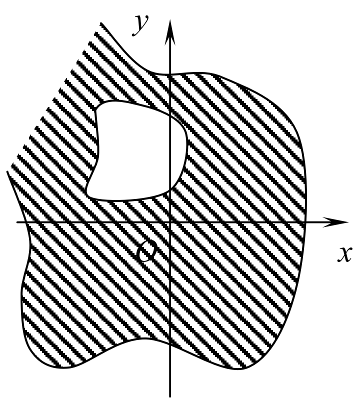


Рис. 15.7

На рис. 15.8—15.9 представлены многосвязные области, в том числе на рис. 15.8 — трехсвязная, а на рис. 15.9 — четырехсвязная.

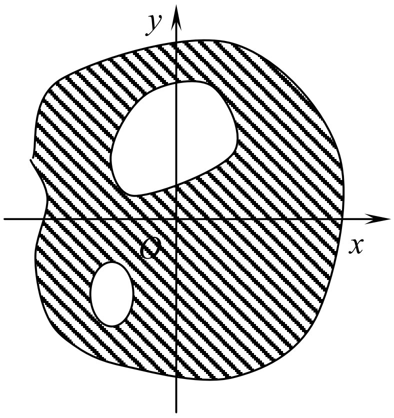


Рис. 15.8

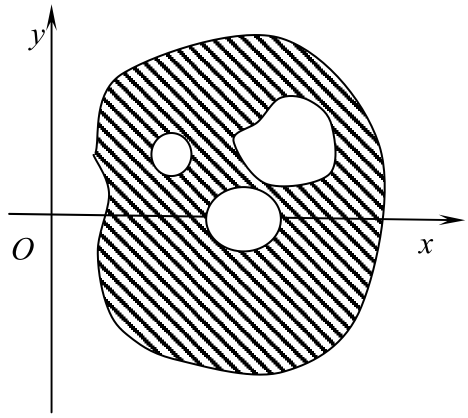


Рис. 15.9

Область, представленная на рис. 15.10, не является связной.

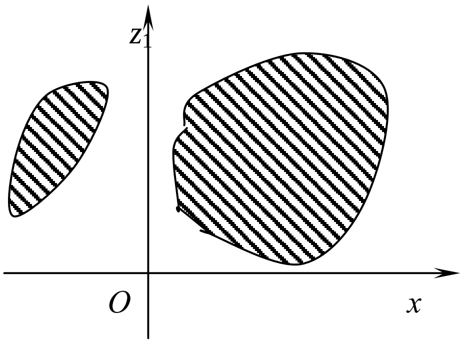


Рис. 15.10

15.3. Производная функции комплексного переменного

Определения, формулы и теоремы, рассмотренные при изучении производной и дифференциала функции действительного переменного, практически полностью совпадают с аналогичными определениями, формулами и теоремами в случае функции комплексного переменного. Но дифференцируемые функции комплексного переменного по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного обладают многими дополнительными свойствами.

Определение 15.7. Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в точке z и ее окрестности. *Производной функции* $f(z)$ *в точке* z называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если такой предел существует:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \qquad (15.18)$$

В формуле (15.18) Δz стремится к нулю по любому закону (по любому пути). Точка $z + \Delta z$ может приближаться к точке z по любому из бесконечного множества различных лучей (рис. 15.11) и для существования производной для функции $f(z)$ комплексного переменного требуется совпадение всех этих пределов.

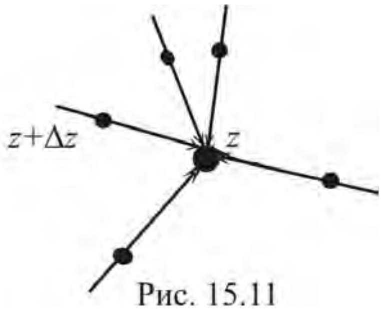


Рис. 15.11

(В случае функции действительного переменного, если функция $y = f(x)$ имеет производную, это означает, что существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении точки $x + \Delta x$ к точке x только по двум направлениям: справа ($\Delta x > 0$) и слева ($\Delta x < 0$), и эти пределы совпадают.)

Функция, которая имеет производную в данной точке, называется дифференцируемой, а также моногенной или голоморфной в этой точке.

15.4. Аналитические функции

Основное содержание общей теории функций комплексного переменного составляет теория аналитических функций.

Известны различные подходы к понятию аналитичности. Один из них, тесно связанный с геометрическими представлениями, впервые был освещен в работах О. Коши, затем развит в трудах Б. Римана. В его основе лежит так называемое *структурное свойство функции* — существование производной по комплексному переменному.

Другой подход, связанный с аналитическим аппаратом, которым может быть изображена функция, основан на возможности представления функций степенными рядами. Этот подход был развит в работах К. Вейерштрасса.

Определение 15.8. Функция $f(z) = u + iv$, определенная в области D, называется *аналитической (голоморфной)* в точке $z_0 \in D$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой функция $f(z)$ может быть представлена степенным рядом $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$

Функция $f(z)$ называется аналитической (голоморфной) в области D, если это свойство выполняется в каждой точке z_0 этой области.

Как указывалось ранее, функция $f(z)$, голоморфная в точке $z_0 \in D$, дифференцируема в этой точке.

Голоморфность функции $f(z)$ в области означает, что в каждой точке этой области функция $f(z)$ бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора сходится к ней в некоторой окрестности этой точки.

15.5. Ряды Лорана. Особые точки аналитической функции и их классификация

Определение 15.9. *Рядом Лорана* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{15.19}$$

где c_n — некоторые комплексные числа [коэффициенты ряда (15.19)]; z — переменная точка, z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости.

Рассмотрим отдельно два ряда, из которых состоит ряд Лорана. Ряд, расположенный по целым неотрицательным степеням $(z-z_0)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

называется *правильной частью ряда Лорана*. Ряд, расположенный по целым отрицательным степеням $(z-z_0)$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n},$$

называется *главной частью ряда Лорана*.

Ряд (15.19) является сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся оба ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Областью сходимости ряда (15.19) является общая часть областей сходимости каждого из рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ и $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ является круг некоторого радиуса R с центром в точке z_0 (в частности, $R=0$ или $R=\infty$). Внутри круга $|z-z_0|<R$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ сходится по теореме Абеля.

Если функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то такую точку называют правильной точкой данной функции.

Всякую точку, которая не является правильной для функции $f(z)$, называют особой точкой.

Определение 15.10. *Особые точки аналитической функции* — это точки, в которых нарушается свойство аналитичности, в том числе точки, в которых функция не определена.

Например, для функции $f(z)=\dfrac{1}{7-z}$ точка $z = 7$ будет особой точкой, всякая же точка z такая, что $z \neq 7$, будет правильной.

Определение 15.11. Особая точка $z=z_0$ аналитической функции $f(z)$ называется *изолированной*, если в некоторой ее окрестности функция $f(z)$ не имеет других особых точек.

Определение 15.12. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана содержится конечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, то особая точка z_0 называется *полюсом* функции $f(z)$.

Определение 15.13. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана нет членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, то особая точка z_0 называется *устранимой особой точкой* функции $f(z)$.

Определение 15.14. Если в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана содержится бесконечно много членов с отрицательными степенями разности $(z-z_0)$, то особая точка z_0 называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$.

Правила для определения характера изолированной особой точки $z=z_0$ аналитической функции $f(z)$:

1) чтобы точка $z=z_0$ представляла собой устранимую особую точку функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование конечного предела

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0, \quad c_0\neq\infty;$$

2) чтобы точка $z=z_0$ представляла собой полюс функции $f(z)$, необходимо и достаточно существование предела

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty;$$

а чтобы точка $z=z_0$ представляла собой полюс порядка m функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было записать в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где $\psi(z_0)\neq 0$, а функция $\psi(z)$ аналитическая в окрестности точки z_0;

3) чтобы точка $z=z_0$ являлась существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы при $z\to z_0$ функция $f(z)$ не имела пределов (ни конечного, ни бесконечного).

15.6. Сводная таблица понятий и формул по теме «Комплексные числа»

Понятие	Определение, формула
Комплексное число (алгебраическая форма записи)	$z = x + iy$, где $x, y\in R$; $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица
Действительная часть	$x = \operatorname{Re}(x+iy) = \operatorname{Re} z$
Мнимая часть	$y = \operatorname{Im}(x+iy) = \operatorname{Im} z$
$z_1 = z_2$	$(z_1=z_2)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}(\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2)$
Модуль комплексного числа	Длина r вектора $\vec{z}$: $\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2+y^2}$
Аргумент комплексного числа	$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm 2, \ldots$

Понятие	Определение, формула
Главное значение аргумента $\arg z$	$0 \le \arg z < 2\pi$ (или $-\pi < \arg z \le \pi$), $\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \forall x > 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \forall x < 0,\ \forall y \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \forall x < 0,\ \forall y < 0 \end{cases}$
Тригонометрическая форма записи	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Связь между алгебраической и тригонометрической формами	$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$
Показательная форма записи	$z = re^{i\varphi}$
Сопряженное число (формы записи)	$\overline{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}$
Действия над комплексными числами:	
сложение $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
умножение $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$;	$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$;	$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$
$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
деление (при $z_2 \ne 0$) $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$;	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$;	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$
$z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
возведение в степень	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
(формула Муавра)	$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$
извлечение корня	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k = 0,1,\ldots,n-1,$ $z_k = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\,e^{i(\varphi+2k\pi)/n}, k = 0,1,\ldots,n-1$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 15.1. Изобразить точками комплексной плоскости комплексные числа $2 + 2i$, $-5 + 3i$, $-4 - 3i$, $1 - 2i$.

Решение. Между точками числовой плоскости и множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Любому комплексному числу $x + iy$ соответствует только одна точка числовой плоскости, определяемая координатами (x, y), и, обратно, любой точке плоскости соответствует только одно комплексное число, действительная часть которого равна абсциссе, а коэффициент при мнимой части — ординате точки.

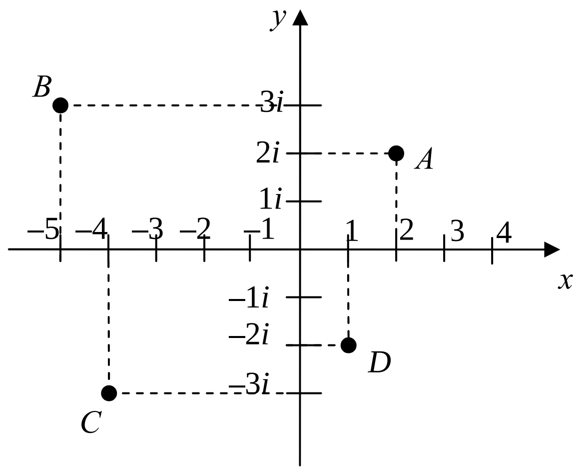


Рис. 15.12

Поэтому точка A изображает комплексное число $A = 2 + 2i$; точка B — комплексное число $B = -5 + 3i$; точка C — комплексное число $C = -4 - 3i$; точка D — комплексное число $D = 1 - 2i$ (рис. 15.12).

Пример 15.2. Даны два числа в алгебраической форме: $z_1 = 5 + 7i$; $z_2 = 3 - 4i$. Найти $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+7i}{3-4i} = \frac{(5+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{(15-28)+i(21+20)}{9+16} = \frac{-13+41i}{25} = -0{,}52 + 1{,}64i\,.$$

Пример 15.3. Дано: $z_1 = 10 - 7i$; $z_2 = 5i$; $z_3 = 3 + 4i$; $z_4 = (-1 + 5i)$; $z_5 = 1 - 3i$. Найти $z = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2} + \dfrac{\bar{z}_3 \cdot z_4^2}{\bar{z}_5}$.

Решение.

$$z = \frac{10+7i}{5i} + \frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i} = \frac{(10+7i)i}{5i\cdot i} + \frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i} =$$

$$= \frac{7-10i}{5} + \frac{-2(3-4i)(12+5i)}{(1+3i)} = \frac{7-10i}{5} - \frac{2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{7-10i}{5} -$$

$$-\frac{2(-43-201i)}{10} = \frac{7-10i}{5} + \frac{43+201i}{5} = \frac{50+191i}{5} = 10 + 38{,}2i\,.$$

Пример 15.4. Даны два числа в тригонометрической форме: $z_1 = 2\,(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; $z_2 = 5\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Найти $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. $r_1 = 2$; $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$; $r_2 = 5$; $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$. Подставим эти значения r_1, r_2, φ_1 и φ_2 в формулу (15.12), получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{5}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] =$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}(1+i).$$

Пример 15.5. Заданы комплексные числа: $z_1 = i,\ z_2 = 1 + i,\ z_3 = -1,$ $z_4 = 1 - i\sqrt{3}.$ Требуется: 1) представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической и показательной форме; 2) вычислить $z_2^8 = (1+i)^8$; 3) вычислить все значения $\sqrt[3]{z_4}$.

Решение. 1. Чтобы записать комплексное число в тригонометрической или показательной формах, необходимо найти его модуль и аргумент по формулам (15.2) и (15.5):

$$|z_1| = 1, \qquad \arg z_1 = \frac{\pi}{2},$$

отсюда по формулам (15.3) и (15.7)

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

т.е.

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Точка принадлежит первой четверти, поэтому

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда по формуле (15.3)

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

а по формуле (15.7) $z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Итак,

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$|z_3|=\sqrt{(-1)^2}=1, \arg z_3=\pi,$$

поэтому

$$z_3=1(\cos\pi+i\sin\pi),\ z_3=e^{i\pi},$$

т.е.

$$-1=1(\cos\pi+i\sin\pi)=e^{i\pi}.$$

2. Воспользуемся тригонометрической формой комплексного числа z_2 и формулой Муавра.

$$z_2^8=\left(\sqrt{2}\right)^8\left[\cos\left(8\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^4(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16.$$

3. Перейдем к тригонометрической форме комплексного числа $z_4=1-i\sqrt{3}=w$: $|z_4|=\sqrt{1+3}=2.$ Комплексное число z_4 лежит в 4-й четверти.

$$\varphi_4=\arg z_4=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}, \text{ так как } \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

$$z_4=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Воспользуемся формулой (15.13), где $\sqrt[n]{|z|}>0$ — арифметический корень:

$$\sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{z_4}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi/3+2\pi k}{3}-i\sin\frac{\pi/3+2\pi k}{3}\right)\ (k=0,\ 1,\ 2).$$

При $k = 0$

$$w_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9}\right);$$

при $k = 1$

$$w_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}-i\sin\frac{7\pi}{9}\right);$$

при $k = 2$

$$w_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}-i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

Пример 15.6. Изобразить в комплексной плоскости линии, заданные следующим образом: 1) $|z|=10$; 2) $|z-3+i|=5$.

*Решение.*1. Линия — окружность с центром в начале координат с радиусом, равным 10, так как, по определению, $|z|$ — это расстояние от начала координат до точки z.

2. $|z_1 - z_2|$ — это расстояние между точками z_1 и z_2. Поэтому равенство $|z-(3-i)|=5$ означает, что точки искомой линии удалены на расстояние, равное 5 от точки $(3-i)$.

То есть искомая линия представляет собой окружность радиусом 5 с центром в точке $(3-i)$ (рис. 15.13).

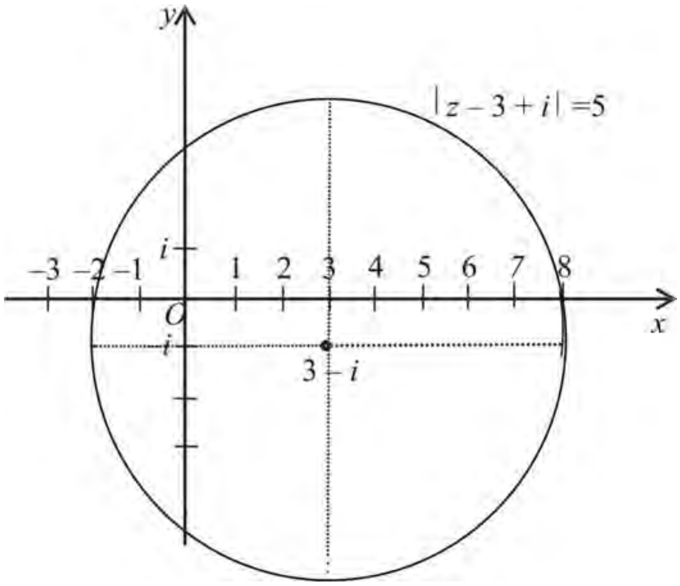


Рис. 15.13

Пример 15.7. Указать геометрические места точек комплексной плоскости, для которых выполняются следующие условия: 1) $\operatorname{Re} z = 25$; 2) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{Re} z \ge 4$.

Решение. 1. $\operatorname{Re} z$ означает действительную часть комплексного числа $z = x + iy$, т.е. $\operatorname{Re} z = x$. Поэтому вместо уравнения $\operatorname{Re} z = 25$ можно написать $x = 25$. Это уравнение прямой, параллельной оси ординат.

2. Уравнению $\arg z = \frac{\pi}{6}$ удовлетворяет множество точек, находящихся на луче, выходящем из начала координат, который образует с осью абсцисс угол 30°.

3. Искомое множество представляет из себя угол, ограниченный лучами $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (рис. 15.14).

4. Действительная часть комплексного числа $z = x + iy$ — это $\operatorname{Re} z = x$. Следовательно, данное множество — правая полуплоскость, которой принадлежит ее граница $x = 4$ (рис. 15.15).

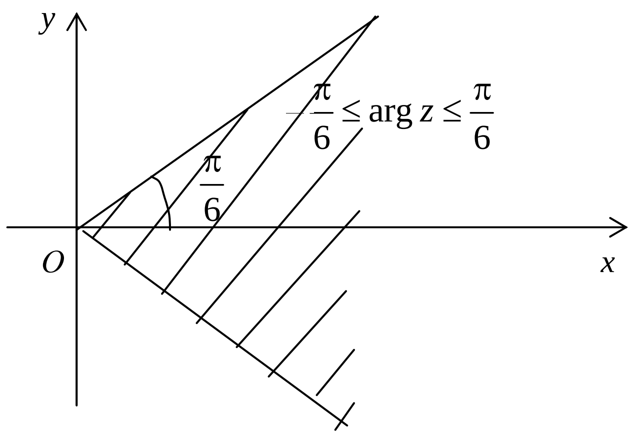


Рис. 15.14

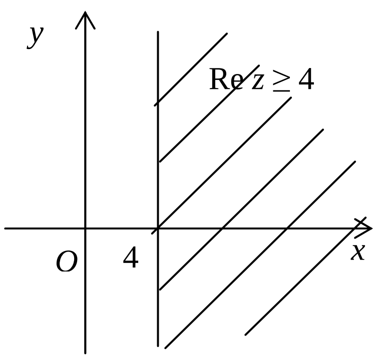


Рис. 15.15

Пример 15.8. Дано $w = z^2$, где $z = x + iy$. Найти Re w и Im w.

Решение.

$$w = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + i^2y^2 = x^2 + 2xiy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\, z^2 = u(x, y) = x^2 - y^2,\ \mathrm{Im}\, z^2 = v(x, y) = 2xy.$$

Пример 15.9. Изобразить на комплексной плоскости области, заданные следующими неравенствами, и установить, являются ли они односвязными: 1) $|z-i|>2$; 2) $2 \le |z-1-i| \le 4$.

Решение. 1) Условию $|z-i|>2$ удовлетворяют точки вне круга радиусом 2 с центром в точке $z_0 = i$, за исключением его границы, уравнение которой $|z-i|=2$ (рис. 15.16). Эта область является односвязной;

2) Условию $|z-1-i| \ge 2$ удовлетворяют точки вне круга с центром в точке $1+i$ радиусом 2, и условию $|z-1-i| \le 4$ — круг радиуса 4 с центром в той же точке $1+i$. Следовательно, данное множество представляет из себя кольцо, ограниченное окружностями радиусов 2 и 4 с центром в точке $1+i$ (рис. 15.17). Это двусвязная область.

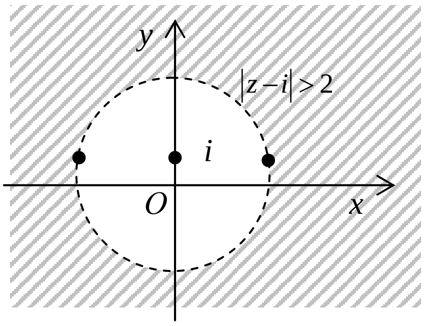


Рис. 15.16

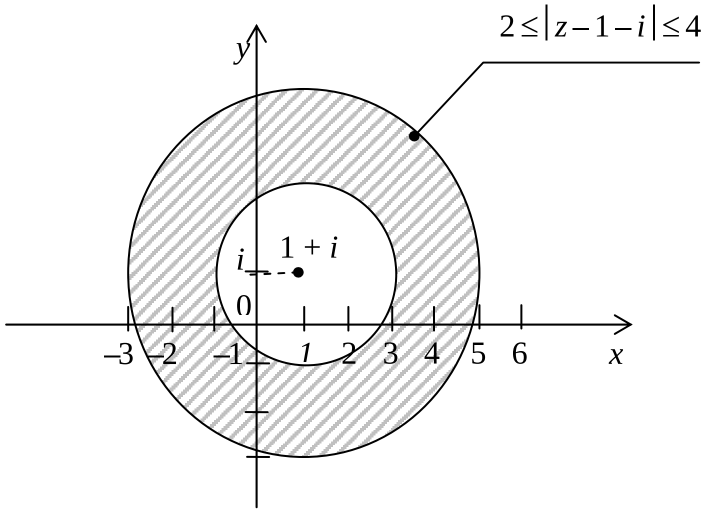


Рис. 15.17

Пример 15.10. Найти производную функции e^{5iz+7} и показать, что она дифференцируема при любом значении z.

Решение. Функции e^z и $5iz + 7$ дифференцируемы при всех значениях z. Поэтому и сложная функция, составленная из них, также дифференцируема:

$$(e^{5iz+7})' = e^{5iz+7}(5iz + 7)' = 5ie^{5iz+7}.$$

Пример 15.11. Найти все особые точки следующей функции, определить их характер:

$$\frac{1}{z^9(z^2+16)^2}.$$

Решение. Так как функция $z^9(z^2+16)^2 = z^9(z+4i)^2(z-4i)^2$ имеет три нуля: $z=0$ — девятого порядка; $z=-4i$ и $z=4i$ — второго порядка, то функция $\dfrac{1}{z^9(z^2+16)^2}$ имеет три полюса: в точке $z=0$ — девятого порядка; в точках $z=-4i$ и $z=4i$ — второго порядка.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Комплексные числа

15.1. Даны комплексные числа $z_1 = 3i$; $z_2 = 2 - 2i$; $z_3 = 4 + 2i$; $z_4 = 4 - 2i$; $z_5 = 1 - 5i$; $z_6 = 4 + 3i$. Требуется:

а) на комплексной плоскости изобразить числа z_1, z_4, z_5, z_6;

б) найти $\sqrt[5]{z_2}$;

в) на комплексной плоскости изобразить множества чисел, удовлетворяющих условиям

$$|z| = |3|, \quad |z - z_1| < |2|, \quad |z - z_1| \ge |1|, \quad |3| \le |z - z_3| < |5|.$$

Ответ: б) $\sqrt[5]{z_2} = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos\dfrac{-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} + \sin\dfrac{-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k}{5} \right), k = 0,1,2,3,4.$

15.2. Записать в алгебраической форме число $\bar{z}$, если $z = \left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$.

Ответ: $z = -\dfrac{13}{4} - \dfrac{9}{4}i.$

15.3. Даны комплексные числа $z_1 = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{5}i}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Найти $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ и $\arg(z_1 \cdot z_2)$

Ответ: 1; $-\dfrac{11\pi}{30}$.

15.4. Найти модуль и аргумент комплексного числа $(1+i)^5 \cdot (\sqrt{3} - i)^3$.

Ответ: $2^5 \cdot \sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}$.

16. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

16.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Определение 16.1. *Дифференциальным уравнением* называется равенство, содержащее независимые переменные, искомую функцию и ее производные, т.е. $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Определение 16.2. Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком уравнения*.

Определение 16.3. *Решением дифференциального уравнения* называется функция, имеющая непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения, и обращающая это уравнение в тождество.

Определение 16.4. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого *уравнения*.

Определение 16.5. График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Основная задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

Итак, обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{16.1}$$

Определение 16.6. *Общим решением* дифференциального уравнения (16.1) называется такое его решение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

которое содержит столько независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, каков порядок этого уравнения.

Если общее решение найдено в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

то оно называется *общим интегралом*.

Определение 16.7. Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, при определенных значениях произвольных постоянных, в него входящих, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Определение 16.8. Задача о нахождении решения уравнения (16.1), удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \tag{16.2}$$

называется *задачей Коши*, условия (16.2) — начальными условиями, а числа $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$ — начальными данными решения уравнения (16.1).

16.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которые известные функции входят под знаком производной. Эти уравнения называют *дифференциальными*.

Характерное свойство дифференциальных уравнений — наличие бесконечного множества решений. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее развитие данного процесса, нельзя одновременно найти зависимость между величинами, характеризующими данный процесс. Чтобы выделить из бесконечного множества зависимостей ту, которая описывает именно этот процесс, надо иметь дополнительную информацию, например знать начальное состояние процесса, так как без этого дополнительного условия задача недоопределена и аналогична такой: «Автомобиль движется по прямолинейному шоссе в направлении к городу A с постоянной скоростью v_0. Через какое время он придет в город A?». Обозначив путь, пройденный автомобилем за время t от начала наблюдения, через $S = S(t)$, получим закон движения автомобиля: $\frac{dS}{dt} = v_0$. Для того чтобы найти ответ на поставленный вопрос, необходимо знать начальное положение автомобиля, т.е. на каком расстоянии от города A находится автомобиль в начальный момент времени.

Составить дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый эволюционный процесс или зависимость между характеристиками исследуемого явления, чаще оказывается не проще, чем решить его. Универсального метода составления дифференциального уравнения не существует, поэтому можно лишь дать некоторые общие указания. Пусть $y = y(x)$ — искомая зависимость между характеристиками x и y изучаемого процесса. При составлении дифференциального уравнения, решением которого является функция $y(x)$, необходимо выразить, насколько изменится эта функция, когда независимая переменная x получит приращение Δx, т.е. выразить разность $y(x + \Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, т.е. зависимость скорости изменения величины y в точке x. Во многих случаях указанная зависимость определяется на основании закона или экспериментального факта, установленного в той или иной области естествознания. При этом, в частности, используется геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной) и ее физический смысл (скорость протекания процесса).

Рассмотрим несколько конкретных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 16.1. Кривая $y = f(x)$ проходит через точку с координатами (1; 2). Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти кривую $y = f(x)$.

Решение. Пусть точка с координатами $(x; y)$ — произвольная точка на искомой кривой. Тогда уравнение касательной, проведенной к этой кривой в точке $(x; y)$, будем искать в виде

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты точек касательной.

Из условия о том, что касательная пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой $2x$, получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая кривая:

$$1 - y = \frac{dy}{dx}(2x - x) \qquad \text{или} \qquad x\frac{dy}{dx} = 1 - y.$$

Разделив переменные

$$\frac{dy}{dx}x = 1 - y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрировав это уравнение, находим $\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{x}$

$$\ln(y-1) = -\ln x + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad \ln(y-1) = \ln\frac{C}{x} \qquad \Rightarrow \qquad (y-1) = \frac{C}{x}.$$

По условию, искомая кривая проходит через точку (1; 2), поэтому, подставив в найденное уравнение $x = 1$, $y = 2$, найдем постоянную C:

$$2 - 1 = \frac{C}{1} \qquad \Rightarrow \qquad C = 1.$$

Окончательно уравнение искомой кривой имеет вид

$$y = 1 + \frac{1}{x}.$$

Задача 16.2. Тело, имеющее в начальный момент времени температуру $T(0) = T_0$, поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равна T_1. Как будет изменяться температура тела с течением времени?

Решение. Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t. Экспериментально установлено, что при определенных упрощениях скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это означает, что

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k\left(T(t) - T_1\right),$$

где k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$.

Знак «минус» в правой части уравнения соответствует экспериментальным данным: если $T - T_1 > 0$, то температура тела убывает и поэтому скорость его изменения отрицательна, если же $T - T_1 < 0$, то температура тела возрастает, следовательно, скорость ее изменения положительна.

Итак, процесс нагревания (или охлаждения) тела в среде с неизменной температурой моделируется полученным уравнением, все решения которого выражаются формулой $T(t) = Ce^{-kx} + T_1$.

Учитывая условие $T(0) = T_0$, находим искомую зависимость температуры тела от времени: $T(t) = (T_0 - T_1)e^{-kx} + T_1$.

Функция $T(t)$ возрастает, если $T_0 - T_1 < 0$ (тело нагревается), и убывает, если $T_0 - T_1 > 0$ (тело охлаждается). В обоих случаях с возрастанием t значение функции $T(t)$ стремится к T_1.

Многие реальные процессы моделируются дифференциальными уравнениями, содержащими вторую производную неизвестной функции. О таких уравнениях говорят, что они являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Рассмотрим задачу, которая приводит к дифференциальному уравнению второго порядка.

Задача 16.3. Материальная точка массы m свободно падает под действием силы тяжести. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти закон движения точки.

Решение. На вертикальной оси, вдоль которой падает точка, выберем точку отсчета O и определим положительное направление точки O вниз. Положение точки определяется координатой $y(t)$, изменяющейся со временем t. Точка падает под действием силы тяжести $F_T = mg$; поэтому, согласно второму закону Ньютона, $F = ma$, где $a = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, имеем $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg$ или $\dfrac{d^2y}{dt^2} = g$. Интегрируя дважды последнее соотношение, находим:

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_1, \quad y(x) = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Полученная формула определяет закон движения материальной точки, однако, как и в предыдущих примерах, она содержит постоянные интегрирования, в данном случае — две. Зная начальное положение падающей точки O — $y(0) = y_0$ и ее начальную скорость $v(0) = v_0$, из совокупности функций $y = \dfrac{gt^2}{2} + C_1t + C_2$ выберем одну, описывающую движение точки.

Так как скорость движения точки $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$, то при указанных начальных условиях $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$; поэтому искомая функция имеет вид

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0.$$

Таким образом, получили известную формулу пути, пройденного точкой при равномерно ускоренном движении.

В различных областях человеческой деятельности возникает большое число задач, решение которых сходно с решением рассматриваемых выше. О таких задачах говорят, что они сводятся к дифференциальным уравнениям. Характер этих задач и методику их решения можно схематически описать примерно так. Происходит некоторый процесс, например физический, химический, биологический. Нас интересует определенная функциональная характеристика этого процесса. Если имеется достаточно полная информация о течении этого процесса, то можно попытаться построить его математическую модель. Во многих случаях такой моделью служит дифференциальное уравнение, одним из решений которого является искомая функциональная характеристика процесса. Дифференциальное уравнение моделирует процесс в том смысле, что оно описывает развитие процесса, характер происходящих с материальной системой изменений, возможные варианты этих изменений в зависимости от первоначального состояния системы.

Первый этап решения задачи заканчивается составлением дифференциального уравнения для искомой функции $y(t)$. С этого этапа задача переведена на язык математики.

Перейдем ко второму этапу. Рассмотрим математическую задачу «в чистом виде»: решить данное дифференциальное уравнение, найти все его решения или только те, для которых выполняются определенные дополнительные условия. Эта задача решается на основе теории дифференциальных уравнений. Опыт показывает, что разные по содержанию задачи приводят к одинаковым или сходным дифференциальным уравнениям. Поэтому необходимо выработать приемы решения таких классов уравнений для тех задач, которые привели или могут привести к ним. Этим и занимается раздел математики, называемый теорией дифференциальных уравнений. Если задача сводится к дифференциальному уравнению, методы решения которого известны, то ее следует считать решенной. В этом случае творческая часть решения заканчивается составлением дифференциального уравнения, второй этап представляет собой чисто техническую процедуру.

Таким образом, дифференциальные уравнения имеют исключительно важную роль при решении самых разнообразных задач.

16.3. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные определения и понятия

Определение 16.9. *Дифференциальным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{16.3}$$

где x — независимая переменная, y — искомая функция, y' — ее производная.

Если уравнение (16.3) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{16.4}$$

и называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Общее решение уравнения (16.3) имеет вид

$$y = \varphi(x, C) \text{ или } \Phi(x, y, C) = 0,$$

а частное решение

$$y = \varphi(x, C_0) \text{ или } \Phi(x, y, C_0) = 0,$$

где C_0 определяется из начальных условий задачи Коши: $y(x_0) = y_0$.

Геометрически общее решение $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy, зависящее от одной произвольной постоянной C, а частное решение $y = \varphi(x, C_0)$ — одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку (x_0, y_0) (рис. 16.1).

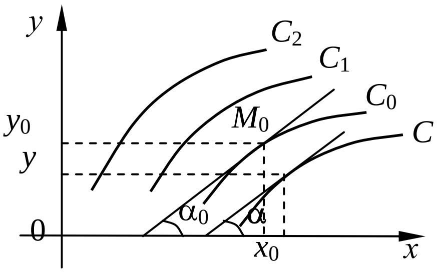


Рис. 16.1

Таким образом *геометрически задача Коши* формулируется так: из семейства интегральных кривых уравнения (16.4) найти одну интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема Коши (*существования и единственности решения задачи Коши*). Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ определены и непрерывны в некоторой области плоскости xOy и, следовательно, ограничены в ней, то, какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) этой области, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение задачи Коши:

$$\left.\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}\right\}$$

Определение 16.10. *Решение,* в каждой точке которого нарушается единственность или существование решения задачи Коши, называется *особым* (геометрически: совокупность точек плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называется *особыми точками* данного уравнения).

Не существует общего метода интегрирования дифференциального уравнения первого порядка. Обычно рассматривают лишь некоторые отдельные типы таких уравнений, для каждого из которых дается свой особый способ решения.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 16.11. Дифференциальное уравнение вида

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0 \tag{16.5}$$

называется *уравнением с разделенными переменными*.

Считая $y = \varphi(x)$ известной, это уравнение можно рассматривать как сумму двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным числом. То есть общий интеграл уравнения (16.5) имеет вид

$$\int X(x)\,dx + \int Y(y)\,dy = C.$$

Определение 16.12. Уравнение вида

$$X_1(x)Y_1(y)\,dx + X_2(x)Y_2(y)\,dy = 0 \tag{16.6}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Уравнение с разделяющимися переменными может быть приведено к уравнению (16.5) путем деления обеих частей уравнения на произведение $Y_1(y)\cdot X_2(x)$:

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = 0.$$

Замечание. Уравнение $y' = f_1(x)\,f_2(y)$ приводится к уравнению (16.5) следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y), \qquad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx, \qquad \int\frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C.$$

Решение $f_2(y) = 0$ может быть особым.

Дифференциальные уравнения, однородные относительно переменных

Определение 16.13. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n-го измерения* относительно переменных x и y, если при любом k справедливо тождество $f(kx, ky) = k^n f(x, y)$.

Определение 16.14. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией нулевого измерения*, если при умножении аргументов x и y на произвольный параметр k значение функции не изменится: $f(kx, ky)= f(x, y)$.

Определение 16.15. *Уравнением, однородным относительно переменных,* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{16.7}$$

При решении однородного уравнения вводится замена $u = \dfrac{y}{x}$, т.е. $y = ux$, тогда $y' = u'x + u$. Подставляя это выражение для y' в однородное уравнение, получим: $u'x + u = f(u)$ или $u'x = f(u) - u$ — это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x = f(u) - u; \quad \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, найдем:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение $\frac{y}{x}$, получим интеграл однородного уравнения.

Замечание. Уравнение

$$M(x, y)\,dy + N(x,y)\,dx = 0 \tag{16.8}$$

будет однородным в случае, если $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные функции одного и того же измерения.

Линейные дифференциальные уравнения

Определение 16.16. Уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = f(x), \tag{16.9}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (16.9) называется *линейным однородным* уравнением. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (16.9) называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением.

Для нахождения общего решения уравнения (16.9) можно пользоваться следующим способом. Будем искать решение $y(x)$ уравнения (16.9) в виде

$$y(x) = u(x) \cdot v(x), \tag{16.10}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные функции, одна из которых, например $v(x)$, может быть выбрана произвольно. Подставляя $y(x)$ в форме (16.10) в уравнение (16.9), учитывая, что $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, получим

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = g(x).$$

После элементарных преобразований получим

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = g(x).$$

Выберем в качестве $v(x)$ любое частное решение $v(x) \neq 0$ уравнения

$$v' + p(x) \cdot v = 0,$$

Тогда $u' \cdot v = g(x)$.

Итак, решение уравнения (16.9) сводится к решению системы дифференциальных уравнений (сначала решается первое уравнение, затем второе)

$$\begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0, \\ u' \cdot v = g(x). \end{cases}$$

Зная $u(x)$ и $v(x)$, найдем решение $y(x)$ по формуле (16.10) из уравнения (16.9).

Уравнение Бернулли

Определение 16.17. Уравнение вида

$$y' + p(x)\, y = f(x)\, y^{n},$$

где $p(x)$, $f(x)$ — непрерывные функции от x, а $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*.

Это уравнение приводится к линейному следующим образом

$$y^{-n} y' + p(x)\, y^{-n+1} = f(x).$$

Вводится замена $z = y^{-n+1}$. Тогда $z' = (-n+1)\, y^{-n} y'$, $\dfrac{z'}{-n+1} + p(x) z = f(x)$. Таким образом, получили линейное уравнение относительно функции z:

$$z' + (-n+1)\, p(x)\, z = (-n+1)\, f(x).$$

Получив его общий интеграл и подставив вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Замечание. Решение уравнения Бернулли можно искать и в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, как это описано при решении уравнения (16.9).

16.4. Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение 16.18. Уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называется *дифференциальным уравнением второго порядка* или, если это возможно в виде, разрешенном относительно старшей производной,

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{16.11}$$

Задача Коши для уравнения второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{16.12}$$

Теорема Коши (*существования и единственности задачи Коши*). Если функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $f'_y(x, y, y')$ и $f'_{y'}(x, y, y')$ определены и непрерывны и, следовательно, ограничены в некоторой области пространства переменных (x, y, y'), тогда в любой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) этой области существует единственное решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее условиям $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$.

Геометрически это означает, что через заданную точку (x_0, y_0) плоскости проходит единственная интегральная кривая с заданным угловым коэффициентом y'_0 касательной в точке (x_0, y_0).

Определение 16.19. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, зависящая от x и двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и при подстановке в уравнение $y'' = f(x, y, y')$ обращающая его в тождество, называется *общим решением* этого уравнения.

Геометрически общее решение уравнения второго порядка представляет собой бесконечную совокупность интегральных кривых, зависящую от двух независимых параметров C_1 и C_2.

Определение 16.20. Любая функция, получающаяся из общего решения уравнения (16.11) при определенных значениях постоянных C_1 и C_2, т.е. $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, называется его *частным решением*.

Геометрическое истолкование задачи Коши. $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$

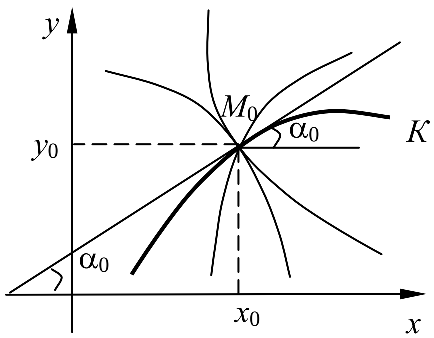


Рис. 16.2

Для того чтобы из совокупности интегральных кривых выбрать одну, недостаточно указать точку $M_0(x_0, y_0)$, так как через нее проходит пучок интегральных кривых (рис. 16.2).

Поэтому, чтобы из семейства интегральных кривых выделить одну кривую K, следует, помимо точки $M_0(x_0, y_0)$, указать направление, в котором кривая K проходит через точку M_0, т.е. задать $\operatorname{tg} \alpha_0$ угла, образованного касательной к кривой K в точке M_0 и положительным направлением оси Ox, т.е. $\operatorname{tg} \alpha_0 = y_0'$. Таким образом постоянные C_1 и C_2 общего решения уравнения (16.11), удовлетворяющего начальным условиям задачи Коши $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ определяются из системы

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y_0' &= \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{aligned}\right\}$$

16.5. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

I. Уравнение вида $y'' = f(x)$ не содержит явно y и y'.

Вводим замену $y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$ и подставим в уравнение $p' = f(x)$ — уравнение первого порядка. Его решение

$$p(x) = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y' = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \int\Big[\int f(x)dx + C_1\Big]dx = \int\Big[\int f(x)dx\Big]dx + C_1 x + C_2.$$

В более общем случае $y^{(n)} = f(x)$ решение получается путем n-кратного интегрирования функции $f(x)$, т.е.

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x)\, dx.$$

II. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ не содержит явно y.

Полагая $y' = p(x)$, получим $y'' = p'(x)$ и, подставив в уравнение, получим уравнение первого порядка

$$p' = f(x, p)$$

с неизвестной функцией p. Решая его, найдем функцию $p(x) = \varphi(x, C_1)$.

Так как $p(x) = y'$, то $y' = \varphi(x, C_1)$, отсюда, интегрируя еще раз, получим решение исходного уравнения

$$y = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2.$$

III. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ не содержит явно x. Вводится новая функция $y' = p(y(x))$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p = p' \cdot p.$$

Подставляя в уравнение, получим уравнение первого порядка относительно функции p (как функции от y):

$$p \cdot p' = f(y, p).$$

Решая его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$, так как $p = y'$, то $y' = \varphi(y, C)$, отсюда

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx.$$

В итоге общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

16.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Основные определения и понятия

Определение 16.21. *Линейным дифференциальным уравнением второго порядка* называется уравнение первой степени (линейное) относительно неизвестной функции и ее производных

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x), \tag{16.13}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — непрерывные в некотором интервале $[a; b]$ функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным,

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{16.14}$$

если $f(x) \neq 0$ — неоднородным.

Теорема 16.1 (*основное свойство частного решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка*). Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения уравнения (16.14), то функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

также является решением уравнения (16.14). Это свойство проверяется непосредственной подстановкой y в уравнение (16.14).

Определение 16.22. Два решения y_1 и y_2 называются *линейно независимыми* на отрезке $[a;\ b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е. если $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. В противном случае решения называются *линейно зависимыми*.

Определение 16.23. Если y_1 и y_2 — функции переменной x, то определитель

$$W(y_1; y_2) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

называется *определителем Вронского* или *вронскианом* данных функций.

Теорема 16.2 (*об определителе Вронского линейно зависимых функций*). Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a;\ b]$, то определитель Вронского, составленный из них, равен нулю на этом отрезке.

Доказательство. Пусть y_1 и y_2 — линейно зависимы, тогда

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda, \quad y_1 = \lambda y_2.$$

Подставляя в определитель Вронского:

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda y_2 & y_2 \\ \lambda y_2' & y_2' \end{vmatrix} = \lambda y_2 y_2' - \lambda y_2' y_2 = 0.$$

Теорема 16.3 (*об определителе Вронского линейно независимых функций*). Если решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на отрезке $[a;\ b]$ решения уравнения (16.14), то определитель Вронского, составленный из них, отличен от нуля на этом отрезке.

Теорема 16.4 [*о структуре общего решения уравнения* (16.14)]. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (16.14), то функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные) является общим решением уравнения (16.14).

Теорема 16.5 (*о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения второго порядка*). Общее решение уравнения (16.13) представляет собой сумму любого его частного решения $\overline{y}(x)$ и общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения, т.е.

$$y = y_0 + \overline{y}.$$

Доказательство. Пусть $\overline{y}(x)$ — частное решение уравнения (16.13), а

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \text{ —}$$

общее решение уравнения (16.14).

Докажем, что $y = y_0 + \bar{y}$ — общее решение уравнения (16.13). Для этого покажем, что $y = y_0 + \bar{y}$ является решением уравнения (16.13). Найдем

$$y' = y_0' + \bar{y}',\ y'' = y_0'' + \bar{y}''$$

и подставим в (16.13):

$$y_0'' + \bar{y}'' + p(x)\left[y_0' + \bar{y}'\right] + q(x)\left[y_0 + \bar{y}\right] = f(x).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые

$$\underbrace{\left(y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0\right)}_{0} + \underbrace{\left(\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)\bar{y}\right)}_{f(x)} = f(x);$$

$$f(x) = f(x),$$

следовательно, $y = y_0 + \bar{y}$ — решение уравнения (16.13).

Покажем теперь, что оно является общим решением этого уравнения, т.е. докажем, что из решения $y = y_0 + \bar{y}$ можно выделить единственное частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Продифференцируем функцию $y = y_0 + C_1y_1 + C_2y_2$ и подставим в нее и ее производную начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Получим систему уравнений с неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y_0' - \bar{y}'(x_0). \end{cases}$$

Так как определителем системы является определитель Вронского линейно независимых функций y_1 и y_2 в точке x_0, не равный нулю, то она имеет единственное решение: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$.

Таким образом мы получили частное решение уравнения (16.13): $y - \bar{y} = C_1^0y_1 + C_2^0y_2 \Rightarrow y = \bar{y} + C_1^0y_1 + C_2^0y_2$, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Теорема доказана.

Итак, чтобы найти общее решение уравнения (16.13), надо найти общее решение соответствующего однородного уравнения и какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения.

В общем случае задача отыскания частного решения является сложной. Рассмотрим общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения (16.13), когда $f(x)$ — любая функция, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных

Пусть известно общее решение соответствующего однородного уравнения (16.14):

$$y_0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Найдем частное решение уравнения (16.13) данным методом. Будем искать частное решение неоднородного уравнения (16.13) в виде

$$\overline{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{16.15}$$

рассматривая C_1 и C_2 как некоторые искомые функции от x.

Продифференцируем последнее равенство:

$$\overline{y}' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Для простоты подберем функции C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_1'(x) = 0.$$

Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\overline{y}' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Дифференцируя это равенство, найдем y'':

$$\overline{y}'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (16.13) и группируя слагаемые, получим

$$C_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right]}_{0} + C_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right]}_{0} +$$

$$+C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Таким образом, функция (16.15) является решением уравнения (16.13), если $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют уравнениям системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases} \tag{16.16}$$

в которой $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ — неизвестны, а y_1, y_2, y_1', y_2', $f(x)$ — известны. Так как определителем этой системы является определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

составленный из линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения (16.14), то он не равен нулю, а значит, система (16.16) имеет единственное решение относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Решая эту систему, получим

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(x)}; \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(x)}.$$

Интегрируя, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(x)}; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(x)}.$$

Подставляя их в (16.15), получим искомое частное решение уравнения (16.14).

16.7. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 16.24. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{16.17}$$

где p, q — вещественные числа, называется *линейным однородным уравнением* второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 16.25. Пусть дано линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (16.17).

Уравнение вида

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{16.18}$$

называется *характеристическим уравнением* уравнения (16.17).

Теорема 16.6 [*о частных решениях уравнения* (16.17)]. Если число k — действительный корень уравнения (16.18), то $y = e^{kx}$ является частным решением уравнения (16.17). Если $k_{1,\,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексно сопряженные корни уравнения (16.16), то функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются частным решением уравнения (16.15).

Теорема 16.7 [*об общем решении уравнения* (16.17)]. Если корни характеристического уравнения (16.18) вещественные и различные ($k_1 \neq k_2$), то общее решение уравнения (16.17) имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Если корни уравнения (16.18) вещественные и равные ($k_1 = k_2$), то общее решение уравнения (16.17) имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

Если корни характеристического уравнения (16.18) комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение (16.17) имеет вид $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

16.8. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение 16.26. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{16.19}$$

где p, q — вещественные числа, называется *линейным неоднородным уравнением* второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение 16.27. Функцию $f(x)$ будем считать *специальной*, если она представляет собой многочлен, или показательную функцию, или тригонометрическую функцию $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, или линейную комбинацию перечисленных функций.

Для уравнения (16.19) существует более простой метод нахождения частного решения $\overline{y}$, вид которого зависит от вида правой части $f(x)$ этого уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения может быть найдено по методу *неопределенных коэффициентов*:

1) по виду правой части уравнения (16.19) и таблице, приведенной ниже, записывается форма частного решения с неопределенными коэффициентами;

2) затем таким образом сформированное частное решение подставляется в дифференциальное уравнение (16.19);

3) из полученного тождества определяются значения коэффициентов.

Запишем виды частных решений уравнения (16.19) для различных правых частей в виде таблицы.

Виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Правая часть $f(x)$	Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Вид частного решения $\overline{y}$
$P_n(x)$	$k_{1,2} \neq 0$	$Q_n(x)$
	$k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$	$xQ_n(x)$
	$k_{1,2} = 0$	$x^2Q_n(x)$, $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.
$ae^{\alpha x}$	$k_{1,2} \neq \alpha$	$Ae^{\alpha x}$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$Axe^{\alpha x}$
	$k_{1,2} = \alpha$	$Ax^2e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}P_n(x)$	$k_{1,2} \neq \alpha$	$e^{\alpha x}Q_n(x)$
	$k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$xe^{\alpha x}Q_n(x)$
	$k_{1,2} = \alpha$	$x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами
$a\cos\beta x$, $a\sin\beta x$, $a\cos\beta x + b\sin\beta x$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$(A\cos\beta x + B\sin\beta x)x$, A, B — неопределенные коэффициенты
$P_n(x)\cos\beta x$, $P_n(x)\sin\beta x$, $P_n(x)(\cos\beta x + \sin\beta x)$	$k_{1,2} \neq \pm\beta i$	$R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x$
	$k_{1,2} = \pm\beta i$	$x(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x)$, $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами

Виды частных решений для различных правых частей линейных неоднородных дифференциальных уравнений $y'' + py' + qy = f(x)$. Окончание табл.

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, A, B — неопределенные коэффициенты.
$e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$, $e^{\alpha x}P_n(x)\sin\beta x$, $e^{\alpha x}P_n(x)(\cos\beta x + \sin\beta x)$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x)$
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$xe^{\alpha x}(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x)$, $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами
$e^{\alpha x}(P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_m(x)\cdot\sin\beta x)$	$k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(R_d(x)\cos\beta x + S_d(x)\sin\beta x)$,
	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$xe^{\alpha x}(R_d(x)\cos\beta x + S_d(x)\sin\beta x)$, $R_d(x)$, $S_d(x)$ — многочлены степени $d = \max(n, m)$ с неопределенными коэффициентами

16.9. Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов

Если решение дифференциального уравнения нельзя выразить через элементарные функции в конечном виде или способ его решения слишком сложен, то для приближенного решения уравнения можно воспользоваться степенным рядом. Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Способ последовательного дифференцирования. Пусть требуется решить уравнение

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (16.20)$$

решение которого удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \qquad (16.21)$$

Решение данного уравнения найдем в виде ряда Тейлора:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{y^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (16.22)$$

в котором первые два коэффициента сразу определяются из начальных условий (16.21). Подставив в уравнение (16.20) значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$, находим третий коэффициент $y''(x_0) = f(x_0; y_0; y_0'')$. Путем последовательного дифференцирования уравнения (16.20) и вычисления производных при $x = x_0$ найдем значения $y'''(x_0), y^{(4)}(x_0)$. Найденные значения производных (коэффициентов) подставляем в разложение (16.22), которое представляет искомое частное решение уравнения (16.20) для тех значений x, при которых он сходится. Частичная сумма ряда, стоящего в правой части (16.22), и будет приближенным решением исходного дифференциального уравнения.

Метод неопределенных коэффициентов. Этот способ приближенного решения удобен для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Пусть требуется решить уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)\,y = f\,(x), \tag{16.23}$$

с начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$. Искомое решение ищем в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{16.24}$$

предполагая, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f\,(x)$ разлагаются в сходящиеся к ним степенные ряды. Коэффициенты a_0 и a_1 находим из начальных условий: $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$. Последующие коэффициенты разложения (16.24) находим, дифференцируя равенство (16.24) два раза (каков порядок уравнения), и подставляем выражения для функции y и ее производных в исходное уравнение (16.23), заменив в нем $p(x)$, $q(x)$, $f\,(x)$ их разложениями. В результате получается тождество, из которого определяются недостающие коэффициенты методом неопределенных коэффициентов. Полученный ряд имеет тот же интервал сходимости и служит решением уравнения (16.23).

16.10. Сводная таблица по теме «Дифференциальные уравнения»

Вид уравнения	Способ решения
Дифференциальные уравнения первого порядка	
Уравнения с разделяющимися переменными: 1. $X_1(x)Y_1(y)\,dy + X_2(x)Y_2(y)\,dy = 0$	1.1. $X_1(x)Y_1(y)\,dy = X_2(x)Y_2(y)\,dy$. 1.2. $\dfrac{X_1(x)}{X_2(x)}dx = \dfrac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy$
2. $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$	2.1. $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$. 2.2. $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$. 2.3. $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C$
Однородное уравнение $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$	1. Вводится замена $u = \dfrac{y}{x}$, т.е. $y = ux$. 2. Получаем $y' = u'x + u$. 3. Подставляем в однородное уравнение: $u'x = f\,(u) - u$. 4. $\dfrac{du}{f\,(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$. 5. Интегрируя, найдем: $\int \dfrac{du}{f\,(u) - u} = \int \dfrac{dx}{x} + C$

Линейное уравнение $y' + p(x)y = f(x)$	1. Введем замену: $y(x) = u(x)\,v(x)$, тогда $y' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$. 2. Получаем $u'v + u(v' + p(x)\,v) = g(x)$. 3. $\begin{cases} v' + p(x)\cdot v = 0, \\ u'\cdot v = g(x) \end{cases}$
Дифференциальные уравнения второго порядка	
Допускающие понижение порядка: 1. $y'' = f(x)$ не содержит явно y и y'	1.1. Вводим замену $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. 1.2. $y' = \int f(x)\,dx + C_1$. 1.3. $y = \int\left[\int f(x)\,dx\right]dx + C_1x + C_2$
2. $y'' = f(x, y')$ не содержит явно y	2.1. Полагая $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, т.е. $p' = f(x, p)$ 2.2. $p(x) = \varphi(x, C_1)$. 2.3. Интегрируем и получим $y = \int \varphi(x, C_1)\,dx + C_2$
3. $y'' = f(y, y')$ не содержит явно x	3.1. Полагая $y' = p(y(x))$. Тогда $y'' = p'\cdot p$. 3.2. Подставляя в уравнение, получим $p\cdot p' = f(y, p)$. 3.3. Решая его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$, отсюда $\dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$. 3.4. $\int \dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$
Линейное однородное уравнение $y'' + py' + qy = 0$	Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$. Если $k_1 \neq k_2$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$. Если $k_1 = k_2$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
Линейное неоднородное уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, $f(x)$ имеет специальный вид	1. Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + py' + qy = 0$. 2. По виду правой части уравнения записывается форма частного решения с неопределенными коэффициентами. 3. Таким образом сформированное частное решение подставляется в дифференциальное уравнение. 4. Из полученного тождества определяются значения коэффициентов. 5. $y = y_0 + \overline{y}$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 16.1. Найти общий интеграл уравнения

$$\cos^2 y \operatorname{ctg} x\, dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y\, dy = 0.$$

Решение. Разделим переменные в данном уравнении, поделив обе части на выражение $\cos^2 y \sin^2 x$:

$$-\frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg} y\, dy}{\cos^2 y}.$$

Интегрируя обе части данного равенства, получим

$$-\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg} y\, dy}{\cos^2 y},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C = \frac{\operatorname{tg}^2 y}{2}.$$

Воспользуемся тем, что C — произвольная постоянная и заменим С на $\frac{C}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{ctg}^2 x = C$. Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Пример 16.2. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(x^2 + y^2\right) dx - xy\, dy = 0.$$

Решение. Разрешим уравнение относительно производной $\frac{dy}{dx}$: $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$.

Поделив числитель и знаменатель правой части уравнения на x^2, получим:

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}},$$

т.е. y' есть функция отношения $\frac{y}{x}$. Это означает, что данное уравнение — однородное.

Для решения этого уравнения введем новую функцию $u = \frac{y}{x}$. Тогда $y = ux$ и $y' = \frac{du}{dx}x + u$. Тогда уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{1+u^2}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = u\, du.$$

Интегрируя это уравнение, получим $ln|x|+ln|C|=\frac{u^2}{2}$, откуда $\ln|x\cdot C|=\frac{u^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad xC=\sqrt{e^{u^2}}$.

Заменяя в последнем равенстве *u* отношением $\frac{y}{x}$, окончательно получим

$$xC=\sqrt{e^{\left(\frac{y}{x}\right)^2}}.$$

Пример 16.3. Найти общее решение линейного уравнения $y'-y\operatorname{tg}x=\sin x$.

Решение. Положим $y = u \cdot v$, тогда $y' = u'v + uv'$ и данное уравнение примет вид

$$u'v+uv'-uv\operatorname{tg}x=\sin x \quad \Rightarrow \quad u'v+u\left(v'-v\operatorname{tg}x\right)=\sin x.$$

Решая уравнение $v'-v\operatorname{tg}x=0$, получим простейшее частное решение:

$$\frac{dv}{dx}=v\operatorname{tg}x; \quad \frac{dv}{v}=\operatorname{tg}x\,dx; \quad \ln|v|=-\ln|\cos x|; \quad v=\frac{1}{\cos x}.$$

Подставляя *v* в уравнение $u'v=\sin x$, получим $u'\frac{1}{\cos x}=\sin x$, из которого находим *u*:

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{\cos x}=\sin x; \quad du=\sin x\cos x\,dx;$$

$$u=\frac{\sin^2 x}{2}+C.$$

Итак, искомое общее решение примет вид

$$y=uv=\left(\frac{\sin^2 x}{2}+C\right)\frac{1}{\cos x}.$$

Пример 16.4. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=14e^{-3x}$.

Решение. Общее решение уравнения ищем в виде $y=y_0+\overline{y}$:

1) Найдем решение однородного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение

$$k^2+6k+9=0 \quad \Rightarrow k_1=k_2=-3.$$

Следовательно, по теореме 16.7

$$y_0=\left(C_1+C_2x\right)e^{-3x}.$$

2) Найдем теперь $\overline{y}$. Здесь правая часть имеет вид $f(x) = e^{kx} P_n(x)$, где $k = -3$, $P_n(x) = A$. Так как $k = -3$ является двукратным корнем характеристического уравнения, т.е. $r = 2$, то частное решение $\overline{y}$ следует искать в форме

$$\overline{y} = Ax^2 e^{-3x},$$

где A — коэффициент, подлежащий определению. Вычислим производные $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$:

$$\overline{y}' = -3Ax^2 e^{-3x} + 2Axe^{-3x} = \left(-3Ax^2 + 2Ax\right) e^{-3x};$$

$$\overline{y}'' = \left(9Ax^2 - 12Ax + 2A\right) e^{-3x}.$$

Подставляя выражения для $\overline{y}$, $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$ в данное выражение, сокращая обе части на e^{-3x} и приводя подобные члены, в итоге получим $2A = 14$, откуда $A = 7$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $\overline{y} = 7x^2 e^{-3x}$.

Итак, общее решение данного уравнения —

$$y = y_0 + \overline{y} = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{-3x} + 7x^2 e^{-3x}.$$

Пример 16.5. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = y + x^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = -2$.

Решение. Представим решение данного уравнения в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (*)$$

Подставив начальное условие $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ в (*), получим $a_0 = -2$. Продифференцируем разложение (*):

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \ldots \qquad (**)$$

Подставим в данное дифференциальное уравнение вместо y' его значение (**), а вместо y — его выражение (*), взяв первые три члена (в соответствии с условием задачи). Получим $a_1 + 2a_2 x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа последнего равенства, получим $a_1 = a_0$, $2a_2 = a_1$. Так как $a_0 = -2$, то $a_1 = -2$, $a_2 = -1$, и решение (*) примет вид $y = -2 - 2x - x^2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

16.1. Найти общие интегралы уравнений:

а) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;

б) $x^2 y' + y = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;

г) $xy' + y = \ln x + 1$.

16.2. Найти частные интегралы по данным начальным условиям:

а) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$, $y(\pi/4) = 0{,}5$;

б) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $y(1) = 0$;

в) $x^2 y' = 2xy - 3$, $y(-1) = 1$.

16.3. Решить уравнения:

а) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;

б) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$;

в) $yy'' + y'^2 = 0$.

16.4. Решить уравнения:

а) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;

б) $y'' - 2y = xe^{-x}$;

в) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

17. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Векторное поле, его характеристики

Ранее мы изучали скалярное поле. Как указано в п. 8.5., *градиентом* скалярного поля $u = u\,(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Определение векторного поля во многом напоминает определение скалярного поля.

Определение 17.1. Если в каждой точке M области $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ задан определенный вектор, то принято говорить, что в этой области задано *векторное поле*.

Например, поле скоростей текущей жидкости; поле тяготения; электрическое и электромагнитное поля.

Векторное поле задано, если в каждой точке M поля указан соответствующий этой точке вектор $\vec{A}(M)$. Проекции его на оси координат $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Итак,

$$A(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k},$$

где P, Q, R — компоненты вектора $\vec{A}$, которые непрерывны со своими частными производными в области Ω.

Для характеристики векторных полей вводится ряд понятий: *векторная линия, векторная трубка, циркуляция векторного поля, дивергенция векторного поля, ротор (вихрь) векторного поля*.

Пусть в некоторой области Ω задано векторное поле $\vec{A}(M)$ переменной точки M из Ω.

Определение 17.2. Линия L в области Ω называется *векторной линией* (линией тока), если вектор касательной в каждой ее точке M направлен по вектору $\vec{A}(M)$ (рис. 17.1).

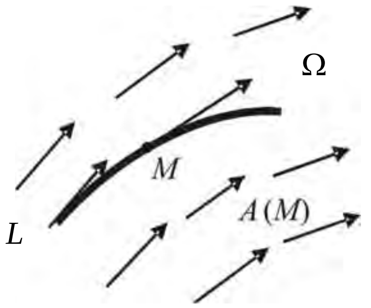


Рис. 17.1

Если поле $\vec{A}(M)$ — поле скоростей частиц стационарного потока жидкости, то векторные линии этого поля — траектории частиц жидкости.

Определение 17.3. Часть пространства в Ω, состоящая из векторных линий, называется *векторной трубкой* (рис. 17.2).

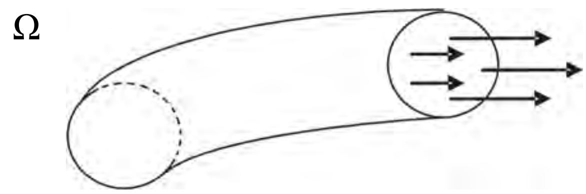


Рис. 17.2

Определение 17.4. *Дивергенцией* (*расходимостью*) векторного поля $\vec{A}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+\mathrm{R}\vec{k}$ называется скалярная величина

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

где значения частных производных берутся в точке *M*.

Если вектор $\vec{A}$ — скорость частицы в установившемся течении несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\vec{A}$ в точке с координатами (*x*, *y*, *z*) обозначает интенсивность источника ($\operatorname{div}\vec{A}>0$) или стока ($\operatorname{div}\vec{A}<0$), находящегося в этой точке, или отсутствие источника или стока ($\operatorname{div}\vec{A}=0$).

Определение 17.5. *Дивергенция* есть предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку, к объему, ограничиваемому ею, когда эта поверхность стягивается к точке.

Определение 17.6. *Ротором* векторного поля

$$\vec{A}(M)=Pi+Q\vec{j}+R\vec{k}$$

называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Эту формулу можно (для удобства запоминания) записать в виде символического определителя

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Ротор (или вихрь) векторного поля $\vec{A}(M)$ представляет собой векторную характеристику «вращательной характеристики» этого поля.

Некоторые простейшие поля

1. *Соленоидальным (трубчатым)* полем называется векторное поле, в каждой точке которого *дивергенция* равна нулю.

2. *Потенциальным (безвихревым)* полем называется векторное поле, в каждой точке которого *ротор* равен нулю.

3. *Гармоническим* называется векторное поле, в каждой точке которого *дивергенция* и *ротор* равны нулю. То есть векторное поле будет гармоническим, если поле одновременно является соленоидальным и потенциальным.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 17.1. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{A}(M) = x^2\,\vec{j} - xy\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}.$$

Решение. Так как $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = -xy$, $R(x, y, z) = xyz$, то

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x; \frac{\partial Q}{\partial y} = -x; \frac{\partial R}{\partial z} = xy;$$

И по формуле в определении 17. 4.

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = 2x - x + xy = x + xy = x(1+y).$$

Пример 17.2. Найти ротор векторного поля

$$\vec{A}(M) = y^2z^2\,\vec{i} + x^2z^2\,\vec{j} + x^2y^2\,\vec{k} \text{ в точке } M_0(1;\,2;\,5).$$

Решение. Так как $P = y^2z^2$; $Q = x^2z^2$; $R = x^2y^2$, то

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2yz^2,\ \frac{\partial P}{\partial z}=2y^2z;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2xz^2,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2z;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=2xy^2,\ \frac{\partial R}{\partial y}=2x^2y,\ \frac{\partial R}{\partial z}=0.\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2y-2x^2z=2x^2\left(y-z\right);$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=2y^2z-2xy^2=2y^2\left(z-x\right);\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2xz^2-2yz^2=2z^2\left(x-y\right).$$

В произвольной точке $M\,(x, y, z)$

$$\operatorname{rot}\ \vec{A}(M) = 2x^2\left(y-z\right)\vec{i} + 2y^2\left(z-x\right)\vec{j} + 2z^2\left(x-y\right)\vec{k}.$$

В точке $M_0(1;\,2;\,5)$ $\operatorname{rot}\ \vec{A}(M_0) = -6\,\vec{i} + 32\,\vec{j} - 50\,\vec{k}$.

Пример 17.3. Определить вид векторного поля $\vec{A}(M) = yz\,\vec{i} + xy\,\vec{j} - xz\,\vec{k}$.

Решение. 1. Найдем дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{A}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz) = 0 + x - x = 0,$$

т.е. поле является соленоидальным (трубчатым).

2. Найдем ротор векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{A}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xy & -xz \end{vmatrix} = 0\vec{i} - (-z - y)\vec{j} + (y - z)\vec{k} =$$

$$= (z + y)\vec{j} + (y - z)\vec{k} \neq 0,$$

т.е. поле не является потенциальным и гармоническим, но является соленоидальным.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

17.1. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{A}(M) = (x + y + z)\,\vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2)\,\vec{j} + (x^3 + y^3 + z^3)\,\vec{k}.$$

Ответ: $\operatorname{div}\vec{A}(M) = 1 + 2y + 3z^2$.

17.2. Найти ротор векторного поля

$$\vec{A}(M) = xyz\,\vec{i} + (2x + 3y - z)\,\vec{j} + (x^2 + z^2)\,\vec{k}.$$

Ответ: $\operatorname{rot}\vec{A}(M) = i + (xy - 2x)\,\vec{j} + (2 - xz)\,\vec{k}$.

18. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

18.1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными

Определение 18.1. *Дифференциальные уравнения с частными производными* — это уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные.

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация уравнений важна потому, что для каждого класса существует своя общая теория и методы решения уравнений.

Рассмотрим несколько основных методов классификации таких уравнений.

1. *Порядок уравнения. Порядком уравнения* называется наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение.

Например, $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — уравнение второго порядка; $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}$ — уравнение первого порядка; $\frac{\partial u}{\partial t}=u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\sin x$ — уравнение третьего порядка.

2. *Число переменных. Числом переменных* называется число *независимых переменных*.

Например, $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнение с двумя переменными x и t);

$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ (уравнение с тремя переменными τ, θ, t).

3. *Линейность*. Уравнения с частными производными бывают *линейными* и *нелинейными*.

В линейные уравнения зависимая переменная и все ее частные производные входят линейным образом, в частности, они не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т.д.

Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{-t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin t$ — линейное уравнение; $u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$ — нелинейное уравнение; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ — линейное уравнение; $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u^2=0$ — нелинейное уравнение.

Линейным уравнением второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F(x;y), \qquad (18.1)$$

где *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G*, *F* — постоянные или заданные функции независимых переменных *x* и *y*.

4. *Однородность.* Уравнение (18.1) называется *однородным*, если правая часть $F(x,y)$ тождественно равна нулю для всех *x* и *y*. Если $F(x,y)$ не равна тождественно нулю, то уравнение называется *неоднородным*.

5. *Виды коэффициентов.* Если коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *G* уравнения (18.1) постоянны, то уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами* (в противном случае — *уравнением с переменными коэффициентами*).

18.2. Методы решения уравнений с частными производными

Перечислим основные методы.

1. *Метод разделения переменных.* Он состоит в том, что уравнение с частными производными с *n* независимыми переменными приводится к *n* обыкновенным дифференциальным уравнениям (в случае полного разделения переменных). Возможно также частичное разделение переменных. Тогда одно уравнение с частными производными сводится к нескольким уравнениям с частными производными с меньшим числом независимых переменных.

2. *Метод преобразования координат.* Он состоит в том, что заданное уравнение с частными производными приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (или к другому, более простому уравнению с частными производными) путем соответствующего преобразования координат, к примеру поворота координатных осей и т.п.

3. *Метод интегральных преобразований.* Этот метод заключается в том, что уравнение с частными производными с *n* независимыми переменными приводится к уравнению с частными производными с $(n-1)$ независимыми переменными; т.е. уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению (одномерное интегральное преобразование). При *m*-мерном интегральном преобразовании уравнение с частными производными с *n* независимыми переменными приводится к уравнению с частными производными с $n-m$ независимыми переменными.

4. *Преобразование зависимой переменной.* Заданное уравнение с частными производными преобразуется к такому уравнению с частными производными для другой неизвестной функции, которое решается проще, чем заданное.

5. *Численные методы.* Заданное уравнение с частными производными приводится к системе разностных уравнений, которую решают на ЭВМ методом итераций [30; 32].

Достаточно часто это единственный способ решить уравнение с частными производными.

Кроме разностных методов решения уравнений с частными производными имеются и другие численные методы, например основанные на аппроксимации решения полиномиальными поверхностями (аппроксимация сплайнами [30; 32]).

6. *Метод теории возмущений*. Исходная нелинейная задача приводится к последовательности линейных задач, аппроксимирующих нелинейную задачу.

Фактически это метод линеаризации нелинейных задач [30; 32]. Общая теория возмущений содержит линейную и нелинейную теорию возмущений, каждая из которых бывает регулярной и сингулярной.

7. *Вариационные методы*. Вместо дифференциального уравнения с частными производными решается *задача минимизации*. Оказывается, что функция, доставляющая минимум некоторому выражению (типа полной энергии системы) является в то же время решением исходного уравнения с частными производными.

Такие методы могут быть применены к специальным задачам, что обусловлено существованием соответствующих выражений — функционалов для этих задач [30; 31].

8. *Метод функций Грина*. В этом методе граничные и начальные условия заменяют системой простейших источников. Задача решается для каждого простейшего источника.

Полное решение исходной задачи получается в результате суммирования решений для отдельных элементарных источников.

9. *Метод разложения по собственным функциям*. Он состоит в том, что решение уравнения с частными производными ищут в виде ряда по собственным функциям.

Сами собственные функции находят как решения задачи на собственные значения, которая соответствует исходной задаче для уравнения с частными производными.

10. *Метод интегральных уравнений*. Уравнение с частными производными сводится к уравнению, в котором неизвестная функция стоит под знаком интеграла (интегральному уравнению).

18.3. Классификация уравнений математической физики (линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка)

Многие задачи механики, физики, технологии приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, называемых уравнениями *математической физики*.

Дифференциальные уравнения математической физики, которые мы будем изучать, — это линейные уравнения второго порядка. Как указано ранее, уравнение называют *линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных и не содержит их произведений, т.е. если это уравнение может быть записано в виде уравнения (18.1).

Общепринята следующая классификация уравнения (18.1). Принадлежность уравнения к тому или иному типу определяется коэффициентами при старших производных.

Обозначим $\Delta = AC - B^2$ — дискриминант уравнения. В зависимости от знака функции Δ уравнение (18.1) относится в данной области к одному из следующих типов: $\Delta < 0$ — гиперболический тип; $\Delta = 0$ — параболический тип; $\Delta > 0$ — эллиптический тип; Δ не сохраняет постоянного знака — смешанный тип.

Замечание. В уравнении (18.1) независимыми переменными являются координаты x и y. Во многих задачах одной из двух независимых переменных является *время*, и уравнение (18.1) можно записать через x и t.

Например, в уравнении $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ — $B = C = 0$; $\Delta = 0$ — это уравнение параболического типа. В уравнении Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\Delta = AC - B^2 > 0$ — это уравнение эллиптического типа. Например, $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ — уравнение смешанного типа в любой области P, содержащей точки оси $0X$. При $y < 0$ оно гиперболического типа, при $y > 0$ — эллиптического типа, при $y = 0$ — линия параболичности.

18.4. Краевые условия

Дифференциальное уравнение с частными производными имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Поэтому если физический процесс описывается с помощью уравнения с частными производными, то для однозначной характеристики этого процесса необходимы какие-то дополнительные условия. Эти дополнительные данные состоят из *краевых*, т.е. *граничных* и *начальных* условий.

Граничные условия заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции u на концах промежутка изменения координаты (в задаче о линейной теплопроводности это концы стержня, в задаче о колебаниях струны это концы струны и т.д.).

Условия, относящиеся к начальному моменту времени, называются *начальными*.

В каком же случае задаются какие краевые условия? Для того чтобы лучше понять это, следует рассмотреть понятие стационарного и нестационарного процессов.

Нестационарными называются задачи, решение которых зависит не только от пространственных координат (x, y, z), но и от времени t. Эти задачи связаны с процессами, протекающими во времени. Например, это процессы распространения тепла, процессы диффузии, колебательные (волновые) процессы, процессы распространения электрических волн и ряд других.

Основными дифференциальными уравнениями математической физики, описывающими нестационарные процессы, являются уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F\left(x,y,z,t\right) \qquad (18.2)$$

и волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F\left(x,y,z,t\right). \qquad (18.3)$$

Уравнение (18.2) является уравнением параболического типа, а уравнение (18.3) — гиперболического. Постановка задач для уравнений этих типов характеризуется наличием как граничных, так и начальных условий.

Начальные условия состоят в задании в момент времени $t = 0$ значений искомой функции u и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Таким образом, для уравнения теплопроводности ставится одно начальное условие (т.е. условие при $t = 0$):

$$u = (0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \qquad (18.4)$$

а для волнового уравнения — два:

$$u = (0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \qquad (18.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y, z) = \psi(x, y, z). \qquad (18.6)$$

В случае если процесс протекает в неограниченной области (область называется *неограниченной*, если хотя бы одна из координат ее точек может быть сколь угодно большой, например бесконечный стержень, бесконечная струна и т.д.), то задаются лишь начальные условия (задача Коши).

В случае если задача ставится для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные и граничные условия. Тогда говорят о *смешанной* задаче.

Для описания стационарных процессов обычно используют уравнения эллиптического типа. Время t в эти уравнения не входит. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и т.д. Для задач такого типа ставятся только граничные условия, т.е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области (табл.).

В рассматриваемых нами задачах математической физики именно физические соображения подсказывают, какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.

Важнейшие линейные дифференциальные уравнения математической физики

Физический смысл, уравнения, краевые условия	Тип		
	Гиперболический	Параболический	Эллиптический
Физический смысл	Волны (струны, мембраны, течение жидкости), затухающие волны	Уравнения теплопроводности, диффузии	Статический случай
Одномерное уравнение	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x)$
Многомерное уравнение	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + F(r,t)$	$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + F(r,t)$	$\nabla^2 u = F(r)$
Дополнительные (краевые) условия	Граничные условия; начальные условия для u и $\frac{\partial u}{\partial t}$	Граничные условия; начальное условие для u	Только граничные условия

Замечание. ∇^2 — оператор Лапласа.
Например, в декартовых координатах

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

18.5. Постановка краевых задач для уравнения параболического типа

Поставить краевую задачу, соответствующую данной физической задаче — это значит выбрать функцию, характеризующую физический процесс, и затем: а) записать дифференциальное уравнение для этой функции; б) установить для нее граничные условия; в) сформулировать начальные условия.

Уравнения и граничные условия краевых задач, например теории теплопроводности, являются следствием:

1) закона сохранения энергии;

2) закона внутренней теплопроводности в твердых телах (закона Фурье), который в одномерном случае выражается следующим образом:

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x},$$

где q — количество тепла, протекающего в единицу времени в направлении оси x через единицу площади; u — температура в рассматриваемом месте тела; λ — коэффициент теплопроводности, который зависит от физических свойств тела и от температуры u (при решении данных задач зависимостью λ от температуры пренебрегаем);

3) закона конвективного теплообмена между поверхностью твердого тела и окружающей его газообразной или жидкой средой (закона Ньютона), который выражается формулой $q = \alpha^T (u - \theta)$, где q — количество тепла, протекающее в

единицу времени через единицу площади поверхности тела в окружающую среду; α^T — коэффициент теплоотдачи; u — температура поверхности тела; θ — температура окружающей среды.

Рассмотрим подробнее, как записываются граничные условия. Они различаются в зависимости от температурного режима на границах рассматриваемой области. Обычно рассматривают три основных типа граничных условий (ограничимся одномерным случаем).

I. Задается температура на поверхности тела.

Например, на конце стержня (при $x = 0$) задана температура

$$u(0,t) = \gamma(t). \tag{18.7}$$

II. Задается поток тепла через поверхность тела (в случае теплоизолированного с боковой поверхности стержня — величина теплового потока, протекающего через торцевое сечение стержня).

Например, на конце $x = \ell$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \mu(t), \tag{18.8}$$

где $\mu(t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток и коэффициент теплопроводности по формуле

$$\mu(t) = -\frac{q(\ell, t)}{\lambda}.$$

Если какой-либо конец стержня теплоизолирован, то граничное условие примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{18.9}$$

III. На поверхности тела происходит теплообмен со средой, имеющей температуру $\theta(t)$, по закону Ньютона (согласно которому поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды). Математическая формулировка третьего граничного условия (на конце стержня $x = \ell$) имеет вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \alpha^T\left[u(\ell, t) - \theta(t)\right], \tag{18.10}$$

где α^T — коэффициент теплоотдачи.

Условия (18.7) — (18.9) также можно рассматривать как частный случай общих условий (18.10).

Поток тепла считается положительным, если тепло уходит из стержня в окружающую среду ($u > \theta$), и отрицательным — в противоположном случае.

Согласно закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое торцевое сечение в силу теплопроводности стержня.

Пусть начало стержня совпадает с началом координат ($x = 0$), а конец его имеет абсциссу $x = \ell$. Тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в направлении оси $0x$, равен $-\lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}$. На правом конце стержня направление потока, поступающего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси $0x$, а поток равен $-\lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell}$. На левом конце эти направления противоположны и поэтому тепловой поток равен $\lambda \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}$. Будем считать, что внешние среды на концах стержня разные, поэтому могут быть различными α^T и θ. Пусть на правом конце $\alpha^T = \alpha_\ell^T$, $\theta = \theta_\ell$, а на левом $\alpha^T = \alpha_0^T$, $\theta = \theta_0$. В этом случае граничные условия на торцевых сечениях можно записать в следующем виде

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}(0;t) = \alpha_0^T \left[u(0;t) - \theta_0(t) \right],$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(\ell;t) = \alpha_\ell^T \left[u(\ell;t) - \theta_\ell(t) \right], \qquad (18.11)$$

где $\theta_\ell(t)$, $\theta_0(t)$ — заданные температуры внешней среды, которые являются известными функциями от времени t.

Граничные условия на концах стержня (при $x = 0$ и $x = \ell$) могут быть различных типов.

Кроме описанных выше линейных краевых задач, существуют также задачи с нелинейными граничными условиями.

Например,

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \sigma\left[u^4(\ell, t) - \theta^4(\ell, t) \right].$$

Это граничное условие соответствует излучению по закону Стефана — Больцмана в среду с температурой $\theta(t)$ с торца $x = \ell$.

Рассмотрим более подробно, например, задачу (с граничными условиями первого рода) для ограниченной области (стержня длиной ℓ). Задача состоит в отыскании решения $u(x, t)$ дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < \ell,\ 0 < t \le T,$$

удовлетворяющего начальному и граничному условиям

$$u(x, 0) = f(x),\ 0 \le x \le \ell,$$

$$u(0, t) = \nu_1(t),\ u(\ell, t) = \nu_2(t),\ 0 \le t \le T,$$

где $f(x)$, $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ — заданные функции.

Аналогично ставятся другие задачи с различными комбинациями граничных условий.

18.6. Решение дифференциального уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности)

Применяя метод Фурье (разделения переменных), можно получить решение задачи Коши для следующих трех случаев:

1. *Случай бесконечного стержня.* Постановка задачи: найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\, t>0,\, -\infty<x<+\infty,$$

удовлетворяющего начальному условию $u(x,0)=f(x), -\infty<x<+\infty$.

Решение уравнения имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Эта формула, называемая *интегралом Пуассона*, представляет собой решение задачи о распространении тепла в неограниченном стержне.

2. *Случай полубесконечного стержня.* Если участок стержня, температуру которого нам надо найти, находится вблизи одного конца и далеко от другого, то температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. Постановка задачи: найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=f(x)$ $(0<x<+\infty)$ и краевому условию $u(0,t)=\varphi(t)$, $t\geq 0$, где $f(x)$ и $\varphi(t)$ — заданные функции.

Решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{\infty} f(\xi)\cdot\left[e^{\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{\frac{-(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{t}\varphi(\eta)e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\eta)}}\cdot(t-\eta)^{-3/2}\,d\eta.$$

3. *Случай стержня конечной длины.* Пусть длина стержня равна ℓ. Выберем начало координат на левом конце стержня, тогда его торцевые сечения будут $x=0$ и $x=\ell$. В данном случае задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию

$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$ $(0 \le x \le \ell)$ и краевым условиям, например $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\ell} = 0$ (на обоих концах поддерживается постоянная температура) или $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0$ (оба конца стержня теплоизолированы). Тогда частное решение ищется в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cdot \sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

где

$$b_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx$$

(для краевых условий $u\big|_{x=0} = u\big|_{x=e} = 0$); и в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-\left(\frac{k\pi a}{\ell}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{k\pi x}{\ell} + a_0,$$

где

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx,\ a_0 = \frac{1}{\ell}\int_1^{\ell} f(x)dx$$

(для краевых условий $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример 18.1. Найти закон распределения температуры в длинном однородном стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована, а начальное распределение температуры $u(x,0) = f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Если пренебречь влиянием температурных условий на концах длинного стержня, то можно считать его бесконечным. В этом случае получаем задачу Коши: найдем решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t>0, -\infty < x < +\infty,$$

которое удовлетворяло бы начальному условию

$$u(x,0) = f(x) = e^{-x^2}.$$

Решение запишем в виде интеграла Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi.$$

По условию задачи $f(\xi)=e^{-\xi^2}$, поэтому

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\xi^2+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)}d\xi.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

18.1. Дайте физическое толкование решения следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial u(0;\,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l;\,t)}{\partial x}=0;$$

$$u(x;\,0)=u_0.$$

Ответ. При полной теплоизоляции стержня постоянная температура сохраняется в нем при всех $t>0$, $u(x;\,t)=u_0$.

18.2. Докажите самостоятельно, что уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ является уравнением гиперболического типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная математика продолжает расширять область своего применения, появляются новые, как чистые, так и прикладные отрасли математических знаний. Выходят около 500 математических журналов. Сегодня математические методы широко используются в науках, еще недавно весьма далеких от математики: в экономике, биологии, медицине, психологии, социологии и др. Поэтому, нет никаких сомнений, что жизнь современного человека невозможна без знания математики.

Библиографический список

1. *Кадомцев, С.Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М. : Физ.-мат. лит., 2001. 157 с.

2. *Привалов, И.И.* Аналитическая геометрия. М. : Физ.-мат. лит., 1961.

3. *Апатенок, Р.Ф.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р.Ф. Апатенок, А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б. Хейнман. М. : Высшая школа, 1986. 272 с.

4. *Бугров, Я.С.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. М. : Наука, 1980. 222 с.

5. *Бермант, А.Ф.* Краткий курс математического анализа для втузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Арамович. М. : Наука, 1967. 176 с.

6. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т. 1. М. : Наука, 1985. 429 с.

7. *Бугров, Л.С.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник для вузов. 4-е изд. / Л.С. Бугров, С.М. Никольский. Ростов н/Д : Феникс, 1997. 512 с.

8. *Бугров, Я.С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Ростов н/Д : Феникс, 1998. 512 с.

9. *Гусак, А.А.* Высшая математика : в 2 т. 3-е изд. Мн : Тетра Системс, 2001. 544 с.

10. *Кудрявцев, В.А.* Краткий курс высшей математики : учебное пособие для вузов. 7-е изд. / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. М. : Наука, 1989. 656 с.

11. *Кудрявцев, В.А.* Краткий курс математического анализа : учебное пособие для вузов. М. : Наука, 1989. 736 с.

12. *Щипачев, В.С.* Высшая математика. М. : Наука, 2002. 479 с.

13. *Бутузов, В.Ф.* Математический анализ в вопросах и задачах : учебное пособие. 4-е изд. / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. М. : Физ.-мат. лит., 2001. 480 с.

14. *Лунгу, К.Н.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. 4-е изд. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. М. : Айрис-пресс, 2005. 576 с.

15. *Данко, П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. 3-е изд., перераб. и доп. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. М. : Высшая школа, 1980. 320 с.

16. *Минорский, В.П.* Сборник задач по высшей математике. М. : Наука, 1978. 852 с.

17. *Шапкин, А.С.* Задачи с решениями : учебное пособие. М. : Дашков и К°, 2006. 432 с.

18. *Романов, Ю.И.* Определенный интеграл и его геометрические приложения : методические указания / Ю.И. Романов, О.В. Игнатьев. Волгоград : ВолгГАСА, 1998. 31 с.

19. *Султанова, Л.В.* Интеграл и его приложения : индивидуальные задания / Л.В. Султанова, В.Д. Катихин. Волгоград : ВолгГАСА, 1998. 45 с.

20. *Романов, Ю.И.* Исследование функций одной переменной : методические указания. Волгоград : ВолгГАСА, 1999. 22 с.

21. *Богородская, Т.Е.* Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных : методические указания. Ч. 2 / Т.Е. Богородская, Р.К. Катеринина, М.С. Хмелевская. Волгоград : ВолгГИСИ, 1987. 23 с.

22. *Игнатьев, О.В.* Лабораторный практикум по аналитической геометрии. Ч. I, II, III / О.В. Игнатьев, Р.К. Катеринина, В.Д. Катихин, М.С. Хмелевская. Волгоград : ВолгГАСА, 1997. 35 с.

23. *Харитонова, Л.П.* Введение в математические методы высшего анализа. Элементы теории функций комплексного переменного. Некоторые специальные функции : учебное пособие. Ч. 1 / Л.П. Харитонова, И.П. Руденок. Волгоград : ВолгГАСУ, 2005. 136 с.

24. *Харитонова, Л.П.* Введение в математические методы высшего анализа. Элементы теории функций комплексного переменного. Некоторые специальные функции : учебное пособие. Ч. 2 / Л.П. Харитонова, И.П. Руденок. Волгоград : ВолгГАСУ. 2007. 148 с.

25. *Тарабрин, Г.Т.* Математика. Конспект лекций для студентов инженерных специальностей : учебное пособие. Волгоград : ВолгГАСА, 2001. 251 с.

26. *Герасимович, А.И.* Математический анализ: справочное пособие : в 2 ч. Ч.1 / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. Мн : Высш. шк., 1989.

27. *Герасимович, А.И.* Математический анализ: справочное пособие: в 2 ч. Ч.2 / А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, М.В. Сучак. Мн : Высш. шк., 1990. 279 с.

28. *Руденок, И.П.* Высшая математика : краткий теоретический курс с примерами решения задач : учебно-методический комплекс (учебное пособие) / И.П. Руденок, Л.П. Харитонова, Е.Г. Вишнякова, Т.Б. Заикина. Волгоград : ВолгГАСУ, 2007. 275 с.

29. *Руденок, И.П.* Высшая математика : курс лекций и практические задания / И.П. Руденок, Н.А. Болотина, Н.Н. Агишева. Волгоград : ВолгГАСУ, 2008. 380 с.

30. *Фарлоу, Стенли.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / Пер. с англ. М. : Мир, 1985. 384 с.

31. Вариационное исчисление : методические указания / И.П. Руденок, О.В. Рыбакова, Л.П. Харитонова. Волгоград : ВолгГАСУ, 2005. 25 с.

32. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М. : Сов. Энциклопедия, 1988. 847 с.

Приложение

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНАМ, ЗАЧЕТАМ И КОЛЛОКВИУМАМ

Вопросы к коллоквиуму в первом семестре

1. Понятие матрицы. Нулевая и единичная матрица. Линейные операции над матрицами, их свойства.
2. Умножение матриц, его свойства. Понятие обратной матрицы.
3. Элементарные преобразования матриц. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Ранг матрицы.
4. Определители второго и третьего порядка, их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу.
5. Нахождение обратной матрицы с помощью определителей.
6. Системы линейных уравнений, основные определения. Теорема Кронекера—Капелли. Формулы Крамера.
7. n-мерные линейные пространства.
8. Линейные преобразования векторных пространств, матрица преобразования.
9. Геометрические векторы, основные определения. Линейные операции над ними (геометрические определения и их связь с координатами).
10. Скалярное произведение векторов, его свойства. Скалярное произведение векторов, заданных координатами. Условие перпендикулярности векторов.
11. Векторное произведение геометрических векторов, его свойства. Геометрический смысл.
12. Смешанное произведение геометрических векторов, его свойства. Геометрический смысл. Условие компланарности трех векторов.
13. Связь между геометрическими объектами и их уравнениями на плоскости и в пространстве. Расстояние между точками и деление отрезка в данном отношении.
14. Прямые на плоскости, различные виды уравнений, взаимное расположение.
15. Кривые второго порядка, их свойства и уравнения.
16. Прямые и плоскости в пространстве. Различные виды уравнений, взаимное расположение.
17. Поверхности второго порядка, их классификация и построение методом сечений.

Вопросы к экзамену в первом семестре

1. Определение матрицы. Прямоугольные и квадратные матрицы. Транспонированная матрица. Вектор-строка, вектор-столбец.
2. Действия над матрицами. Сумма двух матриц. Произведение числа λ на матрицу.
3. Произведение матриц.
4. Нулевая матрица. Диагональная матрица. Единичная матрица, ее свойства.
5. Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков. Миноры. Алгебраические дополнения.
6. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца.
7. Транспонирование определителя. Теорема о транспонировании. Теорема об общем множителе строки (столбца) определителя. Определитель с нулевой строкой (столбцом).
8. Теорема о перестановке двух строк (столбцов) определителя. Признак нулевого определителя.
9. Теорема о представлении определителя в виде суммы определителей.
10. Теорема о тождественном преобразовании определителя.
11. Ранг матрицы.
12. Элементарные преобразования матрицы.
13. Системы линейных уравнений. Решение системы. Совместные и несовместные системы. Определенные и неопределенные системы. Однородные и неоднородные системы.
14. Теорема Кронекера — Капелли.

15. Теорема о числе решений системы m линейных уравнений с n неизвестными.

16. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Теорема Крамера.

17. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений матричным методом.

18. Обратная матрица.

19. Определение линейного (векторного) пространства. Примеры линейных пространств.

20. n-мерные векторы как частный случай матриц.

21. Линейная комбинация векторов. Нетривиальная линейная комбинация. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.

22. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису.

23. Понятие множества. Элементы множества. Пустое множество. Конечные и бесконечные множества. Мощность множества. Подмножество.

24. Сумма (объединение) множеств.

25. Пересечение множеств.

26. Разность между множеством B и множеством A. Дополнение множества.

27. Числовые множества. Ограниченные множества. Точная верхняя и точная нижняя грань.

28. Определения геометрического вектора и его модуля. Сумма, разность векторов, их свойства. Произведение вектора на число. Коллинеарные векторы.

29. Проекция вектора на вектор, ее свойства.

30. Определение скалярного произведения векторов. Теорема о связи скалярного произведения с проекцией вектора на вектор. Свойства скалярного произведения. Условие перпендикулярности векторов. Теорема о скалярном квадрате вектора. Теорема об орте данного вектора. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в декартовом базисе.

31. Геометрический смысл координат вектора в декартовом базисе. Прямоугольные декартовы координаты. Разложение вектора в декартовом базисе.

32. Линейные операции над векторами, заданными координатами.

33. Направляющие косинусы. Теоремы о связи направляющих косинусов с координатами вектора в декартовом базисе.

34. Угол между векторами. Условие перпендикулярности и коллинеарности векторов.

35. Координаты вектора, заданного точками начала и конца. Расстояние между двумя точками.

36. Определение векторного произведения векторов. Геометрический смысл модуля векторного произведения. Теорема об ориентации векторного произведения. Алгебраические свойства векторного произведения.

37. Смешанное произведение векторов. Вычисление смешанного произведения векторов в декартовом базисе. Геометрический смысл векторного произведения векторов. Условие компланарности векторов.

38. Плоскость. Общее уравнение плоскости.

39. Угол между плоскостями. Условия перпендикулярности, параллельности и совпадения плоскостей.

40. Уравнение плоскости в отрезках. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

41. Нормальное уравнение плоскости и его свойства.

42. Прямая на плоскости.

43. Канонические и параметрические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

44. Приведение уравнения прямой, заданной пересечением плоскостей, к каноническому виду. Угол между прямыми. Условия перпендикулярности и параллельности прямых.

45. Угол между прямой и плоскостью. Условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости.

46. Кривые второго порядка. Окружность.
47. Эллипс, его каноническое уравнение.
48. Гипербола, ее каноническое уравнение.
49. Парабола, ее каноническое уравнение.
50. Функция одной переменной. Область определения. Способы задания.
51. Элементарные функции.
52. Предел функции одной переменной. Односторонние пределы. Бесконечно большой аргумент и функция. Предел функции при бесконечно большом аргументе.
53. Ограниченные и неограниченные функции.
54. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Теорема о представлении функции числом и бесконечно малой.
55. Теоремы о пределах суммы и произведения функций.
56. Теорема о пределе частного двух функций. Теорема о пределе функции, заключенной между двумя другими функциями.
57. Первый замечательный предел.
58. Второй замечательный предел.
59. Непрерывность функции в точке, на отрезке.
60. Точки разрыва функций, их классификация.
61. Свойства непрерывных функций.
62. Определение понятия производной. Геометрический смысл производной. Механический смысл производной.
63. Физические толкования производной (теплоемкость, линейная плотность).
64. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции в точке.
65. Производная постоянной, независимой переменной, суммы, произведения функций.
66. Производная частного двух функций.
67. Производные взаимно обратных функций.
68. Производная сложной функции.
69. Производная функции, заданной параметрически.
70. Производные от синуса и косинуса.
71. Производные от тангенса и котангенса.
72. Производные от арксинуса и арккосинуса.
73. Производные от арктангенса и арккотангенса.
74. Логарифмическое дифференцирование.
75. Производная логарифмической функции.
76. Производная показательно-степенной функции.
77. Производная степенной функции.
78. Производная показательной функции.
79. Производные от гиперболических функций.
80. Определение понятия дифференциала функции одной переменной, его аналитический смысл.
81. Геометрический смысл дифференциала.
82. Инвариантность формы дифференциала.
83. Производные и дифференциалы высших порядков. Физическое толкование второй производной.
84. Теорема Ферма.
85. Теорема Ролля (теорема о корнях производной).
86. Теорема Лагранжа (теорема о конечных приращениях).
87. Теорема Коши (теорема об отношении приращений двух функций).
88. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.
89. Условия возрастания и убывания функции. Необходимый признак монотонности.
90. Экстремумы функции. Необходимое условие существования локального экстремума. Достаточное условие существования экстремума по первой производной.

91. Исследование функции на максимум и минимум с помощью второй производной. Достаточный признак существования экстремума по второй производной.
92. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
93. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Правило нахождения интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба.
94. Асимптоты. Вертикальные и наклонные асимптоты.
95. Схема полного исследования функции и построения графиков на основе исследования.
96. Поверхности второго порядка. Метод сечений для построения поверхностей второго порядка. Сфера. Эллипсоид.
97. Однополостный гиперболоид.
98. Двуполостный гиперболоид.
99. Конус второго порядка.
100. Эллиптический параболоид.
101. Гиперболический параболоид.
102. Линейчатые поверхности.
103. Цилиндрические поверхности.
104. Логические исчисления. Введение в логику. Высказывания и операции над ними. Дизъюнкция высказываний. Конъюнкция высказываний. Импликация высказываний.
105. Логические исчисления. Таблицы истинности.
106. Таблица основных равносильностей. Принцип двойственности.
107. Булевы алгебры.
108. Элементы теории графов. Использование графов при решении задач.
109. Графы: задание через ребра и вершины. Направленные или ориентированные ребра (дуги). Ориентированные и неориентированные графы. Кратные ребра, мультиграф. Петли. Полный граф. Равенство двух графов.
110. Конечный автомат. Управляющая система.
111. Отображение, оператор, преобразование множества. Линейные отображения, линейный оператор. Примеры линейных отображений.
112. Сумма, произведение линейных отображений.
113. Образ линейного отображения.
114. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования.
115. Действия над линейными преобразованиями. Сумма и произведение линейных преобразований. Произведение линейного преобразования на число.
116. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования.
117. Основные алгебраические структуры.

Вопросы к коллоквиуму во втором семестре

1. Определение понятия первообразной. Основная теорема о первообразных.
2. Понятие неопределенного интеграла.
3. Теорема существования первообразной и неопределенного интеграла.
4. Таблица основных интегралов.
5. Свойства неопределенных интегралов.
6. Основные методы интегрирования. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям.
7. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.
8. Разложение рациональной дроби на простейшие и их интегрирование. Интегрирование рациональных дробей.
9. Интегрирование простейших иррациональных функций.
10. Интегрирование тригонометрических функций с помощью тригонометрических подстановок. Универсальная тригонометрическая подстановка.
11. Понятие об интегрируемости в конечном виде или о функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.

12. Определенный интеграл как предел интегральной суммы.
13. Теорема существования определенного интеграла.
14. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
15. Производная от определенного интеграла по верхнему пределу.
16. Формула Ньютона — Лейбница.
17. Определенный интеграл как приращение первообразной на отрезке интегрирования.
18. Метод замены переменной в определенном интеграле.
19. Метод интегрирования по частям в определенном интеграле.
20. Определенный интеграл от четных и нечетных функций по симметричному отрезку.
21. Приближенное вычисление определенных интегралов.
22. Физические приложения определенных интегралов.
23. Вычисление площади криволинейной трапеции в прямоугольных координатах.
24. Вычисление площади криволинейного сектора в полярных координатах.
25. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений.
26. Объем тела вращения.
27. Длина дуги плоской кривой в прямоугольных и полярных координатах.
28. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Признак сходимости несобственных интегралов.
29. Определение двойного интеграла.
30. Теорема существования двойного интеграла.
31. Геометрический смысл двойного интеграла.
32. Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем.
33. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах. Сведение двойного интеграла к повторному.
34. Замена переменных в двойном интеграле (общий случай).
35. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах:
а) случай, когда полюс не содержится внутри области интегрирования,
б) полюс содержится внутри области интегрирования,
в) область касается полюса.
36. Вычисление площади с помощью двойных интегралов.
37. Вычисление объема с помощью двойного интеграла.
38. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла.
39. Вычисление массы пластинки с помощью двойных интегралов.
40. Вычисление статических моментов плоской фигуры (пластинки) относительно осей координат.
41. Вычисление координат центра масс пластинки (плоской фигуры).
42. Вычисление момента инерции пластинки относительно осей координат. Полярный момент инерции пластинки относительно начала координат.
43. Определение тройного интеграла.
44. Вычисление массы и объема тела с помощью тройного интеграла.
45. Вычисление тройного интеграла в декартовых координат.
46. Замена переменных в тройном интеграле (общий случай).
47. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
48. Тройной интеграл в сферических координатах.
49. Моменты инерции тела V с плотностью $\rho(x, y, z)$ относительно осей координат и относительно начала координат.
50. Координаты центра масс тела V плотностью $\rho(x, y, z)$ и однородного тела ($\rho = \text{const}$).
51. Определение и вычисление криволинейного интеграла первого рода.
52. Некоторые приложения криволинейного интеграла первого рода
53. Криволинейные интегралы второго рода. Определение и свойства.
54. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
55. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

56. Формула Грина.

57. Некоторые приложения криволинейных интегралов второго рода.

58. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

59. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.

60. Поверхностные интегралы 1-го рода.

61. Поверхностные интегралы 2-го рода.

62. Теоремы Стокса и Остроградского — Гаусса.

Вопросы к коллоквиуму в третьем семестре

1. Дифференциальные уравнения. Порядок уравнения. Общее и частное решение.
2. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения.
3. Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения 1-го порядка.
5. Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли.
6. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, общая теория.
8. Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
9. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
10. Решение неоднородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.
11. Системы дифференциальных уравнений.
12. Решение физических задач с помощью дифференциальных уравнений.

Вопросы к экзамену в третьем семестре

1. Определения дифференциального уравнения, его решения или интеграла, общего и частного решений. Геометрическое толкование решения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теория о существовании и единственности решения дифференциального уравнения. Задача Коши.
3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Интегрирование линейных уравнений первого порядка методом подстановки.
6. Уравнение Бернулли.
7. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков. Общий вид, общее решение. Типы.
8. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Интегрирование уравнений вида $y^{(n)} = f(x)$.
9. Интегрирование уравнений вида $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dx}{dy}\right)$.
10. Интегрирование уравнений вида $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$.
11. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Определение уравнения. Однородные и неоднородные уравнения.
12. Свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.
13. Линейные зависимые и линейные независимые функции. Определитель Вронского для линейно зависимых и линейно независимых функций.
14. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

15. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:
а) случай, когда корни характеристического уравнения действительны и различны;
б) случай, когда корни характеристического уравнения действительные и равные;
в) случай, когда корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.

16. Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Теорема о структуре общего решения.

17. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения второго порядка.

18. Интегрирование неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом подбора частного решения:

а) случай, когда правая часть уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x)$;

б) случай, когда правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$;

в) случай, когда правая часть уравнения имеет вид $f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$;

г) случай, когда правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x} \left[P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x \right]$.

19. Системы дифференциальных уравнений.

20. Числовые ряды. Основные понятия. Сумма, сходимость и расходимость числовых рядов.

21. Свойства сходящихся рядов.

22. Необходимый признак сходимости числового ряда.

23. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

24. Признаки сравнения рядов (признаки сходимости рядов с положительными членами).

25. Признак Даламбера.

26. Радикальный признак Коши.

27. Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами (интегральный признак Коши).

28. Ряд Дирихле и его сходимость.

29. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

30. Знакопеременные ряды. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

31. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

32. Функциональные ряды. Остаток ряда.

33. Степенные ряды. Определение. Область сходимости.

34. Теорема Абеля.

35. Интервал сходимости степенного ряда. Радиус сходимости степенного ряда и способ его определения.

36. Свойства степенных рядов.

37. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Маклорена. Условие разложимости функций в ряд Маклорена.

38. Ряд Тейлора.

39. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$.

40. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.

41. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = (1+x)^m$ (биномиального ряда).

42. Приложения степенных рядов к вычислению функций.

43. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов.

44. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

45. Тригонометрический ряд.

46. Ряд Фурье на интервале $[-\pi, \pi]$.

47. Теорема Дирихле.
48. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.
49. Ряд Фурье для функций с периодом $2l$.
50. Дифференциальное уравнение с частными производными; его порядок и решение.
51. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, их классификация.
52. Краевые (граничные и начальные) условия в случае стационарных и нестационарных процессов в неограниченной области или для конечного интервала.
53. Методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.
54. Дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа.
55. Дифференциальное уравнение в частных производных эллиптического типа.
56. Дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа (уравнение теплопроводности).
57. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Три основных типа граничных условий.
58. Метод разделения переменных для дифференциальных уравнений параболического типа (интегрирование уравнения теплопроводности методом Фурье) для бесконечного стержня.
59. Метод разделения переменных для дифференциальных уравнений параболического типа (интегрирование уравнения теплопроводности методом Фурье) для полубесконечного стержня.
60. Метод разделения переменных для дифференциальных уравнений параболического типа (интегрирование уравнения теплопроводности методом Фурье) для стержня конечной длины.
61. Множество комплексных чисел. Действительная и мнимая части комплексного числа.
62. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа.
63. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
64. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
65. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Действия над комплексными числами в показательной форме.
66. Функции комплексного переменного.
67. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана.
68. Аналитические функции.
69. Интегрирование функций комплексного переменного. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
70. Понятие односвязных, двусвязных и многосвязных областей.
71. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.
72. Ряды с комплексными членами.
73. Ряды Лорана.
74. Изолированные особые точки аналитической функции.
75. Вычеты.
76. Понятие об интегральных преобразованиях.
77. Понятие о конформном отображении.
78. Численное решение дифференциальных уравнений.

Учебное издание

Болотина Наталия Александровна
Харитонова Лариса Петровна
Руденок Игорь Павлович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-практическое пособие

2-е изд., перераб. и доп.

Начальник РИО *М. Л. Песчаная*
Зав. редакцией *М. С. Лысенко*
Редактор *Т. В. Белик*
Компьютерная правка и верстка *Н. А. Дерина*
Дизайн обложки *В. В. Гуркин*

Подписано в свет 20.03.2012
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 19,2. Объем данных 3,6 Мб

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
Редакционно-издательский отдел
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru