Министерство образования и науки Российской Федерации
Волгоградский государственный архитектурно-строительный
университет

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания

к лабораторным работам по дисциплине «Информатика»

Составители М. М. Степанов, Н. Н. Потапова, Т. В. Ерещенко

Волгоград
ВолгГАСУ
2012

УДК 517.551(076.5)

Рецензенты:

кандидат технических наук *И.В. Иванов*, доцент кафедры прикладной математики и вычислительной техники Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета;

кандидат технических наук *А.А. Чураков*, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета

А 769 **Аппроксимация** функций [Электронный ресурс] : методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Информатика» / сост. М.М. Степанов, Н.Н. Потапова, Т.В. Ерещенко ; М-во образования и науки Росс. Федерации, Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. — Электрон. текстовые и граф. дан. (2,5 Мбайт). — Волгоград : ВолгГАСУ, 2012. — Учебное электронное издание комбинированного распространения : 1 CD-диск. — Систем. требования: PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; 2-скоростной дисковод CD-ROM; Adobe Reader 6.0. — Официальный сайт Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. — Режим доступа: http://www.vgasu.ru/publishing/on-line/ — Загл. с титул. экрана.

В методических указаниях даны краткие теоретические сведения, необходимые для изучения темы «Аппроксимация функций» и выполнения лабораторных работ, разобраны примеры заданий, приведены варианты выполнения индивидуальных заданий и сформулированы контрольные вопросы по изучаемой теме.

Методические указания предназначены для студентов всех профилей дневной и заочной форм обучения по дисциплинам «Информатика», «Вычислительная техника и программирование», «Численные методы решения задач на ЭВМ».

УДК 517.551(076.5)

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа «Интерполяция функций»

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Получить навыки обработки табличных данных различными методами интерполяции и оценки погрешностей реализации этих методов с применением математической системы *MathCAD*.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Введение

Пусть аналитическое выражение для функции $f(x)$ неизвестно, а известны только ее значения в некоторых точках отрезка $[x_0; x_n]$, т.е. функция $f(x)$ задана табличными значениями (табл.1). Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные.

Таблица 1

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

Значения аргумента x_i называются узлами. В общем случае узлы не являются равноотстоящими. Требуется найти приближенные значения функции $f(x)$ в любой произвольной точке отрезка $[x_0; x_n]$.

Для решения этой задачи надо заменить неизвестную функцию $f(x)$ другой непрерывной на отрезке $[x_0; x_n]$ функцией $F(x)$, значения которой приблизительно равны значениям функции $f(x)$ в любой точке отрезка $[x_0; x_n]$, то есть

$$F(x) \approx f(x); \; x \in [x_0; x_n].$$

Приближение функции $f(x)$, заданной таблично, другой непрерывной функцией $F(x)$ называется аппроксимацией (от латинского *approximare* – приближаться). В общем смысле термином *аппроксимация* называют замену одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Чем проще аппроксимирующая функция, тем меньше времени требуется для решения задачи аппроксимации. Эта характеристика особенно важна при большом количестве узлов.

Чем больше количество узлов, тем меньше погрешность. Для каждой конкретной аппроксимируемой функции нужно стремиться выбрать такой способ аппроксимации, который обеспечивает минимальную погрешность при минимальном количестве узлов.

Существует два принципиально различных типа аппроксимации функций:

1) Интерполяция – аппроксимирующая функция $F(x)$ точно совпадает с табличными значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции $f(x)$.

2) Метод наименьших квадратов – аппроксимирующая функция $F(x)$ может не совпадать ни с одним табличным значением $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции $f(x)$, максимально приближаясь к ним в среднем.

Ниже рассматриваются методы интерполяции.

2. 2. Интерполяция функций

2. 2. 1. Постановка задачи интерполяции

Пусть значения $y_0, y_1, \ldots, y_n$, приведенные в табл.1, получены с достаточно малой погрешностью и могут считаться точными для решаемой задачи. Тогда целесообразно потребовать, чтобы приближающая функция $F(x)$ проходила точно через точки с координатами x_i, y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$, т.е. значения приближающей функции $F(x)$ точно совпадали с табличными значениями данной функции $f(x)$

$$F(x_0) = f(x_0) = y_0;$$
$$F(x_1) = f(x_1) = y_1;$$
$$\ldots\ldots \qquad (1)$$
$$F(x_n) = f(x_n) = y_n;$$

В этом случае нахождение приближающей функции $F(x)$ называют интерполяцией или интерполированием.

Задачей интерполяции считают нахождение приближенных значений табличной функции при аргументах x, не совпадающих с узловыми. Если x находится внутри интервала $[x_0; x_n]$, то процесс нахождения приближенного значения функции $f(x)$ называют интерполяцией; если x находится вне интервала $[x_0; x_n]$, то этот процесс называется экстраполяцией. Происхождение этих терминов связано с латинскими словами *inter* – внутри, *extra* – вне, *polire* – делать гладким.

2. 2. 2. Линейная интерполяция

При линейной интерполяции табличные значения функции в смежных узловых точках соединяются отрезками прямых, и функция $f(x)$ приближается ломаной с вершинами в данных точках. Уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные. Это наиболее простой и достаточно распространенный способ интерполяции. Если значение x выходит за пределы интервала $[x_0; x_n]$, то осуществляется линейная экстраполяция по отрезкам прямых, примыкающим к конечным точкам. При линейной интерполяции интерполирующая функция имеет изломы в узлах интерполяции и разрывы значений производных. Погрешность интерполяции определяется расстояниями между узлами интерполяции.

В системе *MathCAD* линейная интерполяция реализуется с помощью встроенной функции

$$linterp(VX, VY, x) \qquad (2)$$

где *VX*, *VY* – векторы, элементами которых являются соответственно координаты x_i, y_i узловых точек, приведенные в табл.1; x– аргумент, $x \in [x_0; x_n]$, в котором ищется соответствующее значение функции *y*.

2. 2. 3. Интерполяция полиномом Лагранжа

Погрешность линейной интерполяции обусловлена тем, что график интерполирующей функции имеет изломы в узлах интерполяции. Эти изломы можно устранить, если в качестве интерполирующей использовать такую функцию, график которой представляет собой плавную кривую (например, полином), проходящий точно через заданные в табл.1 точки. Существует много разновидностей полиномов, для которых выполнены условия (1). Ниже будет рассмотрен полином Лагранжа. Интерполяция полиномом Лагранжа дает высокую точность, если значения функции в смежных узлах, заданные в табл.1, изменяются достаточно медленно.

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, для которого выполнены условия (1), следующим образом:

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \ldots + l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \quad , \tag{3}$$

где $l_i(x)$ – полином степени n ($i = 0,1, \ldots ,n$ – номер полинома – слагаемого).

Потребуем, чтобы в узловых точках $x = x_j$ ($j = 0,1,\ldots,n$ – номер узла),

$$l_i(x_j) = \begin{cases} y_i, & \text{если} \quad j = i \\ 0, & \text{если} \quad j \neq i. \end{cases} \tag{4}$$

Полином $l_i(x)$ составим следующим образом:

$$l_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) \quad . \tag{5}$$

В полиноме (5) каждый из n сомножителей в скобках является разностью изменяющегося непрерывно аргумента x и дискретного значения x_j узла с номером j. Причем номер узла j принимает значения сначала от 0 до i – 1, затем от i + 1 до n. Сомножитель $x - x_i$ отсутствует. За счет этого $l_i(x) =$ 0 во всех узлах, кроме узла, номер которого j совпадает с номером полинома i. Таким образом, обеспечивается выполнение соотношения (4) при $j \neq i$.

Для того чтобы соотношение (4) выполнялось и при $j = i$, коэффициент C_i для полинома (5) найдем из следующего условия:

$$l_i(x_i) = y_i,$$

откуда

$$C_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) в полином (5), получаем

$$l_i(x) = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}. \quad (7)$$

Перепишем соотношение (7) в более компактном виде:

$$l_i(x) = y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в соотношение (3), получим

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (9)$$

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа.

Для реализации полученного соотношения в системе *MathCAD* используем встроенную функцию if с условным выражением, имеющую следующий формат:

if(*условие*, *выражение 1*, *выражение 2*).

Эта функция возвращает значение *выражения 1*, если *условие* выполняется, или значение *выражения 2*, если *условие* не выполняется. Для нашего случая функция *if* должна возвратить значение y_i, если $j = i$, или значение выражения

$$\frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{если} \quad j \neq i.$$

Тогда значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке x будет иметь следующий вид:

$$L(x) = \sum_i \prod_j if\left[j = i, y_i, \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right]. \qquad (10)$$

Выражение (10) определяет элемент квадратной матрицы, имеющей $n+1$ строк и столбцов. Элементами главной диагонали являются значения y_i. Элемент i-й строки и j-го столбца определяется значением выражения

$\frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ получаемого из соотношения (10).

2. 2. 4. Интерполяция сплайнами

Полиномиальная интерполяция не всегда дает удовлетворительные результаты при аппроксимации функций. Несмотря на выполнение условий (1) в узлах, интерполирующая функция может иметь значительные отклонения между узлами. Увеличение степени интерполяционного многочлена не всегда приводит к уменьшению погрешности. Возникает так называемое явление волнистости. При этом поведение полинома в окрестности какой-либо точки определяет его поведение в целом. Полиномиальная интерполяция дает особенно большие ошибки, если в окрестности левой или правой границы интервала интерполяции находится вертикальная асимптота графика функции.

На практике для проведения гладких кривых через узловые значения функции используют гибкую упругую линейку, совмещая ее с заданными точками. Математическая теория такой аппроксимации называется теорией сплайн-функций (от английского слова *spline* – рейка, линейка). График интерполирующей функции при сплайн-интерполяции действительно напоминает гибкую линейку, закрепленную в узловых точках интерполируемой функции. Поэтому сплайн-интерполяцию выгодно применять при небольшом числе узловых точек (до 5 –7).

Рассмотрим интерполяцию кубическими сплайнами. Из теории упругости известно, что гибкая упругая линейка, совмещенная с узловыми значениями функции, проходит по линии, удовлетворяющей уравнению

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(x) = 0 \quad . \qquad (11)$$

Если в качестве функции φ(x) выбрать полином, то в соответствии с уравнением (11) степень полинома должна быть не выше третьей. Этот полином называют кубическим сплайном, который на каждом интервале $x \in \left[x_{i-1}; x_i \right]$ записывают в виде

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \tag{12}$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты сплайна; i = 1,2,..., n - номер интервала (номер сплайна).

В отличие от полиномиальной интерполяции, когда вся аппроксимирующая функция описывается одним полиномом, при сплайновой интерполяции на каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ строится отдельный полином $\varphi(x)$ третьей степени (12) со своими коэффициентами.

Аппроксимирующая функция $F(x)$ представляет собой последовательность сплайнов (12), «сшитых» между собой в точках, соответствующих узловым значениям аппроксимируемой функции $f(x)$.

Для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i на всех n элементарных отрезках необходимо получить $4n$ уравнений. Эти уравнения получаются из следующих условий "сшивания" соседних сплайнов (рис.1):

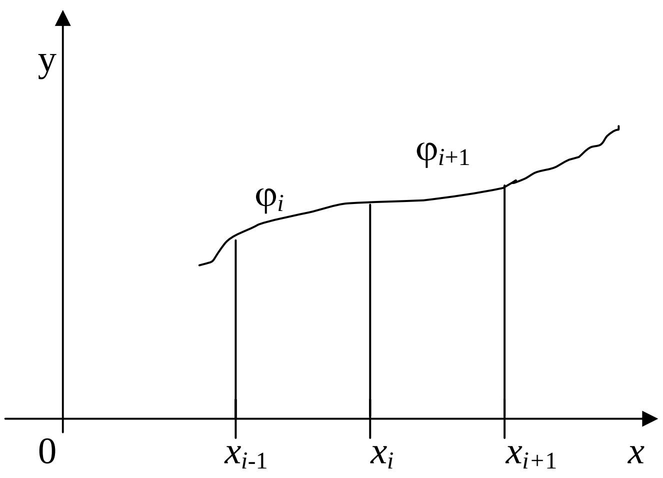


Рис. 1

1) равенство значений сплайнов $\varphi(x)$ и аппроксимируемой функции $f(x)$ в узлах - условия (1):

$$\varphi_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \varphi_i(x_i) = f(x_i) = y_i \quad ; (13)$$

эта система равенств содержит $2n$ уравнений;

2) непрерывность первой и второй производных от сплайнов в узлах интерполяции – условия гладкости кривой:

$$\varphi_i^{(I)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(I)}(x_i);$$

$$\varphi_i^{(II)}(x_i) = \varphi_{i+1}^{(II)}(x_i). \tag{14}$$

Непрерывность первой производной означает, что соседние сплайны в узловых точках имеют общую касательную. Непрерывность второй производной означает, что соседние сплайны в узловых точках имеют одинаковую кривизну. Эта система равенств содержит $2n$ - 2 уравнений.

3) Кроме перечисленных условий, необходимо задать условия на концах отрезка, то есть в точках x_0 и x_n. В общем случае эти условия определяются конкретной задачей.

Если за пределами интервала интерполяции экстраполирующая функция представляет собой прямую линию, то это линейная экстраполяция. Следовательно, исходя из условий непрерывности второй производной, запишем еще два равенства:

$$\varphi_0'' (x_0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_n'' (x_n) = 0 \; . \tag{15}$$

Если за пределами интервала интерполяции экстраполирующая функция представляет собой кубический или квадратический полином, то это кубическая или пораболическая экстраполяция.

Равенства (13), (14), (15) представляют собой полную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов сплайнов a_i, b_i, c_i , d_i . Ее можно решить различными методами (например, методом прогонки).

В системе *MathCAD* сплайн-интерполяция проводится в две стадии. На первой стадии с помощью одной из функций *lspline* , *pspline* или *cspline* вычисляются значения вторых производных в узлах. Эти значения являются элементами вектора вторых производных *VS*. На второй стадии с помощью функции *interp* находится значение интерполирующей функции $F(x)$ для заданного аргумента x.

Рассмотрим формат и уточним назначение этих функций:

cspline(*VX*,*VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции и кубической экстраполяции;

pspline(*VX*,*VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции и параболической экстраполяции;

lspline(*VX*,*VY*) – вычисляет вектор *VS* при сплайн-интерполяции и линейной экстраполяции;

interp(*VS*,*VX*,*VY*, x) – вычисляет значение интерполирующей функции $F(x)$ для заданного x при сплайн-интерполяции.

3. ЗАДАНИЕ

В соответствии с последней и предпоследней цифрами номера зачетной книжки из табл. 1 приложения 1 выписать аналитические выражения функций и интервалы [a ; b] их определения. Для каждой из данных функций и для числа узловых точек $N = 5$ и $N = 10$ в системе *MathCAD* составить 4 документа. В каждом документе необходимо:

1) Ввести заданную функцию в виде функции пользователя $y(t)$.

2) Выбрать на заданном интервале $[a\ ;\ b]$ систему равноотстоящих узлов x_i (с постоянным) шагом.

3) Задать значения точек интерполирования A_k .

4) Вычислить значения линейной интерполирующей функции в точках интерполирования l_k .

5) Построить графики заданной функции $y(A_k)$ и линейной интерполирующей функции l_k .

6) Построить график абсолютной погрешности линейной интерполяции.

7) Вычислить значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точках интерполирования $L_k = L(A_k)$.

8) Построить графики заданной функции $y(A_k)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа L_k .

9) Построить график абсолютной погрешности интерполирования полиномом Лагранжа.

10) Вычислить значение интерполирующей функции $y3(A_k)$ при интерполяции сплайнами в точках интерполирования.

11) Построить графики заданной функции $y(A_k)$ и интерполирующей функции $y3(A_k)$.

12) Построить график абсолютной погрешности при сплайн-интерполяции.

13) Сравнить максимальные значения функций ошибок при различных методах интерполяции для числа узлов $N = 5$ и $N = 10$. Сделать вывод о влиянии числа узлов на величину абсолютной погрешности. Указать способ интерполяции, обеспечивающий наименьшую погрешность.

4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

В приложении 2 приведен выполненный в системе *MathCAD* документ, реализующий подготовку исходных данных, линейную, полиномиальную и сплайн-интерполяцию, расчет погрешностей интерполяции и графическую иллюстрацию результатов вычислений. Ниже приведены необходимые пояснения.

4.1. Подготовка исходных данных

Вводим заданную непрерывную функцию как определение функции пользователя:

$$y(t) := \frac{(t+1)^3}{(t-2)^2} \quad . \tag{16}$$

Вводим значения правой a и левой b границ интервала определения функции $y(t)$

$$a := 3 \qquad\qquad b := 11 .$$

Вводим количество узловых точек

$$N := 5 .$$

Зададим систему из N равноотстоящих узлов:

$$n := N - 1 ,$$

$$i := 0 .. n ,$$

$$x_i := a + \frac{b-a}{n} i .$$

Узлами интерполяции являются элементы x_i вектора x.

Если в функцию пользователя (16) $y(t)$ вместо аргумента t подставить значение любого элемента x_i вектора x, то функция пользователя возвратит вычисленное в соответствии с формулой (1) значение $y(x_i)$. Таким образом осуществляется обращение к функции пользователя. В результате N обращений к функции пользователя получится N значений $y(x_i)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$, где $n = N - 1$ – максимальное значение индекса i. Эти значения образуют вектор $y(x_i)$. Элементы двух векторов x_i и $y(x_i)$. представляют собой табличное задание функции (ее табуляцию), то есть являются исходными данными для задачи интерполяции. Выведем на экран таблицу с исходными данными (подобную табл.1), разместив рядом элементы векторов x_i и $y(x_i)$.

4.2. Ввод значений точек интерполирования

Под точкой интерполирования понимается значение аргумента x, для которого осуществляется вычисление значения интерполирующей функции. Система *MathCAD* после объявления цикла работает только с индексированными переменными (векторами и матрицами). Поэтому в качестве аргумента x в выражении (10) примем вектор A, элементы которого A_k вычисляются следующим образом:

$$k := 0 .. M$$

$$A_k := x_0 + \frac{x_n - x_0}{M} k$$

Из этой формулы следует, что точки интерполяции располагаются с равномерным шагом на отрезке между начальным x_0 и конечным x_n узлами интерполяции. Число точек интерполяции M выбирается произвольно, исходя из желаемого качества графиков. Если время вычислений будет неприемлемо велико, то это число можно уменьшить, ухудшив, однако, качество графиков. В приложении 2 принято M = 100.

4.3. Расчет значений интерполирующей функции

Расчет значений интерполирующей функции осуществляется в каждой точке A_k.

1) Расчет значений функции линейной интерполяции l_k осуществляется с использованием встроенной функции (2).

2) Расчет значений полинома Лагранжа L_k осуществляется в соответствии с соотношениями (10).

3) Расчет значений интерполирующей функции при сплайн-интерполяции $y3(A_k)$ осуществляется в соответствии с методикой, изложенной в п. 2.2.4. также с использованием встроенных функций.

4.4. Расчет значений функции погрешностей

Значения функции погрешностей рассчитываются в каждой точке A_k и равны разности между значением заданной функции пользователя и значением интерполирующей функции.

Функция погрешностей имеет следующий вид:

1) При линейной интерполяции

$$l_k - y(A_k).$$

2) При интерполяции полиномом Лагранжа

$$L_k - y(A_k).$$

3) При сплайн-интерполяции

$$y3(A_k) - y(A_k).$$

Для каждого метода интерполяции осуществляется построение следующих графиков:

1) заданная и аппроксимирующая функции строятся на одном графике;

2) ниже отдельно строится функция погрешностей.

Масштабы графиков по оси абсцисс должны совпадать.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

В рабочем каталоге студента должны быть созданы четыре файла, содержащие отлаженные документы в системе *MathCAD* по интерполяции функций с числом узлов $N = 5$ и $N = 10$ для каждой из двух заданных функций.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) Название лабораторной работы.

2) Цель лабораторной работы.

3) Задание.

4) Скопированный с экрана отлаженный документ с интерполяцией одной из заданных функций для числа узлов $N = 5$.

5) Из остальных трех документов скопировать только графики.

6) Вывод о влиянии числа узлов на абсолютную погрешность интерполяции.

7) Вывод о методе интерполяции, дающем наилучшее приближение.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Постановка задачи аппроксимации функций.
2. Когда применяется интерполяция функций?
3. Постановка задачи интерполяции.
4. Что является исходными данными в задаче аппроксимации функций?
5. Что такое линейная интерполяция и как она реализуется в системе *MathCAD*?
6. Получить формулу интерполяционного полинома Лагранжа.
7. Реализация вычислений значений интерполяционного полинома Лагранжа в системе *MathCAD*.
8. Что такое сплайн-интерполяция и как она реализуется в системе *MathCAD*?
9. Когда применяется линейная интерполяция, интерполяция полиномом Лагранжа, сплайн-интерполяция?
10. Как влияет число узлов на абсолютную погрешность интерполяции?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Вводим функцию, заданную на интервале [a,b].

$$y(t) := \frac{(t+1)^3}{(t-2)^2}$$

$a := 3 \qquad b := 11$

Зададим систему из 10 равноотстоящих узлов.

$N := 10$

$n := N - 1$

$i := 0 .. n$

$$x_i := a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

Таблица исходных данных имеет вид:

$x_i =$	$y(x_i) =$
3	64
3.889	32.75
4.778	24.997
5.667	22.039
6.556	20.783
7.444	20.314
8.333	20.27
9.222	20.478
10.111	20.85
11	21.333

Введем значения точек интерполяции:

$M := 100$

$k := 0 .. M$

$$A_k := x_0 + \frac{x_n - x_0}{M} \cdot k$$

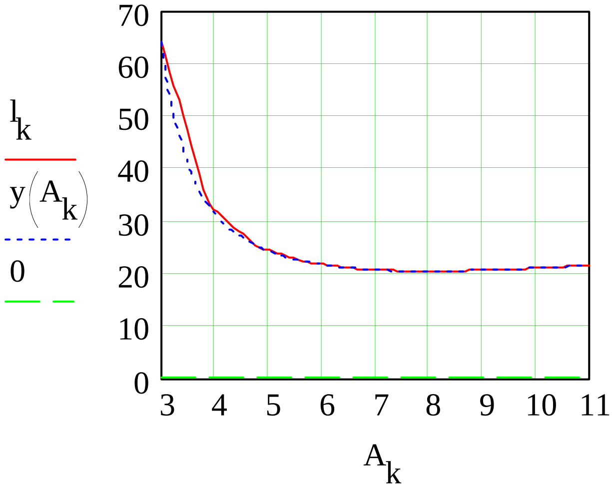
1. ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$Y_i := y(x_i)$

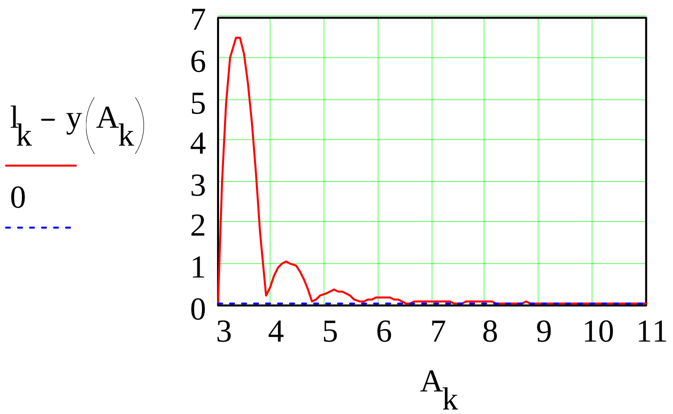
Проведем расчет интерполирующей функции:

$l_k := \mathrm{linterp}(x, Y, A_k)$

Построим графики интерполирующей и заданной функций:



Построим график погрешностей линейной интерполяции:



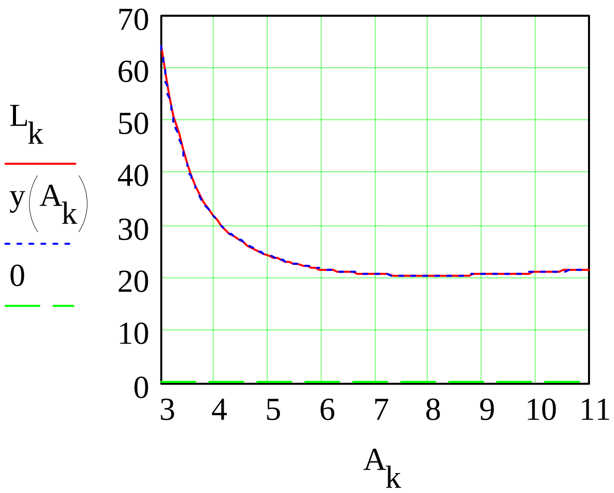
2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ЛАГРАНЖА

Проведем расчет значений полинома Лагранжа.

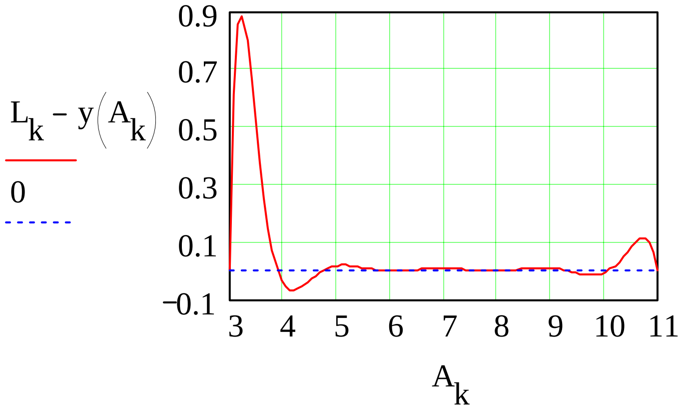
$$j := 0..\ n$$

$$L_k := \sum_i \prod_j \mathrm{if}\left(j = i, y\left(x_i\right), \frac{A_k - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Построим графики полинома Лагранжа и заданной функций (графики практически совпадают):



Построим график функции погрешностей:

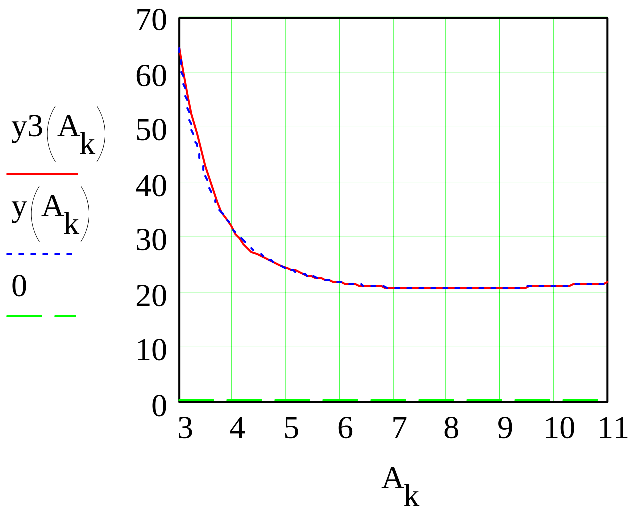


3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

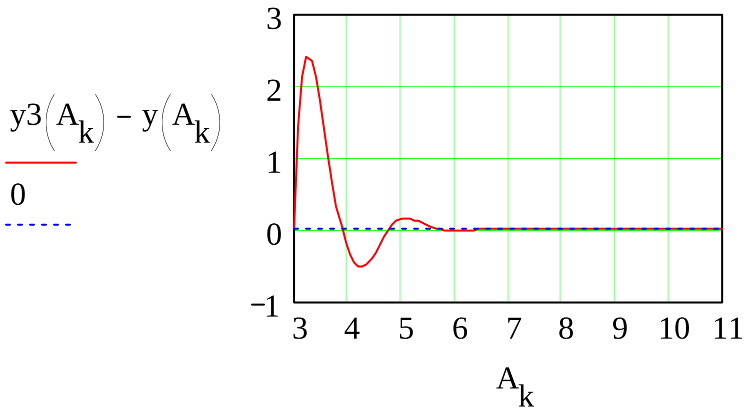
Проведем расчет интерполирующей функции:

$l1 := \mathrm{cspline}(x, Y)$ $\qquad$ $y3(A) := \mathrm{interp}(l1, x, Y, A)$

Построим графики интерполирующей и заданной функций:



Построим график функции погрешностей:



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ»

Цель работы состоит в получении навыков обработки табличных данных различными методами аппроксимации и оценки погрешностей реализации этих методов с применением математической системы MathCAD.

Постановка задачи

Рассмотрим измерения той или иной физической величины, находящейся при проведении серии измерений в неизменном состоянии. Очень часто исследуемая величина меняется в соответствии с изменением условий опыта или времени. Цель эксперимента в этом случае состоит в нахождении функциональной зависимости, которая наилучшим образом описывает изменение интересующего нас параметра.

Следует понимать, что однозначно восстановить (большей частью неизвестную) функциональную зависимость между переменными невозможно даже в том случае, если бы переменные величины, полученные из опыта, не имели бы ошибки измерения. Тем более не следует ожидать, что это удастся сделать, имея экспериментальные данные, содержащие, по крайней мере, случайные ошибки измерений.

Поэтому математическая обработка результатов наблюдений не может ставить перед собой задачу разгадать истинный характер зависимости между переменными. Она позволяет лишь представить результаты опыта в виде наиболее простой формулы.

В зависимости от назначения этих формул существуют различные методы их получения, отличающиеся сложностью расчетных процедур и точностью получаемых решений.

1. Метод наименьших квадратов

В методе средних при определении коэффициентов уравнения использовалось условие равенства нулю алгебраической суммы отклонений результатов эксперимента от теоретической кривой (в частном случае прямой). Очевидно, что при этом Δ_i могут быть значительной величины. Имеет значение только ″уравновешивание″ положительных и отрицательных отклонений.

Предположим, что искомая зависимость $y = f(x)$ существует. Тогда параметры этой линии необходимо выбрать таким образом, чтобы точки y_i располагались по обе стороны кривой $y = f(x)$ как можно ближе к последней. Предположим, что разброс точек y_i относительно $y = f(x)$ подчиняется закону нормального распределения. Тогда мерой разброса является дисперсия σ^2 или ее приближенное выражение – средний квадрат отклонений.

$$S_n{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2 .$$

И требование минимального разброса будет удовлетворено, если минимизировать выражение (Δy_i)^2. Как известно, необходимым условием того, что функция приобретает минимальное значение, является то, что ее первая производная (или частные производные для функции многих переменных) равна нулю. Применение метода наименьших квадратов имеет смысл, если число экспериментальных точек n больше числа определяемых коэффициентов.

Рассмотрим реализацию метода наименьших квадратов применительно к уравнению вида $y = ax + b$.

Для нахождения коэффициентов a, b искомой прямой необходимо минимизировать сумму квадратов расстояний Δy_i по ординате от точки (x_i; y_i) до прямой (см. рис. 1). Расстояния Δy_i определятся

$$\Delta y_i = y_i - ax_i - b.$$

Для минимизации $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta y_i{}^2$ приравниваем к нулю производные этой суммы по параметрам a, b:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{a}} = \left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{y_i} - \mathrm{ax_i} - \mathrm{b})^2\right]^{/} = 2\sum(\mathrm{y_i} - \mathrm{ax_i} - \mathrm{b})(-\mathrm{x_i}) = 0\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial b} = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2\right]^{/} = 2\sum(y_i - ax_i - b)(-1) = 0\,.$$

Преобразуем эту систему

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i{}^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i - \sum\limits_{i=1}^{n}y_i x_i = 0 \\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i + bn - \sum\limits_{i=1}^{n}y_i = 0 \end{cases}$$

Получим систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов.

Решая ее относительно a, b получаем:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}; \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Вычисляя из n опытов необходимые суммы и производя указанные действия, получаем величину коэффициентов a, b.

Как видно, способ наименьших квадратов достаточно громоздок и при его применении широко используется вычислительная техника. Метод наименьших квадратов может использоваться и в случае нелинейных функций.

Пусть аналитическое выражение для функции $f(x)$ неизвестно, а известны только ее значения в некоторых точках отрезка $[x_0; x_n]$, то есть функция $f(x)$ задана табличными значениями (табл.1).

Таблица 1

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Значения аргумента x_i называются узлами. В общем случае узлы не являются равноотстоящими. Требуется найти приближенные значения функции $f(x)$ в любой произвольной точке отрезка $[x_0; x_n]$.

Для решения этой задачи надо заменить неизвестную функцию $f(x)$ другой непрерывной на отрезке $[x_0; x_n]$ функцией $F(x)$, значения которой приблизительно равны значениям функции $f(x)$ в любой точке отрезка $[x_0; x_n]$, то есть

$$F(x) \approx f(x); \qquad x \in [x_0; x_n].$$

Существует два принципиально различных метода решения задачи аппроксимации функций:

1) Метод интерполяции - аппроксимирующая функция $F(x)$ точно совпадает с табличными значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции $f(x)$.

2) Метод наименьших квадратов – аппроксимирующая функция $F(x)$ может не совпадать ни с одним табличным значением $y_0, y_1, \ldots, y_n$ функции $f(x)$, максимально приближаясь к ним в среднем.

Будем считать, что пары чисел x_i, y_i, приведенные в табл.1, являются экспериментальными точками. Каждое значение y_i состоит из двух слагаемых: значения неизвестной функции $f(x_i)$ и погрешности ε_i. Значение погрешности ε велико и в решаемой задаче пренебречь ею нельзя. В этих условиях применение метода интерполяции нецелесообразно, так как интерполирующая функция $F(x)$ будет проходить через заведомо ложные точки x_i, y_i. Задача состоит в том, чтобы обеспечить приближение аппроксимирующей функции $F(x)$ к неизвестной функции $f(x)$ в "среднем" на всем интервале $[x_0, x_n]$, а не к отдельным ложным точкам x_i, y_i. Таким образом, произойдет "сглаживание" экспериментальной зависимости.

Рассмотрим аппроксимирующую функцию вида

$$F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m),$$

где $a_0, a_1, ..., a_m$ – неизвестные параметры.

Суть метода наименьших квадратов заключается в следующем. Нужно получить такие значения этих параметров, чтобы сумма квадратов отклонений функции $F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m)$ относительно значений, приведенных в табл.1, была бы минимальна, т.е.

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))^2 \Rightarrow \min. \quad (1)$$

Обозначим

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))^2 = \mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m).$$

Функция $\mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m)$ принимает минимальное значение, если частные производные этой функции по каждому параметру равны нулю:

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m) = 0, \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_m} \mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m) = 0,$$

Вычислим частные производные по каждому параметру, приравняем их к нулю, подставим в (2). Эти равенства объединим в систему из (m + 1)-го уравнения с (m + 1)-м неизвестным $a_0, a_1, ..., a_m$:

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))\frac{\partial}{\partial a_0}F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))\frac{\partial}{\partial a_1}F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = 0; \qquad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))\frac{\partial}{\partial a_2}F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = 0$$

. . . .

$$\sum_{i=0}^{n}(y_i - F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m))\frac{\partial}{\partial a_m}F(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, найдем значения параметров $a_0, a_1, ..., a_m$ и, следовательно, искомую аппроксимирующую функцию $F(x, a_0, a_1, ..., a_m)$, удовлетворяющую сформулированным выше требованиям.

1.1. Полиномиальная аппроксимация методом наименьших квадратов

Пусть аппроксимирующая функция представляет собой полином степени m вида

$$F(x, a_0, a_1, ..., a_m) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m. \quad (4)$$

Тогда

$$\mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_m x^m)^2. \quad (5)$$

Находя частные производные от $\mathrm{Q}(a_0, a_1, ..., a_m)$ по каждому параметру a_j и группируя члены, содержащие неизвестные $a_0, a_1, ..., a_m$, получим следующую систему уравнений:

$$a_0(n+1) + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^2 + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^m = \sum_{i=0}^{n}y_i;$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n}x_i + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^3 + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n}x_i y_i;$$

. . . . (6)

$$a_0\sum_{i=0}^{n}x_i^m + a_1\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1} + a_2\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+2} + ... + a_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n}x_i^m y_i.$$

Так как значения x_i, y_i известны, то система (6) есть не что иное, как система линейных уравнений. В системе MathCAD решение этой системы методом обратной матрицы имеет вид:

$i := 0 .. n$

$j := 0 .. m$ j – номер строки в системе уравнений (матрицы);

$k := 0 .. m$ k – номер столбца в системе уравнений (матрицы);

$X_{j,k} := \sum_i x_i^{j+k}$ – элементы матрицы системы уравнений;

$Y_j := \sum_i x_i^j y_i$. –элементы вектора-столбца свободных членов системы;

$a := X^{-1} Y$ – решение системы уравнений.

Таким образом, получим вектор - столбец

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Элементы этого вектора $a_0, a_1, \dots, a_m$ являются коэффициентами искомого полинома (4).

Коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ вычислены путем математической обработки величин x_i, y_i, полученных с погрешностью ε. Поэтому аппроксимирующая функция $F(x)$ также будет получена с погрешностью.

Примечание: Из курса теории вероятности известно, что достоверность экспериментально полученных результатов можно повысить, увеличивая количество экспериментальных точек n + 1. Поэтому при решении практических задач аппроксимации экспериментально полученных зависимостей процесс измерений стремятся автоматизировать с тем, чтобы число экспериментальных точек было бы достаточно велико (обычно десятки - сотни).

Подставив найденные коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ в соотношение (5), найдем значение Q - суммы квадратов отклонений табличных значений y_i относительно полученной аппроксимирующей функции $F(x)$.

Величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{(n+1)}} \qquad (7)$$

называется средним квадратическим отклонением.

Степень аппроксимирующего полинома m выбирают так, чтобы обеспечить по возможности точное приближение аппроксимируемой $f(x)$ и аппроксимирующей $F(x)$ функций на всем интервале $[x_0, x_n]$. При обработке экспериментальных данных, определенных с погрешностью ε, когда аналитическое выражение для $f(x)$ неизвестно, обычно начинают с аппроксимации полиномом степени m = 1. После определения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ вычисляют величину σ по формуле (7). Если получится, что $\sigma > \varepsilon$, то необходимо увеличить степень полинома m на единицу и повторить вычисления. Увеличение m и повторные вычисления необходимо осуществлять до тех пор, пока не выполнится условие $\sigma \le \varepsilon$.

Для контроля целесообразно на одном чертеже построить исходные точки x_i, y_i из табл.1 и график аппроксимирующего полинома (4). При правильном выборе значения m график полинома (4) усредняет, сглаживает случайные погрешности ε_i на всем интервале $[x_0, x_n]$.

2. Задание к лабораторной работе

В соответствии с номером по списку из табл.2 приложения 1 выбрать функцию, интервал *[a,b]* погрешность ε.

В системе MathCAD составить документ, в котором:

1) Создать исходные данные.

2) Вывести на экран данные в виде таблицы и просмотреть ее. Убедившись в наличии табличных данных, удалить их с экрана.

3) Изобразить на графике табличные данные.

4) Реализовать вычисление значений аппроксимирующего полинома $F(x_i) = F_i$ степени m = 1 в узловых точках x_i.

5) Построить графики табличных данных и аппроксимирующего полинома степени m = 1 и рассчитать среднеквадратическое отклонение σ.

6) Повторять п. 4) и 5) для m = 2,3,... до тех пор, пока $\sigma \le \varepsilon$, где ε - погрешность определения экспериментальных данных, приведенная в табл.2 приложения 1.

7) Сделать вывод о влиянии степени полинома на величину среднего квадратического отклонения.

3. Реализация метода

В приложении 2 приведен выполненный в системе MathCAD документ, реализующий создание исходных данных, решение задачи аппроксимации, вычисление значения среднеквадратического отклонения. Ниже приведены необходимые пояснения.

3.1. Ввод исходных данных

Исходными данными является таблица значений узлов аппроксимации и соответствующих им значений аппроксимируемой функции. Количество узлов равно n = 20. Процесс создания исходных данных состоит в том, что в цикле (заголовок цикла $i := 0 .. n$) осуществляется заполнение значений элементов вектора узлов x_i и вектора значений аппроксимируемой функции y_i. Создание файлов данных осуществляется по методике, приведенной в приложении 1.

3.2. Расчет значений аппроксимирующей функции и среднего квадратического отклонения

Расчет значений аппроксимирующей функции состоит из двух этапов:

– решение системы уравнений;

– вычисление значений полинома $F(x_i) = F_i$ в узловых точках x_i.

Решение системы уравнений в системе MathCAD получено в п. 2.(??). В результате получен вектор a, элементами которого являются коэффициенты $a_{\mathbf{0}}, a_{\mathbf{1}}, \ldots, a_m$ аппроксимирующего полинома (13).

Вычисление значений $F(x_i) = F_i$ полинома (13) в узловых точках x_i в системе MathCAD осуществляется с использованием следующих циклических вычислений:

$$i := 0 .. n$$
$$j := 0 .. m$$

$$F_i := \sum_j a_j x_i^j$$

С учетом соотношения для F_i выражения для расчета значения среднего квадратического отклонения σ будет иметь следующий вид:

$$\sigma := \sqrt{\frac{Q}{n+1}} ,$$

где $$Q := \sum_i \Big(y_i - \sum_j a_j x_i^j\Big)^{\mathbf{2}}.$$

4. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

В рабочем каталоге студента должны быть создан документ в системе MathCAD по полиномиальной интерполяции таблично заданных функций методом наименьших квадратов.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) Название лабораторной работы.
2) Цель лабораторной работы.
3) Задание.
4) Скопированный с экрана отлаженный документ с аппроксимацией методом наименьших квадратов.

5) Три графика с полиномами интерполяции:

– график для степени полинома $m = 1$,

– график для степени полинома $m = 2$,

– график с такой степенью полинома m, при которой имеет место соотношение $\sigma \le \varepsilon$.

6) Вывод о влиянии степени полинома m на величину σ .

6. Контрольные вопросы

1. Постановка задачи аппроксимации функций.
2. Когда применяется интерполяция функций?
3. Что является исходными данными в задаче аппроксимации функций?
4. Постановка задачи аппроксимации функции методом наименьших квадратов.
5. Когда применяется метод наименьших квадратов?
6. Получить решение задачи о вычислении коэффициентов аппроксимирующего полинома в методе наименьших квадратов.
7. Сущность аппроксимации методом наименьших квадратов;
8. Принципиальное отличие метода интерполирования от метода наименьших квадратов.

7. Варианты индивидуальных заданий аппроксимации функций методом наименьших квадратов

Таблица 2

N вар.	Аналитическое выражение аппроксимируемой функц.	Интервал задания	Погрешность ε
1	$y(t) = e^t$	[0.1; 6]	15
2	$y(t) = \ln(t)$	[0.1; 6]	0.24
3	$y(t) = 10 / t$	[0.1; 6]	4.28
4	$y(t) = 0.4t^3$	[0.1; 6]	4.2
5	$y(t) = \sin(t)$	[-3.14; 3.14]	0.12
6	$y(t) = t\sin(t)$	[0; 6]	0.35
7	$y(t) = t^2 \sin(t)$	[-3.14; 3.14]	0.3
8	$y(t) = \lvert t \rvert$	[0.1; 3.14]	0.15
9	$y(t) = t\ln(t)$	[0.1; 6]	0.35
10	$y(t) = 1 / (1 + t)$	[-0.9; 1]	0.4
11	$y(t) = t3^t$	[0; 6]	280
12	$y(t) = t^2 2^t$	[-2; 1.5]	0.25
13	$y(t) = t / (t^2 + 1)$	[-3.14; 3.14]	0.07

14	$y(t)=\cos(t)$	[-3.14; 3.14]	0.15
15	$y(t)=t\cos(t)$	[-6; 6]	0.5
16	$y(t)=t^2\ln\lvert t\rvert$	[-3.14; 3.14]	0.6
17	$y(t)=\sin(t)/t$	[0.2; 6]	0.09
18	$y(t)=t/(1+t)$	[-0.9; 1]	0.25
19	$y(t)=2^t/(1+t)$	[-0.9; 1]	0.25
20	$y(t)=\ln(t)/t$	[0.1; 6]	0.45
21	$y(t)=(t-2)(t-1)(t-5)$	[0; 6]	1.2
22	$y(t)=(t-4)(t-1)(t-5)$	[0; 6]	1.2
23	$y(t)=t\sin(2t)$	[0; 6]	0.2
24	$y(t)=t+\sin(2t)$	[0; 6]	0.3
25	$y(t)=(e^t+e^{-t})/2$	[-3.14; 3.14]	1.5
26	$y(t)=\sin(t)-t$	[-3.14; 3.14]	0.25

8. Создание файлов исходных данных

В системе MathCAD формирование файлов данных векторов узлов и значений аппроксимируемых функций осуществляется следующим образом:

Задается аппроксимируемая функция в виде аналитического выражения (задание функции пользователя), например:

$$y(t) := t\ln(t)\ .$$

Задаются левая (a) и правая (b) границы изменения аппроксимируемой функции, а также n – число интервалов между узлами:

$$a := 0.1 \qquad b := 3.14 \qquad n := 20 \qquad \varepsilon = 0.2.$$

Вводится заголовок цикла:

$$i := 0\,..\,n\ .$$

Вычисляются элементы вектора x_i узловых значений аргумента:

$$x_i := a + \frac{b-a}{n} i\ .$$

Вычисляются элементы вектора ε_i погрешностей измерений по формуле

$$\varepsilon_i := rnd(\sqrt{12\varepsilon^2})\ ,$$

где ε - среднеквадратическое отклонение погрешности измерения. Вычисляются элементы вектора y_i значений аппроксимируемой функции в узлах путем (n + 1)-кратного обращения к функции пользователя $y(t)$ и сложения с соответствующим элементом вектора погрешностей:

$$y_i := y(x_i) + \varepsilon_i$$

9. Пример выполнения задания

1. Создадим файл исходных данных:

$y(t) := \ln(t)\cdot t$

$a := 0.1 \quad b := 3.14 \quad n := 20 \quad \varepsilon := 0.3$

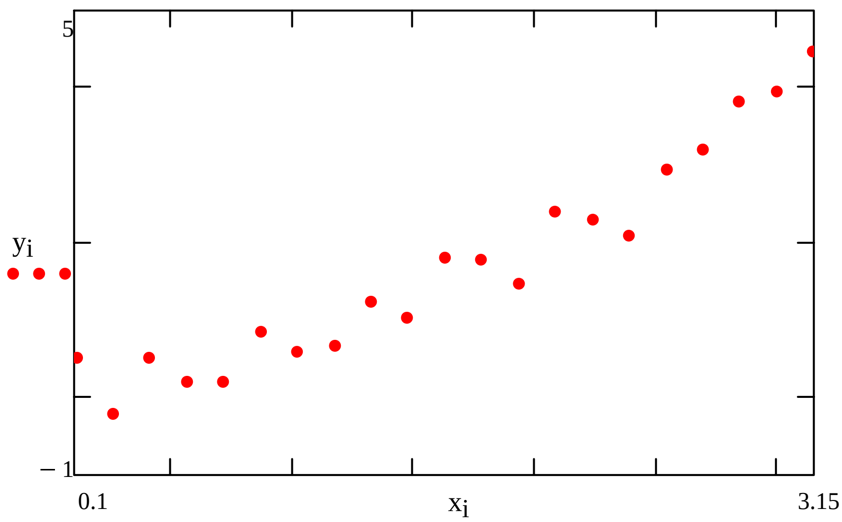
$i := 0..n$

$x_i := a + \frac{b-a}{n}\cdot i$

$\varepsilon_i := \mathrm{rnd}\left(\sqrt{12\cdot\varepsilon^2}\right)$

$y_i := y(x_i) + \varepsilon_i$

Строим график исходных данных



2. Зададим степень аппроксимирующего полинома

$$m := 1$$

Проведем расчет значений аппроксимирующей функции

$$i := 1..n$$
$$j := 0..m$$
$$k := 0..m$$

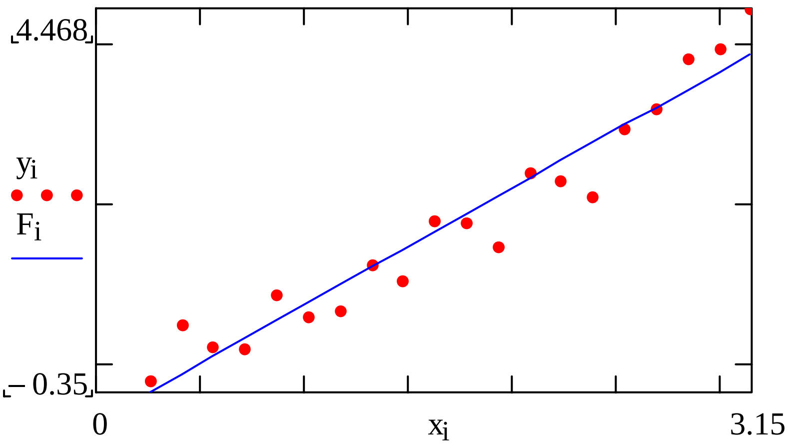
$$X_{j,k} := \sum_i (x_i)^{j+k}$$

$$Y_j := \sum_i \left[(x_i)^j \cdot y_i\right]$$

$$a := X^{-1} \cdot Y$$

$$F_i := \sum_j \left[a_j \cdot (x_i)^j\right]$$

Построим график аппроксимирующей функции и совокупности точек



Вычислим среднеквадратическое отклонение

$$Q := \sum_i \left[y_i - \sum_j \left[a_j (x_i)^j\right]\right]^2$$

$$Q = 2.376$$

$$\sigma := \sqrt{\frac{Q}{n+1}}$$

$$\sigma = 0.328$$

п.2 повторяем до тех пор, пока не подберем степень аппроксимирующего полинома, обеспечивающего заданную погрешность.

3. Выберем вид аппроксимирующей функции в соответствии с распределением экспериментальных точек, например:

$$F(x,\alpha,\beta) := \alpha\cdot\beta\cdot(x)^{\beta-1}\cdot\exp\left[\alpha\cdot(x)^{\beta}\right]$$

$$SSE(\alpha,\beta) := \sum_i \left(y_i - F(x_i,\alpha,\beta)\right)^2$$

$\alpha := 0.1$ $\qquad \beta := 0.1$

Given

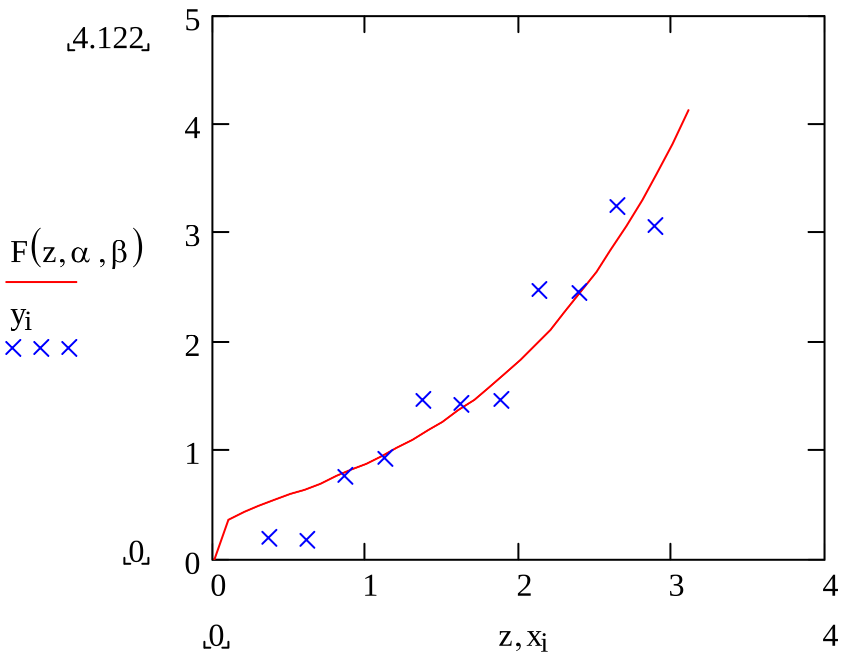
$$SSE(\alpha,\beta) = 0$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} := \mathrm{MinErr}(\alpha,\beta)$$

$\alpha = 0.462$

$\beta = 1.195$

$z := 0.1, 0.2 .. 3.1$



$$\frac{SSE(\alpha,\beta)}{n-2} = 0.113$$

Публикуется в авторской редакции

Подписано в свет 10.07.2012.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. 1,7. Объем данных 2,5 Мбайт.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет»
400074, Волгоград, ул. Академическая, 1
http://www.vgasu.ru, info@vgasu.ru